DETERMINANTE

Neka je dat skup J={1,2,3,....n}. **Permutacija** skupa J je bijektivno preslikavanje skupa J u samog sebe. Ma koju permutaciju skupa J možemo zapisati ovako: $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_n \end{pmatrix}$, gdje je $p(1)=j_1$, $p(2)=j_2$, $p(3)=j_3$, ... , $p(n)=j_n$. Broj različitih permutacija skupa J={1,2,3,....n} je $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot n$.

Primjer 1. Permutacije skupa{1,2,3}su $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, koje možemo kratko zapisati na sljedeći način: 123, 132, 213, 231, 312, 321. Dakle broj različitih permutacija skupa {1,2,3} je 3!=1·2·3=6.

Imajući u vidu prirodni poredak brojeva 1<2<3<...<n, možemo u svakoj permutaciji odrediti "poremećaj" tog poretka. Naime, ako je $i<j$, a pri tome $p(i)>p(j)$, tada kažemo da brojevi i i j obrazuju **inverziju** u datoj permutaciji. Broj svih takvih "poremećaja" redosljeda, daje ukupan broj inverzija za datu permutaciju. Ako permutacija sadrži paran broj inverzija onda kažemo da je **permutacija parna**, a ako sadrži neparan broj inverzija onda kažemo da je **permutacija neparna**. Na primjer, permutacija 213 je neparna jer sadrži jednu inverziju (2 je ispred 1). Permutacija 312 je parna jer sadrži dvije inverzije (3 je ispred 1 i 3 je ispred 2).

Svakoj kvadratnoj matrici $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ pridružuje se broj koji se naziva determinantom matrice A i označava se sa $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$. Napomenimo da se kod determinante na sličan način kao kod matrice definišu pojmovi kao: elemenat, vrsta, kolona, dijagonala, red, dijagonalna, trougaona determinanta i sl.

Definicija 1. Determinanta n-tog reda matrice $A=(a_{ij})_{nxn}$ je broj

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n!} (-1)^{I(p_j)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} ... a_{nj_n},$$

gdje je $j_1, j_2, ..., j_n$ neka permutacija skupa {1,2,3,...,n}, a $I(p_j)$ je broj inverzija u toj permutaciji.

Primjer 2. Izračunajmo po definiciji determinantu matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Permutacije skupa {1,2} su 12, 21. U permutaciji 12 broj inverzija je 0, a u permutaciji 21 broj inverzija je 1, pa je $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^0 a_{11} a_{22} + (-1)^1 a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$.

Dakle, vrijednost determinante drugog reda se dobija kada od proizvoda elemenata glavne dijagonale oduzmemo proizvod elemenata sporedne dijagonale.

Primjer 3. Naka je $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$, tada je

$$\det A=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}=2\cdot(-5)-(-3)\cdot 4=-10+12=2\,.$$

Primjer 4. Izračunajmo po definiciji determinantu trećeg reda. Permutacije skupa {1,2,3} su: 123, 132, 213, 231, 312, 321, a broj inverzija u njima je redom, 0, 1, 1, 2, 2, 3, pa je

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=(-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32}+(-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33}+$$

$$+(-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31}+(-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32}+(-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\,.$$

Dakle, vrijednost determinante trećeg reda se sastoji od šest sabiraka i to tri su sa predznakom +, a tri su sa predznakom - . Jedan od tri sabirka sa predznakom + je proizvod elemenata na glavnoj dijagonali, a druga dva sabirka su proizvod elemenata koji se nalaze paralelno sa glavnom dijagonalom i elementa u suprotnom uglu. Jedan od tri sabirka sa predznakom - je proizvod elemenata na sporednoj dijagonali, a druga dva su proizvod elemenata koji se nalaze paralelno sa sporednom dijagonalom i elementa u suprotnom uglu.

Primjer 5. Ako je $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix}$, tada je

$$\det A=\begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 6 & -7 & 8 \end{vmatrix}=4\cdot 0\cdot 8+(-1)\cdot 5\cdot 6+3\cdot(-7)\cdot(-2)-6\cdot 0\cdot(-2)-$$

$$-3\cdot(-1)\cdot 8-(-7)\cdot 5\cdot 4=0-30+42+0+24+140=176.$$

Izračunavanje determinanti višeg reda po definiciji je vrlo složeno, jer npr. za determinantu 4-og reda treba odrediti 4!=1·2·3·4=24 sabirka. Da bismo izbjegli ta komplikovana izračunavanja dajemo jednostavnije postupke. Prvi postupak je izračunavanje determinante koristeći osobine determinante.

Osobine determinante:

1. $detA=detA^T$;
2. Ako dvije vrste (ili dvije kolone) zamijene mjesta, vrijednost determinante mijenja znak;
3. Ako su dvije vrste (ili dvije kolne) jednake, vrijednost determinante je nula;
4. Ako su svi elementi neke vrste (ili neke kolone) jednaki nuli tada je vrijednost determinante nula;
5. Determinanta se množi brojem tako što se svi elementi neke vrste (ili neke kolone) pomnože tim brojem;
6. Ako su elementi *i*-te vrste determinante *detA* dati u obliku zbira $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$ ($j=1,2,...,n$), tada je $detA=detA_1+detA_2$, gdje su $detA_1$ i $detA_2$ dobijeni iz *detA* tako što se u *i*-toj vrsti *detA* elemenat a_{ij} zamijeni sa b_{ij} odnosno sa c_{ij}. Slično pravilo važi i za kolone;
7. Ako su *A* i *B* kvadratne matrice istog reda tada je $det(AB)=detA\cdot detB$;

8. Determinanta ne mijenja vrijednost ako se elementima jedne vrste dodaju elementi neke druge vrste prethodno pomnoženi istim brojem. Slično pravilo važi i za kolone;
9. Vrijednost trougaone determinante jednaka je proizvodu elemenata na glavnoj dijagonali.

Primjer 6. Koristeći osobine determinante izračunajmo $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Množeći prvu vrstu sa -2 i dodajući drugoj vrsti (po pravilu 8) dobijamo

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -9 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Množeći prvu vrstu sa -8 i dodajući trećoj vrsti (po pravilu 8) dobijamo

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -9 \\ 0 & -31 & -39 \end{vmatrix}.$$

Množeći drugu vrstu sa -6 i dodajući trećoj vrsti (po pravilu 8) dobijamo

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -9 \\ 0 & -1 & 15 \end{vmatrix}.$$

Zamjenom mjesta druge i treće vrste (po pravilu 2) dobijamo

$$\det A = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 15 \\ 0 & -5 & -9 \end{vmatrix}.$$

Množeći drugu vrstu sa -5 i dodajući trećoj vrsti (po pravilu 8) dobijamo

$$\det A = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 15 \\ 0 & 0 & -84 \end{vmatrix}.$$

Dobili smo trougaonu determinantu pa je (po pravilu 9)
$\det A = -(1\cdot(-1)\cdot(-84)) = -84$.

Primjer 7. Dokazati da je $\det A = \begin{vmatrix} 1+2a & 1 & a & x \\ 1+2b & 2 & b & x \\ 1+2c & 3 & c & x \\ 1+2d & 4 & d & x \end{vmatrix} = 0$.

Koristeći osobinu 6 dobijamo da je

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a & x \\ 1 & 2 & b & x \\ 1 & 3 & c & x \\ 1 & 4 & d & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a & 1 & a & x \\ 2b & 2 & b & x \\ 2c & 3 & c & x \\ 2d & 4 & d & x \end{vmatrix}.$$

Koristeći osobinu 5 dobijamo

$$\det A = x\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & a & 1\\ 1 & 2 & b & 1\\ 1 & 3 & c & 1\\ 1 & 4 & d & 1\end{vmatrix} + 2x\cdot\begin{vmatrix}a & 1 & a & 1\\ b & 2 & b & 1\\ c & 3 & c & 1\\ d & 4 & d & 1\end{vmatrix}.$$

Koristeći osobinu 3 dobijamo

$$detA=x\cdot 0+2x\cdot 0=0.$$

Drugi postupak za izračunavanje determinante je razvijanje determinante po jednoj vrsti ili jednoj koloni, koji se zasniva na Laplasovoj teoremi. U tom smislu definišemo sljedeće pojmove.

Definicija 2. Minor elementa a_{ij} determinante $detA$ n-tog reda je determinanta M_{ij} $n\text{-}1$-og reda, koja se dobija iz $detA$ izostavljanjem elemenata i-te vrste i j-te kolone.

Definicija 3. Algebarski komplement (kofaktor) elementa a_{ij} determinante $detA$ je broj $A_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij}$, gdje je M_{ij} minor elementa a_{ij} .

Primjer 8. Ako je $\det A = \begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}$ tada je

$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2\begin{vmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{vmatrix} = 2$; $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3\begin{vmatrix}4 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix} = -11$;

$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^4\begin{vmatrix}4 & 0\\ 1 & -2\end{vmatrix} = -8$; $A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3\begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & 3\end{vmatrix} = -7$

$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix} = 7$; $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)^5\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix} = 7$;

$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (-1)^4\begin{vmatrix}3 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 3$; $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix} = -6$;

$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = (-1)^6\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 0\end{vmatrix} = -12$.

Teorema 1. (Laplasova teorema)

- Suma proizvoda elemenata a_{ik} bilo koje vrste (ili kolone) kvadratne matrice $A=(a_{ij})_{nxn}$ i algebarskih komplemenata tih elemenata jednaka je determinanti matrice A tj.

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}\,, \quad i = 1,2,\dots,n; \qquad \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik}\,, \quad k = 1,2,\dots,n.$$

- Suma proizvoda elemenata a_{ik} bilo koje vrste (ili kolone) kvadratne matrice $A=(a_{ij})_{nxn}$ i algebarskih komplemenata neke druge vrste (ili kolone) jednaka je nuli tj.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0, \quad i = 1,2,\dots,n, \ \ j \neq i;$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{il} = 0, \quad k = 1,2,\dots,n, \quad k \neq l$$

Primjer 9. Izračunati vrijednost determinante $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

Ako drugu vrstu pomnožimo sa -1 i saberemo sa trećom vrstom dobijamo

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Sada razvijmo determinantu po elementima treće vrste

$$\det A = 3(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Ako prvu kolonu pomnožimo sa -1 i saberemo sa drugom kolonom dobijamo

$$\det A = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Razvijajući determinantu po drugoj koloni dobijamo

$$\det A = 3 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3(5-4) = -3.$$

Primjer 10. Izračunati vrijednost determinante $\begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+2x & a+b+2x & a+b+2x & a+b+2x \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+2x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix} = (a+b+2x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & a-x & b-x & 0 \\ x & b-x & a-x & 0 \\ b & x-b & x-b & a-b \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+2x) \cdot (a-b) \cdot \begin{vmatrix} a-x & b-x \\ b-x & a-x \end{vmatrix} = (a-b)^2 \cdot \left((a+b)^2 - 4x^2\right).$$

INVERZNA MATRICA

Definicija 1. Inverznom matricom kvadratne matrice A nazivamo matricu, oznaka A^{-1}, takvu da je $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, gdje je E jedinična matrica istog reda kao i matrica A.

Teorema 1. Kvadratna matrica A ima inverznu matricu ako i samo ako je $\det A \neq 0$.

Kvadratna matrica koja ima inverznu matricu je **regularna** matrica. Kvadratna matrica koja nema inverznu matricu je **neregularna** ili **singularna** matrica.

Definicija 2. Neka je $A=(a_{ij})_{nxn}$ kvadratna matrica i neka su A_{ij} algebarski komplementi elemenata a_{ij} , $i=1,2,...,n; j=1,2,...,n$. Matrica

$$adjA=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$ naziva se adjungovanom matricom matrice *A*.

Teorema 2. Za regularnu kvadratnu matricu *A* važi jednakost $A^{-1}=\frac{1}{\det A}adjA$, gdje je *adjA* adjungovana matrica matrice *A*.

Teorema 3. Neka su *A* i *B* regularne kvadratne matrice. Tada važi:
- $(A^{-1})^{-1}=A$;
- $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.
- $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.

Primjer 1. Data je matrica $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Izračunati A^{-1}.

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2+(-1)+2-1-1-(-4)=5$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-3; \qquad A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3; \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2; \qquad A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{32}(-1)^{3+2}M_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1; \qquad A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3;$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}adjA=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Primjer 2. Date su matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 10 & 2 & 7\\ 10 & 7 & 8\end{pmatrix}$. Riješiti matričnu jednačinu $A\cdot X=B$.

Ako lijevu i desnu stranu jednačine $A\cdot X=B$ pomnožimo sa lijeve strane sa A^{-1} dobijamo $(A^{-1}\cdot A)\cdot X=A^{-1}\cdot B$, odnosno $E\cdot X=A^{-1}\cdot B$, odnosno $X=A^{-1}\cdot B$.
(Naglašavam da se mora voditi računa sa koje strane se vrši množenje jer ne važi zakon komutativnosti za množenje matrica).

Dakle, $X=A^{-1}\cdot B=\dfrac{1}{\det A}adjA\cdot B=\dfrac{1}{1}\begin{pmatrix}-4 & 3 & -2\\ -8 & 6 & -5\\ -7 & 5 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 10 & 2 & 7\\ 10 & 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$.

Primjer 3. Riješiti matričnu jednačinu $X^TA+2C=X^TB+3E$, ako je $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ -2 & -4 & 2\\ 2 & -2 & -5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Iz jednačine $X^TA+2C=X^TB+3E$ slijedi $X^TA-X^TB=3E-2C$, odnosno $X^T(A-B)=3E-2C$. Množeći posljednju jednačinu sa desne strane sa $(A-B)^{-1}$ dobijamo $X^T=(3E-2C)(A-B)^{-1}$, odnosno $X=((3E-2C)(A-B)^{-1})^T$. Koristeći osobine transponovane matrice dobijamo $X=(A^T-B^T)^{-1}(3E-2C^T)$.

$$3E-2C^T=3\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & -6 & -8\\ -2 & 1 & -2\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$D=A^T-B^T=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 3 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 3 & -4 & -2\\ 1 & 2 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

$$D^{-1}=\frac{1}{\det D}adjD=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}9 & -6 & 3\\ 0 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2/3 & 1/3\\ 0 & 1/3 & -1/3\\ 0 & 0 & 1/3\end{pmatrix},$$

$$X=(A^T-B^T)^{-1}(3E-2C^T)=\begin{pmatrix}1 & -2/3 & 1/3\\ 0 & 1/3 & -1/3\\ 0 & 0 & 1/3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -6 & -8\\ -2 & 1 & -2\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -1/3 & -6 & -19/3 \\ 0 & -1/3 & -1 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Primjer 4. Data je matrica $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Naći A^n, gdje je $n\in N$, a zatim izračunati A^{-7}.

$$A^2=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix},\quad A^3=\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Iz prethodno izračunatog naslućujemo da je

$$A^n=\begin{pmatrix} 2n+1 & -4n \\ n & -(2n-1) \end{pmatrix},\quad n\in N.$$

Dokažimo posljednju jednakost metodom matematičke indukcije.

1) $n=1$: $A^1=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=A$.

2) $n\Rightarrow n+1$: $A^n=\begin{pmatrix} 2n+1 & -4n \\ n & -(2n-1) \end{pmatrix}\Rightarrow A^{n+1}=\begin{pmatrix} 2n+3 & -4(n+1) \\ n+1 & -(2n+1) \end{pmatrix}$

$$A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix} 2n+1 & -4n \\ n & -(2n-1) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2n+3 & -4(n+1) \\ n+1 & -(2n+1) \end{pmatrix}$$

Koristeći prethodno izračunato A^n, dobijamo da je $A^7=\begin{pmatrix} 2\cdot 7+1 & -4\cdot 7 \\ 7 & -(2\cdot 7-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 & -28 \\ 7 & -13 \end{pmatrix}$.

Dalje, koristeći formulu za izračunavanje inverzne matrice dobijamo da je $A^{-7}=\left(A^7\right)^{-1}=\begin{pmatrix} -13 & 28 \\ -7 & 15 \end{pmatrix}$.

Primjer 5. Riješiti matričnu jednačinu $XA=AB$, ako je $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$$B=\begin{pmatrix} 28 & 40 & -7 \\ -9 & -11 & 3 \\ 27 & 22 & -15 \end{pmatrix}.$$

Množeći jednačinu sa desne strane sa A^{-1} dobijamo:

$$X=ABA^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 28 & 40 & -7 \\ -9 & -11 & 3 \\ 27 & 22 & -15 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Primjer 6. Riješiti matričnu jednačinu $\left(AX-BX\right)^{-1}=2B-3C$, ako je

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Iz date jednačine dobijamo:

$(AX - BX)^{-1} = 2B - 3C \quad \Leftrightarrow \quad ((A-B)\cdot X)^{-1} = 2B - 3C \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad X^{-1}\cdot(A-B)^{-1} = 2B-3C \quad \Leftrightarrow \quad X^{-1}\cdot(A-B)^{-1}\cdot(A-B) = (2B-3C)\cdot(A-B) \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad X^{-1} = (2B-3C)\cdot(A-B) \quad \Leftrightarrow \quad X = ((2B-3C)\cdot(A-B))^{-1}$

$$X = \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Primjer 7. Riješiti matričnu jednačinu $A + B(X^T)^{-1} = E + A(X^T)^{-1}$, ako je $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Iz date jednačine dobijamo:

$A + B(X^T)^{-1} = E + A(X^T)^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad A(X^T)^{-1} - B(X^T)^{-1} = A - E \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad (A-B)(X^T)^{-1} = A - E \quad \Leftrightarrow (X^T)^{-1} = (A-B)^{-1}\cdot(A-E) \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X^T = ((A-B)^{-1}\cdot(A-E))^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad X^T = (A-E)^{-1}(A-B) \quad \Leftrightarrow$

$X = ((A-E)^{-1}(A-B))^T$

$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (A-E)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$X = \left(\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\right)^T = \left(\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 24 & -3 & -18 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

RANG MATRICE

Definicija 1. Neka je $A=(a_{ij})_{mxn}$ proizvoljna matrica i k fiksiran broj takav da je $k \le m$, $k \le n$. Elementi matrice A koji se nalaze u presjeku tih k vrsta i k kolona, čuvajući poredak vrsta odnosno kolona matrice A, obrazuju kvadratnu matricu B reda k. Za matricu B kažemo da je **podmatrica** matrice A, a za determinantu matrice B kažemo da je **minor *k*-tog reda** matrice A.

Primjer 1. U matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, minori 1. reda su elementi matrice A, dakle ima ih ukupno 12. Minori 2. reda su, na primjer, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$, itd. Ima ih ukupno 18. Minori 3. reda su:

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$, ima ih ukupno 4.

Definicija 2. Rang matrice $A=(a_{ij})_{mxn}$ je najveći prirodan broj k za koji postoji minor k-tog reda različit od nule. Rang matrice A označava se sa $rangA$.

Primjer 2. U matrici A iz prethodnog primjera minor $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$, a nema minora većeg reda, pa je $rangA=3$.

Primjer 3. Naći rang matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Matrica A je tipa 3x4, pa je najveći mogući red minora 3, tj. $rangA \leq 3$.
Lako se provjerava da su svi minori 3. reda matrice A jedanaki nuli, pa je $rangA<3$. Postoji nenulti minor 2. reda, na primjer $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, pa je $rangA=2$.
Za izračunavanje ranga matrice po definiciji ponekad je potrebno izračunati veliki broj minora. To se može izbjeći tako što se matrica prethodno transformiše u jednostavniji oblik, na primjer u trapezni ili trougaoni.

Definicija 3. Elementarne transformacije matrica su sljedeći postupci:

- Zamjena mjesta dvijema vrstama (ili kolonama);
- Množenje elemenata neke vrste (ili kolone) brojem različitim od nule;
- Dodavanje elemenata jedne vrste (ili kolone) odgovarajućim elementima druge vrste (ili kolone) prethodno pomnožene istim brojem.

Matricu B, koja se dobija iz matrice A pomoću elementarnih transformacija, nazivamo **ekvivalentnom** matricom matrici A i koristimo oznaku $A \sim B$.

Teorema 1. Elementarne transformacije čuvaju rang matrice.

Primjer 4. Odrediti rang matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 4 & -7 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Prvu vrstu pomnožimo sa 4 i dodamo drugoj vrsti, zatim prvu vrstu pomnožimo sa -3 i dodamo trećoj vrsti i na kraju prvu vrstu pomnožimo sa -2 i dodamo četvrtoj vrsti pa dobijamo

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & 10 & -15 \\ 0 & -4 & -8 & 12 \\ 0 & -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Sada drugoj vrsti dodamo treću vrstu

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & -8 & 12 \\ 0 & -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Drugu vrstu pomnožimo sa 4 i dodamo trećoj vrsti, zatim drugu vrstu pomnožimo sa 3 i dodamo četvrtoj vrsti, dobijamo

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matricu A smo transformisali u tzv. trapezni oblik. Iz ovog oblika se direktno vidi da ne postoje nenulti minori 4. i 3. reda, a da postoji nenulti minor 2. reda $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, pa je *rangA*=2.

Primjer 5. Naći rang matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ m & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ u zavisnosti od *m*.

Prva i treća vrsta zamijene mjesta, pa dobijamo:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ m & 4 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Prvu vrstu pomnožimo sa -*m* i dodamo drugoj vrsti, zatim prvu vrstu pomnožimo sa -3 i dodamo trećoj vrsti i na kraju prvu vrstu pomnožimo sa -2 i dodamo četvrtoj vrsti pa dobijamo:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4-7m & 10-17m & 1-3m \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 0 & -12 & -30 & -3 \end{pmatrix}.$$

Sada četvrtu vrstu pomnožimo sa -2 i dodamo trećoj vrsti

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4-7m & 10-17m & 1-3m \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -12 & -30 & -3 \end{pmatrix}.$$

Treću vrstu pomnožimo sa 3 i dodamo četvrtoj vrsti

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4-7m & 10-17m & 1-3m \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Minor koji je različit od 0, može biti najviše 3. reda. Kako je

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 17 \\ 0 & 4-7m & 10-17m \\ 0 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4-7m & 10-17m \\ 4 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= 10(4-7m) - 4(10-17m) = -2m$$

slijedi da je za $m \neq 0 \quad rangA = 3,$ a za $m=0$ $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tz. $rangA=2$ jer je $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

.

Primjer 6. Date su matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -4 & 1 & 6 \\ -2 & \lambda+2 & \lambda \end{pmatrix}$. Naći vrijednost parametra λ za koju matrice A i B imaju najmanji rang.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & \lambda+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}.$$

Za $\lambda = 2$ rang matrice A je najmanji i $rangA = 2$.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -4 & 1 & 6 \\ -2 & \lambda+2 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & \lambda+5 & \lambda-4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 7 & -4 \\ 0 & 9 & -2 \\ 0 & 9 & \lambda-4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 7 & -4 \\ 0 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

Za $\lambda = 2$ rang matrice B je najmanji i $rangB = 2$.