SISTEMI LINEARNIH ALGEBARSKIH JEDNAČINA I METODE RJEŠAVANJA SISTEMA

Definicija 1.

- Linearna algebarska jednačina sa promjenljivim (nepoznatim) $x_1, x_2, \dots, x_n$ je jednačina oblika $\boldsymbol{a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b}$, gdje su brojevi $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ unaprijed zadati. Broj b se naziva slobodnim članom, a brojevi $a_1, a_2, \dots, a_n$ se nazivaju koeficijentima posmatrane jednačine.
- Sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih ima oblik:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} . \qquad (*)$$

Brojevi $\boldsymbol{a_{ij}}$ $(i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n)$ su **koeficijenti** sistema (*), $\boldsymbol{b_i}$ $(i=1,2,...,m)$ su **slobodni članovi** sistema (*), $\boldsymbol{x_j}$ $(j=1,2,...,n)$ su **promjenljive** (nepoznate) sistema (*).
Rješenje sistema (*) je uređena n-torka $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ takva da za $x_j=c_j$ za svako $j=1,2,...n$ svaka jednačina u sistemu (*)postaje jednakost (identitet).Za sistem kažemo da je **nesaglasan** (nemoguć) ako nema rješenja.Za sistem kažemo da je **saglasan** ako ima bar jedno rješenje.Za sistem kažemo da je **saglasan i određen** ako ima samo jedno rješenje.Za sistem kažemo da je **saglasan i neodređen** ako ima više od jednog rješenja.
Ako je u sistemu(*) $m=n$ (tj. broj jednačina jednak broju nepoznatih) tada kažemo da je **sistem kvadratni**.
Kada je sistem(*) neodređen, tada govorimo o **opštem rješenju** sistema. Neke nepoznate uzimaju proizvoljne vrijednosti pa kažemo da su "**slobodne**". Za svaku konkretnu vrijednost "slobodne" nepoznate iz opšteg rješenja dobijamo tzv. **partikularno rješenje**.
Dva sistema jednačina su **ekvivalentna** ako imaju isti skup rješenja. Ma koji postupak za rješavanje sistema linearnih algebarskih jednačina, znači da dati sistem jednačina transformišemo u njemu ekvivalentan sistem, ali koji je jednostavniji od prethodnog. Taj postupak nastavimo sve dok se ne dobije najjednostavniji oblik njemu ekvivalentnog sistema, iz kojeg se odmah dobija rješenje. Pri tome se koriste **elementarne transformacije sistema**:

1. Promjena mjesta dvijema jednačinama;
2. Množenje neke jednačine sa brojem koji je različit od nule;
3. Sabiranje jedne jednačine sa drugom, koja je pomnožena pogodno izabranim brojem.

Dakle, koristeći elementarne transformacije uvijek dobijamo ekvivalentne sisteme. To znači da primjenjujući elementarne transformacije na dati sistem, njegov skup rješenja se ne mijenja.
Sistem (*) možemo napisati u obliku matrične jednačine $AX=B$, gdje je

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ matrica sistema (*), čiji su elementi koeficijenti

sistema (*), a $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ matrica kolone čiji su elementi nepoznate sistema (*) i $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ matrica kolone čiji su elementi slobodni članovi sistema (*).

Matricu $P=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ nazivamo proširenom matricom sistema (*).

Primijetimo da je matrica sistema podmatrica proširene matrice sistema, pa je $rangA \le rangP$. Da li dati sistem (*) ima rješenje zavisi od ranga matrice sistema i proširene matrice sistema. O tome govori sljedeća teorema.

Teorema 1. (**Kroneker-Kapelijeva**) Neka je *A* matrica sistema, a *P* proširena matrica sistema (*).

- Ako je *rangA<rangP* tada sistem (*) nema rješenja tj. sistem (*) je nesaglasan.
- Ako je *rangA=rangP=n* (n-broj nepoznatih) tada sistem (*) ima samo jedno rješenje tj. sistem (*) je saglasan i određen.
- Ako je *rangA=rangP<n* (n-broj nepoznatih) tada sistem (*) ima beskonačno mnogo rješenja tj. sistem (*) je saglasan i neodređen.

Napomenimo da Kroneker-Kapelijeva teorema obezbeđuje diskusiju rješenja a sam postupak rješavanja sitema se realizuje ili **Gausovom metodom** ili pomoću **Kramerovog pravila** ili **Matričnom metodom**.

Gausova metoda se sastoji u svođenju datog sistema (*) na njemu ekvivalentan sistem koji ima trougaoni ili trapezni oblik, koristeći elementarne transformacije sistema (tj. elementarne transformacije vrsta proširene matrice sistema).
Postoji bar jedna jednačina u sistemu (*) u kojoj je koeficijent uz nepoznatu x_1 različit od nule (inače bi sistem bio sa manjim brojem nepoznatih). Neka je npr. $a_{11} \neq 0$. (Ako je $a_{11}=0$ tada zamijene mjesta prva i neka druga jednačina iz datog sistema u kojoj je koeficijent uz nepoznatu x_1 različit od nule). Sada treba množiti prvu jednačinu sa pogodno izabranim brojevima tako da se sabiranjem redom sa drugom, trećom,..., m-tom jednačinom dobiju nule uz nepoznatu x_1. Prvu jednačinu pomnožimo sa $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ i saberemo sa drugom jednačinom. Sada pomnožimo prvu jednačinu sa $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ i saberemo sa trećom jednačinom. Nastavimo ovaj postupak sve dok na kraju prvu jednačinu ne pomnožimo sa $-\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ i saberemo sa zadnjom jednačinom u sistemu (*). U ovom postupku dobijamo novi sistem jednačina koji je ekvivalentan početnom sistemu (*). Dobijamo sistem u kome prva jednačina sadrži nepoznatu x_1, a nijedna od preostalih *m-1* jednačina ne sadrži nepoznatu x_1. Dalje se sa podsistemom koji se sastoji od druge, treće, ... , m-te jednačine izvodi sličan postupak.
Posle prve faze Gausove metode može se desiti jedna od tri mogućnosti:

1. Dobija se sistem u kojem su u nekoj jednačini svi koeficijenti jednaki nuli, a slobodni član je različit od nule. Takav sistem je nesaglasan tj. nemoguć jer je *rangA<rangP*.

2. Dobija se trougaoni sistem tj. sistem oblika

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n &= d_1 \\ c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n &= d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ c_{nn}x_n &= d_n \end{aligned}$$

gdje su $c_{ii} \neq 0$, za svako *i*=1,2,...,n. Ovaj sistem je saglasan i određen jer je *rangA = rangP=n* - broju nepoznatih. Njegovo jedinstveno rješenje je i jedinstveno rješenje polaznog sistema (*). Ono se dobija tako što se iz poslednje jednačine izračuna x_n, zatim se ta vrijednost uvrsti u pretposlednju jednačinu i izračuna x_{n-1}, i tako dalje, sve dok se na kraju ne izračuna x_1 iz prve jednačine.

3. Dobija se trapezni sistem tj. sistem oblika

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1l}x_l + \ldots + c_{1n}x_n &= d_1 \\ c_{21}x_2 + \ldots + c_{2l}x_l + \ldots + c_{2n}x_n &= d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{kl}x_l + \ldots + c_{kn}x_n &= d_k \end{aligned}$$

pri čemu su koeficijenti $c_{11}, c_{21}, \ldots, c_{kl}$ različiti od nule. Nepoznate uz ove koeficijente nazivamo baznim, a ostale slobodnim. U ovom slučaju sistem je saglasan i neodređen tj. ima beskonačno rješenja koja se dobijaju tako što sistem riješi po baznim nepoznatim.

Primjer 1. Gausovom metodom riješiti sistem jednačina:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 &= -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 &= 4 \end{aligned}.$$

Formirajmo proširenu matricu datog sistema $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4 \end{pmatrix}$, a zatim koristeći oznaku ~ za prelaz sa proširene matrice sistema na proširenu matricu njemu ekvivalentnog sistema, dobijenog elementarnim transformacijama, imamo:
Prvu vrstu pomnožimo sa -1 pa dodamo drugoj vrsti, zatim prvu vrstu pomnožimo sa -3 i dodamo trećoj vrsti i na kraju prvu vrstu pomnožimo sa -2 i dodamo četvrtoj vrsti pa dobijamo:

$$P \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sabiranjem druge vrste redom sa trećom i četvrtom dobijamo:

$$P \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dakle, polazni sistem je ekvivalentan sa sistemom

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= 1 \\ x_2 - 10x_3 + 17x_4 &= -2 \end{aligned}.$$

Kako je $rangA = rangP = 2 < 4$ - broj nepoznatih, (tj. rang matrice sistema i rang proširene matrice sistema su jednaki 2, a to je manje od broja nepoznatih) prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi slijedi da je dati sistem saglasan i neodređen tj. ima beskonačno rješenja. Za bazne nepoznate uzimamo x_1 i x_2, a za

slobodne promjenljive uzimamo x_3 i x_4. Iz posljednje jedačine dobijamo $x_2=10x_3-17x_4-2$, zamjenom ove vrijednosti u prvu jednačinu dobijamo $x_1=-17x_3+29x_4+5$.
Naka je $x_3=t$, $x_4=s$, tada je $x_1=-17t+29s+5$, a $x_2=10t-17s-2$. Dakle, opšte rješenje datog sistema je uređena četvorka $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-17t+29s+5,10t-17s-2,t,s)$, $t,s \in R$. Uzimajući za t i s konkretne vrijednosti tada dobijamo partikularna rješenja datog sistema. Npr. (5,-2,0,0) za $t=s=0$; (-12,8,1,0) za $t=1$, $s=0$; itd.

Primjer 2. Riješiti sistem jednačina $\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=1\\ x_1+x_2+2x_3&=1\\ x_1+x_2+3x_3&=2 \end{aligned}$.

Transformišući proširenu matricu sistema dobijamo:

$$P \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odavde zaključujemo da je $rangA=2$, $rangP=3$, tj $rangA \neq rangP$, pa prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi dati sistem je nesaglasan tj. nema rješenja.

Primjer 3. Riješiti sistem jednačina $\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=5\\ x_2+2x_3+3x_4&=1\\ x_1 \qquad +3x_3+4x_4&=2\\ x_1+x_2+5x_3+6x_4&=1 \end{aligned}$.

Primjenom elementarnih transformacija sistema tj. elementarnih transformacija matrice na vrste proširene matrice sistema dobijamo:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 3 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 0 & -3\\ 0 & -1 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 4 & 6 & -1\\ 0 & 0 & 4 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 4 & 6 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Dakle, polazni sistem je ekvivalentan sa sistemom

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=5\\ x_2+2x_3+3x_4&=1\\ 4x_3+6x_4&=-1\\ x_4&=2 \end{aligned}.$$

Kako je $rangA=rangP=4$- broj nepoznatih, prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi slijedi da je dati sistem saglasan i određen tj. ima jedinstveno rješenje. Iz posljednje jednačine imamo da je $x_4=2$, pa zatim iz treće jednačine dobijamo da je $x_3=-\frac{13}{4}$, iz druge jednačine dobijamo $x_2=\frac{3}{2}$, i na kraju iz prve jednačine dobijamo $x_1=\frac{15}{4}$.

Primjer 4. Diskutovati i riješiti sistem jednačina u zavisnosti od parametra m:

$$\begin{aligned} mx_1 + \ x_2 + \ x_3 &= 1 \\ x_1 + mx_2 + \ x_3 &= 1. \\ x_1 + \ x_2 + mx_3 &= 1 \end{aligned}$$

Koristeći elementarne transformacije matrica na vrste proširene matrice sistema dobijamo:

$$P=\begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 1 \\ 0 & 1-m^2 & 1-m & 1-m \\ 0 & 1-m & m-1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 1 \\ 0 & 1-m & m-1 & 0 \\ 0 & 1-m^2 & 1-m & 1-m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 1 \\ 0 & 1-m & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & -m^2-m+2 & 1-m \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 1 \\ 0 & 1-m & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-m)(2+m) & 1-m \end{pmatrix}.$$

Iz prethodnog zaključujemo:

- za $m = -2$ dobijamo $P \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, pa je $rangA=2$, a $rangP=3$, tj. $rangA \neq rangP$, po Kroneker-Kapelijevoj teoremi dati sistem je nesaglasan tj. nema rješenja.
- za $m=1$ dobijamo $P \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, pa je $rangA=rangP=1<3$-broj nepoznatih, po Kroneker-Kapelijevoj teoremi posmatrani sistem je saglasan i neodređen, tj. ima beskonačno rješenja. Dati sistem je ekvivalentan sistemu $x_1+x_2+x_3=1$.Za baznu nepoznatu uzimamo x_1, a slobodne promjenljive su x_2 i x_3. Neka je $x_2=t$, a $x_3=s$, $t,s \in R$, tada dobijamo da je $x_1=1-x_2-x_3=1-t-s$. Dakle, opšte rješenje datog sistema je uređena trojka $(x_1,x_2,x_3)=(1-t-s,t,s)$, $t,s \in R$.
- za $m \neq -2$ i $m \neq 1$ imamo da je $rangA=rangP=3$- broj nepoznatih, pa po Kroneker-Kapelijevoj teoremi slijedi da je dati sistem saglasan i određen tj. ima jedinstveno rješenje. Dati sitem je ekvivalentan sistemu:

$$\begin{aligned} x_1 + \ mx_2 + \qquad\qquad x_3 &= 1 \\ (1-m)x_2 + \quad (m-1)x_3 &= 0 \\ (1-m)(2+m)x_3 &= 1-m \end{aligned}.$$

Iz posljednje jednačine dobijamo $x_3 = \dfrac{1}{2+m}$, iz druge jednačine dobijamo $x_2 = \dfrac{1}{2+m}$ i na kraju iz prve jednačine dobijamo $x_1 = \dfrac{1}{2+m}$.

Primjer 5. Diskutovati i riješiti sistem jednačina
$$\begin{aligned} x+y+z &= 6 \\ ax+4y+z &= 5 \\ 6x+(a+2)y+2z &= 13 \end{aligned}$$
u zavisnosti od parametra a.

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1&6\\a&4&1&5\\6&a+2&2&13\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&6\\0&4-a&1-a&5-6a\\0&a-4&-4&-23\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&6\\0&4-a&1-a&5-6a\\0&0&-a-3&-6a-18\end{pmatrix}$$

Iz prethodnog zaključujemo:

1) Za $a=4$ dobijamo

$$P\sim\begin{pmatrix}1&1&1&6\\0&0&-3&-19\\0&0&-7&-42\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&6\\0&0&1&6\\0&0&-3&-19\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&6\\0&0&1&6\\0&0&0&-1\end{pmatrix},$$

pa je $rangA=2,\quad rangP=3$, tj. $rangA\neq rangP$, po Kroneker-Kapelijevoj teoremi dati sistem je nesaglasan tj. nema rješenja.

2) Za $a=-3$ dobijamo $P\sim\begin{pmatrix}1&1&1&6\\0&7&4&23\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, pa je $rangA=rangP=2<3$- broj nepoznatih, po Kroneker-Kapelijevoj teoremi dati sistem je saglasan i neodređen tj. ima beskonačno rješenja. Dati sistem je ekvivalentan sistemu $\begin{matrix}x+y+z=6\\7y+4z=23\end{matrix}$. Za bazne promjenljive uzmimo *x* i *y*, a slobodna promjenljiva neka je *z*. Neka je $z=t$, tada dobijamo da je $y=\frac{23-4t}{7},\quad x=\frac{19-3t}{7}$. Dakle, opšte rješenje datog sistema je uređena trojka $(x,y,z)=\left(\frac{19-3t}{7},\frac{23-4t}{7},t\right),\quad t\in R$.

3) Za $a\neq 4\ \wedge\ a\neq -3$ imamo da je $rangA=rangP=3$- broj nepoznatih, po Kroneker-Kapelijevoj teoremi dati sistem je saglasan i određen tj. ima jedno rješenje. Dati sistem je ekvivalentan sistemu: $\begin{matrix}x+y+z=6\\(4-a)y+(1-a)z=5-6a\\(-a-3)z=-6a-18\end{matrix}$. Iz posljednje jednačine dobijamo $z=6$, iz druge jednačine dobijamo $y=\frac{1}{a-4}$ i na kraju iz prve jednačine dobijamo $x=-\frac{1}{a-4}$.

Kramerovo pravilo se primjenjuje samo za rješavanje kvadratnih sistema tj. sistema kod kojih je broj jednačina jednak broju nepoznatih

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\qquad(**)$$

Determinantom sistema (**) nazivamo determinantu matrice sistema (**) i označavamo je sa *D*. Dakle $D=\det A=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$.

Sa D_1, D_2, ..., D_n označavamo determinante koje se dobijaju iz determinante D tako što se redom umjesto elemenata prve, druge, ... , n-te kolone stave elementi b_1, b_2, ... , b_n, koji su slobodni članovi sistema (**). Dakle,

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

- Ako je $D \neq 0$, tada je sistem (**) saglasan i određen tj. ima jedinstveno rješenje i to: $x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}$.
- Ako je $D = 0$ i bar jedno $D_i \neq 0$ ($i=1,2,...,n$), tada je sistem (**) nesaglasan tj. nema rješenja.
- Ako je $D = D_1 = D_2 = \dots = D_n = 0$ tada je moguće da sistem (**) ima ili beskonačno rješenja ili da nema rješenja. Za precizniji odgovor potrebno je koristiti Kroneker-Kapelijevu teoremu.

Primjer 6. Riješiti sistem jednačina
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11 \end{aligned}.$$

Dati sitem je kvadratni pa ga možemo riješiti Kramerovim pravilom:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3(9-1) - 2(6-2) + 1(2-6) = 12,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 11 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5(9-1) - 2(3-11) + 1(1-33) = 24,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{vmatrix} = 3(3-11) - 5(6-2) + 1(22-2) = -24,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 11 \end{vmatrix} = 3(33-1) - 2(22-2) + 5(2-6) = 36.$$

Kako je $D = 12 \neq 0$, po Kramerovom pravilu slijedi da dati sistem ima jedinstveno rješenje i to:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{24}{12} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{24}{12} = -2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{36}{12} = 3.$$

Primjer 7. Riješiti sistem jednačina $\begin{array}{l} x_1 \qquad\quad + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 1 \end{array}$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(-4+1) + 1(3+0) = -3+3 = 0, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(-1+2) = 1$$

Ovdje možemo da stanemo i koristeći Kramerovo pravilo da zaključimo kako je $D = 0$, a $D_1 = 1 \neq 0$, to dati sistem nema rješenja tj. dati sistem je nesaglasan.

Primjer 8. U zavisnosti od parametra a riješiti sistem $\begin{array}{l} 2x_1 - 5x_2 = 1 \\ ax_1 + 5x_2 = -2a - 5 \end{array}$.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ a & 5 \end{vmatrix} = 10 + 5a, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -2a-5 & 5 \end{vmatrix} = 5 - (10a + 25) = -10a - 20,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a & -2a-5 \end{vmatrix} = -4a - 10 - a = -5a - 10.$$

Koristeći Kramerovo pravilo imamo:

- Ako je $D \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 10 + 5a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a \neq -2$, dati sitem ima jedinstveno rješenje:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-20-10a}{10+5a} = \frac{-10(2+a)}{5(2+a)} = -2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-5a-10}{10a+5} = \frac{-5(a+2)}{5(2+a)} = -1.$$

- Za $a = -2$ imamo da je $D=D_1=D_2=0$, pa ne možemo primijeniti Kramerovo pravilo već izvršiti dodatnu analizu. Uočimo da tada dati sistem glasi: $\begin{array}{l} 2x_1 - 5x_2 = 1 \\ -2x_1 + 5x_2 = -1 \end{array}$. Ako prvu jednačinu dodamo drugoj jednačini dobijamo da je dati sistem ekvivalentan sa sistemom koji ima samo jednu jednačinu $2x_1 - 5x_2 = 1$, po Gausovom metodu zaključujemo da dati sistem ima beskonačno rješenja. Bazna nepoznata je x_1, a x_2 slobodna promjenljiva. Opšte rješenje datog sistema je uređeni par $(x_1, x_2)=(\frac{1+5t}{2}, t)$ $t \in R$.

Primjer 9. Kramerovom metodom riješiti sistem jednačina $\begin{array}{l} ax - y - 2z = -1 \\ x + ay + z = 1 \\ -x + 3y + 3z = a \end{array}$ u zavisnosti od parametra a.

$$D=\begin{vmatrix} a & -1 & -2 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix}=3a^2-5a-2=(3a+1)\cdot(a-2),$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & a & 1 \\ a & 3 & 3 \end{vmatrix}=2a\cdot(a-2),$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & a & 3 \end{vmatrix}=-a^2+a+2=-(a+1)\cdot(a-2),$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 3 & a \end{vmatrix}=a^3-3a-2=(a+1)^2\cdot(a-2).$$

1) Ako je $D\neq 0 \Rightarrow a\neq -\frac{1}{3} \wedge a\neq 2$, tada dati sistem ima jedinstveno rješenje:

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{2a}{3a+1},\quad y=\frac{D_2}{D}=-\frac{a+1}{3a+1},\quad z=\frac{D_3}{D}=\frac{(a+1)^2}{3a+1}.$$

2) Ako je $a=-\frac{1}{3}$, tada je $D=0$, a $D_1=\frac{14}{9}\neq 0$, pa dati sistem nema rješenja.

3) Ako je $a=2$, tada je $D=D_1=D_2=D_3=0$, pa ne možemo primijeniti Kramerovu metodu već sistem rješavamo Gausovom metodom. Dati sistem je ekvivalentan sistemu $\begin{array}{l} 2x-y-z=-1 \\ x+2y+z=1 \\ -x+3y+3z=2 \end{array}$.

Prelazimo na proširenu matricu sisema i dobijamo:

$$P=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -3 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pa je $rangA=rangP=2<3$- broj nepoznatih, po Kroneker-Kapelijevoj teoremi dati sistem je saglasan i neodređen tj. ima beskonačno rješenja. Dati sistem je ekvivalentan sistemu $\begin{array}{l} x+2y+z=1 \\ -5y-3z=-3 \end{array}$. Uzmimo da je z slobodna promjenljiva, a bazne promjenljive x i y. Neka je $z=t$. Iz poslednje jednačine dobijamo $y=\frac{3-3t}{5}$, iz prve jednačine dobijamo $x=\frac{t-1}{5}$. Dakle, opšte rješenje datog sistema je uređena trojka $(x,y,z)=\left(\frac{t-1}{5},\frac{3-3t}{5},t\right),\quad t\in R$.

Primjer 10. Riješiti sistem jednačina $\begin{array}{l} x+y+(1-m)z=m \\ (1-m)x-y+z=-1 \\ x+(m-1)y-z=0 \end{array}$ u zavisnosti od parametra *m*.

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1-m\\ 1-m & -1 & 1\\ 1 & m-1 & -1\end{vmatrix}=m^3-3m^2+4=(m+1)\cdot(m-2)^2,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}m & 1 & 1-m\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & m-1 & -1\end{vmatrix}=0,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & m & 1-m\\ 1-m & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=-m^2+m+2=-(m+1)\cdot(m-2),$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & m\\ 1-m & -1 & -1\\ 1 & m-1 & 0\end{vmatrix}=-m^3+2m^2+m-2=-(m-1)\cdot(m+1)\cdot(m-2)$$

1) Ako je $D\neq 0 \;\Rightarrow\; m\neq -1 \;\wedge\; m\neq 2$ dati sistem ima jedinstveno rješenje: $x=\dfrac{D_1}{D}=0,\quad y=\dfrac{D_2}{D}=-\dfrac{(m+1)(m-2)}{(m+1)(m-2)^2}=-\dfrac{1}{m-2},\quad z=\dfrac{D_3}{D}=-\dfrac{m-1}{m-2}$.

2) Ako je $m=-1$ tada je $D=D_1=D_2=D_3=0$, pa ne možemo primijeniti Kramerovu metodu, već sistem rješavamo Gausovom metodom. Dati sistem je ekvivalentan sistemu

$$\begin{aligned}x+y+2z&=-1\\ 2x-y+z&=-1.\\ x-2y-z&=0\end{aligned}$$

Prelazimo na proširenu matricu sistema i dobijamo:

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & -1 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & -1\\ 0 & -3 & -3 & 1\\ 0 & 3 & 3 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & -1\\ 0 & -3 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

pa je $rangA=rangP=2<3$ - broj nepoznatih, po Kroneker-Kapelijevoj teoremi dati sistem je saglasan i neodređen tj. ima beskonačno rješenja. Dati sistem je ekvivalentan sistemu

$$\begin{aligned}x+y+2z&=-1\\ -3y-3z&=1\end{aligned}$$

. Uzmimo da je z slobodna promjenljiva, a bazne promjenljive x i y. Neka je $z=t$. Iz posljednje jednačine dobijamo $y=-\dfrac{3t+1}{3}$, a iz prve jednačine dobijamo $x=-\dfrac{3t+4}{3}$. Dakle, opšte rješenje datog sistema je uređena trojka $(x,y,z)=\left(-\dfrac{3t+4}{3},-\dfrac{3t+1}{3},t\right),\quad t\in R$.

3) Ako je $m=2$ tada je $D=D_1=D_2=D_3=0$, pa ne možemo primijeniti Kramerovu metodu već sistem rješavamo Gausovom metodom. Dati sistem je ekvivalentan sistemu

$$\begin{aligned}x+y-z&=2\\ -x-y+z&=-1\\ x+y=z&=0\end{aligned}$$

. Prelazimo na proširenu matricu sistema i dobijamo:

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 2\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

pa je $rangA=1,\quad rangP=2$, tj. $rangA\neq rangP$, po Kroneker-Kapelijevoj teoremi dati sistem je nesaglasan tj. nema rješenja.

Matrična metoda se primjenjuje samo za rješavanje kvadratnih sistema tj. sistema kod kojih je broj jedančina jednak broju nepoznatih

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}.\ (^{**})$$

Sistem (**) možemo zapisati u matričnom obliku $AX=B$, gdje je $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$ matrica sistema (**), čiji su elementi koeficijenti sistema (**), a $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ matrica kolone čiji su elementi nepoznate sistema (**) i $B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$ matrica kolone čiji su elementi slobodni članovi sistema (**).

Matricu $P=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n\end{pmatrix}$ nazivamo proširenom matricom sistema (**).

Ako je $D=\det A\neq 0$, tada je, saglasno Kroneker-Kapelijevoj teoremi $rangA=rangP=n$, tj. sistem (**) je saglasan i određen. Osim toga postoji i A^{-1} - inverzna matrica matrici *A*. Množenjem matrične jednačine $AX=B$ sa lijeve strane matricom A^{-1}, dobijamo $A^{-1}(AX)=A^{-1}B$, odnosno $(A^{-1}A)X=A^{-1}B$, tj. $X=A^{-1}B$, jer je $A^{-1}A=E$, gdje je *E* jedinična matrica.

Primjer 11. Matričnom metodom riješiti sisteme jednačina:

a) $\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3&=5\\ 4x_1+5x_2+6x_3&=8\\ 7x_1+8x_2\qquad&=2\end{aligned}$, b) $\begin{aligned} x_1-3x_2-\ x_3&=1\\ -2x_1+7x_2+2x_3&=-2\\ 3x_1+2x_2-4x_3&=3\end{aligned}$.

a) Iz datog sistema zaključujemo da je $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5\\8\\2\end{pmatrix}$. Kako je $A^{-1}=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}-48&24&-3\\42&-21&6\\-3&6&-3\end{pmatrix}$, to je $X=A^{-1}B=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}-48&24&-3\\42&-21&6\\-3&6&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\8\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$. Dakle, $x_1=-2$, $x_2=2$, $x_3=1$.

b) Iz datog sistema zaključujemo da je $A=\begin{pmatrix}1&-3&-1\\-2&7&2\\3&2&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$. Kako je $A^{-1}=\begin{pmatrix}32&14&-1\\2&1&0\\25&11&-1\end{pmatrix}$, to je $X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}32&14&-1\\2&1&0\\25&11&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Dakle, $x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=0$.

Homogeni sistem linearnih jednačina je takav sistem u kojem su svi slobodni članovi jedaki nuli tj. sistem oblika:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0\end{cases}. \qquad (***)$$

Sistem (***) možemo napisati u obliku matrične jednačine $AX=O$, gdje je $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&a_{m3}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$ matrica sistema (***), čiji su elementi koeficijenti sistema (***), a $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ matrica kolone čiji su elementi nepoznate sistema (***) i O -nula matrica tj. matrica kolone čiji su elementi slobodni članovi sistema (***). Kod homogenog sistema proširena matrica P ima u posljednjoj koloni sve nule, pa je $rangA=rangP$. Dakle, homogeni sistem je uvijek saglasan. Ako je $rangA=n$, n- broj nepoznatih u sistemu (***), tada postoji jedinstveno rješenje sistema (***) i to je $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$. Za to rješenje kažemo da je trivijalno rješenje sistema (***).

Razmotrimo kada sistem (***) ima netrivijalno rješenje.

Teorema 2. Homogeni sistem jednačina (***) ima netrivijalno rješenje ako i samo ako $rangA < n$, gdje je A matrica sistema (***), a n broj nepoznatih.

Posljedica 1. Homogeni sistem od n jednačina sa n nepoznatih ima netrivijalno rješenje ako i samo ako je $detA=0$, gdje je A matrica sistema.

Primjer 12. Riješiti sistem jednačina $\begin{array}{l} x_1 + \ \ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - \ \ x_2 - 9x_3 = 0 \end{array}$.

Transformišući matricu sistema dobijamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -a+3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Ako je $a \neq 3$ tada je *rangA=3*- broj nepoznatih, pa posmatrani sistem ima samo trivijalno rješenje $x_1=x_2=x_3=0$.
- Ako je $a=3$ tada je *rangA=2<3* - broj nepoznatih, pa posmatrani sistem ima netrivijalno rješenje i ekvivalentan je sistemu $\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array}$. Za bazne nepoznate uzimamo x_1 i x_2, a za slobodnu nepoznatu x_3, pa je opšte rješenje posmatranog sistema uređena trojka $(x_1,x_2,x_3)=(2t,-t,t)$, $t \in R$.

Primjer 13. Riješiti sistem jednačina $\begin{array}{l} 3x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 8x_1 + 3x_2 + mx_3 = 0 \end{array}$.

Dati sistem je kvadratni pa možemo da posmatramo determinantu matrice sistema

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 3 & m \end{vmatrix} = m-2.$$

- Ako je $\det A \neq 0$ tj. $m \neq 2$ tada posmatrani sistem ima samo trivijalno rješenje $x_1=x_2=x_3=0$.
- Ako je $\det A = 0$ tj. $m = 2$ tada posmatrani sistem ima netrivijalno rješenje i ekvivalentan je sistemu $\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 - \ \ x_3 = 0 \\ x_2 + 14x_3 = 0 \end{array}$. Bazne nepoznate su x_1 i x_2, a slobodna nepoznata je x_3, pa je opšte rješenje posmatranog sistema uređena trojka $(x_1,x_2,x_3)=(5t,-14t,t)$, $t \in R$.