Određeni integral

Neka je funkcija $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na odsječku $[a,b]$.

Figuru koju ograničava kriva $y = f(x)$, Ox-osa i prave $x = a$ i $x = b$ nazivamo krivolinijskim trapezom.

Kako izračunati površinu krivolinijskog trapeza? Podijelimo odsječak $[a,b]$ tačkama $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ na n djelova i u svakom od odsječaka $[x_{k-1}, x_k]$ izaberimo proizvoljno tačku $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Neka je $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Sada formirajmo integralni zbir (sumu) $S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n$

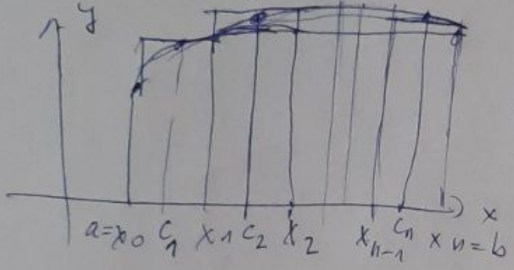
Def 1: Ako za svaku podjelu odsječka $[a,b]$ takvu da je $\max \Delta x_k \to 0$ i za svaki izbor tačaka $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ niz (S_n) teži istom broju I, tada broj I nazivamo određenim integralom funkcije f na odsječku $[a,b]$ i označavamo sa $\int_a^b f(x)\,dx$.

Dakle, $I = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ ②

Broj a nazivamo donja, a broj b gornja granica integrala.

Za funkciju f kažemo da je integrabilna na odsječku $[a,b]$ ako postoji $\int\limits_a^b f(x)dx$.

– Geometrijski smisao određenog integrala –



$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + \dots + f(c_n)\Delta x_n$

S_n je zbir površina prikazanih pravougaonika.

S_n – približna vrijednost površine krivolinijskog trapeza.

Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na $[a,b]$ i $f(x) \geq 0$ za $x \in [a,b]$, tada $\int\limits_a^b f(x)dx$ predstavlja površinu krivolinijskog trapeza ograničenog krivom $y=f(x)$, osom Ox, i pravama $x=a$ i $x=b$.

Ako je $f(x) \leq 0$ na odsječku $[a,b]$ tada je površina krivolinijskog trapeza kojeg ograničava kriva $y=f(x)$, osa Ox i prave $x=a$ i $x=b$ jednaka $-\int\limits_a^b f(x)dx$.

Napomena 1:

Pojam određenog integrala $\int_a^b f(x)dx$ smo uveli pretpostavljajući da je $a<b$. U slučaju da je $b<a$ uzimamo, po definiciji, da je:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

– Izračunavanje određenog integrala –

Postoji formula kojom se izračunavanje određe-nog integrala svodi na izračunavanje neodređenog integrala. Tu formulu su nezavisno jedan od drugog dokazali Njutn i Lajbnic i poznata je pod nazivom Njutn-Lajbnicova formula.

Teorema 1: (Njutn-Lajbnicova formula)

Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na odsječku $[a,b]$, tada je:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

gdje je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije na intervalu (a,b).

Primjer 1: a) $\int_1^3 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 4$

b) $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

c) $\int_3^4 e^x dx = e^x\Big|_3^4 = e^4 - e^3$ d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= -\cos\frac{\pi}{2} - (-$

$= 1.$

Sada razmatramo smjenu promjenljivih i metod parcijalne integracije kod određenih integrala.

<u>Teorema 2:</u> Neka je za izračunavanje integrala $\int_a^b f(x)$ gdje je funkcija $f(x)$ neprekidna na odsječku $[a,b]$, uvedena smjena $x=\varphi(t)$ pri čemu je $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ neprekidno diferencijabilna funkcija tako da je $\varphi(\alpha)=a$ i $\varphi(\beta)=b$. Tada je funkcija $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ neprekidna na $[\alpha,\beta]$ i važi:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

<u>Primjer 3:</u> a)

$$\int_0^1\sqrt{2+x}\,dx=\left[\begin{array}{l} 2+x=t \\ dx=dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & 2 & 3 \end{array}\end{array}\right]=\int_2^3\sqrt{t}\,dt$$

$$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_2^3=\frac{2}{3}\left(3^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right)$$

b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\cdot\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2x)\cos x$$

$$=\left[\begin{array}{l} \sin x=t \\ \cos x\,dx=dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 0 & 1 \end{array}\end{array}\right]=\int_0^1(1-t^2)\,dt=t-\frac{t^3}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$$

c)

$$\int_2^5\frac{dx}{x+1}=\left[\begin{array}{l} x+1=t \\ dx=dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 2 & 5 \\ \hline t & 3 & 6 \end{array}\end{array}\right]=\int_3^6\frac{dt}{t}=\ln|t|\Big|_3^6=\ln 6-\ln$$

Ako funkcije $u(x)$ i $v(x)$ imaju neprekidne izvode na odsječku $[a,b]$, tada važi:

$$\int_a^b u\,dv = u\cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

Primjer 4: a) $\int_2^3 \ln x\,dx = \left[\begin{matrix} u=\ln x & dv=dx \\ du=\frac{dx}{x} & v=x \end{matrix}\right] =$

$= x\ln x \Big|_2^3 - \int_2^3 dx = x\ln x \Big|_2^3 - x\Big|_2^3 = 3\ln 3 - 2\ln 2$

b) $\int_0^1 x e^x dx = \left[\begin{matrix} u=x & dv=e^x dx \\ du=dx & v=e^x \end{matrix}\right] = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e$

$= 1\cdot e^1 - e^x\Big|_0^1 = e-(e-1) = 1.$

– Svojstva određenog integrala –

1) $\int_a^b A f(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$, A - proizvoljna konstanta

2) $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

4) $\int_a^a f(x)dx = 0$

5) Neka je funkcija $f(x)$ integrabilna na odsječku $[a,b]$ i neka je $a<c<b$. Tada

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

5) Ako je $f(x) \geq 0$ na odsječku $[a,b]$ tada je:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Prema tome, ako je $f(x) \geq g(x)$ za svako $x \in [a,b]$ gdje su $f(x)$ i $g(x)$ integrabilne na odsječku $[a,b]$ tada je:

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

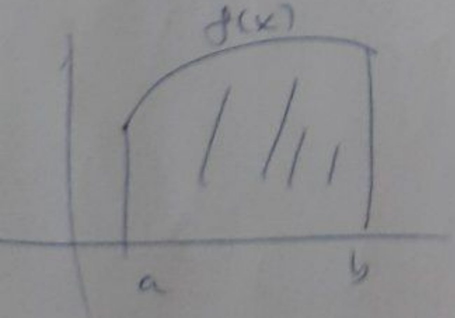
) Ako su m i M najmanja i najveća vrijednost funkcije f na odsječku $[a,b]$, tada je:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

) (teorema o srednjoj vrijednosti) Ako je fun $f(x)$ neprekidna na odsječku $[a,b]$, tada po tačka $c \in [a,b]$ takva da je:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

– Primjene određenog integrala –

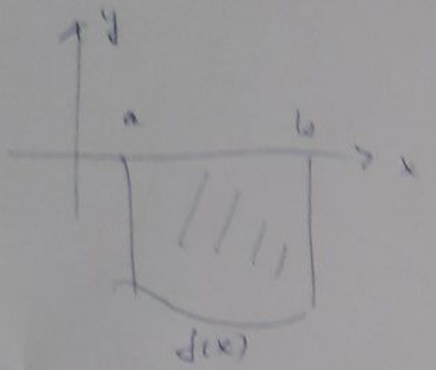


Ako je na odsječku $[a,b$ funkcija $f(x)$ neprekidna i nenegativna, tada se povr krivolinijskog trapeza ogra krivom $f(x)$, osom Ox i prava $x=a$ i $x=b$ računa po formu

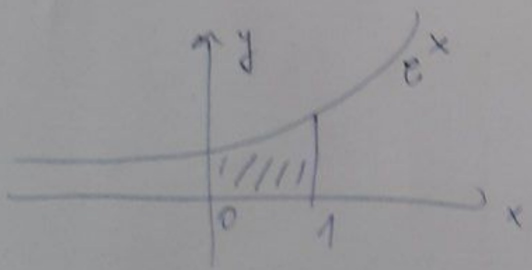
$$S = \int_a^b f(x)dx$$

U slučaju da je $f(x) \leq 0$ za svako $x \in [a,b]$ površina odgovarajućeg krivolinijskog trapeza računa se po formuli:

$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

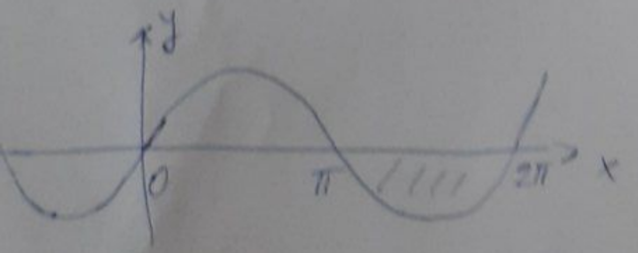


Primjer 1: a) Naći površinu figure ograničene krivom $y = e^x$, osom Ox i pravama $x=0$ i $x=$



$$S = \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e-1$$

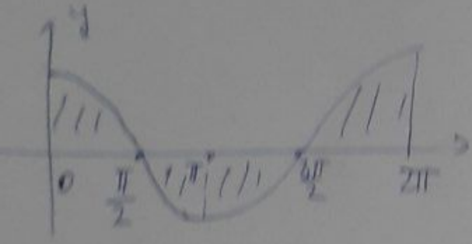
b) Naći površinu figure ograničene sinusoidom $y = \sin x$ i osom Ox na odsječku $[\pi, 2\pi]$



$$S = -\int_\pi^{2\pi} \sin x\, dx =$$

$$= \cos x \Big|_\pi^{2\pi} = 2.$$

…mjer 2: Nađi površinu figure koju ograničava …osinusoida $y=\cos x$ sa osom Ox na odsječku …$0, 2\pi]$

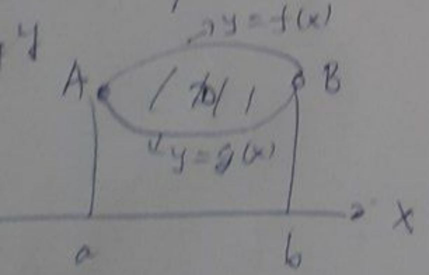


$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos x\,dx=$$

$$=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}+\sin x\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}=$$

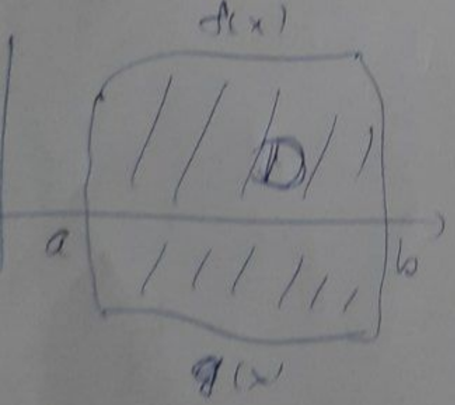
$$=4.$$

…mjer: Površinu S figure D ograničene zatvorenom …nijom koju svaka prava paralelna osi Oy …iječe u najviše dvije tačke posmatramo kao …azliku površina dva krivolinijska trapeza.



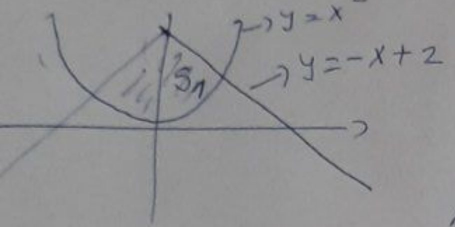
$$S=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx$$

$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx,\quad f(x)\geq g(x)$$
za $x\in[a,b]$.



$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$$

Primjer 3: a) Nađi površinu figure ograničene linijama $y = 2 - |x|$ i $y = x^2$.



Iz sistema:

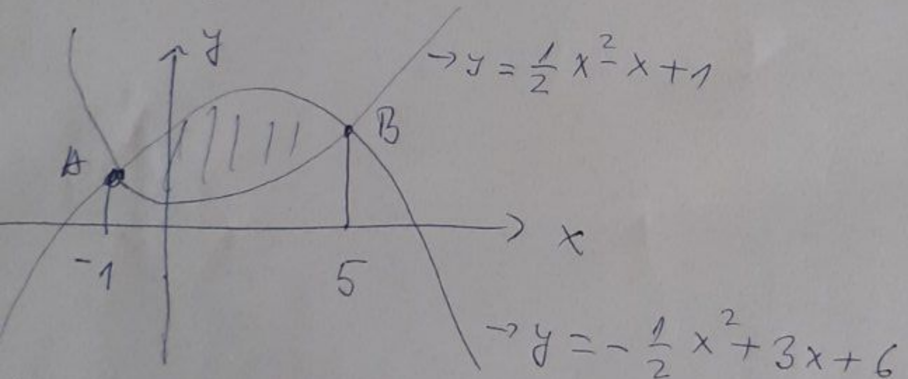
$$\begin{cases} y = 2 - |x| \\ y = x^2 \end{cases}$$

dobijamo presječne tačke $A(-1,1)$ i $B(1,1)$.

$$S = 2S_1 = 2\int_0^1 (-x + 2 - x^2)\,dx = 2\left(-\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1$$

$$S = \frac{7}{3}$$

b) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6$, $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$



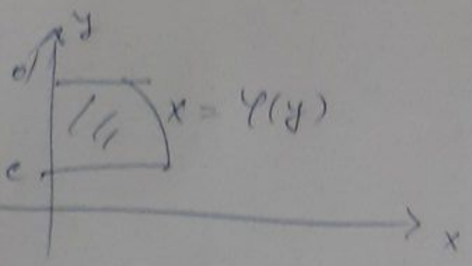
Iz sistema

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6 \\ y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1 \end{cases}$$

dobijamo presječne tačke $A\left(-1, \frac{5}{2}\right)$ i $B\left(5, \frac{17}{2}\right)$ pa je

$$S = \int_{-1}^{5} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1\right)dx = \int_{-1}^{5} (-x^2 + 4x + 5)$$

$$= 36.$$

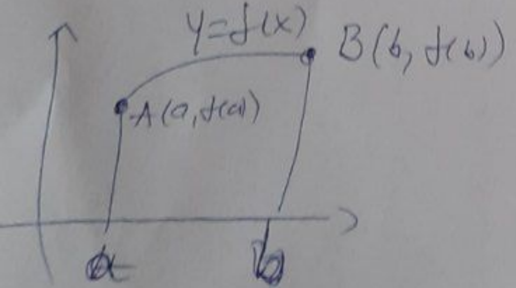


Površina krivolinijskog trapeza ograničenog krivom $x=\varphi(y)$, osom Oy i pravama $y=c$ i $y=d$ data je formulom:

$$S=\int_c^d \varphi(y)\,dy.$$

Izračunavanje dužine luka krive -

Neka je funkcija f neprekidno diferencijabilna na odsječku $[a,b]$. ~~Dokazat ćemo da~~ ~~luka AB~~ Dužina luka $\overset{\frown}{AB}$ krive $=f(x)$ od tačke $A(a,f(a))$ do tačke $B(b,f(b))$ izračunava se po formuli: $l=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$



$$l=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Primjer: Nađi dužinu luka krive $y=\frac{1}{4}x$ $\frac{1}{2}\ln x$ između tačaka $A(1,\frac{1}{4})$ i $B(2,1-\frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$; $\quad y' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}$;

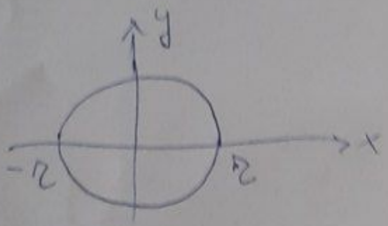
$$1+y'^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}\right)^2$$

$$l = \int_1^2 \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}\right)dx = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\ln|x|\Big|_1^2$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

<u>Primjer:</u> Nađi dužinu kružne linije poluprečni-
ka r.

<u>R)</u>



Jednačina gornje polukružnice je $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

$$O = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}; \quad 1 + (f'(x))^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}$$

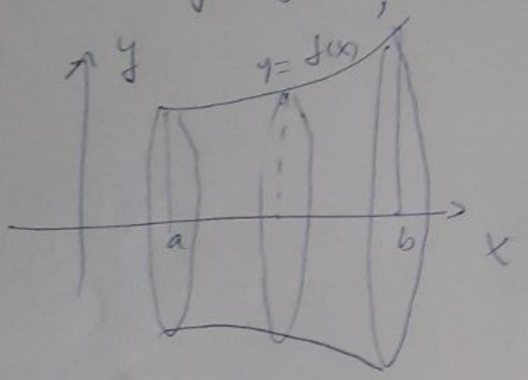
$$O = 2\int_{-r}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx = 2r\int_{-r}^{r} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \left[\begin{array}{c|c|c} \multicolumn{3}{l}{x = rt} \\ \multicolumn{3}{l}{dx = r\,dt} \\ x & -r & r \\ t & -1 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= 2r\int_{-1}^{1} \frac{r\,dt}{r\sqrt{1 - t^2}} = 2r\left(\arcsin t\Big|_{-1}^{1}\right) = 2r\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= 2r\pi.$$

\- Zapremina obrtnih tijela -

1) Neka je T tijelo koje nastaje rotacijom oko ose Ox krivolinijskog trapeza ograničenog krivom $y = f(x)$, $(f(x) \geq 0)$ osom Ox i pravama $x = a$, $x = b$



Zapremina tijela T računa se po formuli:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

2) Ako tijelo nastaje rotacijom krivolinijskog trapeza $x = \varphi(y)$, $(\varphi(y) \geq 0)$, $x = 0$, $y = c$, $y = d$ oko ose Oy tada se zapremina tog tijela računa po formuli: $\cancel{V = \pi \int_c^d (\varphi(y))^2 dy}$.

$$V = \pi \int_c^d (\varphi(y))^2 \, dy$$