Brojni redovi

Ako niz parcijalnih suma $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ konvergira tada konvergira i brojni red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i njegova suma je jednaka granici niza S_n. Ako niz S_n divergira tada divergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Primjer: Ispitati konvergenciju reda $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)}$.

Rešenje: Opšti član $a_n=\frac{1}{n\cdot(n+1)}$ se može predstaviti u obliku $\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}$ pa je poslije odredjivanja konstanti A i B: $a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. Parcijalna suma

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

Očigledno $\lim_{n\to\infty} S_n=1$ pa i dati red konvergira i $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)}=1$.

Primjer: Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2n(2n+2)(2n+3)}$.

Rešenje: Kao u prethodnom primjeru opšti član $a_n=\frac{1}{(2n-1)2n(2n+2)(2n+3)}$ se može predstaviti u obliku $\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n}+\frac{C}{2n+2}+\frac{D}{2n+3}$ pa je poslije odredjivanja konstanti A,B,C i D:

$a_n=\frac{1}{12}\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{6}\frac{1}{2n}+\frac{1}{6}\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{12}\frac{1}{2n+3}$. Parcijalna suma

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{12}\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{6}\frac{1}{2k}+\frac{1}{6}\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{12}\frac{1}{2k+3}\right)$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)=\frac{1}{12}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+3}\right)$$

$$S_n=\frac{1}{12}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)+\left(\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}\right)-\left(\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{2k-1}\right)\right]$$

$$S_n=\frac{1}{12}\left[\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{2k-1}\right)-\left(\frac{1}{1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right)+\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}\right)-\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}\right)\right]$$

$$S_n=\frac{1}{12}\left[\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}\right)\right]\underset{n\to\infty}{\rightarrow}\frac{1}{36}.$$

Iz konvergencije niza parcijalnih suma slijedi i konvergencija reda i

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2n(2n+2)(2n+3)}=\frac{1}{36}$$

Primjer: Ispitati konvergenciju reda $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

Rešenje: Parcijalna suma $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=\frac{1-(1/3)^n}{1-(1/3)}=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{3}{2}$ pa je i $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{3}{2}$.

Primjer: Ispitati konvergenciju reda $1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$.

Rešenje: Parcijalna suma $S_n=\begin{cases}0 & ;\ n=2k\\ 1 & ;n=2k+1\end{cases}$. Očigledno niz S_n divergira pa i dati red divergira.

Primjer: Ispitati konvergenciju reda $1+2+3+4+5+\ldots+n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}n$.

Rešenje: Parcijalna suma $S_n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$, pa i dati red divergira.

Primjer: Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$.

Rešenje: Parcijalna suma $S_n=\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{k})=\ln(1+\frac{1}{1})+\ln(1+\frac{1}{2})+\ln(1+\frac{1}{3})+\ldots+\ln(1+\frac{1}{n})$,

$S_n=\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ldots+\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ pa i dati red divergira.

Potreban uslov za konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je da njegov opšti član a_n teži ka nuli. To znači da, ako opšti član ne teži ka nuli red divergira.

Primjer: Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0.001}$.

Rešenje: Kako je $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1;\quad(a>0)$, to opšti član reda ne teži ka nuli pa red divergira.

Primjer: Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-n}{2n^2+1}$.

Rešenje: Kako je $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{2n^2+1}=\frac{1}{2}$, to opšti član reda ne teži ka nuli pa red divergira.

Primjer: Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}$.

Rešenje: Kako ne postoji $\lim_{n\to\infty}\sin\frac{n\pi}{2}$, to opšti član reda ne teži ka nuli pa red divergira.

Konvergenciju brojnog reda možemo ispitivati pomoću integralnog kriterijuma na sledeći način: Ako za brojni red $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ i integral $\int_{1}^{\infty}f(x)dx$ važi

1. $a_n=f(n)\quad;\quad n=1,2,3\ldots$

2. $f(x)$ je neprekidna funkcija za $x > 0$
3. $f(x)$ monotono opada ka nuli za $x > 0$

tada brojni red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ imaju isto ponašanje, tj. ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

Primjer: Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$.

Rešenje: Za $a \le 0$ opšti član ne teži ka nuli pa red divergira. Za $a > 0$ posmatramo funkciju $f(x) = \frac{1}{x^a}$. Očigledno za opšti član reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ i funkciju $f(x) = \frac{1}{x^a}$ važi:

1. $a_n = f(n)$; $n = 1,2,3\ldots$
2. $f(x)$ je neprekidna funkcija za $x > 0$
3. $f(x)$ monotono opada ka nuli za $x > 0$ (jer je $f'(x) = \frac{-a}{x^{a+1}}$)

Zbog toga je ponašanje datog reda isto kao ponašanje integrala $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^a} dx$. Kako je

$$\int_1^m \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \ln m & ; a = 1 \\ \frac{1}{-a+1}\left(\frac{1}{m^{a-1}} - 1\right) & ; a \ne 1 \end{cases} \text{ to je } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^a} dx = \lim_{m \to \infty} \int_1^m \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \infty & ; a \le 1 \\ \frac{1}{a-1} & ; a > 1 \end{cases}$$

To znači da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ konvergira za $a > 1$ i divergira za $a \le 1$.

Ako za divergentni red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ počev od nekog indeksa N_0 važi $a_n \ge b_n$ za $\forall n > N_0$ tada je i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan. Ako za konvergentni red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ počev od nekog indeksa N_0 važi $a_n \le b_n$ za $\forall n > N_0$ tada je i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan. Ako opšti članovi dva reda imaju ekvivalentno ponašanje, tj ako je $a_n \underset{n \to \infty}{\approx} b_n$ tada redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

Primjer: Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

Rešenje: Kako je $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$ za $n > 3$, i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ je divergentan $(1/2 < 1)$ to i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ divergira.

Primjer: Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{2^n}$.

Rešenje: Kako je $\frac{\sin^2 n}{2^n} \le \frac{1}{2^n}$ za $n \ge 1$, i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ je konvergentan to i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{2^n}$ konvergira.

Примјер : Испитати конвергенцију бројног реда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$.

Решење : Општи члан $a_n=\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$ има еквивалентно понашање као општи члан дивергентног бројног реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ јер је $\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}\underset{n\to\infty}{\approx}\frac{1}{n}$ па оба реда дивергирају.

Примјер : Испитати конвергенцију бројног реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3n+2}}{\sqrt[3]{n^4-2n+1}-5n}$.

Решење : Општи члан $\frac{\sqrt{3n+2}}{\sqrt[3]{n^4-2n+1}-5n}\underset{n\to\infty}{\approx}\frac{n^{1/2}}{n^{4/3}}\underset{n\to\infty}{\approx}\frac{1}{n^{5/6}}$ има еквивалентно понашање као општи члан дивергентног бројног реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/6}}$ па оба реда дивергирају.

Примјер : Испитати конвергенцију бројног реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$.

Решење : Општи члан $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\frac{1}{n(\sqrt{1+1/n}+1)}\underset{n\to\infty}{\approx}\frac{1}{n}$ има еквивалентно понашање као општи члан дивергентног бројног реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ па оба реда дивергирају

Примјер : Испитати конвергенцију бројног реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}$.

Решење : Општи члан $\frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}=\frac{n+1-n}{\sqrt{n}(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{(n+1)n}+\sqrt[3]{n^2})}=\frac{1}{n^{1/2}\cdot n^{2/3}\cdot 3}\underset{n\to\infty}{\approx}\frac{1}{n^{7/6}}$ има еквивалентно понашање као општи члан конвергентног бројног реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{7/6}}$ па оба реда конвергирају.

Даламберов критеријум

Нека је $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$. Ред $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ конвергира ако је $q<1$, дивергира ако је $q>1$ а за $q=1$ могућ је и један и други случај тако да треба извршити додатно испитивање.

Примјер : Испитати конвергенцију бројног реда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$.

Решење : Општи члан , $a_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$. По Далаберовом критеријуму из

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\Big/\frac{2^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0 < 1$$ следи конвергенција реда.

Примјер : Испитати конвергенцију бројног реда $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n n!}{n^n}$, $(a > 0)$

Решење : Општи члан $a_n = \dfrac{a^n n!}{n^n}$, $a_{n+1} = \dfrac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$. По Далаберовом критеријуму из

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\Big/\frac{a^n n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = a\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = a\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^n = \frac{a}{e}$$ следи да за $0 < a < e$ ред конвергира а за $a > e$ ред дивергира. За $a = e$, тј. за $a/e = 1$ Даламберов критеријум не даје одговор. Понашање реда се мора додатно испитати. Када је $a = e$ имамо $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\Big/\dfrac{e^n n!}{n^n} = e\Big/\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Низ $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ је монотоно растући и ограничен са горње стране па је $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e$. Због тога је $e\Big/\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n > 1$ и $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Из $a_n > 0$ и $a_{n+1} > a_n$ следи да општи члан реда не тежи ка нули из чега следи дивергенција реда. То значи да ред дивергира за $a \ge e$ а конвергира за $0 < a < e$.

Кошијев критеријум

Нека је $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = q$. Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира ако је $q < 1$, дивергира ако је $q > 1$ а за $q = 1$ могућ је и један и други случај тако да треба извршити додатно испитивање.

Примјер : Испитати конвергенцију бројног реда $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n2^{n+1}}{3^n}$.

Решење : Општи члан је $a_n = \dfrac{n2^{n+1}}{3^n} = 2n\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ па је $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{2}{3}\sqrt[n]{2n} = \dfrac{2}{3} < 1$. По Кошијевом критеријуму ред конвергира.

Примјер : Испитати конвергенцију бројног реда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Решење : Општи члан је $a_n = \left(\sin\dfrac{1}{n}\right)^n$ па је $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{n} = 0 < 1$. По Кошијевом критеријуму ред конвергира.

Лајбницов критеријум

Ред са наизмјеничним члановима $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$, $b_n \geq 0$ конвергира ако за $n > N_0$ низ $b_n \geq 0$, монотоно тежи нули.

Примјер: Доказати конвергенцију реда $1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \frac{9}{16} - \ldots$

Решење: Општи члан је $a_n = (-1)^n \frac{2n+1}{2^n}$. Низ $b_n = \frac{2n+1}{2^n}$ је позитивни, монотони нула низ јер је

- $b_n > 0$
- $b_n \to 0$
- $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2n+3}{2^{n+1}} \Big/ \frac{2n+1}{2^n} = \frac{2n+3}{2(2n+1)} = \frac{4n+2-2n+1}{4n+2} = 1 - \frac{2n-1}{4n-2} < 1$ тј. $b_{n+1} < b_n$.
- (Монотоност низа $b_n = \frac{2n+1}{2^n}$ се може доказати и на следећи начин:

  $b_{n+1} - b_n = \frac{2n+3}{2^{n+1}} - \frac{2n+1}{2^n} = \frac{2n+3-4n-2}{2^{n+1}} = \frac{-2n+1}{2^{n+1}} < 0$ тј. $b_{n+1} < b_n$.)