Екстремне вриједности функције више промјенљивих

Локални екстремуми функције $z = z(x;y)$

<u>Неопходан услов</u> : Да би диференцијабилна функција $z = z(x;y)$ имала екстремну вриједност у тачки A мора важити : $\frac{\partial z}{\partial x}(A) = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y}(A) = 0$.

Решавањем система једначина $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ добијамо као решење координате стационарних тачака. Оне могу али не морају бити тачке у којима функција достиже екстремне вриједности.

<u>Довољан услов</u> : Нека је A стационарна тачка за $z = z(x;y)$. Ако

1. $d^2 z(A) > 0$, за $dx^2 + dy^2 \neq 0$ тада функција $z = z(x;y)$ има минимум у A
2. $d^2 z(A) < 0$, за $dx^2 + dy^2 \neq 0$ тада функција $z = z(x;y)$ има максимум у A
3. $d^2 z(A)$ мијења знак за $dx^2 + dy^2 \neq 0$ тада функција нема екстрема у A
4. $d^2 z(A) = 0$ за неку комбинацију dx и dy, $dx^2 + dy^2 \neq 0$ тада нема одлуке

Услов $dx^2 + dy^2 \neq 0$ значи да нису оба и dx и dy истовремено једнака нули

Други начин

<u>Довољан услов</u> (Силвестров критеријум):

Нека је A стационарна тачка за $z = z(x;y)$. Означимо

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(A) \ , \ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(A) & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(A) \end{vmatrix}$$

1. $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ тада функција $z = z(x;y)$ има минимум у A
2. $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ тада функција $z = z(x;y)$ има максимум у A
3. $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 \neq 0$ и не важи ни 1. ни 2. тада функција нема екстрема у A
4. $\Delta_1 = 0$ или $\Delta_2 = 0$ тада нема одлуке

Локални екстремуми функције $u = u(x;y;z)$

<u>Неопходан услов</u> : Да би диференцијабилна функција $u = u(x;y;z)$ имала екстремну вриједност у тачки A мора важити : $\frac{\partial u}{\partial x}(A) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(A) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial z}(A) = 0$.

Решавањем система једначина $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ добијамо као решење координате стационарних тачака. Оне могу али не морају бити тачке у којима функција достиже екстремне вриједности.

Довољан услов : Нека је A стационарна тачка за $u=u(x;y;z)$. Ако

1. $d^2u(A)>0$, за $dx^2+dy^2+dz^2\neq 0$ тада $u=u(x;y;z)$ има минимум у A
2. $d^2u(A)<0$, за $dx^2+dy^2+dz^2\neq 0$ тада $u=u(x;y;z)$ има максимум у A
3. $d^2u(A)$ мијења знак за $dx^2+dy^2+dz^2\neq 0$ тада функција нема екстрема у A
4. $d^2u(A)=0$ за неку комбинацију dx, dy и dz, $dx^2+dy^2+dz^2\neq 0$ тада нема одлуке

Или

Довољан услов (Силвестров критеријум):

Нека је A стационарна тачка за $u=u(x;y;z)$. Означимо

$$\Delta_1=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(A)\ ,\ \ \Delta_2=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(A)\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(A) & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(A)\end{vmatrix},\ \ \Delta_3=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(A) & \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}(A)\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(A) & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(A) & \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}(A)\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}(A) & \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}(A) & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(A)\end{vmatrix}$$

1. $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$, $\Delta_3>0$ тада функција $u=u(x;y;z)$ има минимум у A
2. $\Delta_1<0$, $\Delta_2>0$, $\Delta_3<0$ тада функција $u=u(x;y;z)$ има максимум у A
3. $\Delta_1\neq 0$, $\Delta_2\neq 0$, $\Delta_2\neq 0$ и не важи ни 1. ни 2. тада нема екстрема у A
4. $\Delta_1=0$ или $\Delta_2=0$ или $\Delta_3=0$ тада нема одлуке

1. Одредити локалне екстремуме функције $f(x;y)=x^3-2y^3-3x+6y$

Решење: Координате стационарних тачака добијамо из система једначина:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}3x^2-3&=0\\ -6y^2+6&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}x^2&=1\\ y^2&=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}x&=\pm 1\\ y&=\pm 1\end{aligned}$$

Стационарне тачке су $A(1;1)$, $B(1;-1)$, $C(-1;1)$, $D(-1;-1)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-12y$$

Први начин:

За $A(1;1)$ $\Delta_1=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)=6x\Big|_{(1;1)}=6>0$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6 & 0\\ 0 & -12\end{vmatrix}=-72<0$

У тачки $A(1;1)$ функција нема локални екстремум

За $B(1;-1)$ $\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B) = 6x\Big|_{(1;-1)} = 6 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(B) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(B) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(B) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 72 > 0$

У тачки $B(1;-1)$ функција има локални минимум $f_{\min} = f(B) = -6$

За $C(-1;1)$ $\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C) = 6x\Big|_{(-1;1)} = -6 < 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(C) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(C) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(C) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = 72 > 0$

У тачки $C(-1;1)$ функција има локални максимум $f_{\max} = f(C) = 6$

За $D(-1;-1)$ $\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(D) = 6x\Big|_{(-1;-1)} = -6 < 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(D) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(D) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(D) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(D) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = -72 < 0$

У тачки $D(-1;-1)$ функција нема локални екстремум

Други начин :

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2,$$

$$d^2 f(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M) dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M) dy^2$$

За $A(1;1)$: $d^2 f(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) dy^2 = 6dx^2 - 12dy^2$

$$d^2 f(A) = 6dx^2 - 12dy^2 = \begin{cases} -6dx^2 < 0 & dx = dy \\ 12dy^2 > 0 & dx = 2dy \end{cases},$$

$d^2 f(A)$ мијења знак па у тачки $A(1;1)$ функција нема локални екстремум

За $B(1;-1)$: $d^2 f(B) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B) dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(B) dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(B) dy^2 = 6dx^2 + 12dy^2 > 0$

У тачки $B(1;-1)$ функција има локални минимум $f_{\min} = f(B) = -6$

За $C(-1;1)$: $d^2 f(C) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C) dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(C) dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(C) dy^2 = -6dx^2 - 12dy^2 < 0$

У тачки $C(-1;1)$ функција има локални максимум $f_{\max} = f(C) = 6$

За $D(-1;-1)$: $d^2 f(D) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(D) dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(D) dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(D) dy^2 = -6dx^2 + 12dy^2$

Исто као и у тачки A и $d^2 f(D)$ мијења знак па у тачки $D(-1;-1)$ функција нема локални екстремум.

2. Одредити локалне екстремуме функције $f(x;y) = e^{-\left(x^2+y^2\right)}(x-2y)$

Решење: $f_{\min} = f(\frac{-1}{\sqrt{10}};\frac{2}{\sqrt{10}})$, $f_{\max} = f(\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{-2}{\sqrt{10}})$

3. Одредити локалне екстремуме функције $f(x;y;z) = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2$

Решење: Стационарне тачке одређујемо из :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 4x - y + 2z = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -x - 1 + 3y^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 2x + 2z = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y &= 4x + 2z = 2x \\ y^2 &= \frac{x+1}{3} \\ z &= -x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} (2x)^2 &= \frac{x+1}{3} \\ 12x^2 - x - 1 &= 0 \\ x_1 = \frac{1}{3} \quad x_2 &= \frac{-1}{4} \end{aligned}$$

Стационарне тачке су $A\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$ и $B\left(-\frac{1}{4};-\frac{2}{4};\frac{1}{4}\right)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2$$

У тачки $A\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$ је:

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = 4 > 0\ ,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 1 = 15 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(A) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 > 0$$

У тачки $A\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$ функција има локални минимум.

У тачки $B\left(-\frac{1}{4};-\frac{2}{4};\frac{1}{4}\right)$ је:

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B) = 4 > 0 \;, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(B) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(B) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(B) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -12 - 1 = -13 < 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(B) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(B) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(B) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(B) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(B) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(B) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(B) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(B) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -14 < 0$$

У тачки $B\left(-\frac{1}{4};-\frac{2}{4};\frac{1}{4}\right)$ функција нема локални екстремум.

Други начин :

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} dxdz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dydz + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4, \; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1, \; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 2, \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0, \; \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2$$

У тачки $A\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$ је $d^2 f(A) = 4dx^2 - 2dxdy + 4dxdz + 4dy^2 + 2dz^2$

$$d^2 f(A) = 2(2dx^2 - dxdy + 2dxdz + 2dy^2 + dz^2)$$

$$d^2 f(A) = 2(dx^2 + 2dxdz + dz^2 + dx^2 - dxdy + dy^2 + dy^2)$$

$$d^2 f(A) = 2((dx + dz)^2 + (dx - \frac{dy}{2})^2 + \frac{7}{4}dy^2)$$

$d^2 f(A) > 0$ за све $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$ па у тачки $A\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$ функција има локални минимум

У тачки $B\left(-\frac{1}{4};-\frac{2}{4};\frac{1}{4}\right)$ је $d^2 f(B) = 4dx^2 - 2dxdy + 4dxdz - 3dy^2 + 2dz^2$

За $dx \neq 0$ и $dy = dz = 0$ је $d^2 f(B) = 4dx^2 > 0$

За $dy \neq 0$ и $dx = dz = 0$ је $d^2 f(B) = -3dy^2 < 0$

$d^2 f(B)$ мијења знак па у тачки B нема локалног екстрема.

④ Naći lokalne ekstremume funkcije $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+(4-x-y-z)^2$

- DOMAĆI - Rješenje: $A(1,1,1)$ je lokalni minimum, $f_{min}(A)=4$

⑤ Izračunati ekstremne vrijednosti funkcije $z=z(x,y)$ koja je zadata implicitno.

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$$

Nađimo $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &: 2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}-2-4\frac{\partial z}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &: 2y+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+2-4\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} (2z-4)\frac{\partial z}{\partial x} &= 2-2x \\ (2z-4)\frac{\partial z}{\partial y} &= -(2y+2) \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{2-2x}{2z-4} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{-(2y+2)}{2z-4} \end{aligned} \right.$$

$$\text{Iz } \frac{\partial z}{\partial x}=0;\ \frac{\partial z}{\partial y}=0 \Rightarrow \begin{aligned} 2-2x&=0 \\ x&=1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -(2y+2)&=0 \\ y&=-1 \end{aligned}$$

Stacionarna tačka $S(1,-1)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1-x}{z-2}\right) = \frac{-1(z-2)-(1-x)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}}{(z-2)^2} = \frac{-(z-2)-(1-x)\cdot\frac{1-x}{z-2}}{(z-2)^2} =$$

$$= \frac{-(z-2)^2-(1-x)^2}{(z-2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-(y+1)}{(z-2)}\right) = \cancel{\frac{-1(z-2)-(-(y+1)\frac{\partial z}{\partial y})}{(z-2)^2} = \frac{-(z-2)^2+(y+1)^2}{(z-2)^3}}$$

$$= -(y+1)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{z-2}\right) = -(y+1)\cdot\frac{(-1)}{(z-2)^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(y+1)(1-x)}{(z-2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-(y+1)}{(z-2)}\right) = \frac{-1\cdot(z-2)-(-(y+1)\cdot\frac{\partial z}{\partial y})}{(z-2)^2} =$$

$$= \frac{(z-2)^2+(y+1)^2}{(z-2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,-1) = \frac{1}{4};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,-1)=0;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,-1) = \frac{1}{4}$$

$S(1,-1)$

$$x=1,\ y=-1 \Rightarrow 1^2+(-1)^2+z^2-2-2-4z-10=0$$

$$z^2-4z-12=0 \rightarrow z=6;\ z=-2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,-1)=\frac{-1}{4}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,-1)=0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,-1)=\frac{-1}{4}$$

Za $S(1,-1)$ $z=-2$

$$d^2z=\frac{1}{4}dx^2+\frac{1}{4}dy^2=\frac{1}{4}(dx^2+dy^2)>0 \text{ za } dx^2+dy^2\neq 0$$

$\underline{z_{min}=-2}$

Za $S(1,-1)$; $z=6$

$$d^2z=-\frac{1}{4}dx^2-\frac{1}{4}dy^2<0 \text{ za } dx^2+dy^2\neq 0$$

$\underline{z_{max}=6}$

-Uslovni ekstremumi-

① Odrediti ekstremum funkcije $f(x,y,z)=2x+y-2z$ pri uslovu $x^2+y^2+z^2=36$

$$F(x,y,z,\lambda)=2x+y-2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-36)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}&=2+2\lambda x=0\\ \frac{\partial F}{\partial y}&=1+2\lambda y=0\\ \frac{\partial F}{\partial z}&=-2+2\lambda z=0\\ x^2+y^2&+z^2=36 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 1+\lambda x&=0\\ 1+2\lambda y&=0\\ -1+\lambda z&=0\\ x^2+y^2+z^2&=36 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x&=\frac{-1}{\lambda}\\ y&=\frac{-1}{2\lambda}\\ z&=\frac{1}{\lambda} \end{aligned} \quad \lambda\neq 0$$

Uvrstimo u uslov: $\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}=36$

$$\frac{4+1+4}{4\lambda^2}=36 \Rightarrow 4\lambda^2=\frac{\cancel{9}\,1}{\cancel{36}\,4} \Rightarrow \lambda^2=\frac{1}{16}$$

$$\underline{\lambda=\pm\frac{1}{4}}$$

Stacionarne tačke:

za $\lambda_1=\frac{1}{4}$ $S_1(-4,-2,4)$

za $\lambda_2=\frac{-1}{4}$; $S_2(4,2,-4)$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=2\lambda;\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=0;\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}=0;\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=2\lambda;\ \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}=0;\ \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=2\lambda$$

Za $S_1(-4,-2,4)$ $\lambda = \frac{1}{4}$

$d^2F(S_1) = 2\cdot\frac{1}{4}dx^2 + 2\cdot\frac{1}{4}dy^2 + 2\cdot\frac{1}{4}dz^2 = \frac{1}{2}(dx^2+dy^2+dz^2) > 0$

(za $dx^2+dy^2+dz^2 \neq 0$)

Za $S_2(4,2,-4)$ $\lambda = -\frac{1}{4}$

$d^2F(S_2) = -\frac{1}{2}(dx^2+dy^2+dz^2) < 0$ (za $dx^2+dy^2+dz^2 \neq 0$)

Funkcija f na $x^2+y^2+z^2=36$ u tački S_1 ima lokalni minimum, a u S_2 lokalni maksimum.

$f_{min}(S_1) = -18$ $\quad f_{max}(S_2) = 18$

⑥ Naći ekstremum funkcije $f(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$ pri uslovu $xyz = 4$.

$F(x,y,z,\lambda) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - 4)$

$\frac{\partial F}{\partial x} = y + 2z + \lambda yz = 0$ (1)

$\frac{\partial F}{\partial y} = x + 2z + \lambda xz = 0$ (2)

$\frac{\partial F}{\partial z} = 2x + 2y + \lambda xy = 0$ (3)

$xyz = 4$

$(1)\cdot x - (2)\cdot y \Rightarrow$

$\Rightarrow xy + 2xz + \cancel{\lambda xyz} - xy - 2zy - \cancel{\lambda xyz} = 0$

$2z(x-y) = 0 \Rightarrow \underline{z = 0 \wedge x = y}$ (*)

$(2)\cdot y - (3)\cdot z \Rightarrow$

$\Rightarrow xy + 2yz + \cancel{\lambda xyz} - 2xz - \cancel{2yz} - \cancel{\lambda xyz} = 0$

$x(y - 2z) = 0 \Rightarrow \underline{x = 0 \wedge y = 2z}$ (**)

Za $z = 0$, $x\cdot y\cdot 0 = 4$ $(\perp)$ Iz prve jednačine važi $x = y$ (*)

Za $x = 0$, $0\cdot y\cdot z = 4$ $(\perp)$ Iz j-ne (**) važi $y = 2z$

$x\cdot x\cdot\frac{x}{2} = 4$

$x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$

$y = x = 2$

$z = \frac{y}{2} = 1$

Stacionarna tačka $S(2,2,1)$

$2 + 2\cdot 1 + \lambda\, 2\cdot 1 = 0$

$2\lambda = 4$

$\lambda = -2$

$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=0$; $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}=1+\lambda z$; $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}=2+\lambda y$; $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=0$; $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}=2+\lambda x$

$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=0$

$$d^2F=2(1+(-2)\cdot 1)dxdy+2\cdot(2-2\cdot 2)dxdz+2\cdot(2-2\cdot 2)dydz=$$
$$=2(-dxdy-2dxdz-2dydz)$$

Diferencirajmo uslov: $(xyz=4)$ [jer ne znamo kakav je znak d^2F!]

$$yzdx+xzdy+xydz=0$$

Ako uvrstimo $S(2,2,1)$

$$2dx+2dy+4dz=0\ /\ 2$$

$$dz=-\frac{(dx+dy)}{2} \rightarrow$$ [izrazimo jedan član preko drugog dio i vratimo u d^2F]

$$d^2F=2\left(-dxdy-2dx\cdot\left(\frac{-(dx+dy)}{2}\right)-2dy\cdot\left(\frac{-(dx+dy)}{2}\right)\right)=$$
$$=2(-dxdy+dx(dx+dy)+dy(dx+dy))=$$
$$=2(-dxdy+dx^2+dxdy+dxdy+dy^2)=$$
$$=2\left(\left(dx+\frac{1}{2}dy\right)^2-\frac{1}{4}dy^2+\frac{1}{1}dy^2\right)$$
$$=2\left(\left(dx+\frac{1}{2}dy\right)^2+\frac{3}{4}dy^2\right)>0 \quad \text{za } dx^2+dy^2\neq 0$$

[$d^2F=0$ ako $dx+\frac{1}{2}dy=0$, $dy=0$ $\Rightarrow dx=dy=0$]

$S(2,2,1)$ tačka uslovnog minimuma

③ Naći ekstremum funkcije $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3$ pri uslovu $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ - DOMAĆI -

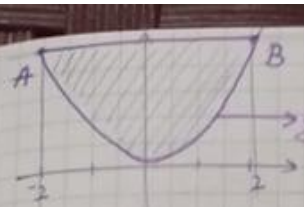
Rj: $A(3,3,3)$ $B(1,1,-1)$ $C(1,-1,1)$ $D(-1,1,1)$

$f_{MIN}=f(A)=81$

B,C,D nisu ekstremumi (drugi diferencijal mijenja znak)

- Najmanja i najveća vrijednost funkcije -

① Naći najmanju i najveću vrijednost funkcije f, gdje $f(x,y)=2x^3+4x^2+y^2-2xy$ u oblasti: $D=\{(x,y): y\geq x^2,\ y\leq 4\}$



$y=4 \qquad x^2=4 \qquad A(-2,4)$

$x=\pm 2 \qquad B(2,4)$

→ granice

→ A,B – granične tačke

Prvo nađimo stacionarne tačke unutar oblasti [isto kao lokalne ekstremume]

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 6x^2+8x-2y=0 \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= 2y-2x=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &y=x \\ &6x^2+8x-2x=0 \\ &6x(x+1)=0 \Rightarrow x=0,\ x=-1 \end{aligned}$$

$S_1(0,0) \quad S_2(-1,-1) \notin D$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=12x+8 \ ; \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}=-2 \ ; \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=2$$

$$d^2h = 8dx^2-4dxdy+2dy^2 = 2(4dx^2-2dxdy+dy^2)=$$
$$=8\left(dx^2-\frac{dxdy}{2}+\frac{dy^2}{4}\right)=8\left(\left(dx-\frac{dy}{4}\right)^2-\frac{dy^2}{16}+\frac{dy^2}{4}\right)=$$
$$=8\left(\left(dx-\frac{dy}{4}\right)^2+\frac{3dy^2}{16}\right)>0 \quad \text{za } dx^2+dy^2\neq 0 \Rightarrow \text{minimum}$$

$z_{min}=h(0,0)=0$

Nađimo ekstremume na granicama:

1) $y=4 \quad -2\le x\le 2$ (dio prave)

$z=h(x,4)=2x^3+4x^2+16-8x=2x^3+4x^2-8x+16$

$z'=6x^2+8x-8=0$

$x_{1/2} \quad x_1=\frac{2}{3},\ x_2=-2$ (zadovolj uslove $-2\le\frac{2}{3}$, $-2\le 2$)

$S_3(-2,4) \quad S_4\left(\frac{2}{3},4\right)$

2) Na dijelu parabole $y=x^2 \quad -2\le x\le 2$

$g(x)=h(x,x^2)=2x^3+4x^2+x^4-2x^3=x^4+4x^2$

$g'(x)=4x^3+8x=0$

$4x(x^2+2)=0 \Rightarrow x=0$

za $x=0, y=0$ · Tačka $(0,0)$ već razmatrana

Nađimo vrijednost fje u tačkama S_1, S_3, S_4, B

$h(0,0)=0 \qquad h\left(\frac{2}{3},4\right)=13{,}03$

$h(-2,4)=32 \qquad h(2,4)=32 \qquad$ (B) jer je granična tačka pa je razmatramo

SHOT ON REDMI 9
AI QUAD CAMERA

Najmanja vrijednost je $\min\{0{,}32, 13.03, 32\} = 0$

$f_{min}(0,0) = 0$

Najveća vrijednost je $\max\{0{,}32, 13.03, 32\} = 32$

$f_{max}(-2,4) = f_{max}(2,4) = 32$

② Naći najveću i najmanju vrijednost funkcije

$z(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 4x$ na oblasti : $D = \{(x,y) : x \geq 0; y \geq 0; 2x + 3y - 12 \leq 0\}$

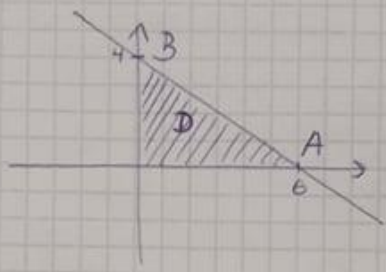
$2x + 3y = 12$

$3y = 12 - 2x$

$y = 4 - \frac{2}{3}x$

$x = 0 \Rightarrow y = 4$

$y = 0 \Rightarrow x = 6$



Nađimo ekstremume unutar D

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y - 4 = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y = 0$ $\Rightarrow 3y = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$, $x = 2y$ $\Rightarrow \underbrace{S_1\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right) \in D}$

stacionarna tačka

(vidimo sa slike ili provjerimo $\frac{8}{3} \geq 0$, $\frac{4}{3} \geq 0$ i $2 \cdot \frac{8}{3} + 3 \cdot \frac{4}{3} - 12 \leq 0$)

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$

$2 > 0$; $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0 \Rightarrow$ minimum

Nađimo ekstremne vrijednosti na granicama :

1) OA : $y = 0$ $\quad 0 \leq x \leq 6$

$h(x) = z(x,0) = x^2 - 4x$

$h'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

$h(2) = z(2,0) = -4$

$\underline{S_2(2,0)}$

2) OB : $x = 0$ $\quad 0 \leq y \leq 4$

$h(y) = z(0,y) = y^2$

$h'(y) = 2y = 0 \Rightarrow y = 0$ $\quad \underline{S_3(0,0)}$

3) AB: $y = 4 - \frac{2}{3}x \qquad 0 \le x \le 6$

$g(x) = z(x, 4-\frac{2}{3}x) = x^2 - x(4-\frac{2}{3}x) + (4-\frac{2}{3}x)^2 - 4x =$

$= x^2 - 4x + \frac{2}{3}x^2 + 16 - \frac{16}{3}x + \frac{4}{9}x^2 - 4x = \frac{19x^2}{9} - \frac{40}{3}x + 16$

$g'(x) = \frac{38x}{9} - \frac{40}{3} = 0 \quad / \cdot 9$

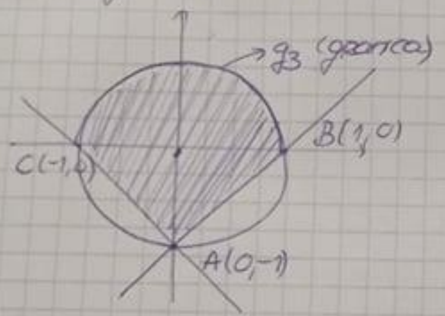
$38x - 120 = 0 \Rightarrow x = \frac{60}{19}; \quad y = \frac{108}{3 \cdot 19}$

$S_4(\frac{60}{19}, \frac{36}{19})$

Nađemo $z(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$, $z(2,0)$; $z(0,0)$, $z(\frac{60}{19}, \frac{36}{19})$, $z(6,0)$, $z(0,4)$. Od dobijenih vrijednosti nađemo najmanju i najveću vrijednost.

③ Naći najmanju i najveću vrijednost funkcije $z(x,y) = 2x^2 + y^2 - 3$ na oblasti ograničenoj sa $x^2+y^2=1$; $x-y=1$; $x+y=-1$

Nacrtajmo oblast



Nađimo ekstremume u unutrašnjosti

$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \qquad \underline{S_1(0,0)}$

$J_z \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow x = 0$

$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad y = 0$

Nađimo ekstremume na granicama:

AC: $x - y = 1 \rightarrow y = x - 1$

$h(x) = z(x, x-1) = 2x^2 + (x-1)^2 - 3 = 3x^2 - 2x - 2$

$h'(x) = 6x - 2 = 0 \Rightarrow x = +\frac{1}{3} \qquad \underline{S_2(+\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})}$ - pripada oblasti

AB: $x + y = -1 \Rightarrow y = -x - 1$

$g(x) = z(x, -x-1) = 2x^2 + (-x-1)^2 - 3 = 3x^2 + 2x - 2$

$g'(x) = 6x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \qquad \underline{S_3(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})}$ - pripada oblasti granica g_3 (dio kružnice):

I način: J-na polukruga je $y=\sqrt{1-x^2}$. Uvrstimo $y=\sqrt{1-x^2}$ u funkciju $z(x,y)$. Na taj način dobijemo f-ju $g(x)$. $g'(x)=0 \Rightarrow$ $x= \dots$

II način: $F(x,y)=2x^2+y^2-3+\lambda(x^2+y^2-1)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 4x+2\lambda x=0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2y+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 2x(2+\lambda)&=0 \Rightarrow x=0,\ \lambda=-2 \\ 2y(1+\lambda)&=0 \quad\ y=0,\ \lambda=-1 \end{aligned}$$

Za $x=0$, $y^2=1 \Rightarrow y=\pm1$. Pošto je $y>0$, $y=1$ (gornja polukruga)

$S_4(0,1)$

$2\cdot 1+2\lambda\cdot 1=0 \Rightarrow \lambda=-1$

Za $\lambda=-2$

$2y(1-2)=0 \Rightarrow y=0$ pa $x^2=1 \Rightarrow x=\pm1$

$S_5(1,0)$ $\quad$ $S_6(-1,0)$

Granične tačke: $A(0,-1)$ $B(1,0)$ $C(-1,0)$

Nađemo: $z(0,0)=-3$ $\quad$ $z(1,0)=-1$

$z\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)=-\frac{7}{3}$ $\quad$ $z(-1,0)=-1$

$z\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)=-\frac{7}{3}$ $\quad$ $z(0,-1)=-2$

$z(0,1)=-2$

$z_{min}(0,0)=-3$

$z_{max}(-1,0)=z_{max}(1,0)=-1$

Najmanja S_1, najveća S_5 i S_6.