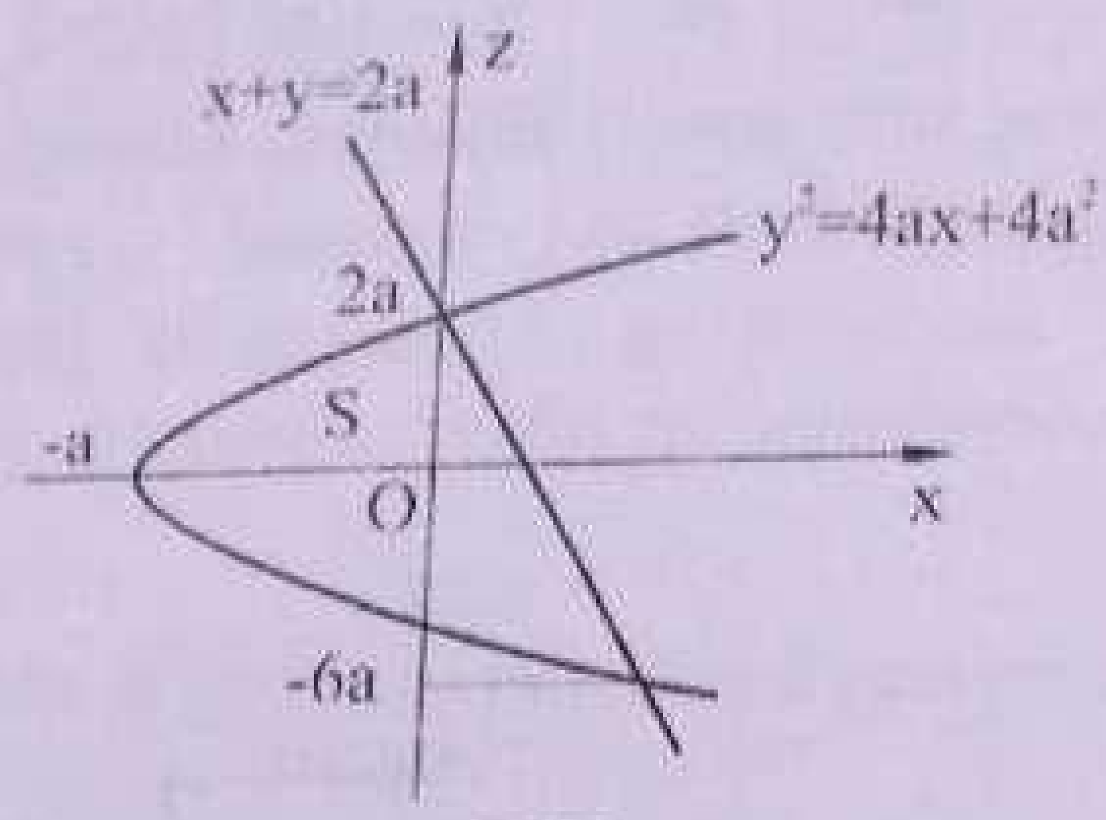
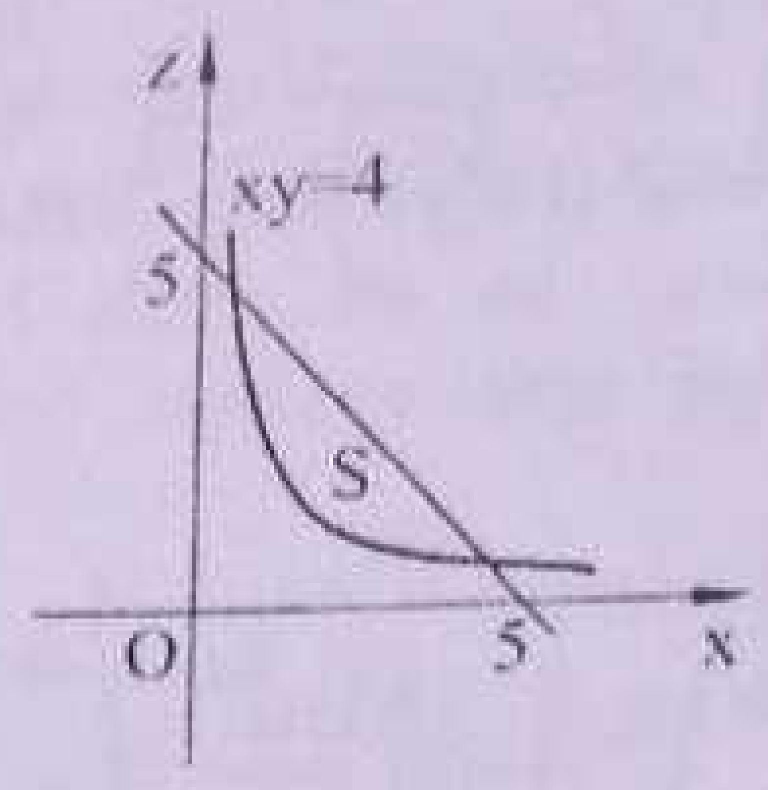


Sl 9



Sl 10

Primjer 7. Naći površinu figure S ograničene linijama: $xy = 4$ i $x + y = 5$.

Ove dvije linije (Sl 10) sijeku se u tačkama $(1,4)$ i $(4,1)$, pa je $S: \begin{cases} 1 \le x \le 4 \\ \dfrac{4}{x} \le y \le 5 - x \end{cases}$.

Slijedi,

$$P_S = \iint_S dxdy = \int_1^4 dx \int_{\frac{4}{x}}^{5-x} dy = \int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x}\right) dx = \frac{15}{2} - 8\ln 2 \text{ (kvadratanih jedinica).}$$

Zadatak 1. Izmijeniti poredak integracije $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$.

R. $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$.

Zadatak 2. Zamjenjujući poredak integracije zapisati dati izraz u obliku dvostrukog integrala: $\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$.

R. $\int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x,y)dx$.

d) Smjena promjenljivih u dvostrukom integralu

Neka je u ravni Oxy zadata oblast S ograničena glatkom krivom L. Uvedimo smjene

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v). \tag{9}$$

Pretpostavimo da se iz (9) u i v definišu na jednoznačan način:

$$u = u(x,y), \quad v = v(x,y). \tag{10}$$

Označimo sa S' sliku oblasti S transformacijama (10). Pomoću formula (10) svakoj tački $M(x,y)$ oblasti S pridružuje se neka tačka $M'(u,v)$ oblasti S'. Formule (9) nazivamo formulama transformacije koordinata, a formule (10) –formulama obratnih transformacija.

Ako funkcije (9) imaju u oblasti S' neprekidne parcijalne izvode prvog reda i ako je izraz

$$J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix} \qquad (11)$$

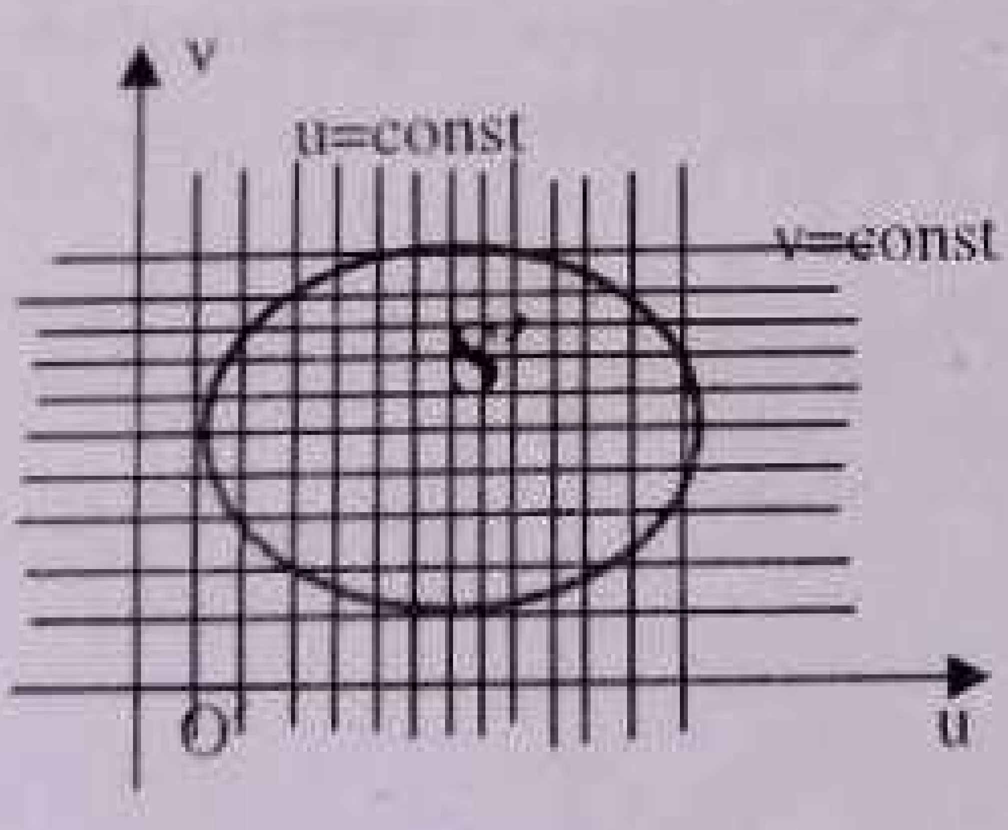
različit od nule u oblasti S', tada važi formula zamjene promjenljivih u dvostrukom integralu:

$$\iint_S f(x,y)dxdy=\iint_{S'} f\left[x(u,v),y(u,v)\right]\left|J\right|dudv\,. \qquad (12)$$

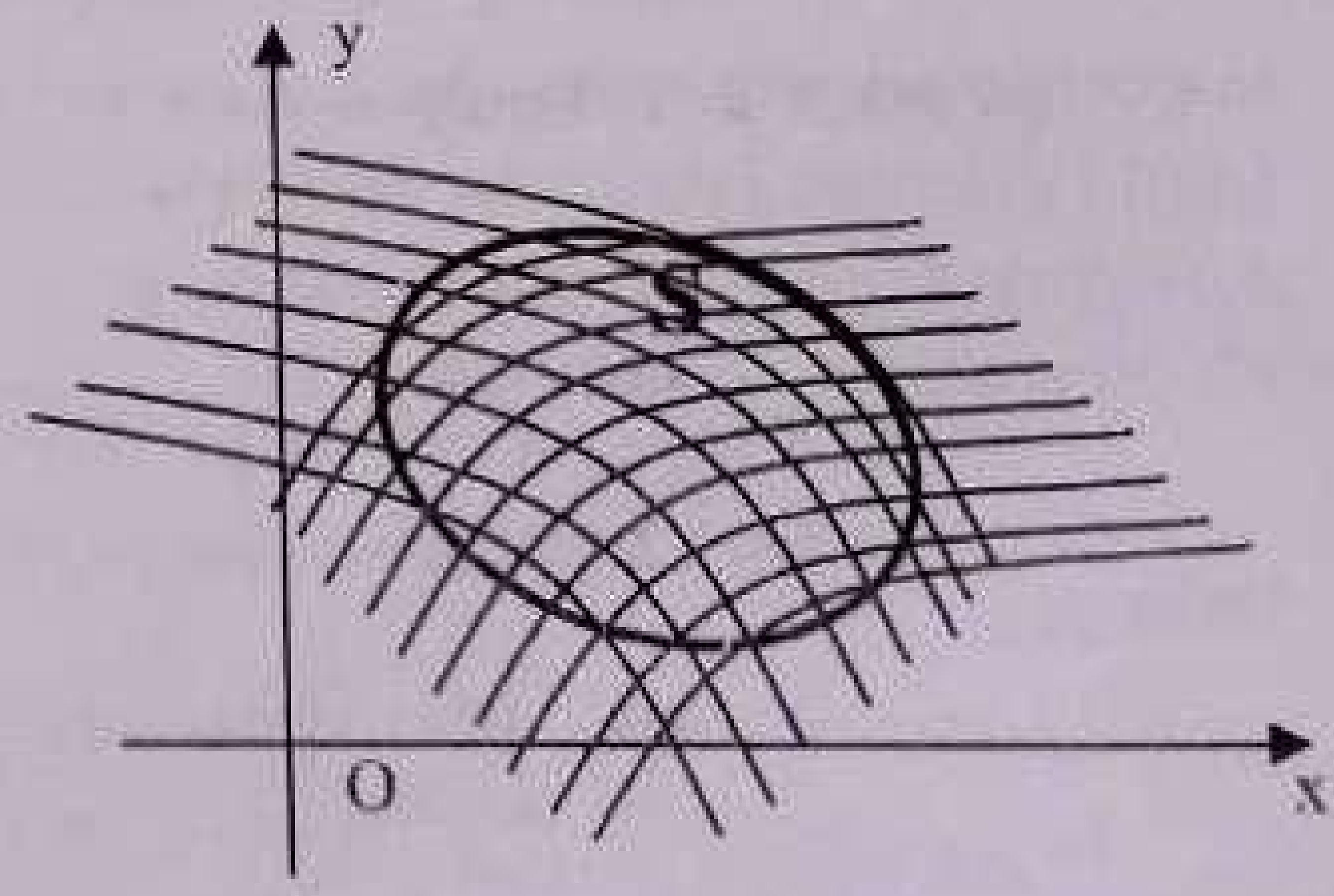
Izraz J (iz (11)) nazivamo funkcionalna determinanta funkcija $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$. U upotrebi je i naziv jakobijan (po imenu njemačkog matematičara Jakobi).

Dokažimo formulu (12).

Formulama (9) uspostavljena je obostrana jednoznačna veza između tačaka oblasti S i S'.



Sl 11

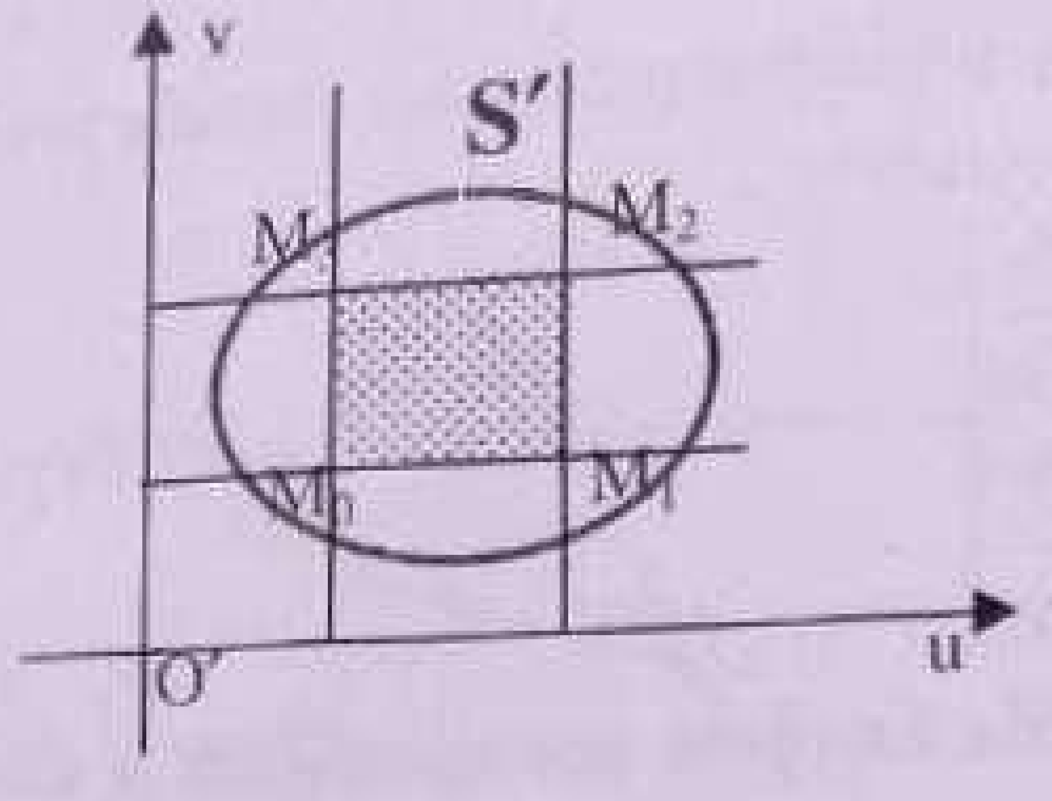


Sl 12

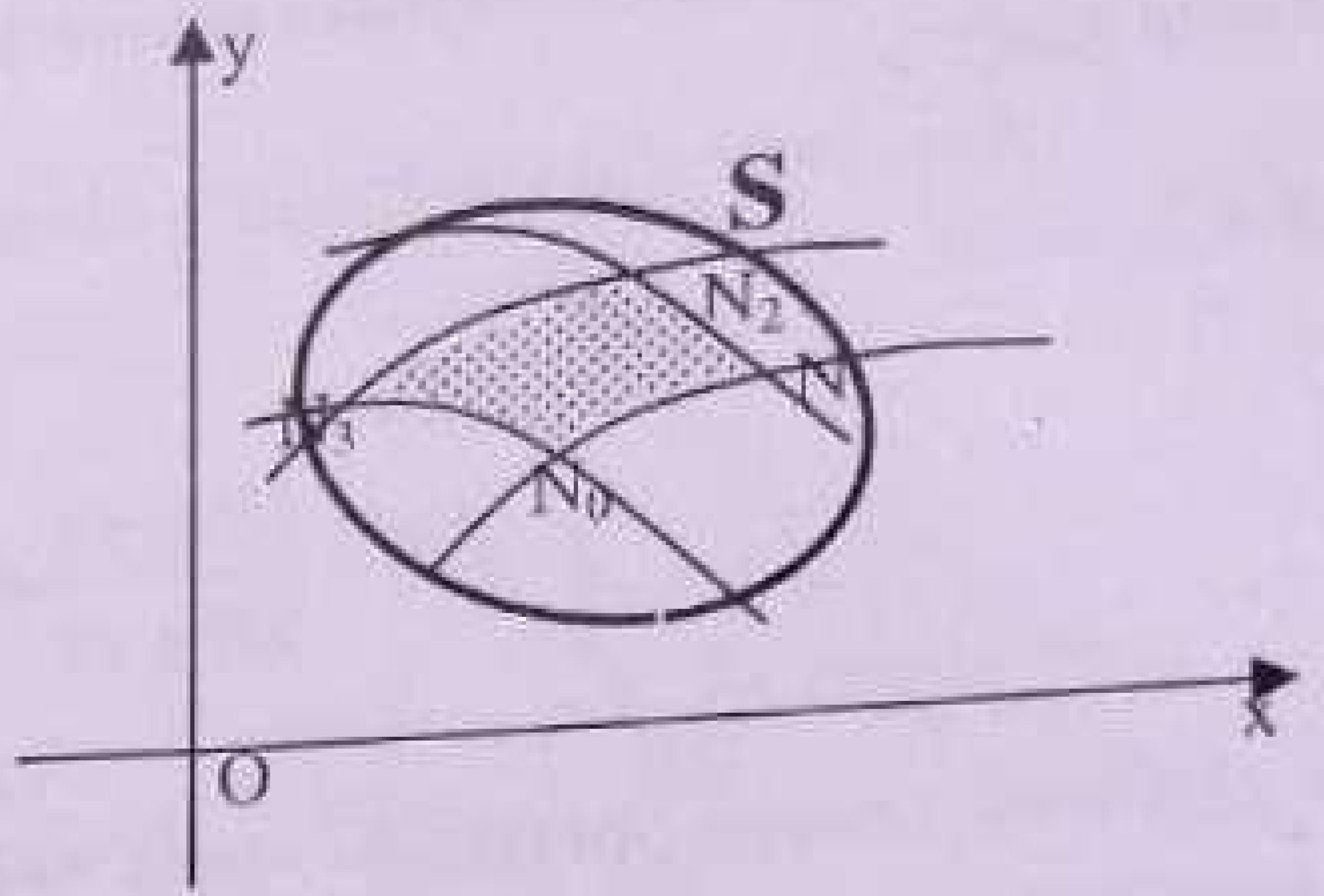
Razmotrimo u oblasti S' pravu u=const (Sl 11). Saglasno formulama (10) njoj u ravni Oxy odgovara neka, u opštem slučaju, kriva linija (Sl 12). Isto ovo važi i za prave v=const. Neka je u ravno $O'uv$ dat pravougaonik ograničen pravama:

$u=u_0$, $u=u_0+\Delta u$, $v=v_0$, $v=v_0+\Delta v$.

Tjemena ovog pravougaonika označimo sa $M_0(u_0,v_0)$, $M_1(u_0+\Delta u,v_0)$, $M_2(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v)$ i $M_3(u_0,v_0+\Delta v)$ (Sl 13). Pravougaoniku $M_0M_1M_2M_3$ odgovara u ravni Oxy krivolinijski četvorougao $N_0N_1N_2N_3$ čije su koordinate: $N_0(x_0,y_0)$, $N_1(x_1,y_1)$, $N_2(x_2,y_2)$ i $N_3(x_3,y_3)$ (Sl 14), gdje je



Sl 13



Sl 14

$$x_0=\varphi(u_0,v_0),\ x_1=\varphi(u_0+\Delta u,v_0),\ x_2=\varphi(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v),\ x_3=\varphi(u_0,v_0+\Delta v),$$
$$y_0=\psi(u_0,v_0),\ y_1=\psi(u_0+\Delta u,v_0),\ y_2=\psi(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v),\ y_3=\psi(u_0,v_0+\Delta v).$$

Površina četvorougla $M_0M_1M_2M_3$ je $\Delta S'=\Delta u\Delta v$, a površina ΔS krivolinijskog četvorougla $N_0N_1N_2N_3$ se može, sa taćnošću do beskonačno male veličine, zamijeniti površinom paralelograma konstruisanog nad vektorima $\overrightarrow{N_0N_1}$ i $\overrightarrow{N_0N_3}$, tj.

$\Delta S=\left|\overrightarrow{N_0N_1}\times\overrightarrow{N_0N_3}\right|$. Kako je

$$\overrightarrow{N_0N_1}=\left(\varphi(u_0+\Delta u,v_0)-\varphi(u_0,v_0),\psi(u_0+\Delta u,v_0)-\psi(u_0,v_0)\right),$$

i

$$\overrightarrow{N_0N_3}=\left(\varphi(u_0,v_0+\Delta v)-\varphi(u_0,v_0),\psi(u_0,v_0+\Delta v)-\psi(u_0,v_0)\right),$$

to poslije primjene teoreme Lagranža (ako je funkcija $y=f(x)$ neprekidna na odsječku $[a,b]$ i diferencijabilna na intervalu (a,b), tada postoji tačka $c\in(a,b)$ takva da je $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$) dobijamo da je

$$\overrightarrow{N_0N_1}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u,\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u\right)\ \text{i}\ \overrightarrow{N_0N_3}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v,\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v\right).$$

Dalje je

$$\Delta S=\left|\overrightarrow{N_0N_1}\times\overrightarrow{N_0N_3}\right|=\left\|\begin{matrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{matrix}\right\|\Delta u\Delta v,$$

ili što je isto

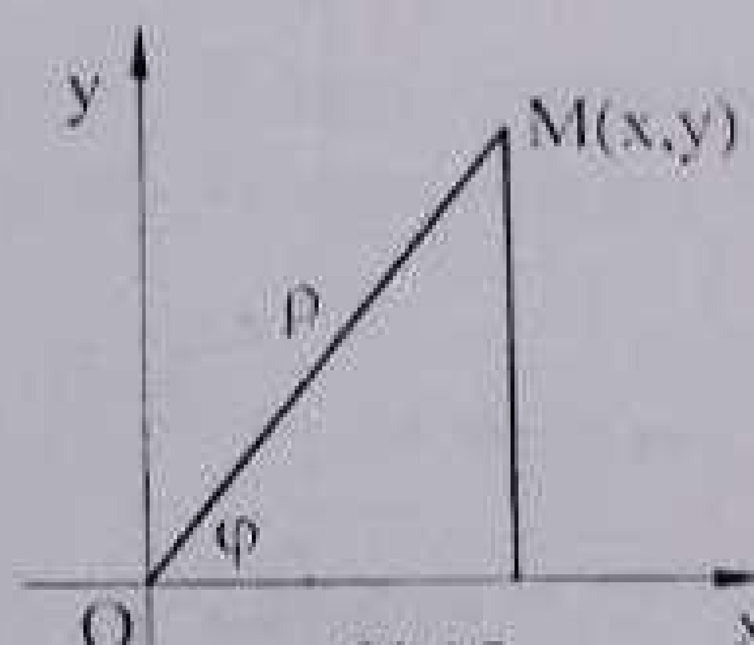
$$\Delta S=|J|\Delta u\Delta v,$$

gdje je $J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$. Determinantu J nazivamo funkcionalna determinanta, ili jakobijan. Iz uslova datih na funkcije φ i ψ slijedi $J\neq 0$.

Vratimo se dvostrukom integralu $\iint\limits_S f(x,y)dxdy$. Neka je funkcija f neprekidna na oblasti S i $f(x,y)=f((\varphi(u,v),\psi(u,v))\equiv F(u,v)$. Tada je $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta S_k = \sum\limits_{k=1}^{n} F(u_k,v_k)\Delta S_k$. Poslije graničnog prelaza za $\lambda \to 0$ (λ -najveći dijametar u podjeli ΔS_i, $i=1, 2, 3,..., n$) i zamjene $\Delta S_k = |J|\Delta S_k'$, dobijamo jednakost (12).

Primjer 8. Naći formu dvostrukog integrala u polarnim koordinatama.
Veza između Dekartovih koordinata tačke (x,y) tačke M i njenih polarnih koordinata (ρ,φ) (Sl 15) je:

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi. \qquad (13)$$



Sl 15

Neka se oblast S smjenama (13) preslikava u oblast S'.
Izračunajmo jakobijan:

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho .$$

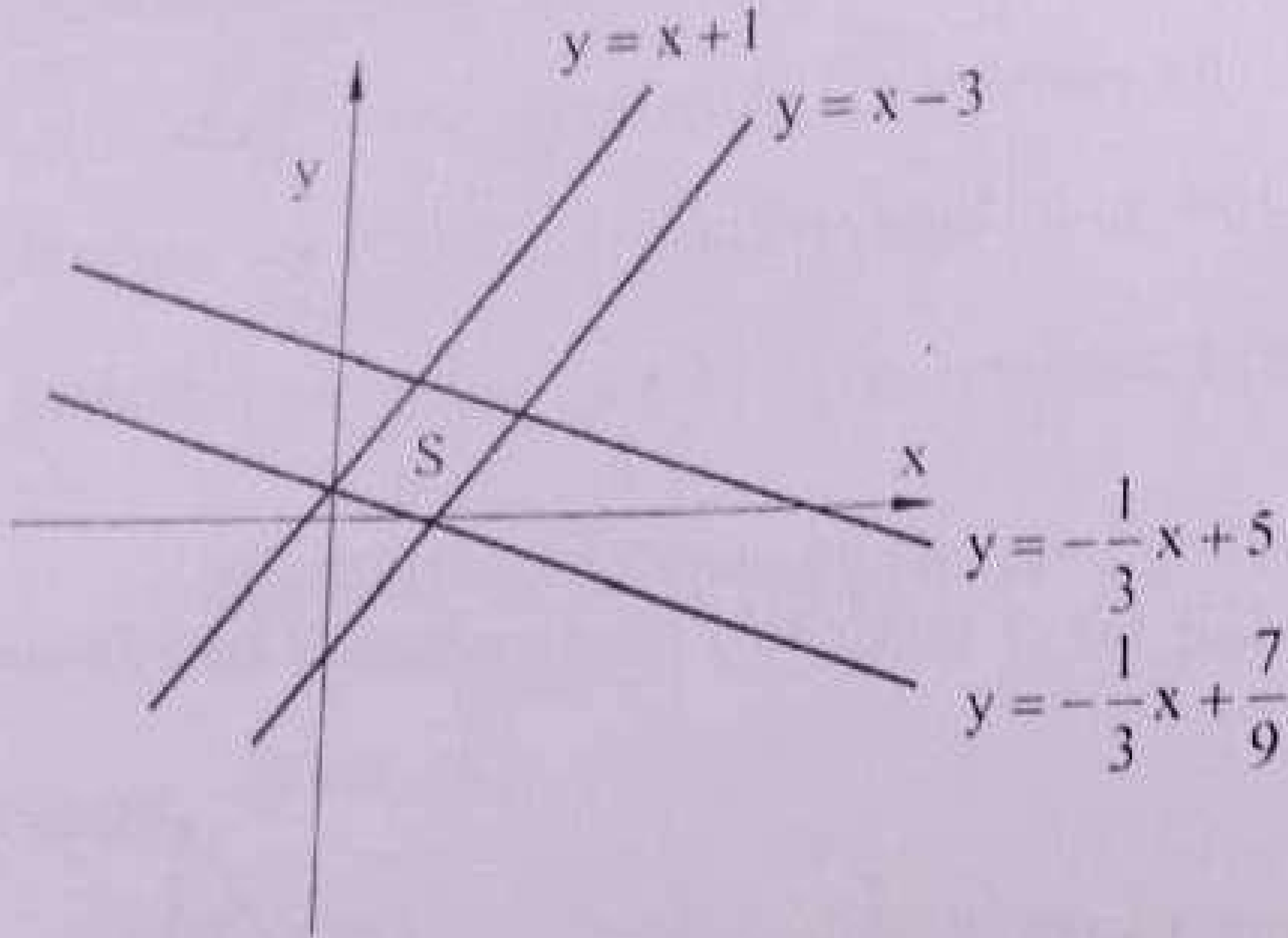
Tada je, saglasno formuli (12), $\iint\limits_S f(x,y)dxdy = \iint\limits_{S'} f[\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi]\rho d\rho d\varphi$.

Primjer 9. Izračunati $\iint\limits_S (y-x)dxdy$, gdje je S oblast ograničena pravama:

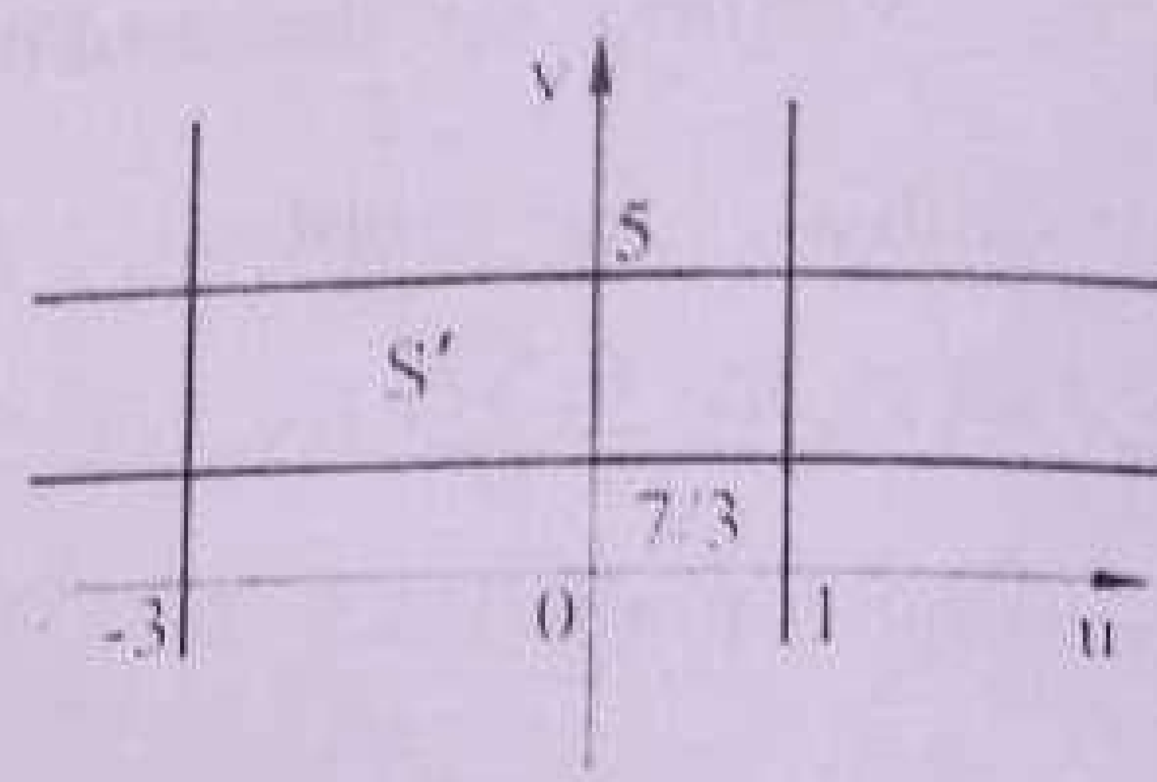
$$y=x+1,\ y=x-3,\ y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{9},\ y=-\frac{1}{3}x+5.$$

Smjenama $u=y-x$, $v=y+\frac{1}{3}x$, odnosno $x=\frac{-3u+3v}{4}$, $y=\frac{u+3v}{4}$, dobijamo da se oblast S (Sl 16) preslikala u oblast S' (Sl 17) koju ograničavaju prave: $u=1$, $u=-3$, $v=\frac{7}{9}$, $v=5$, tj. $S':\begin{cases} -3\le u\le 1 \\ \frac{7}{9}\le v\le 5 \end{cases}$. Kako je $J=\begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = -\frac{3}{4}$, to je

$$\iint\limits_S (y-x)dxdy = \iint\limits_{S'} u\left|-\frac{3}{4}\right|dudv = \int\limits_{-3}^{1} du \int\limits_{\frac{7}{9}}^{5} \frac{3}{4}udv = -\frac{38}{3}.$$



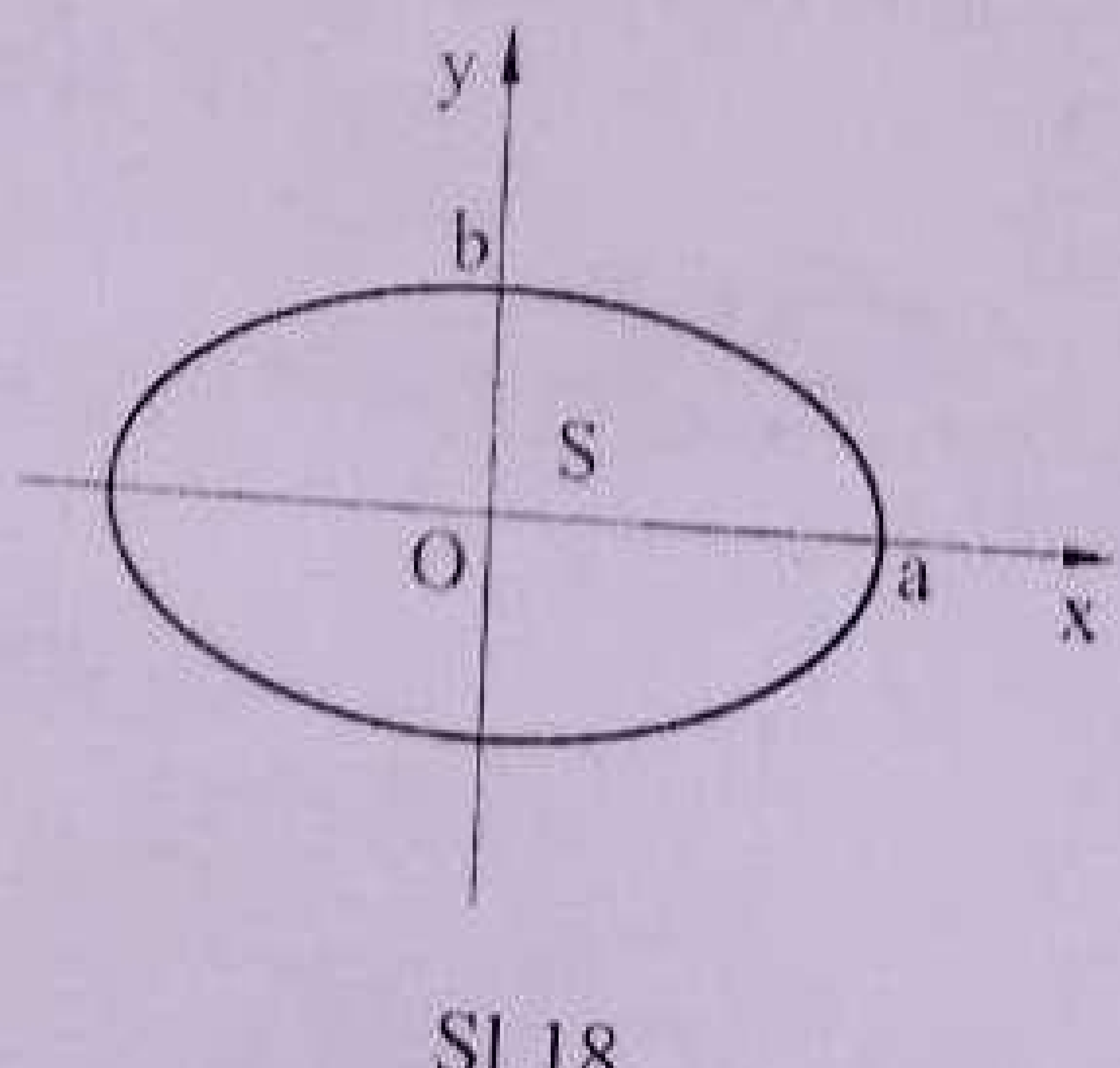
Sl 16



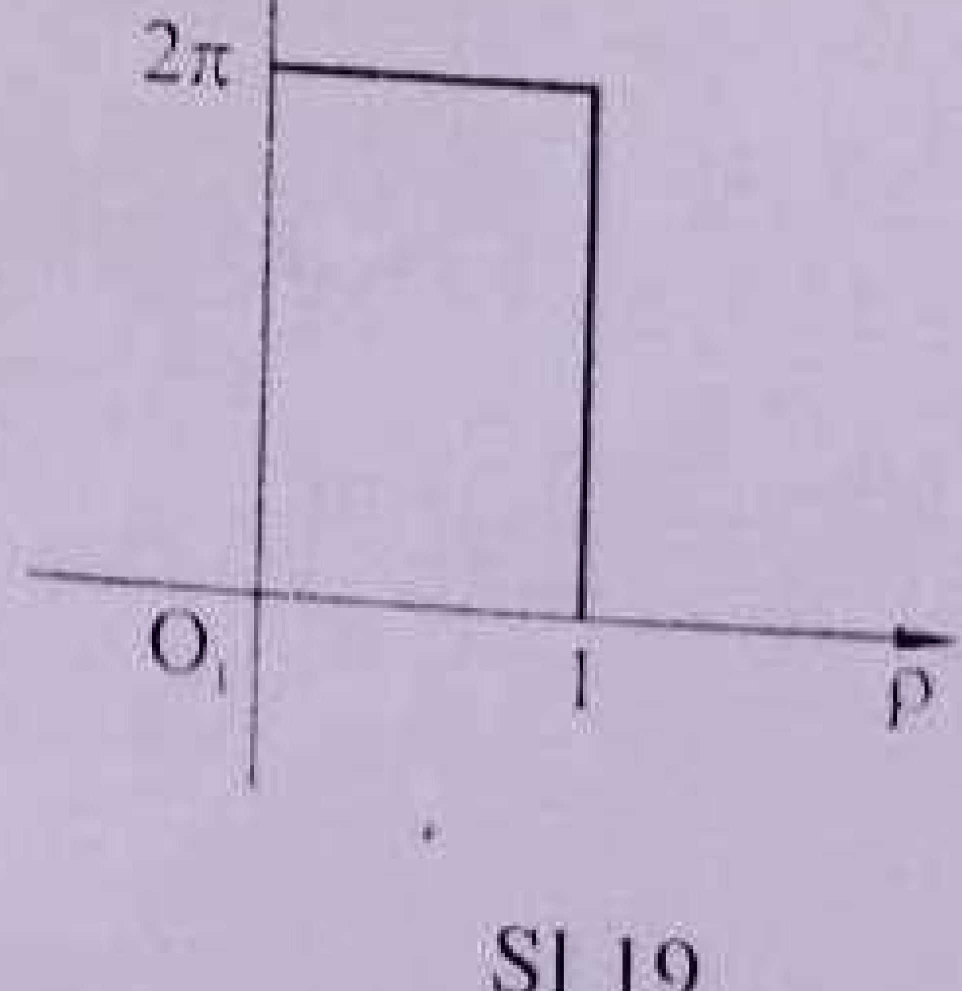
Sl 17

Primjer 10. Izračunati $\iint\limits_S \frac{dxdy}{\sqrt{c^2-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$ $(c>1)$, gdje je S oblast ograničena elipsom $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Uvedimo (uopštene) polarne koordinate: $x=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$. Tada se oblast S (Sl 18) preslikava u oblast $S':\begin{cases}0\le\rho\le 1\\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{cases}$ (Sl 19). Dalje je $J=\begin{vmatrix}a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi\\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi\end{vmatrix}=ab\rho$ i



Sl 18



Sl 19

$$\iint\limits_{S} \frac{dxdy}{\sqrt{c^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dxdy = \iint\limits_{S'} \frac{ab\rho}{\sqrt{c^2 - \rho^2}} d\rho d\varphi =$$

$$ab\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{c^2 - \rho^2}} = ab\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\left(-\sqrt{c^2-\rho^2}\,\Big|_0^1\right) = 2ab\pi\left(c - \sqrt{c^2 - 1}\right).$$

e) Primjene dvostrukog integrala

Neke primjene dvostrukog integrala smo već naveli (zapremina cilindra, površin ravnog lika i masa ravne ploče). Navedimo još jednu primjenu iz geometrije, nekoliko primjena iz mehanike.

1) Izračunavanje površine površi

Neka je površ Σ zadata jednačinom $z = z(x, y)$ i neka je njena projekcija na rava Oxy oblast S. Pretpostavimo da je u oblasti S funkcija $z = z(x, y)$ neprekidna i da njoj ima neprekidne parcijalne izvode $z'_x(x, y)$ i $z'_y(x, y)$. Može se dokazati da površina P_Σ površi Σ izračunava po formuli

$$P_\Sigma = \iint\limits_S \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)}\,dxdy. \qquad (14)$$

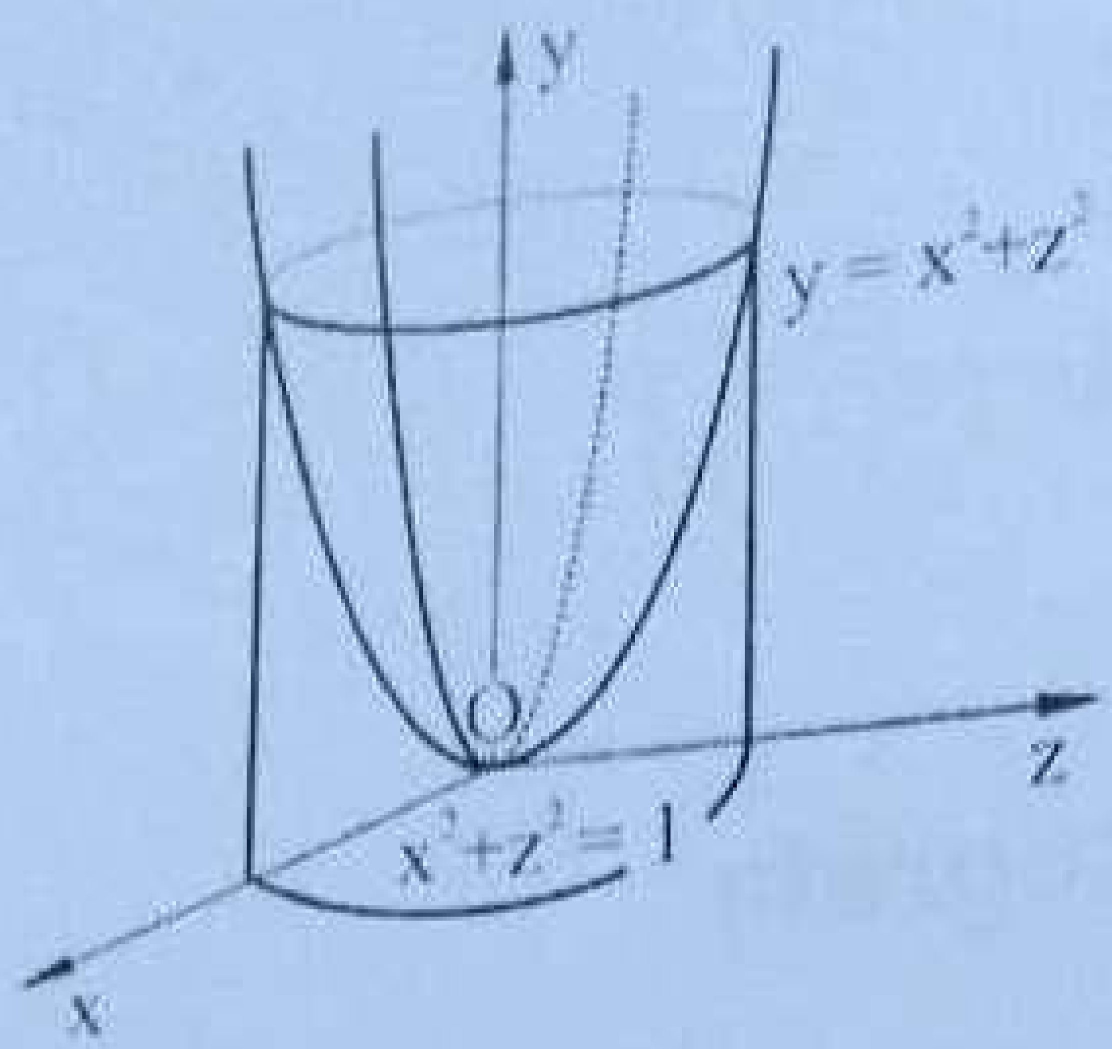
Primjer 11. Izračunati površinu dijela paraboloida $y = x^2 + z^2$ koju isij cilindar $x^2 + z^2 = 1$ u I oktantu.

Na Sl 20 je data površ Σ čiju površinu treba da izračunamo. Dalje je

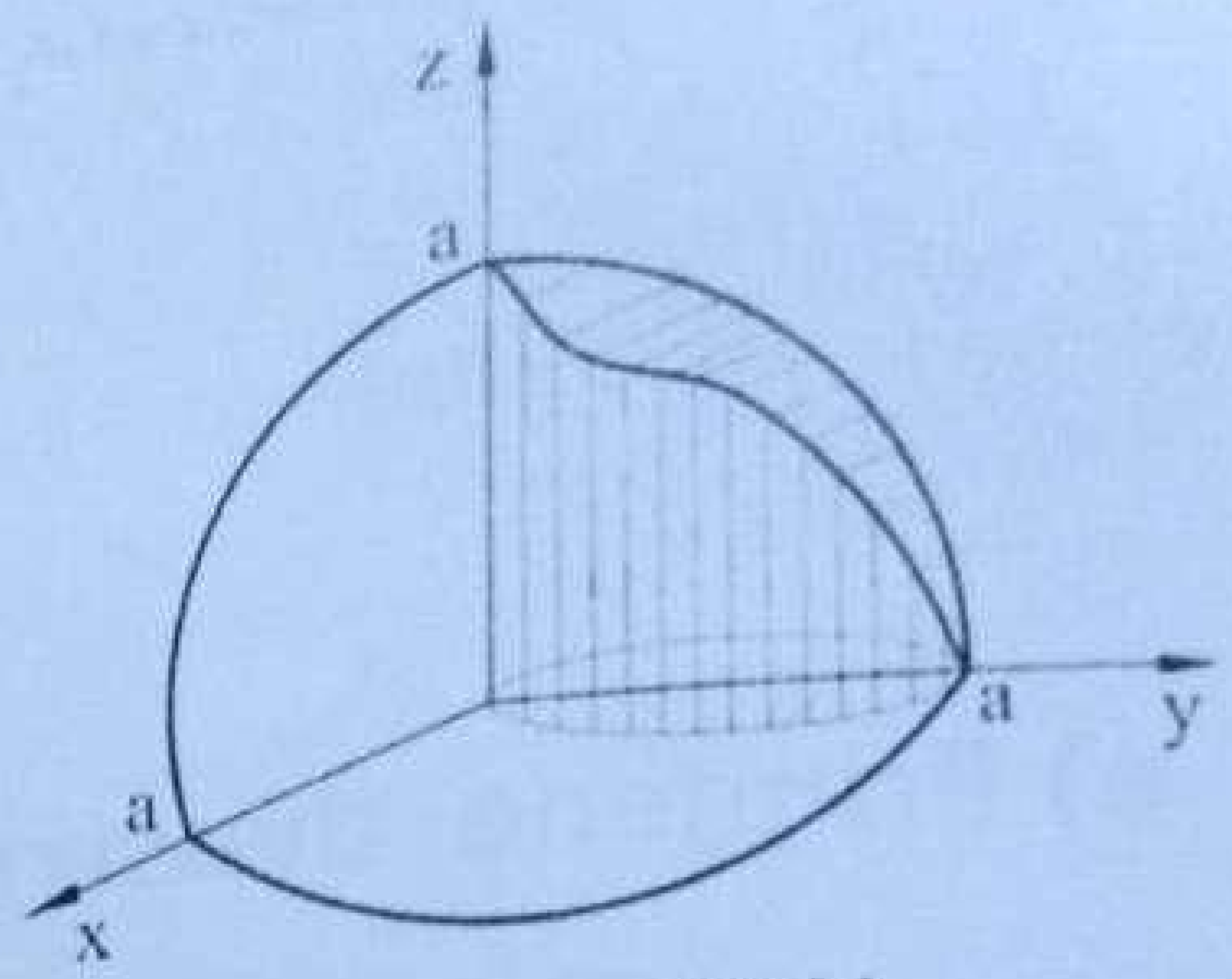
$$P_\Sigma = \iint\limits_S \sqrt{1 + y_x'^2(x, y) + y_z'^2(x, y)}\,dxdz = \iint\limits_S \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2}\,dxdz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 + 4x^2 + \cdots}$$

Za izračunavanje zadnjeg integrala uvedimo polarne koordinate: $x = \rho c$ $y = \rho\sin\varphi$. Tada je $J = \rho$ i $S': \begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$. S

$$P_\Sigma = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\sqrt{1 + 4\rho^2}\,d\rho = \frac{5\sqrt{5} - 1}{24}\pi \text{ (kvad. jed.)}.$$



Sl 20



Sl 21

Primjer 12. Izračunati površinu dijela sfere $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \ (a>0)$ iz nje isijeca cilindar $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

Označimo sa S krivu $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ u ravni Oxy. Da bismo shva kakvom se cilindru radi uvedimo polarne koordinate: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. T $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Kako je $\cos 2\varphi \geq 0$, to je $S': \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{4} \\ 0 \leq \rho \leq a\sqrt{\cos 2\varphi} \end{cases}$. Uočimo da ρ najveću vrijednost (to je a) za $\varphi = 0$. Na Sl 21 je data površ Σ čiju površinu tr izračunamo. Kako je $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, to je

$$\frac{1}{2}P_\Sigma = \iint_S \sqrt{1 + z_x'^2(x,y) + z_y'^2(x,y)}\,dxdy = a\iint_S \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = a\iint_{S'} \frac{\rho\, d\rho\, d\varphi}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} =$$

$$a\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \frac{\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}\,d\rho = = a\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(a - a\sqrt{2}\left|\sin\varphi\right|\right)d\varphi = a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \sqrt{2}\left|\sin\varphi\right|\right)d\varphi =$$

$$a^2 \cdot \frac{\pi}{2} - a^2\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left|\sin\varphi\right| d\varphi = a^2 \cdot \frac{\pi}{2} - 2a^2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\, d\varphi = a^2\left(\frac{\pi}{2} + 2 - 2\sqrt{2}\right),$$

odnosno $P_\Sigma = a^2\left(\pi + 4 - 4\sqrt{2}\right)$.

2) Statički momenti i koordinate težišta ravne materijalne ploče

Neka je zadata materijalna tačka A i osa a. Označimo sa d rastojanje tačke A od ose a i sa m masu koja je smještena u tački A. Statičkim momentom M_a tačke $A(m)$ u odnosu na osu a nazivamo veličinu $M_a = md$. Ako imamo konačan sistem od n materijalnih tačaka $A_i(m_i)$ $(i = 1, 2, 3, ..., n)$, tada je $M_a = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i$, gdje je d_i rastojanje tačke $A_i(m_i)$ od ose a.

Razmotrimo slučaj ravne materijalne ploče S u ravni Oxy. Neka je gustina materije u tački $M \in S$ neprekidna funkcija $\gamma(M)$. Može se dokazati da se statički moment ploče S u odnosu na ose Ox i Oy izračunava po formulama:

$$M_x = \iint_S y\gamma(x, y)dxdy, \quad M_y = \iint_S x\gamma(x, y)dxdy. \qquad (15)$$

Da bismo našli težište ravne materijalne ploče S postupićemo na sljedeći način: Ako se masa m materijalne ploče S $(m = \iint_S \gamma(x, y)dxdy)$ smjesti u tačku $A(x_T, y_T)$, tada su statički momenti M_x i M_y materijalne tačke $A(x_T, y_T)$ jednaki statičkim momentima čitave materijalne ploče (dati su formulama (15)). Dakle,

$$x_T \cdot m = \iint_S x\gamma(x, y)dxdy, \qquad y_T \cdot m = \iint_S y\gamma(x, y)dxdy,$$

odnosno

$$x_T = \frac{1}{m}\iint_S x\gamma(x, y)dxdy, \qquad y_T = \frac{1}{m}\iint_S y\gamma(x, y)dxdy. \qquad (16)$$

Formulama (16) date su koordinate težišta ravne materijalne ploče S. Specijalno, ako je materijalna ploča homogena, tj. gustina materije je konstantna i iznosi γ_0, tada je

$$x_T = \frac{1}{P_S}\iint_S xdxdy, \qquad y_T = \frac{1}{P_S}\iint_S ydxdy,$$

gdje je P_S površina ploče S.

Primjer 13. Izračunati statičke momente homogene materijalne ploče S ograničene linijama: $y = 2\sqrt{x}$, $x + y = 3$, $y = 0$ u odnosu na osu Ox.

Smatrajmo da je gustina materije jednaka 1. Kako je $S: \begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ \frac{y^2}{4} \le x \le 3 - y \end{cases}$, to je

$$M_x = \iint_{S_x} ydxdy = \int_0^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{3-y} ydx = \int_0^2 y\left(3 - y - \frac{y^2}{4}\right)dy = \frac{7}{3},$$

$$M_x = \iint_S x\,dxdy = \int_0^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{3-y} x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left((3-y)^2 - \frac{y^4}{16}\right)dy = \frac{187}{45}.$$

Primjer 14. Naći koordinate težišta materijalne ploče, ograničene elipsom $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, koja se nalazi u I kvadrantu smatrajući gustinu materije konstantnom i jednakoj jedinici.

Označimo sa S datu materijalnu ploču. Tada je $S:\begin{cases} 0\le x\le a \\ 0\le y\le \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \end{cases}$. Kako je

$P_S = \iint_S dxdy = \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \ldots = \frac{ab\pi}{4}$ i $\iint_S x\,dxdy = \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} x\,dy = \frac{b}{a}\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2b}{3}$, to je $x_T = \frac{1}{S}\iint_S x\,dxdy = \frac{4a}{3\pi}$. Slično se dokazuje da je $y_T = \frac{4b}{3\pi}$, pa je težište date materijalne ploče tačka $\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi}\right)$.

Primjer 15. Naći koordinate težišta homogene materijalne ploče ograničene sa: $y=x^2$, $y=2x^2$, $x=1$, $x=2$.

Neka je gustina materije jednaka 1. Označimo sa S datu materijalnu ploču. Tada je $S:\begin{cases} 1\le x\le 2 \\ x^2\le y\le 2x^2 \end{cases}$. Kako je $P_S = \iint_S dxdy = \int_1^2 dx \int_{x^2}^{2x^2} dy = \int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}$,

$\iint_S x\,dxdy = \int_1^2 dx \int_{x^2}^{2x^2} x\,dy = \int_1^2 x^3 dx = \frac{15}{4}$, $\iint_S y\,dxdy = \int_1^2 dx \int_{x^2}^{2x^2} y\,dy = \frac{3}{2}\int_1^2 x^4 dx = \frac{93}{10}$, to je $x_T = \frac{45}{28}$ i $y_T = \frac{279}{70}$. Slijedi, tačka $\left(\frac{45}{28}, \frac{279}{70}\right)$ je težište date materijalne ploče.

3) Moment inercije ravne materijalne ploče

Moment inercije I materijalne tačke $A(m)$ u odnosu na osu a je veličina $I_a = md^2$, gdje je d rastojanje tačke $A(m)$ od ose a. Za sistem od n materijalnih tačaka $A_i(m_i)$ ($i=1,2,3\ldots,n$) moment inercije je $I_a = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2$, gdje je d_i rastojanje tačke $A_i(m_i)$ od ose a. Može se dokazati da se momenti inercije ravne materijalne ploče S u ravni Oxy, čija je gustina materije neprekidna funkcija $\gamma(x,y)$, izračunavaju po formulama

$$I_x = \iint_S y^2\gamma(x,y)\,dxdy, \qquad I_y = \iint_S x^2\gamma(x,y)\,dxdy.$$

Moment inercije u odnosu na koordinatni početak (tačka O) izračunava se po formuli

$$I_O = I_x + I_y = \iint_S \left(x^2 + y^2\right)\gamma(x,y)\,dxdy\,.$$

Primjer 16. Izračunati moment inercije u odnosu na koordinatni početak ravne homogene materijalne ploče ograničene pravama $x+y=2,\ x=0,\ y=0$ (gustinu materije smatrati jednaku 1).

$$I_O = \iint_S \left(x^2 + y^2\right)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} \left(x^2 + y^2\right)dy = \frac{1}{3}\int_0^2 \left(-4x^3 + 12x^2 - 12x + 8\right)dx = \frac{8}{3}\,.$$

\- Dvostruki integral -

a) Definicija dvostrukog integrala (str. 9)

1) Primjer 1, Primjer 2 (str. 7, str 8)
2) Primjer 3, Primjer 4 (str. 12)
3) Formula (12) (str. 15 bez dokaza)
4) Primjer 8 (str. 17)
5) Formule vezane za primjene dvostrukog integrala
6) Primjer 13, Primjer 15, Primjer 16 (str 21) (str. 22) (str. 23)