

#### 4. DINAMIKA ROBOTA

Dinamika robota je od svih teorijskih aspekata robotike poslednja našla praktičnu primenu. Zato ćemo na početku izneti određena obrazloženja i argumente u prilog njene primene.

Krenimo od činjenice da se uspešno projektovanje i upravljanje nekog sistema ne može izvesti bez njegovog dobrog poznavanja. Ovo je, svakako tačno, ali pod pojmom "dobrog poznavanja" ne podrazumeva se uvek isto. Razmatrajmo problem mehaničkog sistema - konkretno jednog robota. Dobro poznavanje takvog sistema može, a ne mora uključivati poznavanje matematičkog modela njegove dinamike (tzv. dinamičkog modela). U ranijim fazama razvoja robotike projektovanje robota nije uključivalo tačan proračun dinamike, a upravljanje nije vodilo računa o mnogim dinamičkim efektima već se, uz određene aproksimacije, svodilo na poznatu teoriju automatskog upravljanja. Ovakav pristup bio je posledica nerazvijene teorije robotike. Naime, dugo vremena praksa proizvodnje i primene robota razvijala se nezavisno od teorije koja je bila često isuviše akademski orijentisana. Ovakvo stanje ipak nije sprečilo neke proizvođače da naprave veoma uspešne robotske uređaje.

U današnje vreme, međutim, zahtevi za složenim i vrlo brzim robotskim sistemima diktirali su povezivanje teorije i prakse. Sa stanovišta primene dinamike robota ključnu ulogu je odigrao razvoj efikasnih metoda za proračun dinamike uz pomoć računara. Uz niz kasnije razrađenih metoda, dinamički model i na njemu zasnovani proračuni i simulacija, postao je nezaobilazni deo svakog uspešnog projektovanja robota.

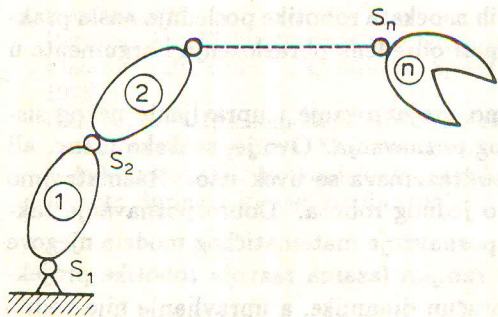
Druga mogućnost za primenu dinamičkog modela je dinamičko upravljanje. Ta mogućnost se danas još uvek malo koristi, međutim, metode za sračunavanje dinamike u realnom vremenu, koje već postoje, znatno nas približavaju ovom cilju.

Ova glava razmatra prvo osnovni pristup opisivanju dinamike robota i formiranju dinamičkog modela. Detaljno izvođenje jedne od metoda za formiranje modela dato je u prilogu P3, a ovde se razmatra forma i korišćenje dobijenog rezultata. Ovo je urađeno zato da bi se ova glava rasteretila od dugačkih matematičkih izvođenja koja zahtevaju i obimno znanje mehanike.

Dalje u ovoj glavi se razmatra rešavanje direktnog i inverznog problema dinamike, a zatim i primena računara u proračunu dinamike robota. Na kraju ćemo ukazati i na neke specijelne probleme: dinamika robota sa elastičnim deformacijama u sistemu za prenos pogona i dinamika u fazi funkcionalno zatvorenog lanca.

## 4.1. DINAMIČKI MODEL ROBOTA

Pod dinamičkim modelom robota podrazumevaćemo sistem diferencijalnih jednačina koje opisuju dinamiku robota. Izvođenje modela zahteva dosta znanja iz mehanike, pogotovo mehanike krutog tela, koje veći broj čitalaca možda nema. Zato ćemo ovde izložiti glavne ideje i formule i interpretirati krajnji rezultat, a detaljno izvođenje modela dati u prilogu P3.



Sl. 4.1. Robot kao otvoreni kinematički lanac

Posmatrajmo manipulacioni robot kao otvoreni kinematički lanac bez grananja (sl. 4.1). Označimo zglobove redom sa  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , a segmente sa  $1, 2, \dots, n$ . Pretpostavimo, zatim, da su zglobovi takvi da omogućavaju jednu relativnu rotaciju ili jednu relativnu translaciju. Kako svaki zglob ima po jedan stepen slobode to će mehanizam ukupno imati  $n$  stepeni slobode. Dinamiku takvog mehaničkog sistema možemo opisati sa najmanje  $n$  skalarnih diferencijalnih jednačina drugog reda. Taj sistem jednačina zvaćemo dinamički model.

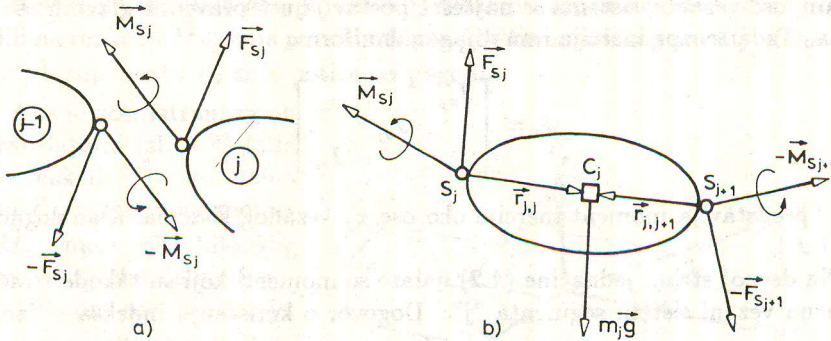
U glavi 2. posvećenoj kinematici uvedene su tzv. generalisane koordinate  $q_1, \dots, q_n$  kao najmanji skup parametara koji jednoznačno definišu položaj robota. Za generalisane koordinate izabrana su pomeranja u zglobovima pa smo ih zvali i unutrašnje koordinate. Vektor unutrašnjih (generalisanih) koordinata je definisan kao

$$q = [q_1, q_2 \dots q_n]^T$$

Dinamiku mehanizama robota možemo sada opisati na više načina: primenom opštih teorema dinamike sistema (teorema o količini kretanja i teorema o kinetičkom momentu), primenom Lagranževih jednačina, primenom Apelovih jednačina ili Gausovog principa. Model koji se dobija svakako je isti bez obzira na pristup koji se koristi jer su svi ovi pristupi u suštini ekvivalentni. Međutim, sastanovišta metodologije sastavljanja modela razlike su bitne. Ovde ćemo koristiti opšte teoreme dinamike jer takav pristup zahteva najmanje znanja iz mehanike.

Da bismo formirali dinamički model celog sistema tj. celog lančanog mehanizma krenućemo od posmatranja jednog njegovog segmenta. Neka to bude segment "j". Ako hoćemo da posmatramo segment izdvojen, napravićemo zamišljene prekide lanca u zglobovima  $S_j$  i  $S_{j+1}$  (sl. 4.2). Na slici 4.2a prikazan je prekid u zglobu  $S_j$ . Medusobno dejstvo segmenata pokazuje se u obliku parova sila i momenata, dakle u obliku akcija i reakcija.

Ako pod akcijom podrazumevamo dejstvo narednog segmenta ( $j$ ) na prethodni ( $j - 1$ ) onda pod reakcijom podrazumevamo dejstvo prethodnog na naredni. Tako,  $\vec{F}_{S_j}$  i  $\vec{M}_{S_j}$  bi predstavljali reakcije, a  $-\vec{F}_{S_j}$  i  $-\vec{M}_{S_j}$  akcije. Sila  $\vec{F}_{S_j}$  i moment  $\vec{M}_{S_j}$  nekada se nazivaju ukupnom silom i momentom u zglobu jer predstavljaju ukupno dejstvo koje se kroz zglob prenosi sa prethodnog segmenta na naredni.



Sl. 4.2. Izdvajanje jednog segmenta lanca

Ako sada izdvojimo segment "j", na njega će delovati sile i momenti kako je prikazano na slici 4.2b. Treba naglasiti da se u sili  $\vec{F}_{S_j}$  i momentu  $\vec{M}_{S_j}$  sadrži i pogon koji u tom zglobu deluje. Ako je posmatrani zglob translatorsni, tada se pogonska sila  $\vec{P}_j$  sadrži u sili  $\vec{F}_{S_j}$ , a ako je zglob rotacioni, tada sa  $\vec{P}_j$  označavamo pogonski moment i on se sadrži u momentu  $\vec{M}_{S_j}$ . Treba naglasiti da je u pitanju takozvana izlazna sila ili izlazni moment pogonskog motora, a ako postoji reduktor, onda se radi o izlaznom momentu reduktora.

Opišimo sada kretanje izdvojenog segmenta "j". Pomeranje težišta segmenta opisujemo takozvanom teoremom o kretanju težišta:

$$m_j \vec{w}_j = m_j \vec{g} + \vec{F}_{S_j} - \vec{F}_{S_{j+1}} \quad (4.1)$$

$m_j$  je masa segmenta,  $\vec{w}_j$  ubrzanje težišta, a  $\vec{g}$  ubrzanje Zemljine teže.

Posmatrajmo sada obrtanje tela oko svog težišta. Položaj težišta na telu i u odnosu na zglobove prikazan je na slici 4.2b i definisan vektorima  $\vec{r}'_{j,j}$  i  $\vec{r}_{j,j+1}$  kako je već objašnjeno u poglavlju o geometriji robota (odjeljak 2.2.4). Obrtanje opisujemo Ojlerovom vektorskom jednačinom:

$$\tilde{J}_j \vec{\varepsilon}_j + \vec{\omega}_j \times (\tilde{J}_j \vec{\omega}_j) = \vec{M}_{S_j} - \vec{M}_{S_{j+1}} - \vec{r}'_{j,j} \times \vec{F}_{S_j} + \vec{r}_{j,j+1} \times \vec{F}_{S_{j+1}} \quad (4.2)$$

$\vec{\varepsilon}_j$  je ugaono ubrzanje, a  $\vec{\omega}_j$  ugaona brzina segmenta. Oznake  $\sim$  ukazuje da su vektori izraženi trima projekcijama na koordinatnom sistemu vezanom za segment.

$\tilde{J}_j$  je tenzor inercije sračunat za ose vezanog sistema. U opštem slučaju je

$$\tilde{J}_j = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}_{(j)} \quad (4.3)$$

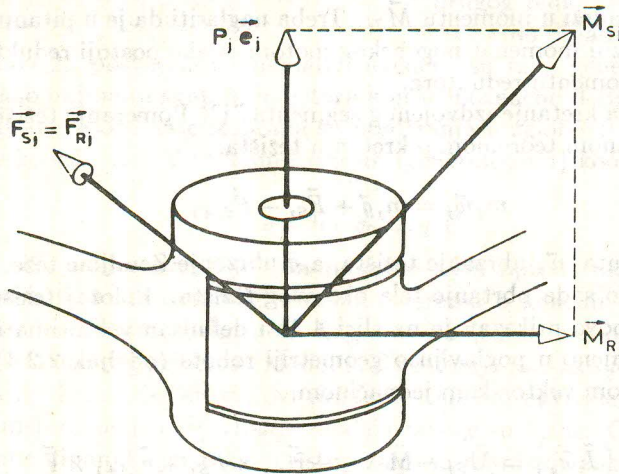
Medutim, ose vezanog sistema se najčešće postavljaju u pravcima glavnih osa inercije tela. Tada tenzor inercija ima dijagonalnu formu

$$\tilde{J}_j = \begin{bmatrix} J_{x_j} & & \\ & J_{y_j} & \\ & & J_{z_j} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

gde  $J_{x_j}$  predstavlja moment inercije oko ose  $x_j$  vezanog sistema, a analogno važi za  $J_{y_j}$  i  $J_{z_j}$ .

Na desnoj strani jednačine (4.2) nalaze se momenti koji su takode izraženi u odnosu na vezani sistem segmenta "j". Dogovor o korišćenju indeksa  $\sim$  iznad ili ispod oznake neke veličine ( npr.  $\vec{F}_{S_j}$  i  $\vec{F}_{S_{j+1}}$ ) objašnjen je u odeljku 2.2.4.

Treba naglasiti da je jednačinu (4.1) isto tako moguće napisati u vezanom sistemu čime bi se postigla jednoobraznost. Druga mogućnost je da se obe jednačine pišu u spoljašnjem sistemu. Tada (4.1) ostaje u obliku kakvom je već napisana, a (4.2) se prevodi u spoljašnji sistem množenjem sa prelaznom matricom  $A_j$ .



Sl. 4.3. Sila i momenti u rotacionom zglobu

U izvedenim vektorskim jednačinama (4.1) i (4.2) pojavljuju se sila  $\vec{F}_{S_j}$  i momenat  $\vec{M}_{S_j}$ , tj. ukupna sila i momenat u zglobu. Razmotrimo detaljnije ove veličine. Posmatrajmo prvo rotacioni zglob (sl. 4.3). Takav zglob dozvoljava samo jedno relativno pomeranje i to obrtanje oko ose  $\vec{e}_j$ . Otuda sila reakcije  $\vec{F}_{R_j}$  (od segmenta "j-1" na segment "j") može imati bilo koji pravac, dok reakcioni momenat

$\vec{M}_{R_j}$  mora biti normalan na osu  $\vec{e}_j$  (tj.  $\vec{M}_{R_j} \perp \vec{e}_j$ ). U rotacionom zglobu deluje još i pogonski moment  $\vec{P}_j = P_j \vec{e}_j$ ; dakle deluje oko se  $\vec{e}_j$ . Ukupna sila i moment u zglobu su sada:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{S_j} &= \vec{F}_{R_j} \\ \vec{M}_{S_j} &= \vec{M}_{R_j} + P_j \vec{e}_j \end{aligned} \quad (4.5a)$$

Ranije smo rekli da  $\vec{M}_{S_j}$  predstavlja reakciju. Međutim, sada smo tu reakciju podelili na reakciju  $\vec{M}_{R_j}$  koja je posledica samog kinematičkog para tj. konstrukcije zgloba i komponentu  $\vec{P}_j$  koje potiče od pogona.

Ako je posmatrani zglob "j" translatorni (sl. 4.4) tada je sila reakcije  $\vec{F}_{R_j}$  normalna na osu  $\vec{e}_j$ , a reakcioni moment  $\vec{M}_{R_j}$  može biti bilo kog pravca. U zglobu deluje i pogonska sila duž ose translacije:  $\vec{P}_j = P_j \vec{e}_j$ . Ukupna sila i moment su tada

$$\vec{F}_{S_j} = \vec{F}_{R_j} + P_j \vec{e}_j \quad (4.5b)$$

$$\vec{M}_{S_j} = \vec{M}_{R_j}$$

Jednačine (4.5a) i (4.5b) možemo napisati na jedinstven način

$$\begin{aligned} \vec{F}_{S_j} &= \vec{F}_{R_j} + s_j P_j \vec{e}_j \\ \vec{M}_{S_j} &= \vec{M}_{R_j} + (1 - s_j) P_j \vec{e}_j \end{aligned} \quad (4.6)$$

uvodenjem indikatora  $s_j$  kojim određujemo tip zgloba (0 za rotacioni a 1 za translatorni zglob).

Vektorske jednačine (4.1) i (4.2) zajedno sa (4.6) opisuju dinamiku segmenta "j". Ako ove jednačine napišemo za svaki segment dolazimo do 2n vektorskih jednačina:

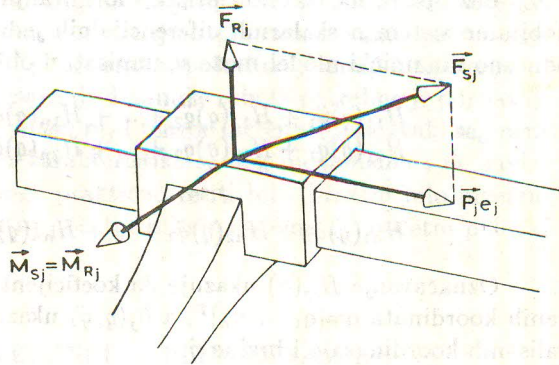
$$m_j \vec{w}_j = m_j \vec{g} + \vec{F}_{R_j} + s_j P_j \vec{e}_j - \vec{F}_{R_{j+1}} - s_{j+1} P_{j+1} \vec{e}_{j+1} \quad (4.7a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{J}_j \vec{\epsilon} + \vec{\omega}_j \times (\tilde{J}_j \vec{\omega}_j) &= \vec{M}_{R_j} + (1 - s_j) P_j \vec{e}_j - \vec{M}_{R_{j+1}} - (1 - s_{j+1}) P_{j+1} \vec{e}_{j+1} + \vec{r}_{j,j}^T \times \\ &\times (\vec{F}_{R_j} + s_j P_j \vec{e}_j) - \vec{r}_{j,j+1}^T \times (\vec{F}_{R_{j+1}} + s_{j+1} P_{j+1} \vec{e}_{j+1}) \end{aligned} \quad (4.7b)$$

$$j = 1, \dots, n$$

koje opisuju dinamiku celog sistema.

U odeljku 2.3.2 (kinematika) pokazano je kako se ubrzanje težista ( $\vec{w}_j$ ) i ugaona brzina i ubrzanje ( $\vec{\omega}_j, \vec{\epsilon}_j$ ) mogu izraziti u zavisnosti od generalisanih koordinata  $q$  i njihovih izvoda  $\dot{q}$  i  $\ddot{q}$ . Ako to uradimo u sistemu (4.7) nakon toga nam preostaje da u sistemu izvršimo eliminisanje reakcija  $\vec{F}_{R_j}, \vec{M}_{R_j}, j = 1, \dots, n$ . Analizirajmo prvo broj jednačina i broj nepoznatih koje treba eliminisati. Sistem (4.7)



Sl. 4.4. Sile i moment u translatornom zglobu

sadrži  $2n$  vektorskih, odnosno  $6n$  skalarnih jednačina. Broj vektorskih reakcija koje treba eliminisati je takode  $2n$  tj. po dve u svakom zglobu. Međutim, broj nepoznatih skalarnih komponenta reakcija je  $5n$  tj. po pet u svakom zglobu. To je zato što ona reakcija koja ima proizvoljan pravac sadrži tri nezavisne nepoznate skalarnе komponente, a ona koja je normalna na osu zgloba sadrži dve. Sada, nakon eliminacije  $5n$  nepoznatih iz  $6n$  jednačina dobija se sistem  $n$  skalarnih jednačina koje ne sadrže reakcije već samo skalarnе vrednosti pogonskih sila i momenata  $(P_1, \dots, P_n)$ .

Postupaka za eliminisanje reakcija ima više i svaki od njih ima svoje specifičnosti. Otuda se razlikuju i po brzini rada i utrošku memorijskog prostora računara. Jedan metod za eliminaciju reakcija izložen je u prilogu P3.

Bez obzira na izabrani pristup formiranju dinamičkog modela, kao rezultat dobijamo sistem  $n$  skalarnih diferencijalnih jednačina drugog reda. Ovaj sistem, odnosno dinamički model može se napisati u obliku

$$\left. \begin{aligned} H_{11}(q)\ddot{q}_1 + H_{12}(q)\ddot{q}_2 + \dots + H_{1n}(q)\ddot{q}_n + h_1(q, \dot{q}) &= P_1 \\ H_{21}(q)\ddot{q}_1 + H_{22}(q)\ddot{q}_2 + \dots + H_{2n}(q)\ddot{q}_n + h_2(q, \dot{q}) &= P_2 \\ \vdots & \\ H_{n1}(q)\ddot{q}_1 + H_{n2}(q)\ddot{q}_2 + \dots + H_{nn}(q)\ddot{q}_n + h_n(q, \dot{q}) &= P_n \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Označavanje  $H_{ij}(q)$  ukazuje da koeficijent  $H_{ij}$  predstavlja funkciju generalisanih koordinata  $q = [q_1 \dots q_n]^T$ , a  $h_j(q, \dot{q})$  ukazuje da je sabirak  $h_j$  funkcija generalisanih koordinata  $q$  i brzina  $\dot{q}$ .

Sistem (4.8) može se napisati i u matricnom obliku

$$H(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) = p \quad (4.9)$$

gde su matrice sistema jednake:

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ H_{n1} & \dots & H_{nn} \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

a matrica pogona:

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Naglasimo još jednom  $P_j$  predstavlja pogonski momenat ako je  $S_j$  rotacioni zglob, a pogonsku silu ako je zglob translatorni. U svakom slučaju radi se o izlaznom momentu ili sili motora, a ako postoji reduktor tada se radi o izlaznom momentu reduktora. Ova diskusija je značajna jer možemo zaključiti da model (4.9) opisuje dinamiku mehanizma robota ne vodeći računa o dinamici pogonskih motora. Problem kod ovakvog modela nije samo u njegovoj teorijskoj nekompletnosti. Važniji je problem u korišćenju modela. Izlazni momenti motora ne mogu se menjati po želji i nezavisno jer to nisu ulazne upravljačke veličine već izlazne veličine koje zavise od ponašanja, odnosno dinamike motora. Ono što možemo po

želji menjati to su ulazni naponi  $u_j$  u slučaju elektromotora i struje servorazvodnika u slučaju hidrauličnih motora. Promenom ovih upravljačkih veličina treba ostvariti željeno kretanje robota.

Da bi se dobio dinamički model koji bi vodio računa o kompletnoj dinamici robotskog sistema potrebno je uz model (4.9) uzeti u obzir i matematičke modele pogonskih motora, kao i relacije koje pokazuju transformaciju momenata i brzina kroz reduktore (vidi glavu 3). O ovakvom kompletном dinamičkom modelu biće reći nešto kasnije (4.3).

Razmotrićemo sada podatke koje je potrebno poznavati da bi se mogao formirati dinamički model robota. Prvo, pošto je neophodno rešiti kinematiku robota, to je potrebno poznavati sve podatke o geometriji kao što je objašnjeno u glavi 2. Podsetimo sada da pod poznatom geometrijom podrazumevamo poznavanje  $\vec{e}_j, \vec{e}_{j+1}, \vec{r}_{j,j}, \vec{r}_{j,j+1}$ , za svaki segment "j". Svakako, potrebno je znati i tipove zglobova tj. indikatore  $s_j, j=1, \dots, n$ . Za rešavanje dinamike robota potrebno je poznavati još i inercijalna svojstva segmenata: masu  $m_j$  i tenzor inercije  $\tilde{J}_j$ , za svaki segment "j". Nabrojani podaci predstavljaju karakteristike samog mehanizma i ne zavise od njegovog kretanja. Da bismo mogli praktično rešiti bilo direktni bilo inverzni problem dinamike moramo poznavati i početno stanje sistema tj. početni položaj  $q(t_0)$  i početnu brzinu  $\dot{q}(t_0)$ .

#### 4.2. DIREKTNI I INVERZNI PROBLEM DINAMIKE

U delu o kinematici uvedeni su pojmovi direktnog i inverznog problema kinematike. Ovi pojmovi su bili vezani za izražavanje kretanja robota preko unutrašnjih i preko spoljašnjih koordinata, dakle uvedeni su specijalno za probleme robotike. U dinamici srećemo pojmove direktnog i inverznog problema dinamike, ali ti pojmovi nisu nužno vezani za robotiku, već se koriste u slučaju bilo kog mehaničkog sistema. Te pojmove ćemo zato i definisati za proizvoljan mehanički sistem. Ako posmatramo sistem tela koja se kreću pod dejstvom određenih sila, tada pod direktnim problemom podrazumevamo nalaženje sila koje izazivaju neko zadato kretanje sistema. Kod inverznog problema sile posmatramo kao poznate (zadate) i tražimo kretanje koje će one izazvati.

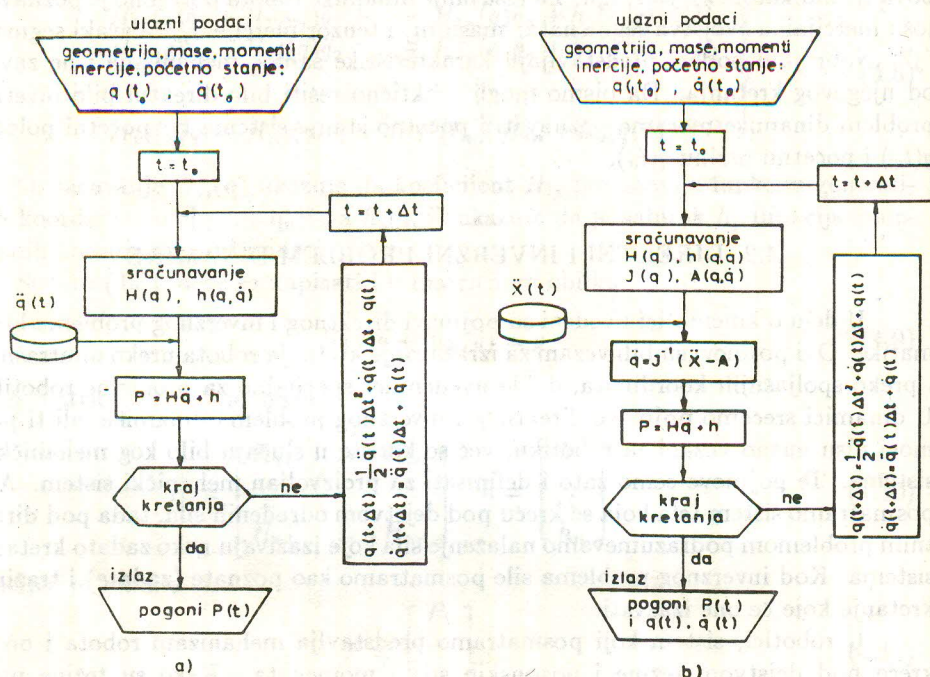
U robotici, sistem koji posmatramo predstavlja mehanizam robota i on se kreće pod dejstvom težine i pogonskih sila i momenata. Kako su težine uvek poznate, to kada govorimo o zadatim silama ili traženju sila mislimo na sile i momente pogonskih motora. Formulisaćemo problem preciznije. Pod kretanjem robota podrazumevaćemo promenu unutrašnjih koordinata, dakle vremensku funkciju  $q(t)$ . Pod poznatim pogonima podrazumevaćemo vremensku funkciju  $P(t)$ . Sada pod direktnim problemom podrazumevamo nalaženje funkcije  $P(t)$  za poznato  $q(t)$ , a pod inverznim problemima podrazumevamo nalaženje funkcije  $q(t)$  za poznato  $P(t)$ .

Razmotrimo rešavanje direktnog problema. Prvo ćemo uočiti osnovnu ideju za proračun. Ako je poznato kretanje  $q(t)$ , onda možemo reći da su poznati i izvodi, odnosno unutrašnje brzine  $\dot{q}(t)$  i unutrašnja ubrzanja  $\ddot{q}(t)$ . Tada se pogoni mogu

dobiti iz relacije (4.9).

$$P(t) = H(q(t))\ddot{q}(t) + h(q(t), \dot{q}(t)) \quad (4.12)$$

Pošto se ova ideja realizuje pomoću računara, to stvari stoje nešto drukčije. Funkcija  $q(t)$  nije data analitički već diskretizovano, odnosno nizom vrednosti koje odgovaraju nizu trenutaka vremena  $t_0, t_1, \dots, t_k$ . Neka je interval između pojedinih trenutaka jednak  $\Delta t$ . Kako relacija (4.12) zahteva poznavanje  $\dot{q}$  i  $\ddot{q}$ , to bi bilo neophodno sprovesti numeričko diferenciranje, a to je nepoželjan posao. U delu 2.3.4 o direktnom i inverznom problemu kinematike pokazali smo da se numeričko diferenciranje može izbeći tako što ćemo kretanje zadati u obliku početnog stanja  $q(t_0)$ ,  $\dot{q}(t_0)$  i vremenske promene ubrzanja  $\ddot{q}(t)$ . Ako primenimo sličnu ideju, tada će shema rešavanja direktnog problema dinamike izgledati kao na slici 4.5a.



Sl. 4.5. Shema rešavanja direktnog problema dinamike

U opisanom postupku rešavanja direktnog problema smatrali smo da je kretanje zadato preko unutrašnjih koordinata  $q(t)$  ili preciznije preko unutrašnjih ubrzanja  $\ddot{q}(t)$ . U teoriji kinematike robota (glava 2) ističe se da je kretanje pogodnije zadati preko spoljašnjih koordinata  $X(t)$ . Tada se rešavanje direktnog problema dinamike mora kombinovati sa rešavanjem inverznog problema kinematike (sl. 4.5b).

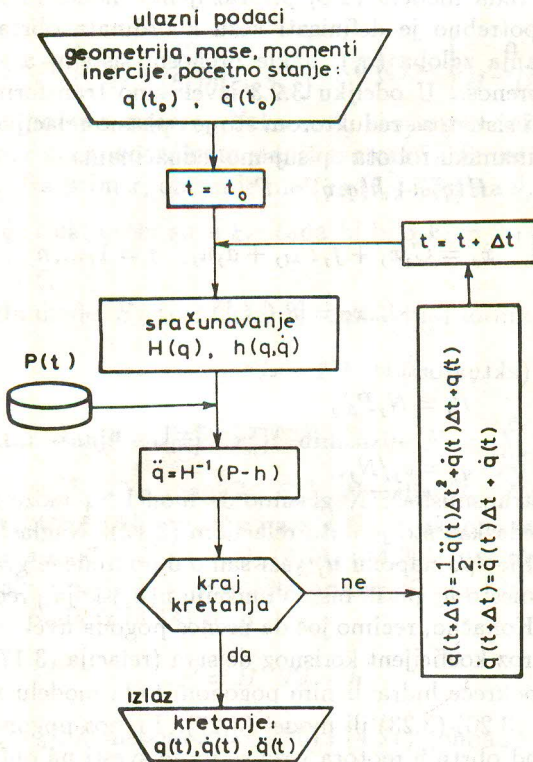
Razmotricemo sada rešavanje inverznog problema dinamike. On podrazumeva nalaženje kretanja  $q(t)$  ili  $X(t)$  ako je poznat zakon promene pogona  $P(t)$ . U



stvari, potrebno je izvršiti integraciju sistema diferencijalnih jednačina (4.9). Jedan jednostavni postupak integracije predstavljen je na slici 4.6 i zasnovan je na ideji da se ubrzanja  $\ddot{q}$  smatraju konstantnim na malom intervalu  $\Delta t$ . Druga mogućnost je da se sistem 4.9 napiše u obliku

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ H^{-1}(q)(P(t) - h(q, \dot{q})) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

koji je pogodan za upotrebu bilo koje od standardnih metoda za numeričku integraciju sistema diferencijalnih jednačina.



Sl. 4.6. Shema rešavanja inverznog problema dinamike

Korišćenjem bilo kog od spomenuta dva pristupa, dobijamo zakon kretanja u unutrašnjim koordinatama  $q(t)$ , unutrašnje brzine  $\dot{q}(t)$  i ubrzanja  $\ddot{q}(t)$ . Dobijene funkcije su, naravno, diskretizovane. Ako želimo da nademo kretanje u spoljašnjim koordinatama onda je potrebno rešiti još i direktni problem kinematike.

## 4.3. KOMPLETAN MODEL DINAMIKE ROBOTA

U odeljku 4.1 naglasili smo da izvedeni dinamički model (4.9) ne opisuje kompletnu dinamiku robota. Naime, izveli smo model za mehanizam robota, a nismo uključili dinamiku pogonskih motora. Sada ćemo izvesti kompletan dinamički model koji povezuje upravljačke veličine (napon kod motora jednosmerne struje i struja servorazvodnika kod hidrauličnog motora) sa kretanjem robota ( $q(t)$ ).

U principu, kompletan dinamički model određen je modelom mehanizma (4.9) kome se pridružuju modeli motora. Tako, ako se robot pokreće elektromotorima jednosmerne struje, tada modelu (4.9) pridružujemo model (3.8) za svaki zglob  $j=1, \dots, n$ . Takođe, potrebno je definisati vezu koordinata obrtanja motora ( $\theta_j$ ) i koordinata pomeranja zgloba ( $q_j$ ), dakle prenosni sistem, a zatim i promenu momenta kroz taj prenos. U odeljku 3.2.3 izveli smo transformaciju kretanja i pogona kroz prenosni sistem sa reduktorom što je opisano relacijama (3.13)-(3.15),  $j=1, \dots, n$ . Ukupno, dinamiku robota opisujemo jednačinama:

$$S_M : \quad H(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) = P \quad (4.14)$$

za mehanizam,

$$S_A : \quad \dot{x}_j = C_j x_j + f_j P_{Mj} + d_j u_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.15a)$$

$$x_j = [\theta_j, \dot{\theta}_j, i_j]^T \quad (4.15b)$$

za pogonske motore (aktuatori) i

$$P_j = N_j P_{Mj} \quad (4.16a)$$

$S_T$ :

$$q_j = \theta_j / N_j, \quad j=1, \dots, n \quad (4.16b)$$

za prenosni sistem (transmisija). Naglasimo da model  $S_A$  može biti i nižeg reda, na primer, drugog reda kao što je dato relacijom (3.12). Naglasimo takođe da linearnost relacije (4.15a) po naponu  $u_j$  važi samo do određene granične vrednosti. U opštem slučaju, umesto  $u_j$  pisali bismo funkciju  $n(u_j)$  koja predstavlja nelinearnost tipa zasićenja. Konačno, recimo još da prenos pogona uvek unosi gubitke, što obično izražavamo kroz koeficijent korisnog dejstva (relacija (3.17)).

Ako se robot pokreće hidrauličnim pogonom tada modelu mehanizma (4.9) pridružujemo model (3.20)-(3.23) ili model (3.27). Prenos pogona ovde može biti prilično raznolik. Kod obrtnih motora veza se može svesti na oblik (3.13) - (3.15) odnosno na (4.16). Međutim, kod hidrauličnog cilindra veza između pomeranja klipa ( $s_j$ ) i pomeranja zgloba ( $q_j$ ) može biti direktna ( $q_j = s_j$ ) ali može biti i posredna: linearna ( $q_j = r s_j$ ) ili nelinearna ( $q_j = f(s_j)$ ). Slično važi i za odnos momenata.

Razmotrimo sada mogućnost da se ukupni dinamički model napiše u kompaktnoj formi. Smatraćemo da se model svakog pogonskog sistema može uz određena uprošćenja linearizovati i opisati jednačinom (4.15a). Red modela tj. dimenzija vektora  $x_j$  neka je  $n_j$ , a vektor sadrži određene promenljive koje definišu stanje sistema.  $u_j$  predstavlja upravljačku promenljivu koja odgovara posmatranom po-

gonskom sistemu, a  $P_{Mj}$  izlazni pogon (momenat ili sila). Dalje, radi jednostavnosti izvođenja pretpostavimo direktnu vezu pomeranja motora i pomeranja zgloba ( $N_j = 1$  u (4.16)) što ne umanjuje opštost jer se prenosni odnos lako može ugraditi u model.

Sledeći relaciju (4.13), model mehanizma  $S_M$  napišemo u obliku

$$\frac{d\xi}{dt} = \begin{bmatrix} \xi_2 \\ H^{-1}(\xi_1)(P - h(\xi_1, \xi_2)) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

gde je  $\xi_1 = q$ ,  $\xi_2 = \dot{q}$  i  $\xi = [\xi_1^T \xi_2^T]^T \cdot \xi$  je kolona vektor stanja mehanizma i dimenzija mu je  $2n$ . (4.17) se dalje može napisati u obliku

$$S_M : \quad \dot{\xi} = K(\xi) + D(\xi)P \quad (4.18)$$

gde je

$$K(\xi) = \begin{bmatrix} \xi_2 \\ -H^{-1}(\xi_1)h(\xi_1, \xi_2) \end{bmatrix}, \quad D(\xi) = \begin{bmatrix} 0 \\ H^{-1}(\xi_1) \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Posmatrajmo ponovo motore. Neka se  $k_j$  elementa vektora  $x_j$  poklapa sa elementima vektora  $\xi$  tj.  $k_j$  koordinata stanja motora "j" je već sadržano u vektoru stanja mehanizma. Na primer, obrtanje motora ( $\theta_j$ ) i brzina  $\dot{\theta}_j$  se po pretpostavci poklapaju sa  $q_j$  i  $\dot{q}_j$  i uključeni su u  $\xi$ . Tada bi bilo  $k_j = 2$  i  $\sum_{j=1}^n k_j = 2n$  čime je popunjen ceo vektor  $\xi$ .

Napišimo sada model  $S_A$  tj. (4.15a) u kompaktnoj formi:

$$S_A : \quad \dot{x} = Cx + FP + Du \quad (4.20)$$

gde je kolona vektor stanja  $x = [x_1^T \dots x_n^T]^T$  dimenzije  $N = \sum_{j=1}^n n_j$ . Dalje je  $P = [P_1 \dots P_n]^T$ ,  $u = [u_1 \dots u_n]^T$ ,  $C = \text{diag}[C_1 \dots C_n]$ ,  $F = \text{diag}[f_1 \dots f_n]$ ,  $D = \text{diag}[d_1 \dots d_n]$ . Uočimo da je ceo vektor  $\xi$  uključen u  $x$  pa  $x$  definiše ukupno stanje robota.

Ujedinimo sada modele  $S_M$  i  $S_A$  tj. (4.14) i (4.20). Uvedimo prvo matricu  $T_j$  dimenzije  $1 \times n_j$  takvu da je  $\ddot{q}_j = T_j \ddot{x}_j$ . Na primer,  $T_j = [0 \ 1 \ 0]$  ako je  $x_j$  određeno sa (4.15b) i  $q_j = \theta_j$ . Sada iz (4.14) sledi

$$P = H \cdot T\dot{x} + h \quad (4.21)$$

gde je  $T = \text{diag}[T_1 \dots T_n]$ . Zamenom  $\dot{x}$  iz (4.20) i (4.21) dobija se

$$P = (E_n - HTF)^{-1} \{ HT(Cx + Du) + h \} \quad (4.22)$$

gde je  $E_n$  jedinična matrica dimenzije  $n \times n$ . Zamenimo sada  $P$  iz (4.22) u (4.20) čime dobijamo kompletni model dinamike robota u obliku

$$\dot{x} = \hat{C}(x) + \hat{D}(x)u \quad (4.23)$$

Matrice sistema su

$$\hat{C}(x) = Cx + F(E_n - HTF)^{-1}(HTCx + h)$$

$$\hat{D}(x) = D + (E_n - HTF)^{-1}HTD \quad (4.24)$$

i dimenzije su im  $N \times 1$  i  $N \times n$  respektivno.

Očigledno da sada pojam direktnog i inverznog problema dinamike treba preformulisati. Direktni problem podrazumeva nalazenje upravljanja  $u(t)$  koje je potrebno da bi se ostvarilo zadato kretanje robota, a inverzni problem podrazumeva nalazenje kretanja ukoliko je poznato upravljanje. Ovo drugo nazivamo simulacijom.

#### 4.4. PRIMENA RAČUNARA ZA PRORAČUN DINAMIKE

Iz dosadašnjeg izlaganja o formiranju matematičkog modela dinamike robota možemo zaključiti da se teško može izvršiti ručno sastavljanje takvog modela. Ovaj zaključak trebalo bi obrazložiti. Postupak za formiranje diferencijalnih jednačina kretanja omogućava, u principu, da se jednačine napišu ručno. Međutim, takav pristup ima mnogo nedostataka. Prvo, jako je velika mogućnost grešaka pri tako složenom izvođenju. Drugo, ako se matematički model i formira bez greške, on će biti veoma kabast i nepodesan za upotrebu. Iste mane pojaviće se ako se za ručno formiranje modela izabere bilo koji drugi mehanički pristup. Otuda se javlja ideja da se ceo taj složeni posao formiranja i rešavanja matematičkog modela robota prebaci na računar. Postupak za formiranje matematičkog modela formuliše se tako da ima rekurzivni karakter, te je veoma prikladan za primenu na računaru (vidi prilog P 3). Objasnimo sada ideju primene računara za rešavanje dinamike.

Posmatrajmo matematički model (4.9). Matrice modela  $H(q)$  i  $h(q, \dot{q})$  mogu se posmatrati kao analitički izrazi koji određuju zavisnost od  $q$ , odnosno od  $q$  i  $\dot{q}$ . S druge strane možemo  $H(q)$  i  $h(q, \dot{q})$  tretirati kao složene računarske postupke kojima se izračunava brojna vrednost  $H$  polazeći od brojno poznatog  $q$ , i, takode, brojna vrednost  $h$ , polazeći od  $q$  i  $\dot{q}$ . Tako, kompletne analitičke izraze za matematički model na ovaj način nećemo dobiti, ali postupci za brojno sračunavanje matrica modela dovoljni su za rešavanje direktnog i inverznog problema dinamike. Prvi računarski postupci za proračun dinamike bili su zasnovani na ovakvom postupku. Oni su omogućili širu primenu računara u robotici.

Opisani numerički pristup ima i svoje nedostatke. Sheme na slikama 4.5 i 4.6 pokazuju da je sračunavanje matrica  $H$  i  $h$  neophodno izvršiti ponovo kada god se promene vrednosti  $q$  i  $\dot{q}$ , dakle u svakom koraku integracije. Pri takvom računu svaki put će se iznova sračunavati i mnoge veličine koje ne zavise od  $q$  i  $\dot{q}$  i koje se nisu menjale. Očigledno, ponešto će se nepotrebno računati jer se moglo izračunati samo jednom, na početku. U svakom slučaju, opisani numerički pristup ne omogućava da se u proračunu izdvoje ti elementi koji ne zavise od  $q$  i  $\dot{q}$  od onih koji zavise i koji se moraju računati za svaki trenutak vremena ponovo. Zato se došlo na ideju da se odustane od numeričkog modela i da se vrati na analitičke izraze  $H(q)$  i  $h(q, \dot{q})$ . Ovo liči na povratak ručnom pisanju modela, međutim, u ovom novom pristupu analitičke izraze sastavlja računar. U dobijenim izrazima

lako se izdvajaju elementi koji ne zavise od  $q$  i  $\dot{q}$  i koji se mogu izračunati samo jednom, na početku. Ovakav pristup se obično naziva simboličkim modelom.

Računarski postupci za formiranje i rešavanje dinamičkog modela omogućili su da se konačno sretnu teorija i praksa robotike. Do tada, teorija se razvijala pretežno akademski, bez ozbiljnije primene, a praksa je napredovala nezavisno, oslanjajući se na znanja iz oblasti automatskog upravljanja. Jasno je da je takva praksa imala svoje granice preko kojih nije mogla preći bez celovitije teorije robota. Primena računara za rešavanje kinematike i dinamike omogućila je da se prevaziđu nedostaci teorije robotike i ona postane upotrebljiva u praksi.

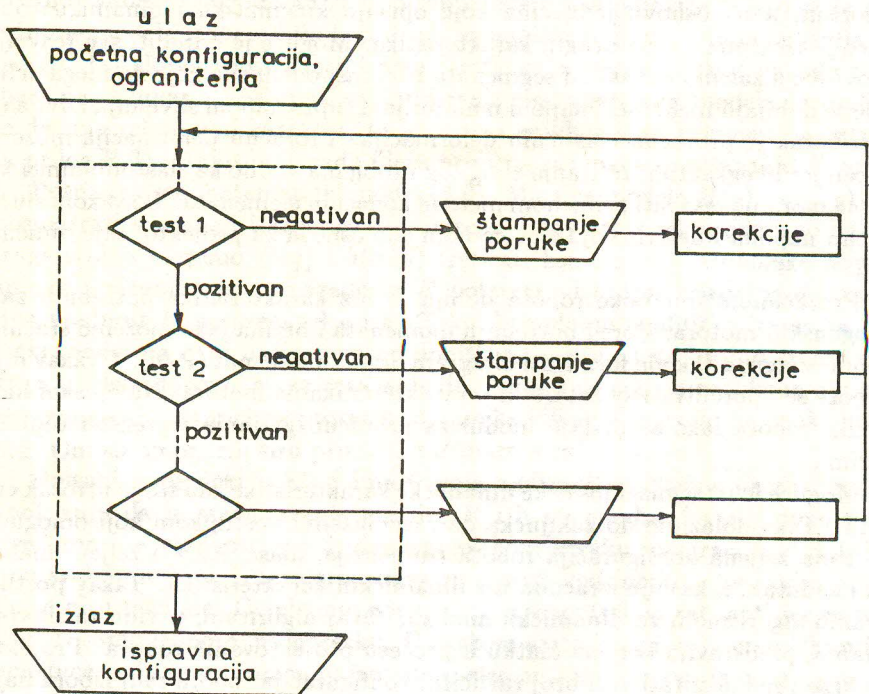
Ovakva, računarski orijentisana kinematika i dinamika iskorišćene su s jedne strane za razradu savršenijih metoda upravljanja robotima, a s druge strane za razvoj metoda računarskog projektovanja robota. Kako ćemo se upravljanjem baviti u posebnoj glavi ove knjige, to ćemo ovde obratiti pažnju na mogućnosti primene dinamike i računara u procesu projektovanja mehanizma i pogonskog sistema robota.

U odeljku 4.2 opisan je računarski postupak za rešavanje direktnog problema dinamike. Postupak omogućava da se, polazeći od željenog kretanja izraženog preko spoljašnjih koordinata  $X(t)$ , izračuna promena unutrašnjih koordinata  $q(t)$ , brzina  $\dot{q}(t)$  kao i potrebni pogonski momenti  $P(t)$ . Ovi podaci već sami po sebi mogu biti korisni, a na osnovu jednačina koje opisuju kinematiku i dinamiku robota moguće je izračunati i niz drugih karakteristika. Moguće je odrediti sve reakcije u zglobovima, a zatim za svaki od segmenata naći raspodelu sila koje na njega deluju. Odatle se dobijaju mehanički naponi u materijalu (npr. naponi savijanja i uvijanja). Sledeći korak je proračun elastičnih deformacija. Proračun deformacija može biti uprošćen jer bi egzaktno tretiranje zbog tog problema vodilo ka elastodinamici koju najčešće moramo rešavati primenom metode konačnih elemenata. U svakom slučaju proračun napona i deformacija služiće nam kao osnova za projektovanje dimenzija robota.

Proračunom dinamike robota dobija se niz karakteristika potrebnih za izbor pogonskih motora. Pored potrebnih momenata i brzina lako možemo sračunati potrebnu snagu, a takođe formirati dijagram brzina-momenat ( $P-\dot{q}$ ). Ovakav dijagram može se upoređivati sa kataloškim karakteristikama motora. Na opisani model dinamike robota lako se dodaje modul za proračun grejanja i prenosa toplote u motorima.

Moguće je izračunati još neke dinamičke karakteristike kao što je utrošak energije itd. Tako dolazimo do zaključka da raspoložemo postupkom koji omogućava da se zada željena konfiguracija robota (dimenzije, mase, itd.) i željeni manipulacioni zadatak, a kasnije izračuna niz dinamičkih karakteristika. Takav postupak nazivamo algoritmom za dinamičku analizu. Ovaj algoritam, u vidu računarskog programa, predstavlja korisnu alatku u procesu projektovanja robota. Projektant može brzo proanalizirati veći broj različitih konfiguracija robota radi izbora najpovoljnije. Može i menjati pojedine dimenzije i druge parametre da bi uočio uticaj tih promena na važne dinamičke karakteristike. Sve ovo omogućava brže i uspešnije projektovanje.

Sledeći korak u korišćenju računara za projektovanje robota je formiranje takozvanog interaktivnog postupka projektovanja i odgovarajućeg programskog paketa. Cilj nam je da za postavljeni manipulacioni zadatak odaberemo konfiguraciju robota (dimenzije, motore itd.) koja će zadovoljiti sve postavljene zahteve i sva ograničenja. Kao prime ograničenja možemo navesti uslov da elastična deformacija segmenata robota bude manja od dozvoljene vrednosti. Shema programa prikazana je na slici 4.7. Postupak kreće od neke zadate početne konfiguracije robora. Izvrši se dinamička analiza i testiranje izračunatih dinamičkih karakteristika. Ukoliko su svi testovi pozitivni, dakle sva ograničenja zadovoljena, onda je posmatrana konfiguracija dobra. Ako pak neki test bude negativan, dakle neko od ograničenja ne bude zadovoljeno, računar će štampati odgovarajuću poruku kao i preporuke za izmene konfiguracije koje će popraviti negativni test. Programski paket sadrži i posebne komunikacione potprograme koji omogućavaju projektantu jednostavnu izmenu pojedinih podataka o konfiguraciji robota. Nakon što je projektant uveo korekcije konfiguracije, postupak kreće od početka tj. vrši novu dinamičku analizu i testiranje. Takav ciklus se ponavlja sve dok se konačno ne dođe do konfiguracije koja zadovoljava sve zahteve i sva ograničenja, a to će biti onda kada svi testovi budu pozitivni.



Sl. 4.7. Algoritam za interaktivno projektovanje

Krajnji korak u korišćenju računara u projektovanju robota je formiranje postupka i programskog paketa koji bi na osnovu postavljenih zahteva vršio automatski izbor najpovoljnije konfiguracije robota. Ovaj postupak podrazumeva definisanje nekog kriterijuma optimalnosti i razvoj pogodnih metoda optimizacije.

Ovim bismo zaključili naše izlaganje ideja računarskog projektovanja u robotici. Opisane postupke dopunjavamo i programima za simulaciju i grafičko prikazivanje čime kompletiramo programski paket za računarsko projektovanje.

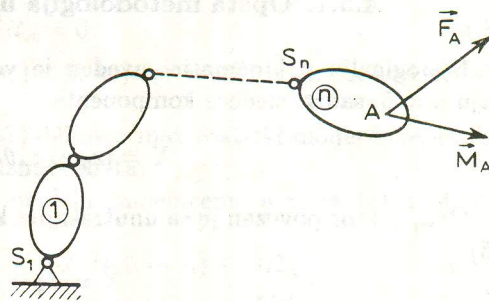
#### 4.5. DINAMIKA ROBOTA SA OGRANIČENIM KRETANJEM HVATALJKE

Ovaj odeljak obradeje dinamiku robota čija hvataljka ne može da se kreće proizvoljno u prostoru, već su joj nametnute određena ograničenja. Pri ovome naglasimo da pod terminom hvataljka podrazumevamo poslednji segment lanca bez obzira na završni uređaj koji se tu nalazi. Ovakva ograničenja nametnuta kretanju hvataljke česta su u nekim fazama izvršenja robotskog zadatka. Na primer, ako robot treba da piše po nekoj površini (sl. 4.9) tada hvataljka ne može da se kreće proizvoljno već se vrh pisaljke prinudno kreće po površini. Drugi primer bi se mogao naći u zadacima montaže (sl. 4.10 i 4.11). Ako, robot uvlači neki predmet u otvor tada je kretanje poslednjeg segmenta (koji u sebe uključuje i predmet) ograničeno na jednu translaciju i eventualno jedno obrtanje. Konačno, ograničenja se javljaju i u slučajevima dvoručne ili višeručne manipulacije (sl. 4.12). Niz drugih primera mogao bi se navesti. U svakom slučaju jasno je da uvedena ograničenja smanjuju broj stepeni slobode hvataljke, a takode, ograničenja izazivaju pojavu sila reakcije veze koje bitno utiču na dinamiku robota. Ovde ćemo problem tretirati tako da pokrijemo one slučajeve koji su interesantni za praktičnu primenu.

Posmatrajmo radi uprošćenja robot sa  $n = 6$  stepeni slobode i smatramo da tokom izvršenja zadatka robot ne dolazi u singularne položaje. U tom slučaju, bez uvedenih ograničenja hvataljke bi takode imala 6 stepeni slobode. Dinamiku ovakvog mehanizma možemo opisati modelom (4.9). Radi daljeg izvođenja proširimo posmatranje na robota na čiji poslednji segment, u zadatoj tački  $A$ , deluje sila  $\vec{F}_A$  i još deluje spreg momenta  $\vec{M}_A$  (Sl. 4.8). Tačka  $A$  definisana je vektorom  $\vec{C}_n A = \vec{p}$ .

Dinamiku ovakvog mehanizma opisujemo modelom:

$$H\ddot{q} + h = P + D_F F_A + D_M M_A \quad (4.25)$$



Sl. 4.8. Mehanizam robota sa silom i momentom koji deluju na hvataljku

gde je  $F_A$  matrica dimenzija  $3 \times 1$  koja sadrži elemente vektora  $\vec{F}_A$ , matrica  $M_A$  (takode  $3 \times 1$ ) sadrži vektor  $\vec{M}_A$  (dakle zadržavamo dogovor o pisanju vektora u obliku  $3 \times 1$  matrice i obrnuto).  $D_F$  i  $D_M$  su odgovarajuće matrice dimenzija  $n \times 3$  koje pokazuju uticaj  $\vec{F}_A$  i  $\vec{M}_A$  na generalisane sile u zglobovima:

$$D_F = \begin{bmatrix} d_{F1}^T \\ \vdots \\ d_{Fn}^T \end{bmatrix}, \quad \vec{d}_{Fj} = \begin{cases} \vec{e}_j \times \vec{r}_A^j, & s_j = 0 \\ \vec{e}_j, & s_j = 1 \end{cases} \quad (4.26)$$

$$\vec{r}_A^j = \vec{S}_j \vec{A} = \sum_{k=j}^{n-1} (\vec{r}'_{k,k} - \vec{r}'_{k,k+1}) + \vec{r}'_{n,n} + \vec{p} \quad (4.27)$$

$$D_M = \begin{bmatrix} d_{M1}^T \\ \vdots \\ d_{Mn}^T \end{bmatrix}, \quad \vec{d}_{Mj} = \begin{cases} \vec{e}_j, & s_j = 0 \\ 0, & s_j = 1 \end{cases} \quad (4.28)$$

Pri posmatranju kretanja sa ograničenjem,  $F_A$  i  $M_A$  će predstavljati reakcije ograničenja (reakcije veze). U praksi se uvođenje ograničenja najčešće svodi na kontakt hvataljke sa nepomičnom podlogom (stacionarno ograničenje) ili pak na kontakt sa nekim telom koje se kreće po zadatim zakonima i na čije kretanje robot ne utiče (nestacionarno ograničenje). Ipak, javljaju se i slučajevi kada dinamika robota utiče i na tela sa kojima je robot u kontaktu (na primer, dvoručna manipulacija). U svakom slučaju, dobija se struktura zatvorenog lanca.

#### 4.5.1. Opšta metodologija uvođenja ograničenja

U poglavlju o kinematici uveden je vektor spoljašnjih koordinata koji, u slučaju  $n = 6$ , sadrži sledeće komponente.

$$X = [x_A y_A z_A \theta \varphi \psi]^T \quad (4.29)$$

Ovaj vektor povezan je sa unutrašnjim koordinatama preko Jakobijeve forme (2.56):

$$\ddot{X} = J\ddot{q} + A \quad (4.30)$$

Ako uvedemo ograničenje na kretanje hvataljke tada će se smanjiti broj stepeni slobode. Neka je  $n_r$ , ovaj smanjeni broj. Obično govorimo o redukovanom broju stepeni slobode hvataljke. Dakle, posmatramo ograničenje koje ukida  $n_c$  stepeni slobode pri čemu je  $n_c = n - n_r$ . Za definisanje položaja hvataljke sada uvodimo  $n_r$  nezavisnih parametara  $\eta_1, \dots, \eta_{nr}$  koji formiraju takozvani redukovani vektor položaja

$$X_r = [\eta_1 \dots \eta_{nr}] \quad (4.31)$$



Najčešće se parametri  $\eta_j$  uvode tako da određuju relativni položaj hvataljke u odnosu na uvedeno ograničenje. Vektor spoljašnjih koordinata  $X$  moguće je povezati sa redukovanim vektorom položaja  $X_r$  preko nove Jakobijeve forme

$$\ddot{X} = J_r \ddot{X}_r + A_r \quad (4.32)$$

gde je  $J_r$  takozvani redukovani jakobijan dimenzija  $n \times n_r$ , pridružena matrica  $A_r$  je dimenzija  $n \times 1$ . Matrice  $J_r$  i  $A_r$  izvode se iz relacija koje definišu postavljeno ograničenje.

Kombinovanjem (4.30) i (4.32) dobija se

$$J_r \ddot{X}_r + A_r = J \ddot{q} + A \quad (4.33)$$

Ova relacija definiše kinematiku ograničenog kretanja.

Dinamiku ograničenog kretanja opisujemo modelom (4.25) pri čemu  $\vec{F}_A$  i  $\vec{M}_A$  predstavljaju silu reakcije veze i reakcioni momenat. Model možemo napisati i kompaktnije:

$$H \ddot{q} + h = P + DR_A \quad (4.34)$$

gde je

$$R_A = \begin{bmatrix} F_A \\ M_A \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

šestokomponentni vektor reakcije, a

$$D = [D_F D_M] \quad (4.36)$$

je dimenzija  $n \times 6$ .

Komponente vektora reakcije  $R_A$  u opštem slučaju nisu nezavisne, već u zavisnosti od tipa uvedenog ograničenja zadovoljavaju određene međusobne odnose koji se mogu izraziti relacijom

$$ER_A = 0 \quad (4.37)$$

gde je  $E$  matrica dimenzija  $(6 - n + n_r) \times 6$ , koja se izvodi iz izraza koji definišu uvedeno ograničenje.

Sada relacije (4.33), (4.34) i (4.37) definišu matematički model kinematike i dinamike ograničenog kretanja mehanizma robota.

Ako želimo kompaktniju formu modela zamenićemo  $\ddot{q}$  iz (4.33) u (4.34) i dobiti

$$HJ^{-1}J_r \ddot{X}_r = P - h - HJ^{-1}(A_r - A) + DR_A \quad (4.38)$$

Sada ovu realizaciju, zajedno sa (4.37) možemo napisati u obliku:

$$\begin{bmatrix} HJ^{-1}J_r & -D \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X}_r \\ R_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -h - HJ^{-1}(A_r - A) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Dobijeni model je dimenzije  $(n_r + 6) \times (n_r + 6)$ . Moguće je, međutim, napisati još kompaktniju formu. Šestokomponentni vektor reakcije  $R_A$  može se izraziti kao linearna funkcija  $n_c$  nezavisnih komponenata. Dakle, nezavisnih komponenata

ima  $n_c = n - n_r$ , odnosno onoliko koliko stepeni slobode je "ukinuto" uvođenjem ograničenja. Sada je

$$R_A = GR_{Ar} \quad (4.40)$$

gde  $R_{Ar}$  vektor dimenzije  $n - n_r$ , koji sadrži nezavisne reakcije i koji nazivamo još redukovani vektor reakcije. Matrica  $G$  dimenzija  $(6 \times (n - n_r))$  izvodi se polazeći od definicionih relacija ograničenja. Uvođenjem (4.40) u (4.38) dobija se dinamički model

$$HJ^{-1}J_r\ddot{X}_r = P - h - HJ^{-1}(A_r - A) + DGR_{Ar} \quad (4.41)$$

odnosno

$$[HJ^{-1}J_r \quad -DG] \begin{bmatrix} \ddot{X}_r \\ R_{Ar} \end{bmatrix} = P - (h + HJ^{-1}(A_r - A)) \quad (4.42)$$

Dimenzije blokova u ovom modelu su:

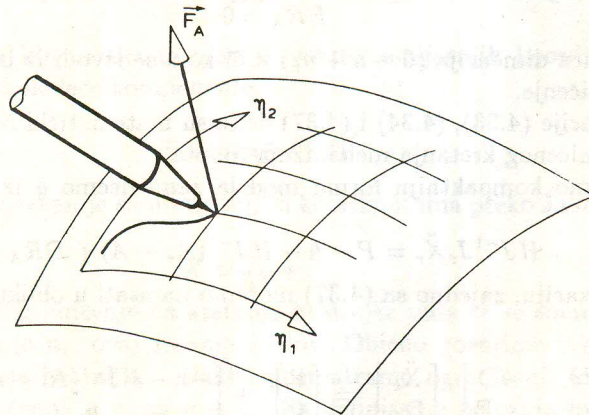
$$[(n \times n_r \quad (n \times (n - n_r)))] \begin{bmatrix} n_r \times 1 \\ (n - n_r) \times 1 \end{bmatrix} = (n \times 1) \quad (4.43)$$

pa je model dimenzija  $(n \times n)$ .

Razmotrimo prvo rešavanje direktnog problema dinamike. Pod tim terminom ćemo ovde podrazumevati da je zadato kretanje  $X_r(t)$  i reakcije  $R_{Ar}(t)$  koje želimo ostvariti, a traže se odgovarajući pogoni u zglobovima  $P(t)$ . Očigledno,  $P$  se izračunava direktno iz jednačine (4.42).

Inverzni problem podrazumeva integraciju modela. Zadati su pogoni  $P(t)$ , a traži se kretanje  $X_r(t)$  i reakcija  $R_{Ar}(t)$ . Model (4.42) omogućava rešavanje ubrzanja  $\ddot{X}_r$  i reakcija  $R_{Ar}$ , a time i integraciju modela.

#### 4.5.2. Tipovi ograničenja

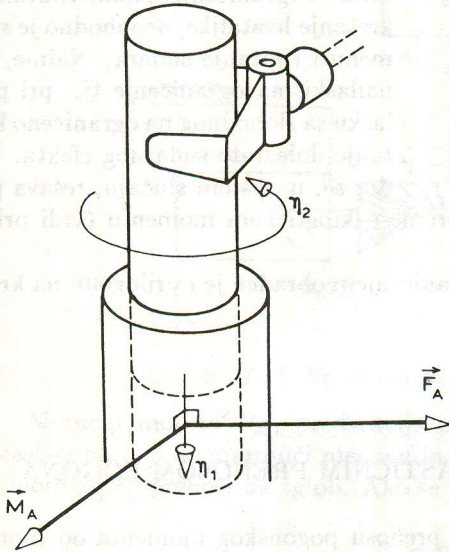


Sl. 4.9. Zadatak pisanja - ograničenje tipa površine

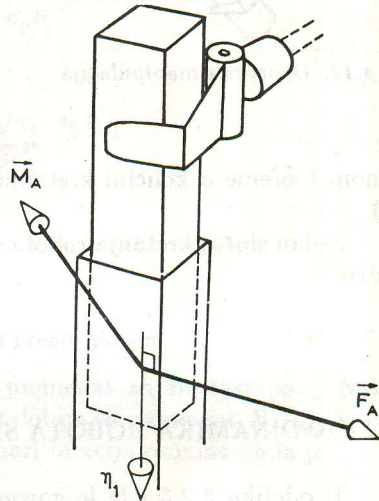
Razmotrimo tipove ograničenja koji se javljaju u praktičnim problemima. Ovde ćemo glavne tipove ukratko objasniti, a u prilogu P4 izvešćemo dinamički

model tj. matrice  $J_r$ ,  $A_r$ ,  $E$  i  $G$ ,  $Z$  a jedan konkretan tip ograničenja – ograničenje u obliku površine.

Jedno od čestih ograničenja je ograničenje tipa površine (sl. 4.9). Tada je položaj hvataljke određen sa dva relativna parametra  $\eta_1$  i  $\eta_2$  koji definišu položaj vrha pisaljke na površini i tri ugla koji definišu orijentaciju hvataljke. Uvedeno ograničenje ukinulo je jedan stepen slobode ( $n_c = 1$ ). Redukovani vektor položaja ima komponente  $X_r = [\eta_1, \eta_2, \theta, \varphi, \psi]^T$  i dimenzije je  $n_r = 5$ . Što se tiče reakcija, momenat je jednak nuli ( $M_A = 0$ ), a sila reakcije  $\vec{F}_A$  mora biti normalna na površinu (podrazumevajući glatku površinu), pa ima jednu nezavisnu komponentu ( $n_c = n - n_r = 1$ ).



Sl. 4.10. Zadatak montaže – ograničenje tipa cilindričnog para

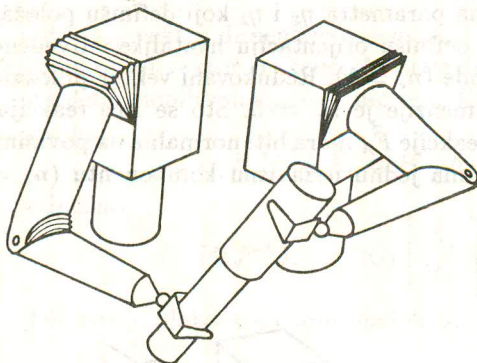


Sl. 4.11. Zadatak montaže – ograničenje tipa translatornog para

Drugi čest slučaj ograničenja je ograničenje tipa cilindričnog para (sl. 4.10). Tada hvataljka ima samo dva stepena slobode ( $n_r = 2$ ) jer je moguća samo translacija duž ose otvora i obrtanje oko te ose. Tim pomeranjima odgovaraju parametri  $\eta_1$  i  $\eta_2$  koji čine redukovani vektor položaja:  $X_r = [\eta_1, \eta_2]^T$ . Reakcije  $\vec{F}_A$  i  $\vec{M}_A$  moraju biti obe normalne na osu otvora, pa, prema tome, svaka od njih ima po dve nezavisne komponente. Dakle,  $n_c = n - n_r = 4$ .

U procesu montaže javlja se i ograničenje tipa translatornog para (sl. 4.11). Za razliku od prethodnog slučaja, ovde hvataljka ima samo jedan stepen slobode (uvlačenje) pa je  $n_r = 1$  i redukovani vektor položaja sadrži samo podužnu koordinatu uvlačenja:  $X_r = [\eta_1]$ . Sila reakcije  $\vec{F}_A$  je i dalje normalna na osu otvora, pa ima dve nezavisne komponente, ali, reakcioni momenat  $\vec{M}_A$  može imati proizvoljan

pravac, pa ima tri nezavisne komponente. Dakle, ukupno ima  $n_c = n - n_r = 5$  nezavisnih komponenta reakcije.



Sl. 4.12. Dvoručna manipulacija

Još niz tipova ograničenja možemo nabrojati, međutim, ovde ćemo spomenuti još samo jedan specijalan slučaj—dvoručnu manipulaciju. Na slici 4.12 prikazana su dva robota koji obavljaju zadatak montaže. Tokom izvršenja zadataka njihove hvataljke su povezane cilindričnim parom.

Kada govorimo o kretanju robota sa ograničenjem nametnutim na kretanje hvataljke, neophodno je spomenuti i pitanje sudara. Naime, pri nailasku na ograničenje tj. pri prelasku sa slobodnog na ograničeno kretanje dolazi do sudarnog efekta. Sudar se, u opštem slučaju, rešava pri-

menom teoreme o količini kretanja i teoreme o kinetičkom momentu (vidi prilog P4).

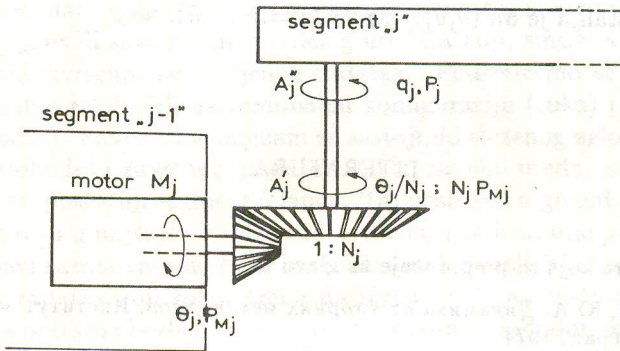
Jedan slučaj kretanja robota sa ograničenjem obrađen je i prilogom na kraju knjige.

#### 4.6. DINAMIKA ROBOTA SA ELASTIČNIM PRENOSOM POGONA

U odeljku 3.2.3 gde je govoreno o prenosu pogonskog momenta od motora do zgloba videli smo da se često projektuje prilično složen prenosni sistem i da se često pogonski momenat prenosi na relativno veliku daljinu. Obično se radilo o prenosu osovinom ili lancem, a skoro uvek je u prenosni sistem uključen reduktor. Pri pisanju relacija kojima opisujemo prenosni sistem smatralo se da je takav sistem nedeformabilan. Tako se došlo do relacija (3.13) – (3.15) koje su korišćene i kasnije u dinamici (relacija (4.16)). Dakle, obrtanje zgloba ( $q_j$ ) direktno je sledilo iz obrtanja motora ( $\theta_j$ ). Međutim, prenosni sistem nikada ne može biti u potpunosti krut. Naime, uvek postoje elastične deformacije, pa možemo reći da je relacija (4.16) aproksimativna i da važi tek za dovoljno krut prenos. Sada se postavlja pitanje šta znači "dovoljno krut" prenos. Mehanička krutost elemenata prenosnog sistema jeste velika i najčešće je aproksimacija (4.16) opravdana. Međutim, u nekim preciznim proračunima deformacije u prenosu se moraju uzeti u obzir. Uzmimo na primer deformaciju istezanja prenosnog lanca ili deformaciju uvijanja cevastog dela harmonik–drajv reduktora. Zato ovde pokazujemo, na nešto uprošćenom primeru, kako izgleda dinamički model robota sa elastičnim prenosnim sistemom. Na sličan način može se analizirati i prenos sa složenijom elastičnom deformacijom tj.

sa više deformabilnih elemenata. Kako se radi i o dinamici motora i o dinamici mehanizma, to će dobijeni model predstavljati kompletni model dinamike.

Prilikom izvođenja kompletnog dinamičkog modela (odjeljak 4.3) opisali smo mehanizam modelom (4.14), motore modelom (4.15), a prenosni sistem relacijama (4.16a) i (4.16b). U slučaju deformabilnog elastičnog prenosa modeli mehanizma i motora se ne menjaju. Menjaju se, međutim, relacije koje opisuju prenos. Neka je prenosni sistem takav kakav je prikazan na slici 4.13. i neka je jedini elastični element osovina  $A'_j A''_j$ . Konstantu torzije krutosti označimo sa  $k_j$ , a konstantu prigušenja sa  $b_j$ .



Sl. 4.13. Uprošćeni sistem za prenos pogona

Moment motora  $P_{M_j}$  predstavlja ulazni momenat za zupčast par. Nakon zupčastog para (zanemarujući njegovu inerciju) dobija se momenat  $N_j P_{M_j}$  koji se osovinom  $A'_j A''_j$  prenosi na zglob. Ako se zanemari inercija osovine onda je

$$P_j = N_j P_{M_j} \quad (4.44)$$

tj. relacija (4.16a) važi i u slučaju elastičnog prenosa. Međutim, usled elastične deformacije osovine  $A'_j A''_j$  koordinata obrtanja motora  $\theta_j$  i koordinata obrtanja zgloba  $q_j$  postaju međusobno nezavisne. Time se broj generalisanih koordinata povećava za  $n$  ( $\theta_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ ), a broj promenljivih stanja za  $2n$  ( $\theta_j$ ,  $\dot{\theta}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ ). Relacija (4.16b) očigledno više ne važi, jer se pojavljuje uvijanje tj. ugaona deformacija  $\Delta q_j = N_j \theta_j - q_j$ . Relacija (4.16a) tj. (4.44), mada važi, ne primenjuje se u tom obliku. Momenat koji vrši elastičnu deformaciju može se napisati u obliku

$$P_j = N_j P_{M_j} = k_j(N_j \theta_j - q_j) + b_j(N_j \dot{\theta}_j - \dot{q}_j) \quad (4.45)$$

Sada model mehanizma (4.14) postaje

$$H(q)\ddot{q} + h'(q, \dot{q}) = 0 \quad (4.46)$$

gde je

$$h' = h - P \quad (4.47)$$

$$P = \text{column} \left[ k_j(N_j\theta_j - q_j) + b_j(N_j\dot{\theta}_j - \dot{q}_j) \right] \quad (4.48)$$

Model motora (4.15) postaje

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta_j \\ \dot{\theta}_j \\ i_j \end{bmatrix} = C_j \begin{bmatrix} \theta_j \\ \dot{\theta}_j \\ i_j \end{bmatrix} + f_j \{ k_j(N_j\theta_j - q_j) + b_j(N_j\dot{\theta}_j - \dot{q}_j) \} + d_j u_j \quad (4.49)$$

Sada (4.46) i (4.49) određuju kompletan model dinamike robota. Ukupan broj koordinata stanja je  $5n$  ( $\theta_j, \dot{\theta}_j, i_j, q_j, \dot{q}_j, j = 1, \dots, n$ ).

#### LITERATURA

Korišćena literatura koja se preporučuje uz glavu 4:

1. Степаненко, Ю.А. *Динамика пространних механизмов*, Институт за математику САНУ, Београд, 1974.
2. Vukobratović, M., *Legged Locomotion Robots and Antropomorphic Mechanisms*, izdanje Institut "M.Pupin", Београд, 1974.
3. Vukobratović, M., Potkonjak V., *Dynamics of Manipulation Robots*, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
4. Paul, R., *Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control*, MIT Press, Cambridge, MA, 1981.
5. Brady, M., Hollerbach J.M., Johnson T.C., Lozano Perez T., Mason M.T., *Robot Motion: Planning and Control*, MIT Press, Cambridge, MA, 1982.
6. Vukobratović, M., Potkonjak V., *Applied Dynamics and CAD of Manipulation Robots*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
7. Vukobratović, M., Kićanski N., *Real-Time Dynamics of Manipulation Robots*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
8. Попов, Е.П., Верешагин А.Ф., Зенкевич С.Л., *Манипуляционные роботы: Динамика и алгоритмы*, наука, Москва, 1978.
9. Медведов. В.Ц., Лесков А. Г., Ющенко А.С., *Системы управления манипуляционных роботов*, Наука, Москва, 1978.
10. Купаков, Ф. М., *Супревизорное управление манипуляционными роботами*, Наука, Москва, 1980.