obratićemo na transformaciju koordinata, odnosno preračunavanje kretanja iz unutrašnjih u spoljašnje koordinate i obratno.

2.3.1. Generalisane brzine i ubrzanja

Kada govorimo o brzini, razmotrićemo na šta se taj pojam odnosi. Prvo, uvešćemo pojam generalisanih brzina. Kako je već u prethodnom odeljku rečeno, generalisane brzine su izvodi po vremenu generalisanih koordinata, dakle $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, $\ldots$, $\dot{q}_n$. Drugačiji naziv je unutrašnje brzine jer predstavljaju izvode pomeranja u zglobovima mehanizma, odnosno brzine relativnog pomeranja segmenata.

Dalje, uvodimo i pojam generalisanih ili unutrašnjih ubrzanja. To su izvodi generalisanih brzina, odnosno drugi izvodi generalisanih koordinata. Iz toga sledi da su ubrzanja $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_n$.

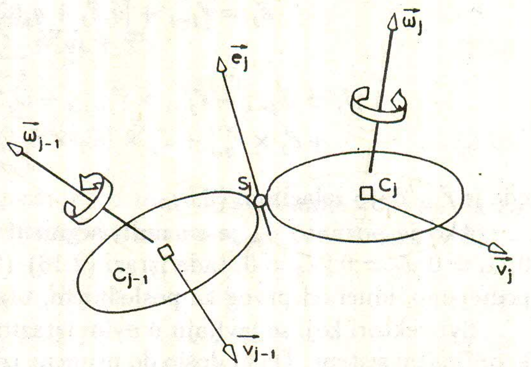
Uvodimo sada, pored vektora generalisanih koordinata q, još i n—dimenzione vektore generalisanih brzina ($\dot{q}$) i ubrzanja ($\ddot{q}$).

$$\dot{q} = [\dot{q}_1 \ldots \dot{q}_n]^T \tag{2.13}$$

$$\ddot{q} = [\ddot{q}_1 \ldots \ddot{q}_n]^T \tag{2.14}$$

2.3.2. Brzine i ubrzanja segmenata mehanizma

Posmatrajmo jedan segment lanca, na primer j–ti, kao telo u prostoru. Tada je stanje tog tela u nekom trenutku vremena određeno njegovim položajem i brzinom. O položaju tela govorili smo ranije, a sada ćemo razmotriti brzinu. Potrebno je poznavati brzinu težišta C_j i ugaonu brzinu segmenta. Označimo vektor brzine težišta sa $\vec{v}_j$, a vektor ugaone brzine sa $\vec{\omega}_j$ (sl. 2.43).



Sl. 2.43. Brzina težišta i ugaone brzine segmenata

Razmotrimo mogućnost izražavanja brzina $\vec{v}_j$ i $\vec{\omega}_j$ u funkciji generalisanih brzina $\dot{q}$. Ugaona brzina $\vec{\omega}_j$ je posledica superpozicije svih rotacija u zglobovima lanca, počevši od podloge pa do posmatranog segmenta "j". Posmatrajmo zglob S_k. Ako je zglob rotacioni tada je $s_k = 0$ i vektor rotacije je $\dot{q}_k\vec{e}_k$. S obzirom na to da zglob ne mora biti rotacioni, to u opštem slučaju vektor rotacije pišemo u obliku $\dot{q}_k(1 - s_k)\vec{e}_k$. Za translatorni zglob ($s_k = 1$) ovaj izraz je jednak nuli. Slaganjem rotacija dobijamo

$$\vec{\omega}_j = \sum_{k=1}^{j} \dot{q}_k (1 - s_k) \vec{e}_k \tag{2.15}$$

što se može napisati i u rekurzivnoj formi

$$\vec{\omega}_j = \vec{\omega}_{j-1} + \dot{q}_j (1 - s_j) \vec{e}_j \tag{2.16}$$

Brzinu težišta $\vec{v}_j$ možemo takođe dobiti preko teorije vezanih vektora ili pak diferencirajući vektor položaja težišta ($\vec{r}_{Cj}$). Kako je kod lančanih sistema veoma pogodno raditi sa rekurzivnim izrazima, to vektor položaja težišta C_j pišemo u obliku (sl. 2.43):

$$\vec{r}_{Cj} = \vec{r}_{Cj-1} - \vec{r}_{j-1,j} + \vec{r}_{j,j}\,' =$$
$$\vec{r}_{Cj-1} - \vec{r}_{j-1,j} + \vec{r}_{j,j} + s_j q_j \vec{e}_j$$

Diferenciranjem po vremenu dobijamo

$$\vec{v}_j = \vec{v}_{j-1} - \vec{\omega}_{j-1} \times \vec{r}_{j-1,j} + \vec{\omega}_j \times \vec{r}_{j,j}\,' + \dot{q}_j s_j \vec{e}_j \tag{2.17}$$

pri čemu smo koristili činjenicu da je izvod nekog vektora $\vec{a}_k$ vezanog za segment "k" jednak: $\dot{\vec{a}}_k = \vec{\omega}_k \times \vec{a}_k$, gde je ω_k ugaona brzina segmenta.

Na ovaj način dobili smo izraze (2.16) i (2.17) koji predstavljaju rekurzivne izraze za brzine segmenata.

Diferenciranjem po vremenu dobija se ugaono ubrzanje segmenta ($\vec{\varepsilon}_j = \dot{\vec{\omega}}_j$) i ubrzanje težišta ($\vec{w}_j = \dot{\vec{v}}_j$):

$$\vec{\varepsilon}_j = \vec{\varepsilon}_{j-1} + [\ddot{q}_j \vec{e}_j + \dot{q}_j (\vec{\omega}_j \times \vec{e}_j)](1 - s_j) \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} \vec{w}_j = \vec{w}_{j-1} - \vec{\varepsilon}_{j-1} \times \vec{r}_{j-1,j} - \vec{\omega}_{j-1} \times (\vec{\omega}_{j-1} \times \vec{r}_{j-1,j}) + \\ + \vec{\varepsilon}_j \times \vec{r}_{j,j}\,' + \vec{\omega}_j \times (\vec{\omega}_j \times \vec{r}_{j,j}\,') + [\ddot{q}_j \vec{e}_j + 2\dot{q}_j (\vec{\omega}_j \times \vec{e}_j)] s_j \end{aligned} \tag{2.19}$$

gde je $\vec{r}_{j,j}\,'$ dato relacijom (2.6).

Ako je poznato da je za nulti segment lanca tj. podlogu mehanizma $\overset{v}{\vec{V}}{}'_{j,j} = 0, \vec{\omega}_0 = 0$ $\vec{w}_0 = 0$ i $\vec{\varepsilon}_0 = 0$, tada izrazi (2.16)-(2.19) omogućavaju da se izračunaju postepeno, idući od prvog ka poslednjem, brzine i ubrzanja svih segmenata lanca.

Svi vektori koji se javljaju u ovim izrazima izraženi su u odnosu na nepokretni koordinatni sistem. Da bi došlo do primene izraza, potrebno je znati $\vec{e}_j$, $\vec{r}_{j,j}$, $\vec{r}_{j-1,j}$ za svaki zglob lanca. Ako je poznata geometrija lanca, tada su ovi vektori poznati ali izraženi u odnosu na vezane sisteme segmenta tj. poznato je $\vec{\bar{e}}_j, \vec{\bar{r}}_{j,j}$ i $\vec{\bar{r}}_{j-1,j}$. Dalje, ako je poznat položaj lanca, tj. koordinate $q_1, \ldots, q_n$ tada se mogu izračunati prelazne matrice $A_1, \ldots, A_n$. Sada tražene vektore u nepokretnom sistemu možemo izračunati kao:

$$\vec{e}_j = A_j \vec{\bar{e}}_j, \quad \vec{r}_{j,j} = A_j \vec{\bar{r}}_{j,j}, \quad \vec{r}_{j-1,j} = A_{j-1} \vec{\bar{r}}_{j-1,j} \tag{2.20}$$

Ukupno, za izračunavanje svih brzina segmenata lanca potrebno je znati geometriju i položaj lanca kao i generalisanje brzine $\dot{q}$. Za ubrzanje je potrebno znati još i $\ddot{q}$.

Treba spomenuti još jednu mogućnost. Umesto izraza (2.16) - (2.19) i transformacija (2.20) kojima se vektori "prebacuju" u spoljašnji nepokretni sistem, moguće je zadržati vektore u vezanim sistemima i modifikovati izraze (2.16)-(2.19) tako da važe za vezane sistema. Polazeći od (2.16) i (2.17), za brzine važi

$$\vec{\bar{\omega}}_j = A_{j,j-1}\vec{\bar{\omega}}_{j-1} + \dot{q}_j(1-s_j)\vec{\bar{e}}_j \tag{2.21}$$

$$\vec{\bar{v}}_j = A_{j,j-1}(\vec{\bar{v}}_{j-1} - \vec{\bar{\omega}}_{j-1} \times \vec{\bar{r}}_{j-1,j}) + \vec{\bar{\omega}}_j \times \vec{\bar{r}}\,'_{j,j} + \dot{q}_j s_j \vec{\bar{e}}_j \tag{2.22}$$

a analogno se iz (2.18) i (2.19) dobijaju izrazi za ubrzanja. Bez obzira na to što korišćenje izraza u vezanim sistemima omogućava veću brzinu računanja, mi ćemo, radi jasnoće, nadalje zadržati izražavanje u spoljašnjem nepokretnom sistemu.

Brzine $\vec{\omega}_j$ i $\vec{v}_j$ moguće je predstaviti u obliku linearnih formi po generalisanim brzinama:

$$\vec{\omega}_j = \sum_{k=1}^{j} \vec{\alpha}_k^j \dot{q}_k \tag{2.23}$$

$$\vec{v}_j = \sum_{k=1}^{j} \vec{\beta}_k^j \dot{q}_k \tag{2.24}$$

(gde "j" u oznakama $\vec{\alpha}_k^j$ i $\vec{\beta}_k^j$ predstavlja gornji indeks, a ne eksponent).

Sada je ubrzanja $\vec{\varepsilon}_j$ i $\vec{w}_j$ moguće predstaviti u obliku linearnih formi po generisanjim ubrzanjima:

$$\vec{\varepsilon}_j = \sum_{k=1}^{j} \vec{\alpha}_k^j \ddot{q}_k + \vec{\gamma}^j \tag{2.25}$$

$$\vec{w}_j = \sum_{k=1}^{j} \vec{\beta}_k^j \ddot{q}_k + \vec{\delta}^j \tag{2.26}$$

Predimo sada na matičnu formu pisanja. U tom cilju uvedimo dogovor da za svaki vektor $\vec{a}$, odgovarajuću 3×1 matricu označavamo sa a. Tada izraze (2.23) - (2.26) možemo pisati u obliku

$$\omega_j = \Gamma^j \dot{q} \tag{2.27}$$

$$v_j = \Omega^j \dot{q} \tag{2.28}$$

$$\varepsilon_j = \Gamma^j \ddot{q} + \Phi^j \tag{2.29}$$

$$w_j = \Omega^j \ddot{q} + \Theta^j \tag{2.30}$$

gde je $\ddot{q} = [\ddot{q}_1 \ldots \ddot{q}_n]^T$, Γ^j i Φ^j su matrice dimenzija $3 \times n$ odnosno 3×1, čije su kolone koeficijenti linearne forme:

$$\Gamma^j = \left[\alpha_1^j \ldots \alpha_j^j 0 \ldots 0\right] \tag{2.31}$$

$$\Phi^j = \left[\gamma^j\right] \tag{2.32}$$

a matrice Ω^j i Θ^j su

$$\Omega^j = \left[\vec{\beta}_1^j \ldots \vec{\beta}_j^j 0 \ldots 0\right] \tag{2.33}$$

$$\Theta^j = \left[\vec{\delta}^j\right] \tag{2.34}$$

Ove matrice se često pišu bez gornjeg indeksa "j" (samo $\Gamma, \Phi, \Omega, \Theta$) zato što se pri rekurzivnom sračunavanju samo vrše njihove izmene i dopunjavanja kako bi odgovarale novom segmentu. Razmotrimo kako se menjaju matrice Γ, Φ, Ω i Θ pri povećanju j. Polazeći od rekurzivnih izraza (2.16) - (2.19) može se pokazati da je u j-toj iteraciji (prelaz od $j-1$ na j) potrebno izvršiti sledeće izmene i dopunjavanja matrica

$$\left.\begin{aligned} \vec{\alpha}_k^j &= \vec{\alpha}_k^{j-1}, \quad k = 1, \ldots, j-1 \\ \vec{\alpha}_j^j &= (1 - s_j)\vec{e}_j \end{aligned}\right\} \tag{2.35}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{\gamma}^j &= \vec{\gamma}^{j-1} + \vec{f} \\ \vec{f} &= \dot{q}(\vec{\omega}_{j-1} \times \vec{e}_j)(1 - s_j) \end{aligned}\right\} \tag{2.36}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{\beta}_k^j &= \vec{\beta}_k^{j-1} - \vec{\alpha}_k^{j-1} \times \vec{r}_{j-1,j} + \vec{\alpha}_k^j \times \vec{r}\,'_{j,j}. \quad k = 1, \ldots, j-1 \\ \vec{\beta}_j^j &= \vec{e}_j s_j + \vec{\alpha}_j^j \times \vec{r}\,'_{j,j} \end{aligned}\right\} \tag{2.37}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{\delta}^j &= \vec{\delta}^{j-1} - \vec{\gamma}^{j-1} \times \vec{r}_{j-1,j} + \vec{\gamma}^j \times \vec{r}\,'_{j,j} + \vec{h} \\ \vec{h} &= -\vec{\omega}_{j-1} \times (\vec{\omega}_{j-1} \times \vec{r}_{j-1,j}) + \vec{\omega}_j \times (\vec{\omega}_j \times \vec{r}\,'_{j,j}) + 2\vec{\omega}_{j-1} \times \vec{e}_j s_j \dot{q}_j \end{aligned}\right\} \tag{2.38}$$

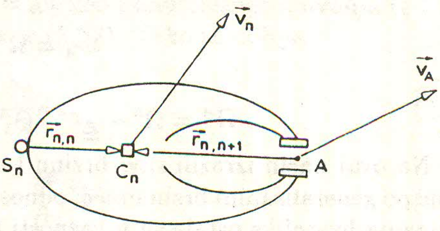
Formiranje matrica Γ, Φ, Ω, Θ moguće je dakle izvršiti rekurzivno. U svakoj iteraciji (na primer "j") lancu se dodaje novi segment. Izračunava se relativna prelazna matrica ($A_{j-1,j}$) i apsolutna (A_j), pa se vektori geometrije prebacuju u spoljašnjoj nepokretni sistem. Sada se primenom rekurzivnih izraza (2.35)-(2.38) formiraji matrice Γ^j, Φ^j, Ω^j, i Θ^j polazeći od $\Gamma,^{j-1}$, $\Phi,^{j-1}$, $\Omega^{j-1}, \Theta^{j-1}$.

2.3.3. Brzina i ubrzanje hvataljke robota

Hvataljka robota, kako je već rečeno, predstavlja poslednji tj. n-ti segment lanca. Težište hvataljke je tada C_n.Ako tako posmatramo, onda brzinu težišta ($\vec{v}_n$) i ugaonu brzinu hvataljke ($\vec{\omega}_n$) možemo izračunati onako kako je prikazano u prethodnom odeljku. Dakle, brzine hvataljke izražavamo rekurzivno polažeći od brzina prethodnog (pretposlednjeg segmenta). Iato važi i za ubrzanje težišta $\vec{w}_n$ i ugaono ubrzanje $\vec{\varepsilon}_n$.

Termin hvataljka koristimo za poslednji segment lanca, bez obzira na to da li je završni uređaj zaista hvataljka ili pištolj za prskanje bojom ili neki drugi uređaj. Takođe, u fazi kada prava hvataljka nosi neki radni predmet, tada pod terminom hvataljka podrazumevamo ceo taj složeni poslednji segment (tj. hvataljku zajedno sa predmetom). Podsetimo još da smo pod pojmom vrh hvataljke podrazumevali onu tačku hvataljke koja je od ključnog interesa za vršenje postavljenog manipulacionog zadatka (vidi tačku A na slikama 2.27 i 2.31).

Do sada smo pokazali kako se mogu izraziti brzina i ubrzanje težišta kao i ugaona brzina i ubrzanje hvataljke robota. Međutim, za izvršenje praktičnih manipulacionih zadataka brzina težišta hvataljke nije od neposrednog interesa. Bitna je



Sl. 2.44. Brzina vrha hvataljke

brzina vrha hvataljke. Ovu brzinu označićemo sa $\vec{v}_A$ i možemo je izračunati polazeći od brzine težišta (sl. 2.44).

Prvo je neophodno definisati položaj vrha hvataljke (A) u odnosu na njeno težište (C_n). Uvedimo radi toga $\vec{p} = \overrightarrow{C_nA}$. Sada, pri zadavanju geometrije hvataljke zadajemo vektore $\tilde{\vec{r}}_{n,n}$ i $\tilde{\vec{p}}$ izražene u vezanom sistemu. Često se umesto $\vec{p}$ koristi oznaka $\vec{r}_{n,n+1} = \overrightarrow{AC}_n$ da bi se dobila analogija sa prethodnim segmentima. Međutim, u tom slučaju se pojavljuje indeks $n+1$ koji sugerira postojanje narednog zgloba (S_{n+1}), a to smatramo nezgodnim.

Položaj tačke A u prostoru određen je vektorom

$$\vec{r}_A = \vec{r}_{Cn} + \vec{p} \tag{2.39}$$

Diferenciranjem dobijamo brzinu $\vec{v}_A$ i ubrzanje $\vec{w}_A$ vrha hvataljke.

$$\vec{v}_A = \vec{v}_n + \omega_n \vec{\times} p = \vec{v}_n - \vec{p} \times \vec{\omega}_n \tag{2.40}$$

$$\vec{w}_A = \vec{w}_n - \vec{p} \times \vec{\varepsilon}_n + (\vec{p} \times \vec{\omega}_n) \times \vec{\omega}_n \tag{2.41}$$

U cilju primene ovih formula vektor $\vec{p}$ treba izraziti u spoljašnjem sistemu:

$$\vec{p} = A_n \tilde{\vec{p}}.$$

Izraze za brzinu i ubrzanje vrha možemo napisati i u matričnom obliku. Prethodno u izrazu (2.41) uvedemo oznaku $\vec{k} = (\vec{p} \times \vec{\omega}_n) \times \vec{\omega}_n$. Sada (2.40) i (2.41) pišemo u obliku

$$v_A = v_n - \underline{\underline{p}}\, \omega_n \tag{2.42}$$

$$w_A = w_n - \underline{\underline{p}}\, \varepsilon_n + k \tag{2.43}$$

gde su vektori prevedeni u kolone matrica, a $\underline{\underline{p}}$ označava 3×3 matricu

$$\underline{\underline{p}} = \begin{bmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

koja odgovara vektoru $\vec{p} = \{p_1, p_2, p_3\}$ i služi da se vektorski proizvod izrazi u matričkoj formi ($\vec{a} \times \vec{b} \rightarrow \underline{\underline{a}}\, b$). Uvođenjem (2.27) i (2.28) u (2.42), a zatim (2.29) i (2.30) u (2.43) dobija se

$$V_A = \Omega^n \dot{q} - \underline{\underline{p}}\, \Gamma^n \dot{q}$$

$$w_A = \Omega^n \ddot{q} + \Theta^n - \underline{\underline{p}}\, (\Gamma^n \ddot{q} + \Phi^n) + k,$$

odnosno

$$v_A = \Omega^A \dot{q} \tag{2.45}$$

$$w_A = \Omega^A \ddot{q} + \Theta^A, \tag{2.46}$$

gde je

$$\Omega^A = \Omega^n - \underline{\underline{p}}^{\Gamma^n}, \ \Theta^A = \Theta^n - \underline{\underline{p}}^{\Phi^n} + k. \tag{2.47}$$

Na ovaj način izrazili smo brzinu i ubrzanje vrha hvataljke u obliku linearne forme po generalisanim brzinama $\dot{q}$, odnosno ubrzanjima $\ddot{q}$. Što se tiče ugaone brzine i ubrzanja hvataljke ostale su u važnosti formule (2.27) i (2.29) uz indeks $j = n$:

$$\omega_n = \Gamma^n \dot{q} \tag{2.48}$$

$$\varepsilon_n = \Gamma^n \ddot{q} + \Phi^n. \tag{2.49}$$

Često se izrazi (2.45) i (2.48) odnosno (2.46) i (2.49) pišu zajedno tj.

$$\begin{bmatrix} v_A \\ \omega_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega^A \\ \Gamma^n \end{bmatrix} \dot{q} \tag{2.50}$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} w_A \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega^A \\ \Gamma^n \end{bmatrix} \ddot{q} + \begin{bmatrix} \Theta^A \\ \Phi^n \end{bmatrix} \tag{2.51}$$

Na levim stranama ovih relacija nalaze se kolona matrice dimenzije 6×1. Ove matrice brzina i ubrzanja u potpunosti određuju kretanje hvataljke. Na desnim stranama se nalaze kolona matrice $\dot{q}$ i $\ddot{q}$ dimenzije $n \times 1$ koje određuju kretanje celog mehanizma.Razmotrimo sada mogućnost izračunavanja jednog kretanja, u funkciji drugog. Očigledno da se kretanje hvataljke $(v_A, w_A, \omega_A, \varepsilon_n)$ uvek može izračunati polazeći od kretanja mehanizma $(\dot{q}, \ddot{q})$. Međutim obratno izračunavanje je složeniji problem i može se izvršiti samo u slučaju $n = 6$. Tada je matrica $\begin{bmatrix} \Omega^A \\ \Gamma^n \end{bmatrix}$ kvadratna i može se invertovati (podrazumevajući da je determinanta različita od nule tj. da je $n_h = n$, pa nema singularita). Ako je $n < 6$ sistem je preodređen, a u slučaju $n > 6$ neodređen. Preodređenost tumačio tako što hvataljka ne može da se kreće proizvoljno (šestodimenziono) već kretanje treba svesti na n nezavisnih parametara (podrazumevajući $n_h = n$). Tako dolazimo do izražavanja kretanja hvataljke preko $n_h = n$ spoljašnjih koordinata kako je već ranije definisano izrazom (2.12), tj. $X = [x_A y_A z_A \theta \varphi \psi]^T$ za $n = 6$ i $X = [x_A y_A z_A \theta \varphi]^T$ za $n = 5$. Ako je $n < 5$, onda uvodimo generalisani vektor položaja, npr. $X = [x_A y_A z_A q_4]^T$.

2.3.4. Direktni i inverzni problem kinematike

Potražimo vezu između kretanja u unutrašnjim koordinatama $q(t)$ i kretanja u spoljašnjim koordinatama $X(t)$. Za preračunavanje $q \to X$ može se uvek formirati algoritam η:

$$X = \eta(q) \tag{2.52}$$

Međutim, inverzni postupak $q = \eta^{-1}(X)$ bio bi suviše komplikovan. Zato ćemo potražiti vezu unutrašnjih brzina ($\dot{q}$ i $\dot{X}$) kao i unutrašnjih ubrzanja ($\ddot{q}$ i $\ddot{X}$). Ove veze dobijaju se diferenciranjem relacije (2.52). Tako se dobija:

$$\dot{X} = \frac{\partial \eta}{\partial q}\dot{q} \tag{2.53}$$

$$\ddot{X} = \frac{\partial \eta}{\partial q}\ddot{q} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial q^2}\dot{q}^2 \tag{2.54}$$

odnosno

$$\dot{X} = J(q)\dot{q} \tag{2.55}$$

$$\ddot{X} = J(q)\ddot{q} + A(q,\dot{q}) \tag{2.56}$$

Matricu $J = \partial\eta/\partial q$ dimenzije $n_h \times n$ nazivamo Jakobijan, a matricu $A = (\partial^2\eta/\partial q^2)\dot{q}^2$ dimenzije $n_h \times 1$ zvaćemo pridružena matrica. Jakobijeve forme (2.55) i (2.56) služe nam za preračunavanje brzina i ubrzanja. Da bi preračunavanje u oba smera bilo jednoznačno smatraćemo da je J kvadratna matrica ($n_h = n$) i da je det $J \neq 0$ (nema singulariteta, ni pravih ni prividnih).

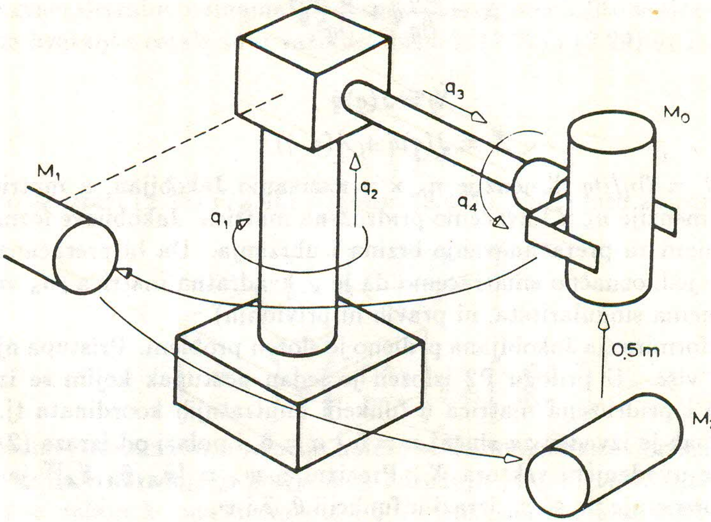
Postupak formiranja Jakobijana prilično je složen problem. Pristupa njegovom rešavanju ima više. U prilogu P2 izložen je jedan postupak kojim se izračunavaju Jakobijan i pridružena matrica u funkciji unutrašnjih koordinata tj. $J(q)$ i $A(q,\dot{q})$. Postupak je izveden za slučaj $n = 5$ i $n = 6$, i polazi od izraza (2.51) koji se transformiše uvođenjem vektora X. Preciznije, $w_A = [\ddot{x}_A, \ddot{y}_A, \ddot{z}_A]^T$ je već deo vektora $\ddot{X}$, a preostaje da se ε_n izrazi u funkciji $\ddot{\theta}, \ddot{\varphi}$ i $\ddot{\psi}$.

Razmotrimo sada kako se može zadati kretanje robota. Jedna od mogućnosti je da se zada vremenska promena generalisanih (tj. unutrašnjih) koordinata, dakle $q(t)$. Zadajemo, znači, direktno kretanja u zglobovima mehanizma. Pošto znamo kako se tokom vremena menjaju unutrašnje koordinate $q_1(t), \ldots, q_n(t)$ jednoznačno je određeno kretanje robota. Zakonima $q(t)$ određeni su i izvodi $\dot{q}(t)$ i $\ddot{q}(t)$.

Sada je moguće izračunati spoljašnje kretanje korišćenjem izraza (2.52), (2.55) i (2.56). Ovakvo sračunavanje spoljašnjeg kretanja $X(t)$ ako je poznato unutrašnje kretanje $q(t)$, nazivamo direktnim problemom kinematike robota.

U nekim prostijim manipulacionim zadacima direktno se zadaju pomeranja u zglobovima. Primer za to bio bi robot na slici 2.45. Zadatak je prikazan shematski na istoj slici. Radni predmet treba preneti prvo iz tačke M_0 u tačku M_1. Pri ovakvom kretanju menja se koordinata q_1 za $\pi/2$. Takođe se menja koordinata q_4 koja vrši obrtanje radnog predmeta za $\pi/2$. Pri kretanju od M_1 do M_2 menja se opet q_1 unatrag za $\pi/2$ i istovremeno se menja q_2 spuštajući predmet za 0,5 m. Konačno, pri kretanju od M_2 do početnog položaja M_0 opet se menja q_2 ovog puta naviše za 0,5 m i menja se q_4 koja obrće predmet unatrag za $\pi/2$ vraćajući ga tako na polazni položaj.

Ovakvo zadavanje zadatka pogodno je samo za jednostavne manipulacione zadatke. U složenijim zadacima uvek je neophodno ostvariti određeno kretanje hvataljke koja će pri tome izvršiti postavljeni zadatak (vidi na primer sliku 2.38). Jasno je da je nemoguće unapred predvideti pomeranja u zglobovima (tj. $q(t)$) koja bi ostvarila željeno kretanje hvataljke. Zato takve zadatke određujemo preko vektora spoljašnjeg položaja hvataljke (vektor X). Zadaćemo kretanje vrha tako što zadajemo zakon vremenske promene koordinata $x_A(t)$, $y_A(t)$ i $z_A(t)$. Zakon promene orijenatacije zadajemo tako što zadamo vremensku promenu uglova $\theta(t)$, $\varphi(t)$ i $\psi(t)$. U slučaju robota sa pet stepeni slobode $\psi(t)$ je zavisno i ne zadaje se.



Sl. 2.45. Zadavanje kretanja preko unutrašnjih koordinata

Zadali smo manipulacioni zadatak preko vremenske promene vektora $X(t)$. Sada ćemo pokazati kako se može izračunati unturašnje kretanje $q(t)$ ako je spoljašnje $X(t)$ zadato. Zakon $X(t)$ određuje i $\dot{X}(t)$ i $\ddot{X}(t)$. Sada bi na osnovu X trebalo odrediti q, na osnovu $\dot{X}$ odrediti $\dot{q}$ i konačno, na osnovu $\ddot{X}$ odrediti $\ddot{q}$. Medutim ovo nije lako realizovati. Već smo ranije rekli da je računanje q iz poznatog X veoma složen posao, često bez jednoznačnog rešenja. Dalje, računanje $\dot{q}$ pomoću relacije (2.55) zahteva prethodno sračunavanje Jakobijana, a njega ne možemo izračunati jer ne znamo q. Isto važi i za pokušaj računanja $\ddot{q}$ pomoću relacije (2.56).

Ovaj složeni problem izračunavanja unutrašnjeg kretanja $q(t)$ iz poznatog spoljašnjeg kretanja $X(t)$ naziva se inverzni problem kinematike robota. Sa nekoliko reči ćemo objasniti zašto je rešavanje ovog problema važno. Sa jedne strane, zaključili smo da je manipulacioni zadatak pogodno zadati u obliku kretanja hvataljke po zakonu $X(t)$. Sa druge strane robot se pokreće pomoću motora koji deluju u zglobovima i koji izazivaju pomeranja u zglobovima. Prema tome, za delovanje motora bitna je promena koordinata u zglobovima tj. $q_1(t)$, $q_2(t)$, ..., $q_n(t)$. Da bi se izvršila sinteza upravljanja kretanjem robota neophodno je sračunati unutrašnje kretanje $q(t)$ odnosno rešiti inverzni problem kinematike.

Sada ćemo objasniti jedan praktičan postupak za numeričko rešavanje inverznog problema kinematike. Treba naglasiti da je postupak namenjen za korišćenje na računaru.

Pre nego što pređeno na objašnjenje samoga postupka uvešćemo pojam stanja mehaničkog sistema. U strogu definiciju pojma stanja u smislu teorije sistema ovde nećemo ulaziti. Zadovoljićemo se time da kažemo da je stanje mehaničkog sistema u nekom trenutku određeno poznavanjem položaja q i brzina $\dot{q}$. Ove dve veličine (u stvari dve matrice q i $\dot{q}$) definišu stanje zato što su položaj i brzine one veličine koje se ne mogu trenutno promeniti, već se do narednog beskonačno bliskog trenutka vremena mogu promeniti samo beskonačno malo. Za razliku od njih ubrzanje se može skokovito menjati u trenucima početka ili prestanka dejstva sile. Na ovaj način, položaj i brzine se javljaju kao neophodni početni uslovi za određivanje daljeg kretanja sistema. Zato ove veličine uzete zajedno nazivamo stanjem sistema. Pod stanjem podrazumevamo par kolona matrica, q i $\dot{q}$.

Analizirajmo sada početno stanje sistema koji ovde posmatramo, a to je kinematički lanac robota. Početno stanje određeno je vrednostima q i $\dot{q}$ u početnom trenutku vremena $t_\circ$, dakle $q(t_\circ)$ i $\dot{q}(t_\circ)$. U slučaju neredundantnih i nesingularnih mehanizama početno stanje može se definisati i preko položaja hvataljke i njene brzine u početnom trenutku $t_\circ$, dakle $X(t_\circ)$ i $\dot{X}(t_\circ)$. Ranije smo već napomenuli da ćemo zadatak zadati preko kretanja hvataljlke $X(t)$. Na taj način biće određeno i početno stanje $X(t_\circ)$, $\dot{X}(t_\circ)$. Postupak koju ćemo predložiti za rešavanje inverznog problema kinematike zahteva poznavanje početnog stanja u obliku $q(t_\circ)$, $\dot{q}(t_\circ)$. Za taj početni trenutak morao bi se sprovesti ranije spominjani složeni proračun unutrašnjih koordinata na osnovu poznatog položaja hvataljke X. Srećom, videćemo da se takav proračun obavlja samo jednom i to za početni trenutak vremena. Za kasnije trenutke vremena to neće biti potrebno. Treba još istaći da je, bez obzira na zadavanje zadataka preko kretanja hvataljke, često poznato početno stanje u obliku $q(t_0)$, $\dot{q}(t_0)$. To je otuda što robot obično kreće iz nekog svog uobičajenog polaznog položaja u kome su poznati svi položaji zglobova tj. sve koordinate q. Početne brzine su tada obično jednake nuli jer robot kreće iz mirovanja.

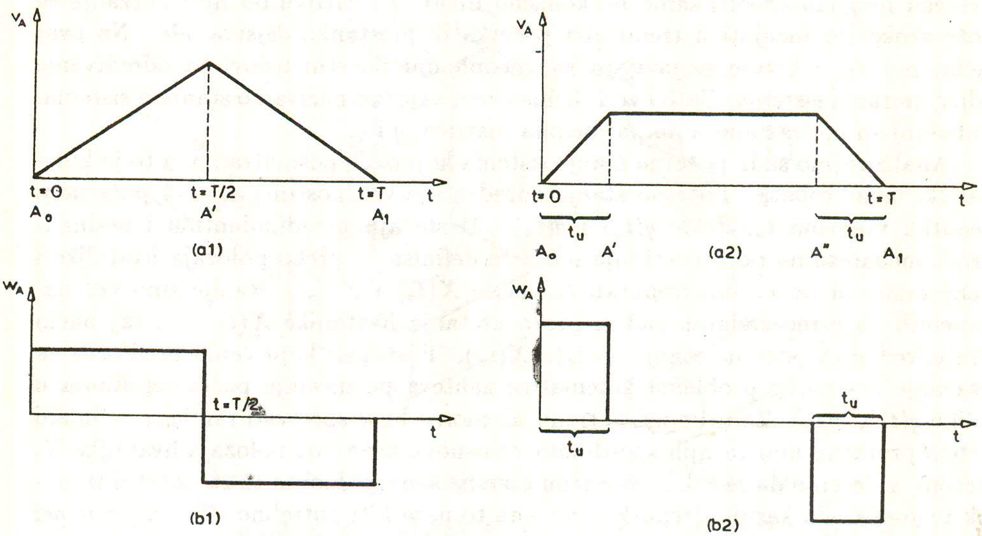
Sledeće što ćemo analizirati biće način numeričkog zadavanja vremenskih funkcija. Umesto zadavanja nekim analitičkim izrazom, što u složenijim sliučajevima nije ni moguće, funkciju vremena zadajemo u vidu niza tačaka, odnosno nizom njenih vrednosti koje odgovaraju nizu trenutaka vremena. Primenimo ovo na slučaj zadavanja vremenske promene položaja hvataljke $X(t)$. Sada bi za svaku komponentu kolona matrice X zadali niz vrednosti koje bi definisale promenu te komponente tokom vremena. Problem nastaje onda kada treba odrediti izvode $\dot{X}(t)$ i $\ddot{X}(t)$ i kada bi trebalo izvršiti numeričko diferenciranje. Kako je numeričko diferenciranje nepoželjan zadatak u svakom proračunu, to ćemo sada izložiti postupak kojim će se ovaj problem izbeći.

Poći ćemo od činjenice da početno stanje $X(t_\circ)$, $\dot{X}(t_\circ)$ i vremenska promena ubrzanja $\ddot{X}(t)$ jednoznačno određuju kretanje $X(t)$. Zato ćemo manipulacioni zadatak i zadati preko određenog početnog stanja i vremenske promene ubrzanja.

Pokažimo sada na dva primera da je zadavanje kretanja preko ubrzanja veoma pogodno. Zamislimo da želimo pravolinijsko kretanje vrha robota između dve tačke uz trougaoni profil brzine (slika 2.46a1) tj. do plovine putanje (deo A_oA') vrh ubrzava, a od polovine (deo $A'A_1$) usporava tako da se u tački A_1 ponovo zaustavi. Profil ubrzanja tada je prikazan na (slici 2.46b1) i može se lako zadati:

$$\ddot{x}_A(t) = \begin{cases} +a_x, & t < T/2 \\ -a_x, & t > T/2 \end{cases} \tag{2.57}$$

$\ddot{y}_A$, $\ddot{z}_A$ analogno



Sl. 2.46 – Trougaoni i trapezni profil brzine

odnosno do polovine vremena izvršenja zadatka ubrzanje je konstantno i iznosi $+a$, a od polovine konstantno i negativno i iznosi $-a$. U slučaju trapeznog profila brzine (sl. 2.46a2) razlikujemo period ubrzavanja (deo A_oA'), period konstantne brzine (deo $A'A''$) i period usporavanja (deo $A''A_1$). Profil ubrzanja prikazan je na slici 2.46b2 i može se izraziti u obliku:

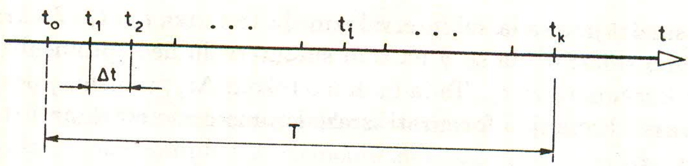
$$\ddot{x}_A(t) = \begin{cases} +a_x, & t < t_u \\ 0, & t_u < t < T - t_u \\ -a_x, & t > T - t_u \end{cases} \tag{2.58}$$

$\ddot{y}_A$, $\ddot{z}_A$ analogno

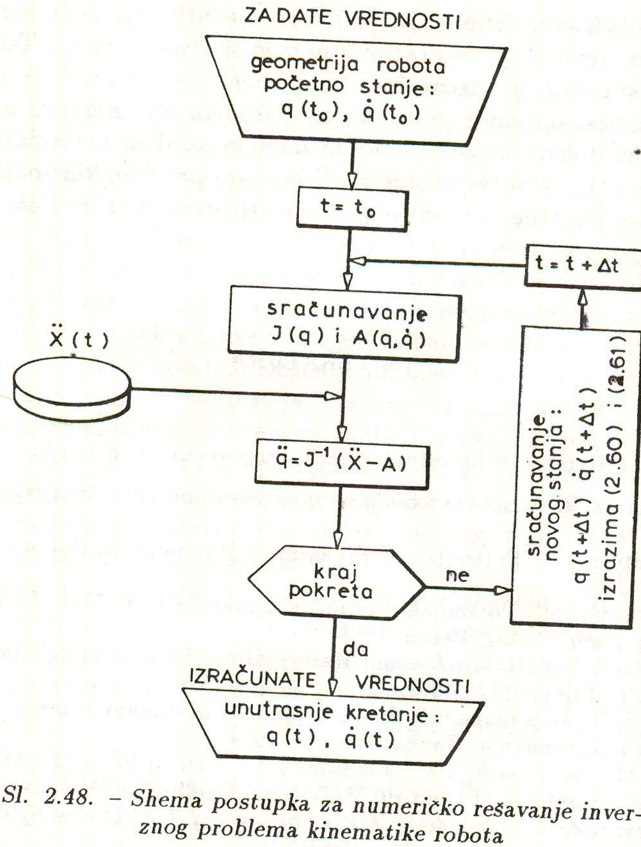
gde je T ukupno vreme, a t_u vreme ubrzavanja, odnosno usporavanja.

Treba reći da ova dva profila brzine spadaju u najčešće profile u praktičnim manipulacionim zadacima. To je važno jer vidimo da se upravo u tim najčešćim slučajevima ubrzanje zadaje veoma jednostavno (relacije 2.57 i 2.58).

Kako smo već rekli da vreme i funkcije vremena posmatramo diskretno tj. u nizu trenutaka, to ćemo vremenski interval T u kome se zadatak izvršava podeliti na k podintervala Δt uvodeći vremenske trenutke t_o, $t_1, ..., t_k$ (sl. 2.47). Sada ćemo relacije za ubrzanje (2.57) i (2.58) tretirati diskretno tj. zadati nizove vrednosti koje odgovaraju trenucima t_o, $t_1, ..., t_k$.



Sl. 2.47 – Diskretizacija intervala kretanja



Sl. 2.48. – Shema postupka za numeričko rešavanje inverznog problema kinematike robota

Manipulacioni zadatak smatramo zadatim preko zadatog početnog stanja $q(t_o)$, $\dot{q}(t_o)$ i poznate vremenske promene ubrzanja hvataljke $\ddot{X}(t)$, Sada ćemo objasniti postupak za rešavanje inverznog problema kinematike tj. za sračunavanje unutrašnjeg kretanja $q(t)$. Postupak počinje sa početnim trenutkom $t_\circ$. Kako je $q(t_\circ)$ i $\dot{q}(t_\circ)$ poznato , to za taj trenutak možemo sračunati Jakobijan $J(q)$ i pridruženu matricu $A(q,\ \dot{q})$. S obzirom na to da je $\ddot{X}(t_\circ)$ poznato, sada iz relacije (2.56) izračunavamo vrednost $\ddot{q}(t_\circ)$ u posmatranom trenutku $t_\circ$:

$$\ddot{q} = j^{-1}(\ddot{X} - A) \tag{2.59}$$

Posmatrajmo sada subinterval između trenutka $t_\circ$ i t_1. Za kratak subinterval Δt možemo smatrati da se $\ddot{q}$ na tom subintervalu neće promeniti već će zadržati vrednost izračunatu za $t_\circ$. Tada možemo tokom Δt, promenu q posmatrati kao jednako ubrzano kretanje i formirati izraze kojima ćemo izračunati stanje $q(t_1)$, $\dot{q}(t_1)$ u trenutku t_1:

$$q(t_1) = q(t_\circ) + \dot{q}(t_\circ)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{q}(t_\circ)\Delta t^2 \tag{2.60}$$

$$\dot{q}(t_1) = \dot{q}(t_\circ) + \ddot{q}(t_\circ)\Delta t \tag{2.61}$$

Sada, kada znamo stanje $q(t_1)$, $\dot{q}(t_1)$ u trenutku t_1, počinjemo novi ciklus ponavljajući za trenutak t_1 ceo račun koji smo sprovodili za $t_\circ$. Tako, rekurzivno izračunavamo stanje q, $\dot{q}$ u trenucima t_2, $t_3, ..., t_k$.

Kao rezulatat opisanog postupka dobijamo nizove vrednosti q i $\dot{q}$ koji odgovaraju nizu trenutaka vremena, odnosno dobijamo zakon kretanja u unutrašnjim koordinatama $q(t)$ i $\dot{q}(t)$. Ovim smo rešili inverzni problem kinematike robota.

Ceo opisani postupak može se prikazati shemom na slici 2.48.

LITERATURA