

UNIVERZITETSKA KNJIGA

*Vlatko Doleček
Isak Karabegović*

r o b o t i k a

Bihać

*Vlatko Doleček - Isak Karabegović • **ROBOTIKA***

UNIVERZITETSKA KNJIGA



Prof. dr. Vlatko Doleček
Prof. dr. Isak Karabegović

R O B O T I K A

I IZDANJE

Tehnički fakultet, Bihać, 2002.

UNIVERZITET U BIHAĆU

TEHNIČKI FAKULTET BIHAĆ

<i>Autori :</i>	<i>Prof. dr. Vlatko Doleček, dipl. ing. mašinstva</i> <i>Prof. dr. Isak Karabegović, dipl. ing. mašinstva</i> <i>Doc. dr. Avdo Voloder, dipl. ing. mašinstva</i> <i>mr. Maida Čohodar, dipl. ing. mašinstva</i> <i>mr. Dženana Gačo, dipl. ing. mašinstva</i> <i>Husein Rošić, dipl. ing. mašinstva</i> <i>Samir Vojić, dipl. ing. mašinstva</i>
<i>Recezent:</i>	<i>Prof. dr. Milan Jurković, dipl. ing. mašinstva</i> <i>Prof. dr. Vjekoslav Damić, dipl. ing. mašinstva</i>
<i>Urednik:</i>	<i>Prof. dr. Isak Karabegović, dipl. ing.</i>
<i>Lektor:</i>	<i>mr. Rizo Džafić</i>
<i>Korektor:</i>	<i>Urednik</i>
<i>Izdavač:</i>	<i>Tehnički fakultet Bihać</i>
<i>Tehnički urednik:</i>	<i>Samir Vojić, dipl. ing.</i>
<i>Tehnička obrada:</i>	<i>Samir Vojić, dipl. ing.</i>
<i>Tiraž:</i>	<i>500 primjeraka</i>
<i>Štampa:</i>	<i>Grafičar Bihać</i>
<i>Za štampariju:</i>	<i>Ismet Felić</i>

Objavljivanje ovog univerzitetskog udžbenika odobrilo je Naučno-nastavno vijeće Tehničkog fakulteta Univerziteta u Bihaću, broj 01-488 od 01.10.2002., i Naučno-nastavno vijeće Univerziteta u Bihaću, broj 06-809/02 od 16.10.2002.

Izdavanje ovog udžbenika pomogli su: AUTOCOMERC, LASER i HRM Bihać, na čemu im se zahvaljujemo.

Na osnovu mišljenja Federalnog ministarstva obrazovanja, nauku, kulturu i sport. br. 04-15-6905/02 od 17.10.2002. godine ovo izdanje je u kategoriji proizvoda koji su oslobođeni poreza na promet (zakon o porezu na promet proizvoda i usluga, član 19. točka 10 »Službene novine Federacije Bosne i Hercegovine«, broj 6/95, 25/97, 13/00, 36/00 i 22/01).

CIP - Katalogizacija u publikaciji
Nacionalna i univerzitetska biblioteka
Bosne i Hercegovine, Sarajevo

007.52 (082)

ROBOTIKA / [autori] Vlatko Doleček ... [et
a1.]. – 1. izd. – Bihać : Tehnički fakultet, 2002.
- 332 str. : ilustr. ; 25 cm. – (Univerzitetska knjiga)

Bibliografija uz poglavlja

ISBN 9958 – 624 – 12 – 5
I. Doleček, Vlatko
COBISS/BIH – ID 11333894

Preštampavanje i umnožavanje nije dozvoljeno

PREDGOVOR

Robotika je naučna disciplina koja je razvijena zadnjih nekoliko decenija i na kojoj se još uvijek intenzivno radi, što potvrđuje veliki broj naučno-stručnih radova koji se svakodnevno objavljuju u svjetskoj literaturi. Iako postoji obimna literatura iz ove oblasti još uvijek je literatura na našem jeziku relativno skromna, pa ova knjiga ima za cilj da na neki način popuni tu prazninu.

Knjiga je rezultat rada kolektiva autora, koji se sa raznih aspekata bave ovom problematikom već duže vremena.

Sadržaj knjige je tako koncipiran da povezuje teorijske osnove kinematike, dinamike i upravljanja robota sa praktičnim rješenjima i primjenama. Stoga ona može da posluži kao udžbenik kako na dodiplomskom tako i na postdiplomskom studiju na kojima se izučava ova tematika. Autori se nadaju da će knjiga poslužiti i kao dobra osnova onim mlađim istraživačima koji će se u budućnosti baviti naučnim metodama usavršavanja robota, kao i primjenom robota u različitim oblastima.

Suvremeni zahtjevi fleksibilne proizvodnje podrazumijevaju i veću primjenu robota kako u masovnoj proizvodnji tako i u malim i srednjim preduzećima, a što bi trebalo da bude i orijentacija poduzetnika u našoj privredi. Iz ovog razloga je knjiga prilagođena i onim poduzetnicima koji će konkurentnu sposobnost svojih firmi zasnivati na većoj primjeni savremenih tehničkih rješenja, a koja se danas često ne mogu zamisliti bez upotrebe robota.

Koristimo ovu priliku da se najtoplije zahvalimo svima onima koji su doprinijeli da ova knjiga izađe. Posebnu zahvalnost dugujemo recenzentima dr. **Milanu Jurkoviću**, profesoru Sveučilišta u Rijeci i dr. **Vjekoslavu Damiću**, profesoru Veleučilišta u Dubrovniku na njihovim korisnim sugestijama.

Bihać, oktobar 2002.

AUTORI

Sadržaj

0	Uvod	1
1	Značaj robotike	5
1.1	Historijski razvoj robota	5
1.2	Definicija i generacije robota	7
1.3	Podjela robotskih sistema	10
2	Model robota	13
2.1	Osnovni pojmovi	13
2.2	Kinematski lanci	17
2.3	Struktura industrijskih robota	20
2.4	Minimalna konfiguracija robota	25
3	Radni prostor	27
3.1	Geometrija radnog prostora	27
4	Kinematička analiza robota	35
4.1	Opće teorijske postavke direktne kinematike	35
4.2	Pojam vanjskih i unutrašnjih koordinata	36
4.3	Rješavanje direktnog kinematičkog problema	38
4.3.1	Homogene transformacije	38
4.3.2	Transformacije translacije	41
4.3.3	Transformacije rotacije	42
4.4	Algoritam rješavanja direktnog kinematičkog problema	44
4.4.1	Utvrđivanje nultog položaja industrijskog robota	44
4.4.2	Pridruživanje koordinatnih sistema	44
4.4.2.1	Denavit-Hartenbergovi parametri	44
4.4.3	Definisanje homogenih matrica transformacije pomoću D-H parametara	46
4.4.4	Određivanje orijentacije prihvatnice robota	48
4.5	Primjeri rješavanja direktnog kinematičkog problema	51
4.5.1	Rješenje direktnog kinematičkog problema za robot tipa MANUTEC R3	51
4.5.2	Rješenje direktnog kinematičkog problema za robot tipa KUKA IR 161/15.0 po Denavit-Hartenbergovoj metodi	54
4.6	Opće teorijske postavke inverzne kinematike	59
4.6.1	Analitičko rješenje inverznog kinematičkog problema	60
4.6.2	Numeričko rješenje inverznog kinematičkog problema	61

4.7	Jacobieva matrica	62
4.8	Primjeri rješavanja inverznog kinematičkog problema	66
4.8.1	Rješenje inverznog kinematičkog problema za robot tipa MANUTEC R3	66
4.8.2	Rješenje inverznog kinematičkog problema za robot tipa KUKA IR 161/15.0 po Denavit-Hartenbergovoj metodi	69
5	Dinamička analiza robota	83
5.1	Osnovne napomene o značaju i metodama proučavanja dinamike robota	83
5.2	Kinematske relacije potrebne za primjenu Newton-Eulerove i Lagrange-ove metode	85
5.2.1	Brzina tačke	85
5.2.2	Ubrzanje tačke	87
5.2.3	Ugaona brzina tijela	88
5.2.4	Ugaono ubrzanje tijela	88
5.3	Newton-Eulerova metoda	89
5.3.1	Spoljašnja iteracija	90
5.3.2	Unutrašnja iteracija	95
5.4	Lagrangeove jednačine	97
5.5	Neke napomene vezane za dinamičku simulaciju robota	101
5.6	Primjeri primjene prikazanih metoda rješavanja dinamike robota	103
5.6.1	Prvi primjer-rotaciona robotska ruka sa translatorskim člankom	103
5.6.2	Drugi primjer-robot sa tri rotaciona zgloba	112
6	Senzori u robotici	129
6.1	Uvod	129
6.2	Podjela senzora	131
6.3	Senzori unutrašnjeg stanja	132
6.3.1	Senzori položaja	132
6.3.2	Senzori brzine	141
6.3.3	Senzori otklona	142
6.3.4	INS (Intercijalni navigacioni sistem)	144
6.4	Senzori vanjskog stanja	145
6.4.1	Taktilni senzori	146
6.4.2	Senzori sile i momenta	151
6.4.3	Senzori blizine	156
6.4.4	Senzori vizije	164
7	Pogoni robota	175
7.1	Uvod	175
7.2	Pneumatski pogoni	177
7.3	Hidraulični pogoni	180
7.3.1	Linearni cilindri	180
7.3.2	Obrtni motori	182
7.3.3	Razvodnici	183

7.3.4	Servo ventili	184
7.3.5	Servoregulirani hidraulički sistemi	185
7.4	Električni pogoni	187
7.4.1	Elektromotori istosmjerne struje	187
7.4.2	Elektromotori izmjenične struje	190
7.4.3	Koračni motori	193
7.5	Harmonični pogon	196
8	Upravljanje robotima	201
8.1	Osnovni koncept upravljanja	204
8.1.1	Tipovi regulatora	205
8.1.2	Linearni sistemi drugog reda	208
8.1.3	Nelinearni sistemi	211
8.1.4	Lyapunova metoda ispitivanja stabilnosti nelinearnih sistema	211
8.2	Hijerarhijsko upravljanje robotima	212
8.3	Problem upravljanja	214
8.3.1	Nemodelirana fleksibilnost	216
8.4	Upravljanje u prostoru zgloba	217
8.5	Tehnika neovisnog upravljanja zglobovima	219
8.5.1	Upravljanje sa povratnom spregom	222
8.6	Centralizirano upravljanje	228
8.6.1	PD upravljanje sa gravitacijskom kompenzacijom	230
8.7	Upravljanje u operacijskom prostoru	233
9	Programiranje u robotici	239
9.1	Tipovi upravljanja	239
9.1.1	Upravljanje "točka po točka" (PTP)	240
9.1.2	Upravljanje sa kontinuiranom putanjom (CP)	241
9.2	Tipovi programiranja	242
9.2.1	Roboti sa graničnim prekidačima	243
9.2.2	"Playback" roboti	243
9.2.3	Roboti sa fazom učenja i off-line programiranjem	244
9.2.4	Roboti sa strukturnim programiranjem	246
9.2.5	Roboti sa programiranjem zadatka	246
9.3	Robotski jezici	247
9.4	Primjer rada robotskog sistema	248
9.4.1	Funkcije privjeska za učenje	251
9.4.2	Veza upravljačka jedinica-kompjuter	254
9.4.3	Opis naredbi robotskog sistema RV-M1	254
 	Prilog	263
	Robot + tehnologija	
 	Prilog	301
	Konstrukcije robota	

Uvod



Isak Karabegović, Tehnički fakultet Bihać

Inteligentne mašine i sistemi različitog nivoa složenosti su danas sve prisutniji za obavljanje različitih procesa. Inteligentne mašine sisteme kao što su: roboti, tehnološke ćelije i slično čine stub CIM-sistema (Computer Integrated Manufacturing) koji predstavlja temelj svake koncepcije fabrike budućnosti. Industrijski roboti su automatizovani sistemi koji koriste računar kao inteligentni dio upravljanja.

Definiciju robota-reprogramabilne i multifunkcionalne mehaničke strukture daje Internacionalna organizacija za standardne:»Robot je mašina koja se sastoji od mehanizama sa više stepeni slobode kretanja, a sposoban je da vrši manipulaciju sa alatom, radnim predmetom ili nekim drugim sredstvom».

Komercijalna primjena industrijskih robota sa računskim upravljanjem - kompjuterizovanih industrijskih robota počinje 70-tih godina XX vijeka. Automatizacija procesa i mašina nalazi primjenu prvenstveno kod izvođenja proizvodnih procesa i upravljanjem mašinama a manje kod drugih također važnih proizvodnih aktivnosti kao što su :posluživanje radnog mjesta, pozicioniranje radnog komada i slično.

Industrijski roboti nalaze primjenu za :

- § Posluživanje radnog mjesta,
- § Držanje materijala u radnoj poziciji u raznim fazama izrade i operacioni transport,

- § Tehnološke operacije (tipični primjeri ove kategorije su postali zavarivanja, bojenja, brušenja, lemljenja, lijepljenja, čišćenja, poliranja itd.)
- § Automatsku montažu i
- § Predprocesnu, procesnu i poslijepprocesnu kontrolu.

Industrijski roboti su idealni za poslove koji se smatraju teškim i nepogodnim za ljude. Koriste se za poslove koji se ponavljaju više puta i kao takvi se smatraju monotoni. U onim procesima gdje se traži visok kvalitet i velika produktivnost također se koriste industrijski roboti.

Savremena industrijska proizvodnja u većini svojih grana uspješno koristi robotske sisteme. Kada je u pitanju pokretljivost pojedinih članova robota, mogućnost izvođenja različitih putanja, sposobnost dosezanja u bilo koju tačku manipulacijskog prostora sa postizanjem određene orijentacije, može se reći da su mogućnosti primjene robota u proizvodnji praktično neograničene.

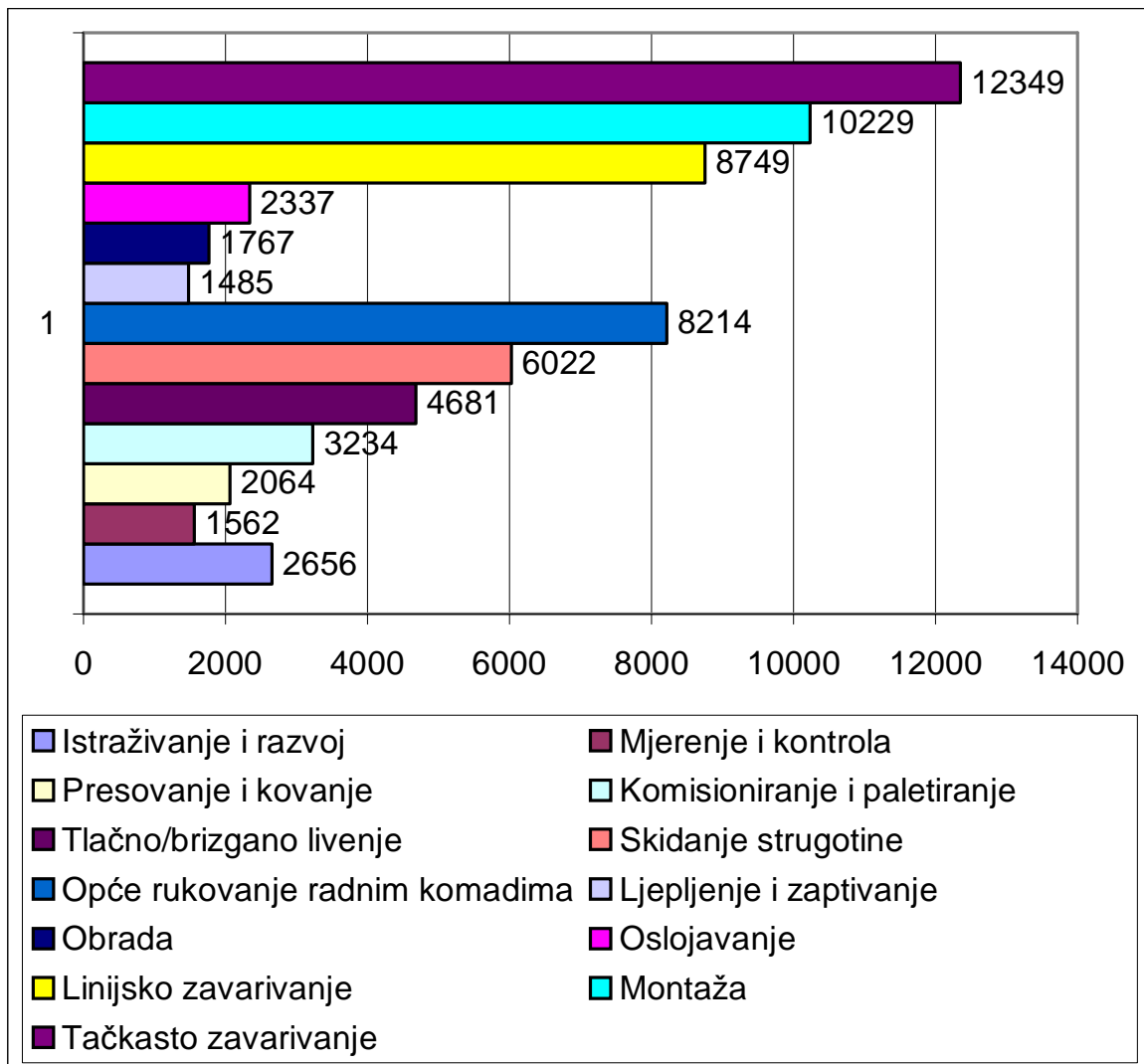
Ono što ograničava primjenu robota u pojedinim operacijama jeste pitanje ekonomičnosti. Nije rentabilno da jedna robotska struktura velikog volumena radnog prostora, velikih brzina i snage, obavlja radne zadatke za koje u potpunosti ne iskorištava svoje sposobnosti. Iz tog su razloga dizajnirani proizvodni raznovrsni industrijski roboti specijalno za određenu vrstu radnih zadataka.

Jedna od bitnih razloga primjene robotskih sistema u industriji jeste i humanizacija rada, pogotovo na poslovima štetnim po ljudsko zdravlje (rad u zagađenoj sredini, prašini, visokoj temperaturi, rad na monotoni i zamorajućim poslovima). Roboti nalaze primjenu ne samo u industriji, već i u drugim oblastima života. Roboti se koriste u bolnicama za pomoć bolesnicima, za liječenje odnosno kirurške zahvate, u domaćinstvu za obavljanje raznih poslova kao što su čišćenje stana, pranje posuđa itd.

Glavna područja primjene oko 66800 u Njemačkoj instaliranih robota su prikazani na slici 0.1.

Kao što smo već rekli roboti nalaze primjenu u svim oblastima industrije i svim oblastima života, te zbog toga ćemo u ovoj knjizi pokušati dati jedan presjek i osnovne modele robotskih sistema, mehaničku analizu i primjere robota u raznim industrijskim granama.

U samom uvodu knjige Robotika dat je značaj robotike sa historijskim razvojem robota, definicijama i podjelom robotskih sistema. U drugom poglavlju opisani su modeli robota gdje su definisani osnovni pojmovi, kinamtski lanci, struktura i konfiguracija industrijskih robota. U podnaslovu radni prostor detaljno su prikazani različiti manipulacioni prostori različitih konfiguracija industrijskih robota. U četvrtom poglavlju detaljno je opisana kinematička analiza, gdje se opisuju teorijske postavke direktne kinematike, vanjske i unutrašnje koordinate, način rješavanja direktnog kinematičkog problema, dat je algoritam rješavanja direktnog kinematičkog problema sa konkretnim primjerima. Istom poglavlju opisane su opće teoretske postavke inverzne kinematike, Jacobieva matrica i dati su primjeri rješavanja inverznog kinematičkog problema. Dinamička analiza robota je opisana u petom poglavlju gdje su date kinematske relacije potrebne za primjenu Newton-Eulerove i Lagrange-ove metode, spoljašnja i unutrašnja iteracija i Lagrangeove jednačine.



Slika 0.1. Područje primjene industrijskih robota (Njemačka 1997.)

^{1/} E. Freud, Robotertechnologie I, Institut für Roboterforschung, Dortmund 1999., strana 5.

Na kraju ovog poglavlja dati su primjeri primjene navedenih metoda. U šestom poglavlju opisani su senzori koji se primjenjuju kod industrijskih robota i to senzori unutrašnjeg stanja: senzori položaja, senzori brzine, senzori otklona i intercijalni navigacioni senzori, a zatim senzori vanjskog stanja: taktilni senzori, senzori sile i momenata, senzori blizine i senzori vizije. U poglavlju pogoni robota opisani su pneumatski, hidraulični, električni i harmonični pogoni. U osmom poglavlju knjige detaljno je opisano upravljanje industrijskim robotima gdje je dat osnovni koncept upravljanja, hijerarhijsko upravljanje robotima, problem upravljanja, upravljanje u prostoru zgloba, zatim je opisana tehnika neovisnog upravljanja zglobovima te centralizirano upravljanje, a zatim i upravljanje u operacijskom prostoru. U zadnjem poglavlju programiranje u robotici detaljno su opisani tipovi upravljanja, tipovi programiranja, robotski jezici, te dati su primjeri rada robotskog sistema. Na kraju ovog udžbenika dana su dva priloga. U prvom prilogu dana je primjena robota u: prehrambenoj, drvnoprerađivačkoj, hemijskoj, metalnoj, elektro i automobilskoj industriji. U drugom poglavlju date su konstrukcije robota poznatih proizvođača kao što su: KUKA, ARC MATE, KAWASAKI, MOTOMAN i SEIKO.

Značaj robotike

1

Dženana Gačo, Tehnički fakultet Bihać

1.1. Istorijski razvoj robota

Roboti su ljudima bili i uvijek će biti vječita preokupacija. Želja čovjeka da neko drugi radi umjesto njega, uglavnom teške i zamorne poslove, kroz historiju se rješavala na razne načine-roboti, kmetovi, ali bilo je i onih nastojanja koja su išla u pravcu da se taj problem riješi primjenom tehnike. S obzirom da razvoj tehnike i sredstava za proizvodnju nije bio ravnomjeran, to i historiju industrijske automatike karakterišu periodi brzih promjena.

Ideje i izvedbe mehaničkih automata su dosta stare, počev od antičkog doba 880. god. p.n.e. Homer opisuje pokretne tronošce u *Ilijadi*, zatim Aristotel, 350. god. p.n.e., "mašta" o mehanizmima čiji će se rad temeljiti na "pokornosti i predosjećanju" da bi se 1350. god. montirao mehanički pijetao na vrh Katedrale u Strasbourgu (Francuska). Bilo je potrebno gotovo petsto godina (1801. Joseph-Marie Jacquard) do pronalazka automatskog tekstilnog razboja koji je upravljani bušenim karticama. Nakon toga Seward Babbitt projektuje motorizirani kran i hvatače za vađenje čeličnih ingota iz visokih peći.

Naziv robot se prvi put susreće u XX vijeku. Ovaj naziv uveo je češki književnik Karel Čapek 1921. godine u svojoj drami "R.U.R." (Rossum's Universal Robots). U ovoj drami su opisana bića slična ljudima, ali bez emocija. Izraz robot potiče od češke riječi "robota", što znači najamnik, kmet. Godine 1938. Willard Pollard i Harold Roselund uvode mehaničku ruku sa zglobovima za automatizirano bojenje raspršivanjem u firmi DeVilbiss Co.

I pisac naučne fantastike Isac Asimov u svojim djelima koristi pojam robota. On je i definisao, u svom djelu *Runaround* objavljenom 1942. godine, prvi put tri zakona robotike koji glase:

1. robot ne smije ozlijediti ljudsko biće, niti zbog svoje neaktivnosti smije dozvoliti da ljudsko biće bude ozlijeđeno;
2. robot mora slušati naredbe koje mu daju ljudska bića, osim u slučaju kada bi te naredbe kršile prvi zakon;
3. robot mora štiti svoju egzistenciju, osim ako bi to kršilo prvi i drugi zakon.

Ovi zakoni su važeći za konstruktore robota i danas.

Pravi napredak razvoja robota je učinjen u dvadesetom vijeku i to zahvaljujući pronalasku binarne mašine-računara. Računar je uspio da udahne život u mehaničku konstrukciju robota.

Roboti su po svojoj prirodi veoma složeni sistemi koji zahtijevaju primjenu savremenih metoda, baziranih na teoriji mašina, teoriji automatskog upravljanja i savremenih sredstava računске tehnike. Kada su sve ove oblasti dostigle visok nivo razvoja pojavljuju se i roboti.

Sredinom XX vijeka pojavljuju se nove tehnologije, koje bitno utiču na razvoj robotike. Te nove tehnologije se odnose na numeričko upravljanje i teleoperatore.

Numeričko upravljanje je upravljanje mašinom alatkom digitalnim putem, dok se pod pojmom teleoperator podrazumijeva upotreba daljinskog manipulatora kojim upravlja čovjek.

Prvi *teleoperatori* su se pojavili početkom pedesetih godina XX vijeka, a koristili su se u oblasti nuklearne tehnologije. Tako je 1951. godine Raymond Goertz dizajnirao teleoperatorsku ruku za rukovanje radioaktivnim materijalom za potrebe Atomic Energy Commission. Kombinacijom numeričkog upravljanja i teleoperatora postavile su se osnove za razvoj modernog robota.

Industrijski robot se od svojih preteča razlikuje po tome što je, suprotno manipulatoru, programski upravljan, a za razliku od NU alatne mašine, ima mogućnost adaptacije.

Veliki doprinos razvoju oblasti robotike i robota dao je britanski pronalazač Walter Kenward (manipulator sa numeričkim upravljanjem) i američki naučnik George C. Devol koji 1946.godine patentira opštenamjenski uređaj za upravljanje fabričkim mašinama, koristeći magnetni pohranjene instrukcije. Na Carnegie Mellon University (CMU) 1950-te godine, Herbert A. Simon, Allen Newell i J. Clifford Shaw postavljaju kamen temeljac umjetnoj inteligenciji (AI).

Prvi industrijski robot je projektovao George C. Devol 1954. godine, čiji je originalni naziv "programmed article transfer" što bi u slobodnom prevodu bilo, "sistem za programirano premještanje predmeta". Godine 1961. skupa sa Josephom F. Engelbergerom izrađuje prvi industrijski robot. Na realizaciji ovih patenata razvija se i firma Unimation Inc., koja se smatra svjetskim robotskim pionirima.

Prvo instaliranje industrijskog robota izvršeno je 1962. godine u tvornici automobila General Motors u Trentonu, New Jersey. Carnegie Mellon University (CMU) formira Institut za robotiku 1965.godine.

Sredinom 60-tih godina roboti su imali sposobnost biranja jednog od nekoliko snimljenih programa. U General Electric Co. Ralph Moser 1967.god. dizajnira Walking Truck-a, velikog robota sa četiri noge, za potrebe prevoza tereta u Pentagonu. Prvi mobilni robot, nazvan Shakey, koji posjeduje vizuelni sistem za raspoznavanje i umjetnu inteligenciju pojavljuje se na Stanford Research Institute (SRI). Zgodno nazvana robotom, nestabilna kutija na točkovima pokazuje kako zaobići prepreke. Godine 1973. na Stanford Research Institute razvijena je prva računarom integrirana robotska stanica za montažu pumpi. Veliki uticaj na razvoj robota ima brzi razvitak računara. NASA spušta robotske ruke na Mars za misije Viking I i II 1976. godine.

Početakom 80-tih pojavljuju se roboti koji su u stanju promijeniti i prilagoditi svoje ponašanje prema stanju okoline u kojoj se nalaze. Takvu sposobnost nazivamo inteligencijom. Pokretni robot sa šest nogu razvijen je na Odetics Inc. 1983. god.. Robot, Robodoc, kojeg je razvio Dr. William Bargar i Howard Paul (Integrated Surgical Systems Inc. i Univerzitetu of California at Davis), obavlja 1990-te operaciju kuka kod psa, a 1992. godine na čovjeku. Sadašnja istraživanja u oblasti robotike pokazuju da su roboti mehanički sve savršeni, a njihovi upravljački sistemi posjeduju sve više vještačkih čula i elemenata vještačke inteligencije (npr. čulo vida je u obliku televizijske kamere sa računarskim algoritmima za raspoznavanje oblika). Tako na Massachusetts Institute of Technology (MIT) Rodney A. Brooks počinje praviti Cog-a, robota koji se educira kao i čovjek. 1996.godine Honda otkriva P-2 (prototip 2), - čovjekolikog robota koji šeta. Održan je i prvi godišnji RoboCup turnir 1997.god. u Nagoya, Japan, a zatim su slijedili turniri održani u Parizu, Stokholmu i Melburnu. Na Mars je lansiran 1997. NASA-in robot Pathfinder, a Sajourner rover robot istražuje marsovsko tlo. Na turniru RoboCup-u 2000., tri čovjekolika robota se susreću prvi put: Jonny Walker sa University of Western Australia, Mk-II sa japanskog Aoyama Gakuin University i Pino sa Kitano Symbolic Systems Project-a.

Može se kazati da su roboti važan dio sistema u proizvodnji, jer se primjenjuju za automatiziranje proizvodnih procesa. Svoju važnu primjenu dokazuju u suradnji sa ostalim kompjuterski upravljanim razvojnim i proizvodnim sistemima. Dokaz za to je CIM-kompjuterski integrisana proizvodnja.

1.2. Definicija i generacije robota

Jednostavna i usaglašena definicija robota ne postoji, tako da je definicija robota različita po pojedinim zemljama i međunarodnim organizacijama za standardizaciju.

Navedeno je nekoliko definicija robota:

- ISO (International Standard Organisation)

“Industrijski robot je automatski, servoupravljeni, reprogramabilni, višefunkcijski manipulator koji ima više stepeni slobode kretanja, koji je pogodan za rukovanje materijalom, dijelovima, alatima ili posebnim uređajima za izvršavanje varijabilnih programiranih operacija. Industrijski roboti obično imaju jednu ili više ruku, zatim, upravljački uređaj s mogućnošću memoriranja, a ponekad koriste senzore za prikupljanje informacija iz okoline. Oni su višenamjenski uređaji koji vrše ponavljajuće operacije i za izvršavanje tih operacija imaju mogućnost prilagođavanja okolini.”

- USA

“Robot je višefunkcionalni manipulator s mogućnošću reprogramiranja, a predviđen je da prenosi materijale, dijelove, alate ili posebne naprave kroz različite programirane pokrete u cilju ispunjavanja različitih zadataka.”

- VELIKA BRITANIJA

“Industrijski robot je reprogramabilni uređaj koji je načinjen za manipuliranje i transportiranje dijelova, alata, ili specijaliziranih proizvodnih naprava preko varijabilnih pokreta za izvođenje pojedinačnih proizvodnih zadataka.”

U JAPANU npr. u definiciju robota uključeni su i čvrsto programirani manipulatori.

Japanska asocijacija industrijskih robota (Japan Industrial Robot-JIRA), razlikuje dva pojma u industrijskoj robotici i to pojam *Manipulatora* i pojam *Robota*. Njihova daljna podjela je u suštini zasnovana na vrsti i načinu unošenja informacija ili pristupa sa stanovišta naučnih metoda.

Pod pojmom *manipulatora* se prema ovoj asocijaciji podrazumijeva: “*uređaj pomoću kojeg se mogu određeni objekti na željeni način pomjerati, koristiti bez dodira ruku*”.

Pod pojmom *robot* se prema istoj asocijaciji podrazumijeva: “*mehanički sistem čije funkcije kretanja odgovaraju živom organizmu i koje su kombinovane voljom inteligencije čovjeka. Da bi se isti smatrali inteligentnim sistemima, to jest da njihova sposobnost približno odgovara inteligenciji čovjeka, potrebno je da zadovoljavaju najmanje jednu od sljedećih karakteristika: moć mišljenja, sposobnost opažanja, sposobnost prilagođavanja i sposobnost učenja*”.

Kod podjele robotskih sistema na osnovu unošenja informacija ili pristupa sa stanovišta naučnih metoda, razlikuju se sljedeći pojmovi:

MANUELNI MANIPULATOR: čovjek direktno upravlja manipulatorom,

SEKVENCIJALNI ROBOTI: to su manipulatori koji zahtijevaju određenu proceduru, tj njihovo upravljanje i pozicioniranje obrađuje se sekvencijalno, odnosno korak po korak,

ROBOTI SA ČVRSTOM SLJEDLJIVOŠĆU: definišu se kao sekvencijalni roboti, samo s tom razlikom što se ulazne informacije ne mogu mijenjati,

ROBOTI SA VARIJABILNOM SLJEDLJIVOŠĆU: definišu se također kao sekvencijalni roboti, ali se ulazne informacije mogu mijenjati,

NUMERIČKI UPRAVLJANI ROBOTI: su roboti koji naredbodavne informacije dobivaju preko odgovarajućih numeričkih operacija,

INTELIGENTNI ROBOTI: su roboti koji se temelje na saznanju, iskustvu i sposobnosti opažanja rastojanja i elemenata oko sebe.

Od nastanka prvih robotskih sistema (robota) do danas, definisane su četiri generacije robota. Obilježjem robotske generacije smatra se složenost informatičkog sistema robota i sensorike.

Roboti nulte generacije su bili sa tzv. čvrstim programom, bolje rečeno nisu mogli da se reprogramiraju, nisu imali programski upravljački dio, to su u stvari mehaničke ruke. Robot je radio samo posao za koji je bio napravljen do kraja svog radnog vijeka, kao dio nekog tehnološkog procesa. Uglavnom se primjenjuju u masovnoj proizvodnji za zamjenu ručnog rada (na linijama montaže).

Roboti I generacije ili programski roboti imaju mogućnost upravljanja sa svakim stepenom slobode kretanja (imaju nezavisan pogonski sistem za svaki zglob). Poslije programiranja robot ponavlja jedan te isti čvrsti program (putanju, zahvate,...). Ti roboti imaju najnužniju sensoriku i vrlo ograničenu inteligenciju. Pod pojmom inteligencije imaju samo pamćenje (memoriju), u koje je pohranjen program. Uz ograničenu inteligenciju i senzore, znatno zaostaju u spretnosti i pokretljivosti u odnosu na čovječju ruku. Djelotvorno mogu obavljati samo niskokvalificirani rad (obavljanje pomoćnih operacija kod presovanja, zavarivanja, alatnih mašina i sl.), pa okolina mora biti visokoorganizirana.

Roboti II generacije ili adaptivni roboti imaju mogućnost fleksibilne izmjene programa kretanja u saglasnosti sa stvarnom situacijom, zahvaljujući ugrađenim raznim mikroprocesorskim sistemima (sensorima). Isti primaju informacije o stanju okoline od raznih davača, obrađuju ih i generišu signal adaptivnog upravljanja. U tim slučajevima već je riječ o regulaciji s povratnom vezom. Uz pamćenje, ti roboti imaju mogućnost donošenja jednostavne logičke odluke: da ili ne.

Roboti III generacije ili inteligentni robotski sistemi se graniče sa elementima vještačkog intelekta. Inteligentni robotski sistemi su opremljeni osim sistemima za raspoznavanje i računarima nove generacije. Cijeli sistem ima svojstva višeg stepena inteligencije, tj. donošenja odluke u determiniranim uvjetima (analiza), učenja i odlučivanja u nedeterminiranim uvjetima (sinteza). Za tu je umjetnu inteligenciju najbitnija mogućnost učenja (povezivanja novih iskustava s postojećim znanjem). To je moguće postići modelom vanjskog svijeta, koji je ugrađen u memoriju računara. Poređenjem sa dobijenim informacijama iz vanjskog svijeta, robot samostalno reagira na vanjske promjene, tj. donosi odluke bez programske upute.

Za razliku od računara, gdje nova generacija računara smjenjuje staru, kod robota su prisutne sve vrste i svaka od njih ima neku sebi svojstvenu primjenu.

Roboti nulte generacije su i danas prilično prisutni, samo su primjenjeni kod nekih jednostavnijih poslova.

1.3. Podjela robotskih sistema

Razlog za sve veću motivaciju primjene robota leži u nekoliko slijedećih temeljnih osnova:

- m povećanje produktivnosti,
- m smanjenje troškova,
- m savlađivanje nedostataka stručnosti čovjeka (preciznost),
- m veća fleksibilnost kod određenog stepena proizvodnje,
- m poboljšanje kvaliteta proizvodnje,
- m oslobađanje čovjeka od monotonih i ponavljajućih zadataka ili od rada u za čovjeka opasnoj okolini.

Općenito se robotski sistemi mogu podijeliti na (slika 1.1.):

- manipulacione robotske sisteme,
- mobilne robotske sisteme,
- informaciono-upravljačke robotske sisteme.

Mobilni robotski sistemi su platforme čijim kretanjem upravlja automatski sistem. Oni imaju putanju kretanja programiranu, a isto tako im je programirano automatsko određenje cilja i namijenjeni su za automatsku dostavu dijelova i alata mašinama i od alatnih mašina do skladišta. Na ovakve pokretne sisteme moguće je postaviti manipulacioni mehanizam.

Informaciono-upravljački robotski sistemi služe za sakupljanje, obradu, prenos informacija i za njihovo korištenje pri oblikovanju različitih upravljačkih signala. U proizvodnji su to sistemi automatske kontrole i upravljanja za proizvodne procese praktično bez ljudi, gdje se koriste industrijski roboti. Npr. u podvodnim uslovima to su aparati opremljeni sa mjerno-informacionim i upravljačkim uređajima i kamerom za određivanje osobina dna i vode, za raspoznavanje predmeta, automatski prikaz informacija i slično.

Manipulacioni robotski sistemi se najviše upotrebljavaju u industriji, a mogu se podijeliti na:

- robote,
- manipulatore,
- robotizovane tehnološke komplekse.

Roboti se koriste uglavnom u industrijskoj proizvodnji, manipulatori u većini slučajeva su u upotrebi u uslovima gdje vlada radijacija, zatrovanost zraka, opasnost od eksplozije, visoka i niska temperatura. Robotizovani tehnološki kompleksi se primjenjuju u uslovima složenih radova.

Način upravljanja manipulacionih robotskih sistema može biti:

- automatski,
- daljinski,
- ručni.

Automatski manipulacioni uređaji (roboti, manipulatori, robotizovani tehnološki kompleksi) se dijele u četiri grupe, shodno već navedenoj generacijskoj podjeli robota: manipulatori sa čvrstim programom, programski manipulatori, adaptivni roboti, inteligentni roboti.

Daljinsko upravljani roboti i manipulatori (slika 1.1.) se dijele na šest tipova:

- manipulatori sa komandnim upravljanjem,
- kopirajući manipulatori,
- poluautomatski manipulatori,
- roboti sa supervizornim upravljanjem,
- roboti sa kombinovanim upravljanjem,
- roboti sa dijalognim (interaktivnim) upravljanjem.

Manipulatori sa komandnim upravljanjem se odlikuju time što operator-čovjek pritiskom na odgovarajuće komande daljinski uključuje izvršne organe svakog zgloba manipulatora.

Kopirajućim manipulatorom, koji se nalazi uglavnom u opasnoj zoni, sa određene bezbjedne udaljenosti upravlja operator-čovjek pomoću uređaja koji je kinematski sličan radnom manipulatoru.

Poluautomatski manipulatori su takvi uređaji koji na pultu operatora imaju komandni mehanizam u obliku višestepene upravljačke palice, sa koje se električni signali transformišu pomoću specijalizovanog računara u upravljačke signale manipulatora.

Karakteristika *robota sa supervizornim upravljanjem* je u tome što operator prati na daljinu rad robota, koji se nalazi u opasnoj zoni i daje samo pojedinačne komande cilja, prema čijim signalima se uključuju pojedini programi automatskog rada robota. Operator vrši samo funkciju prepoznavanja okoline i donošenja odluke.

Kod *robota sa kombinovanim upravljanjem* vrši se kombinacija automatskih režima upravljanja sa režimima ručnog upravljanja, kao što je slučaj kod poluautomatskog ili kopirajućeg manipulatora.

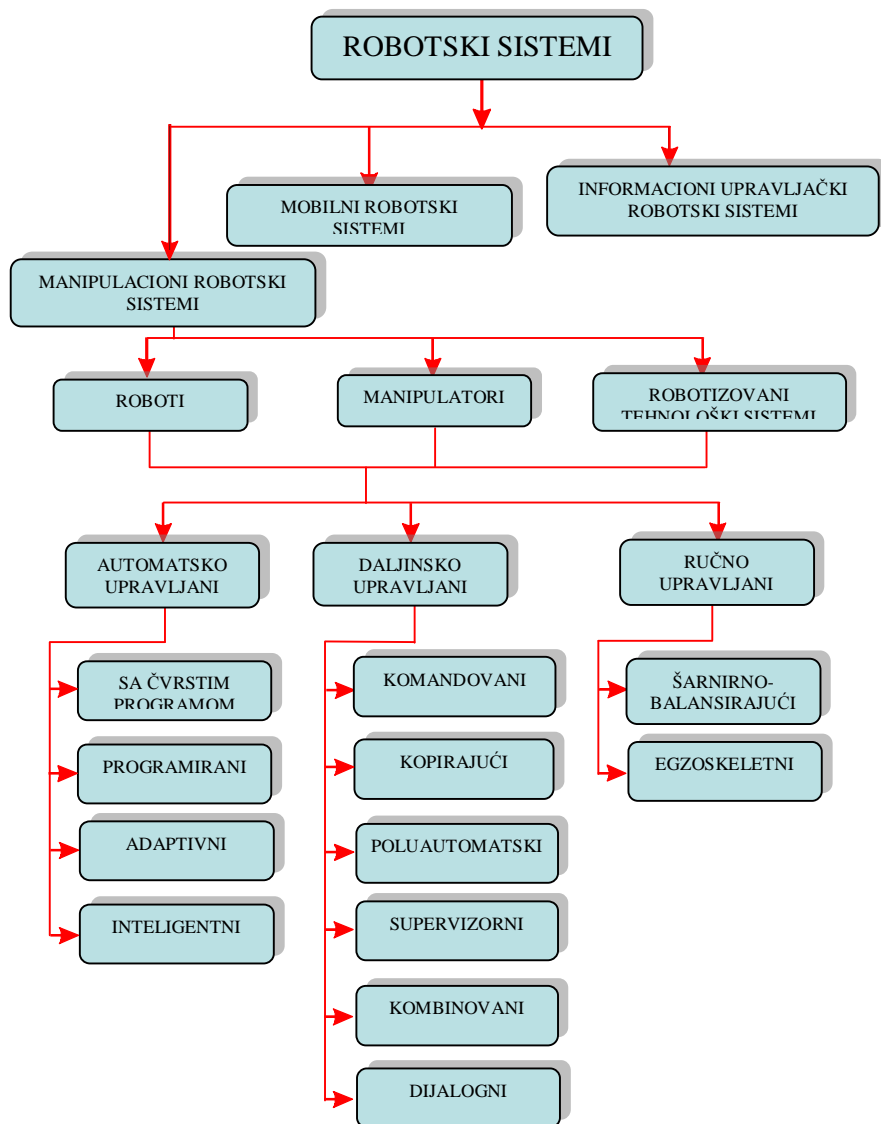
Roboti sa dijalognim (interaktivnim) upravljanjem su inteligentni i razlikuju se od supervizornih po tome što i sami aktivno učestvuju u prepoznavanju situacije i donošenju odluka, pri čemu pomažu operatoru od kojeg primaju komande.

Ručno upravljani roboti se dijele na dva tipa :

- šarnirno-balansirajući,
- egzoskeletni.

Šarnirno-balansirajući robot predstavlja višečlani mehanizam sa pogonima u svakom zglobu. Pogodni su pri utovarno-istovarnim radovima sa teretima većih težina.

Egzoskeletni roboti su višečlani mehanizmi čiji su članci povezani neposredno sa rukama ili nogama čovjeka. Pokreti čovjeka formiraju upravljačke signale. Primjenjuju se za pojačanje snage ekstremiteta i tijela čovjeka (kako zdravog tako i hendikepiranog).



Slika 1.1. Opća klasifikacija robotskih sistema

Model robota

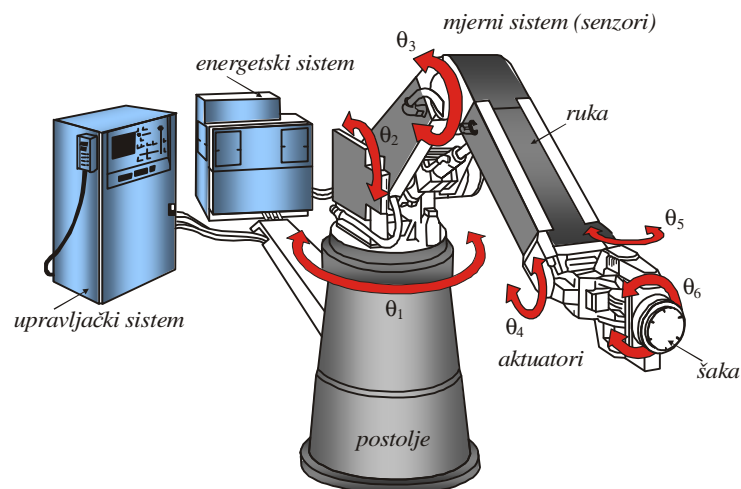
2

Dženana Gačo, Tehnički fakultet Bihać

2.1. Osnovni pojmovi

Industrijski robot je uređaj koji se koristi za poslove manipulacije materijala na bazi upravljanja. Sama konstrukcija robota (slika 2.1.) sadrži sljedeće neophodne sisteme:

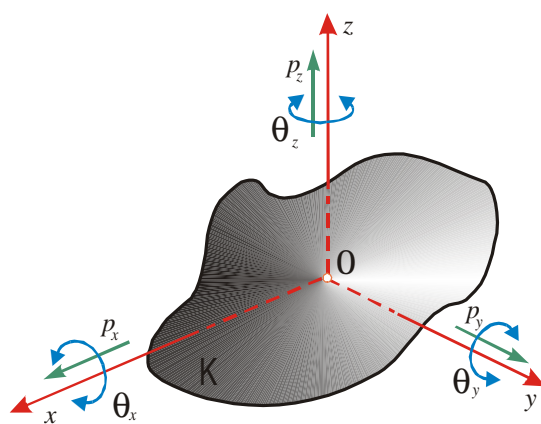
- mehanički sistem,
- energetski sistem,
- mjerni sistem,
- upravljački sistem.



Slika 2.1. Prikaz industrijskog robota

Kinematska određenost robota podrazumjeva određenost pozicije i orijentacije prihvatnice u odnosu na predmete u radnom prostoru robota (manipulatora), kao i u odnosu na neki nepomični referentni koordinatni sistem. S druge strane, položaj robota je određen relativnim uglovnim zakretanjem odnosno relativnim translatorskim pomjeranjem u zglobovima robota. Da bi robot obavio ispravno radni zadatak, u svakom trenutku mora biti određen pozicija i orijentacija hvataljke u prostoru.

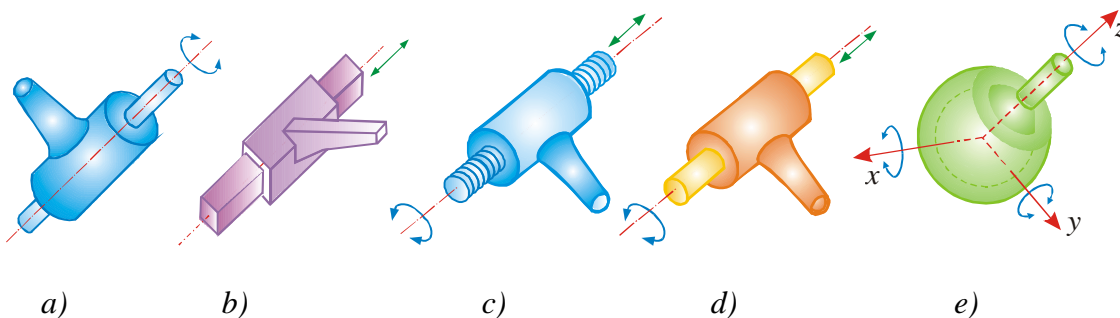
Kao što je poznato, položaj tijela u prostoru određen je sa šest nezavisnih parametara, tri translacije i tri rotacije, dakle ima 6 stepeni slobode kretanja: $f=6$. Drugim riječima, ono se može kretati na šest različitih, nezavisnih načina: translatorsno za veličinu p_x , p_y , p_z duž osa x , y , z čime je moguće postići pozicioniranje tačke tijela u prostoru i rotaciono oko sve tri ose za vrijednost uglova q_x , q_y , q_z , kako je prikazano na slici 2.2.



Slika 2.2. Kretanje tijela u prostoru

Ako se međusobno povežu dva tijela, od kojih je barem jedno pokretno, tad nastaje zglob, odnosno kinematski par. Nastajanjem zgloba dolazi do smanjenja mogućnosti kretanja, pa je i stepen slobode kretanja manji tj. $f < 6$.

Postoje različite konstrukcije zglobova, a nekoliko prostijih je prikazano na slici 2.3.



Slika 2.3. Vrste zglobova : a) rotacioni, b) translatorsni, c) vijčasti, d) valjkasti, e) kuglasti

Na gornjoj slici je dat primjer pasivnih zglobova (nemaju pokretačke pogone) sa različitim stepenima slobode kretanja i to:

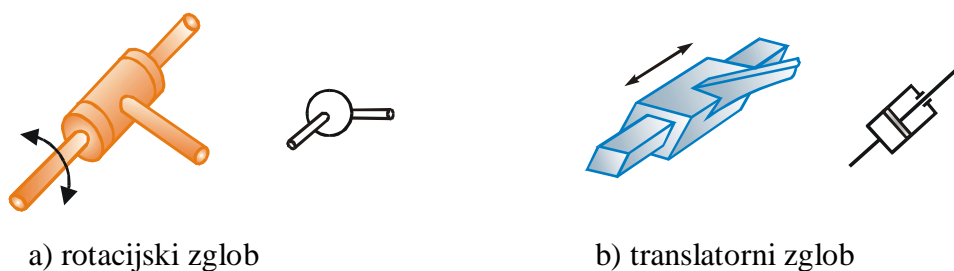
- rotacioni zglob koji ima relativno obrtanje samo oko jedne ose i njegov stepen slobode kretanja je $f=1$,
- translatorski zglob ima relativno pomjeranje duž jedne ose i kod njega je $f=1$,
- vijčasti zglob ima vezano obrtanje oko ose i translaciju duž iste ose, što znači da je kretanje zgloba helikoidalno (u obliku zavojnice) i da mu je $f=1$,
- valjkasti zglob, kod kojeg postoji obrtanje i translatorno pomjeranje cilindra unutar šupljeg cilindra, pri čemu je $f=2$,
- kuglasti zglob ima tri stepena slobode kretanja $f=3$, jer su moguća tri neovisna relativna obrtanja kugle unutar šuplje kugle.

Krutost odnosno otpor prema svakom nepoželjnom kretanju je osnovno mjerilo kvaliteta jednog zgloba. Iz ovog proizilazi da je dobro da zglobovi imaju što niži stepen slobode kretanja.

Osnovnim zglobovima se smatraju rotacioni zglob i translatorski zglob, koji imaju $f=1$ stepen slobode kretanja, dok se svi ostali zglobovi sa $f > 1$ svode na ova dva zgloba.

Rotacioni zglobovi obezbjeđuju rotaciono kretanje jednog segmenta (članka) u odnosu na drugi i mogu biti izvedeni u dvije varijante: stožastoj i šarkastoj.

Translatorski zglobovi obezbjeđuju translatorno pomjeranje jednog članka u odnosu na prethodni članak. Mogu biti izvedeni u poprečnoj i teleskopskoj varijanti (slika 2.4.).



Slika 2.4. Shematski prikaz osnovnih zglobova

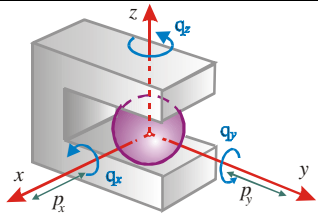
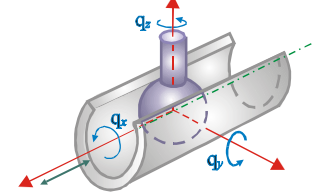
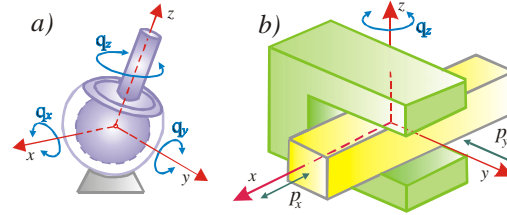
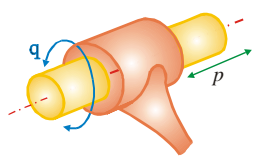
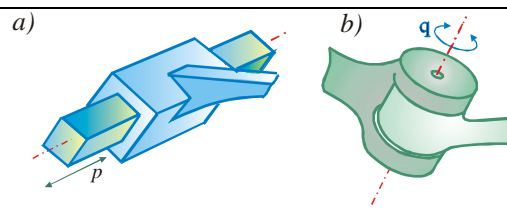
Varijante rotacionih i translatorskih zglobova su prikazane u tabeli 1, u kojoj su prema VDI (Njemačka), propisane oznake i simboli za industrijske robote.

Tabela 2.1. VDI-simboli za industrijske robote

Naziv	Simbol	Primjer
Translatorski teleskopski zglob		
Translatorski poprečni zglob		
Translatorska izvedba ose		
Rotacioni stožasti zglob		
Rotacioni šarkasti zglob		

U slijedećoj tabeli je dat prikaz kinematskih parova, koji su na osnovu načina vezivanja, razvrstani u određene klase.

Tabela 2.2. Izgled kinematskih parova

Klasa kinematskog para	Broj stepeni slobode kretanja f	Prikaz kinematskog para
<i>I klasa</i>	$f=5$ <i>3 rotacije + 2 translacije</i>	
<i>II klasa</i>	$f=4$ <i>3 rotacije + 1 translacije</i>	
<i>III klasa</i>	$f=3$ a) <i>3 rotacije + 0 translacija</i> b) <i>1 rotacija + 2 translacije</i>	
<i>IV klasa</i>	$f=2$ <i>1 rotacija + 1 translacija</i>	
<i>V klasa</i>	$f=1$ a) <i>0 rotacija + 1 translacija</i> b) <i>1 rotacija + 0 translacija</i>	

Za primjenu u robotici najvažniji su kinematski parovi pete klase. Kinematski par pete klase dozvoljava samo jednu rotaciju (rotacioni par), odnosno samo jednu translaciju (translatorski par).

2.2. Kinematski lanci

Kinematska struktura robota predstavlja ustvari kinematski lanac. Kinematski lanac je skup od n -povezanih kinematskih parova (dva susjedna članka mehanizma međusobno povezana zglobnom vezom).

Konfiguracija industrijskog robota se sastoji od n nedeformabilnih tijela koji predstavljaju segmente (engl. link) koji su međusobno povezani zglobovima (engl. joint). Svaki zglob ima jedan stepen slobode kretanja. Većina robota, odnosno manipulatora ima rotacione ili translatorne zglobne veze.

Ovisno o strukturi veza koje su ostvarene u kinematskom lancu, razlikuju se:

- prosti i
- složeni kinematski lanci.

Lanac kod kojeg svaki članak u nizu ima dva zgloba, prethodni i naredni, naziva se prostim kinematskim lancem (sl.2.5. a i sl.2.5. b).

Složeni kinematski lanac je onaj kod kojeg bar jedan članak lanca ima tri ili više zglobova (jedan prethodni i dva ili više narednih), što znači da se lanac grana (sl.2.5.d).

Prema drugoj podjeli kinematski lanci mogu biti:

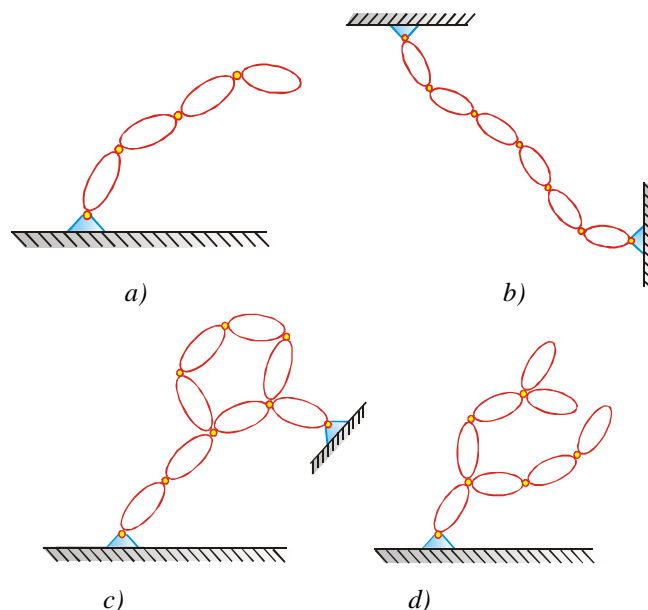
- otvoreni i
- zatvoreni kinematski lanci.

Otvoreni lanci su oni kod kojih ne postoji zatvoreni niz (iz jedne tačke lanca u drugu se može doći samo jednim putem). Kod otvorenog kinematskog lanca početni članak je vezan za čvrstu podlogu, dok zadnji članak u lancu nosi prihvatnicu. S obzirom da svaki zglob ima jedan stepen slobode kretanja ($f=1$), cijeli kinematski lanac će tad imati:

$$f_L = n \cdot f = n \cdot 1 = n \quad (2.1)$$

stepeni slobode kretanja, pri čemu je n broj zglobova.

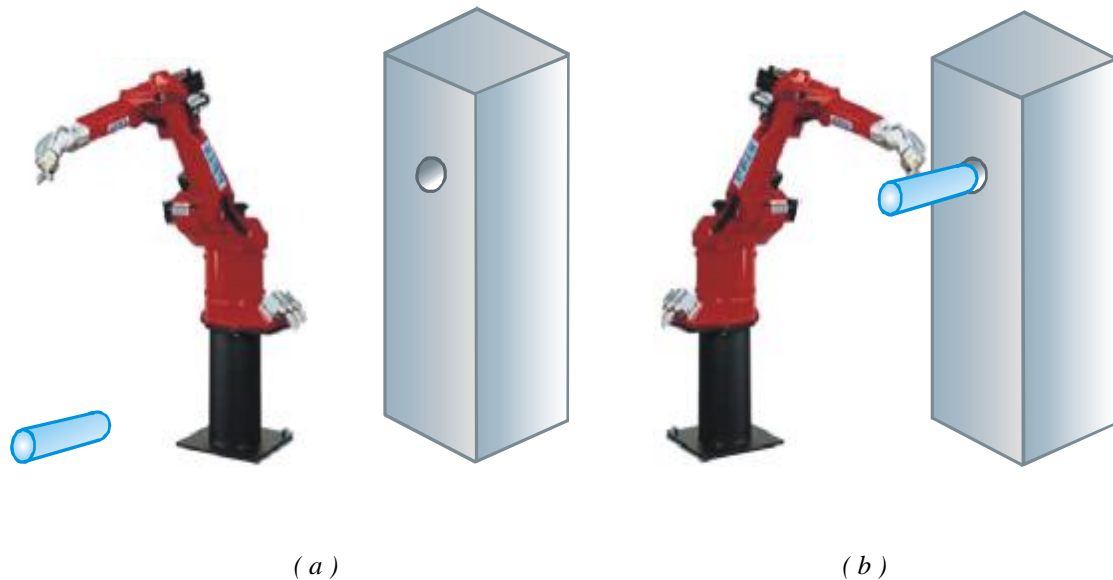
Zatvoreni lanac ima najmanje jedan zatvoreni niz članaka, gdje se iz jedne tačke tog niza može doći bar na dva načina (sl.2.5. c).



Slika 2.5. Tipovi kinematskih lanaca: a) otvoreni, prost lanac; b) zatvoreni, prost lanac; c) zatvoreni, složen lanac; d) složen, otvoren lanac

Za robotske mehanizme karakteristično je da tokom rada kinematski lanac mijenja svoju strukturu i to od otvorene ka zatvorenoj i obrnuto.

Takav jedan primjer je prikazan u postupku montaže (sl.2.6.), gdje robot u fazi prenosa radnog predmeta (faza a) predstavlja otvoren lanac, a zatvoren lanac je u fazi montaže (umetanja) predmeta u otvor (faza b).



Slika 2.6. Prikaz promjene kinematske strukture robota u postupku montaže

U analizi, sintezi i upravljanju robotima izuzetan značaj ima kinematsko opisivanje robota kao otvorenog kinematskog lanca. Kod zglobnog kinematskog lanca broj stepeni slobode je jednak broju nezavisnih parametara koji su potrebni da bi se jednoznačno odredio položaj cijelog lanca.

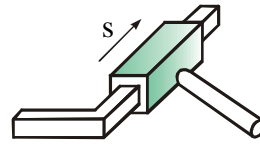
Da bi se definisao položaj kod jednog otvorenog kinematskog lanca, potrebno je da se zna pomjeranje u svim zglobovima lanca, tj. potrebno je znati za koju vrijednost ugla je zarotiran svaki rotacioni zglob i koliko je pomjeranje u svakom translatorskom zglobovima. Kod ovakvih lanaca zglobovi su međusobno nezavisni i pomjeranja u zglobovima mogu biti proizvoljna. Broj stepeni slobode kod otvorenih kinematskih lanaca je jednak broju zglobova.

2.2.1. Stepni slobode kinematskog lanca

Stepen slobode kinematskog lanca zavisi od njegove topološke strukture, tj. od toga da li je on otvoren ili zatvoren i od vrste primjenjenih zglobova. Translatorski i rotacioni zglobovi kao najčešće primjenjivani u robotici imaju jedan stepen slobode kretanja ($f_z = 1$) jer dopuštaju samo jednu vrstu kretanja, kako je to prikazano na slikama 2.7. i 2.8.



Slika 2.7. Rotacioni zglob



Slika 2.8. Translatorsni zglob

Nezavisno promjenjiva veličina kod *rotacionog zgloba* je upravo ugao njegove rotacije tj. $q_k = \theta$. Nezavisno promjenjiva veličina kod *translatorsnog zgloba* je iznos njegove translacije tj.: $q_k = s$.

Međutim, slijedeći definiciju broja stepeni slobode za jedan kinematski par dolazi se do broja stepeni slobode čitavog zglobnog kinematskog lanca, koji je jednak broju mogućih nezavisnih kretanja tog lanca, odnosno jednak je broju nezavisnih parametara potrebnih da bi se jednoznačno odredio položaj cijelog lanca.

Općeniti broj stepeni slobode kretanja za prostorne sisteme po Grübler – Kutzbachovom kriterijumu, izračunava se po slijedećem obrascu:

$$f = \sum_{i=1}^{n_z} f_{zi} - 6n_p \quad (2.2)$$

gdje je: f_{zi} - broj stepeni slobode kretanja i -tog zgloba,
 n_p - broj nezavisnih petlji unutar kinematskog lanca.

Broj nezavisnih petlji n_p unutar jednog zatvorenog kinematskog lanca izračunava se po obrascu:

$$n_p = n_z - n_{\mathfrak{R}}, \quad (2.3)$$

gdje je: n_z - broj zglobova,
 $n_{\mathfrak{R}}$ - broj tijela ili segmenata.

Općeniti broj stepeni slobode kretanja za ravanske sisteme po Grübler – Kutzbachovom kriterijumu izračunava se po slijedećem obrascu

$$f = \sum_{i=1}^{n_z} f_{zi} - 3n_p. \quad (2.4)$$

Naprimjer, za izračunavanje broja stepeni slobode kretanja kinematske strukture prikazane na slici 2.9. koristi se obrazac (2.4), polazeći od toga da su zglobovi rotacioni, sa samo jednim stepenom slobode kretanja tj. $f_{zi} = 1$.

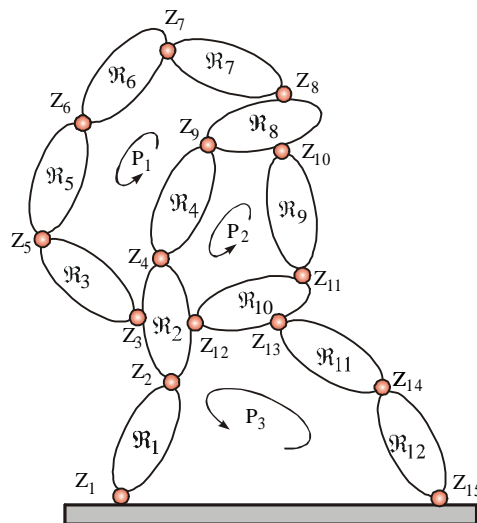
Na osnovu obrasca (2.3) koji definiše broj nezavisnih petlji n_p i vodeći računa da je broj zglobova $n_z = 15$ i broj tijela ili segmenata $n_{\mathfrak{R}} = 12$ kako je to prikazano na slici 2.9. dobija se slijedeće:

$$\begin{aligned} n_p &= n_z - n_{\mathfrak{R}}, \\ n_p &= 15 - 12, \\ n_p &= 3. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Na slici 2.9 dat je i prikaz petlji sa oznakom petlji P_i , $i = 1, 2, 3$.

Na osnovu obrasca (2.4) stepen slobode za datu kinematsku strukturu iznosi

$$f = \sum_{i=1}^{n_z} f_{z_i} - 3n_p = 15 - 3 \cdot 3 = 6. \quad (2.5)$$



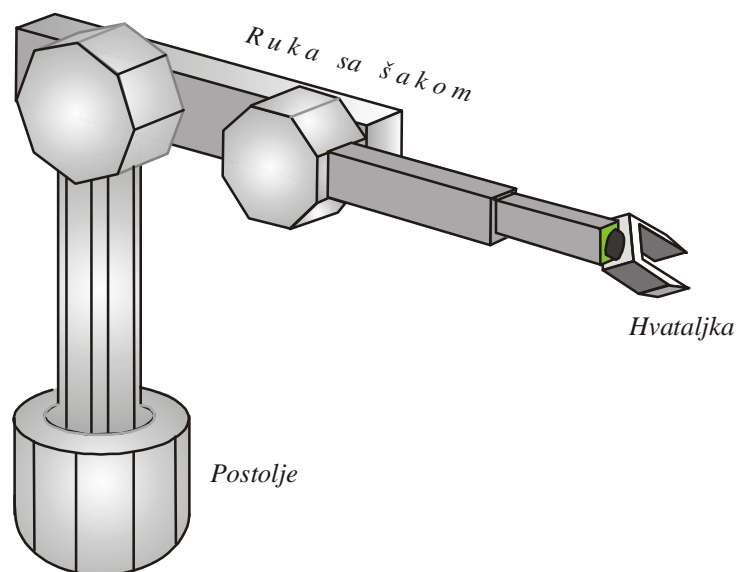
Slika 2.9. Zatvoreni kinematski lanac sa više petlji

Prema tome, za definisanje položaja kinematske strukture prikazane na slici 2.9. potrebno je 6 nezavisnih parametara.

2.3. Struktura industrijskih robota

Mehanički dio industrijskog robota se može podijeliti na slijedeće podsisteme (slika 2.10.):

- postolje ili baza robota,
- ruka i šaka robota,
- prihvatnica robota (engl. end effector), koja može da bude u vidu hvataljke, senzora ili alata.



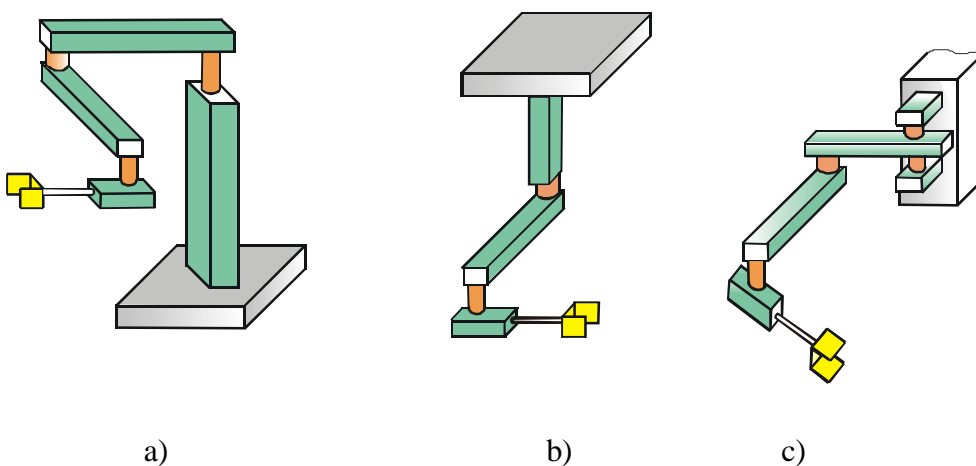
Slika 2.10. Prikaz mehaničkih podistema industrijskog robota

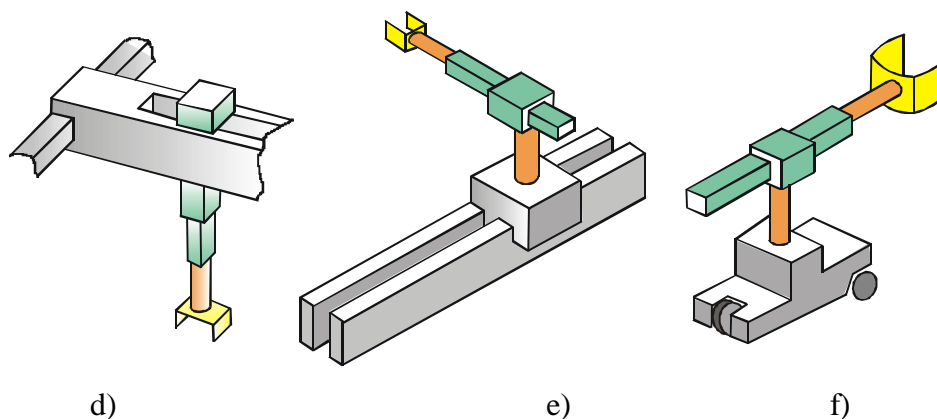
Izvršni mehanizam industrijskog robota predstavlja sistem pokretno povezanih segmenata mehaničkog sistema, namjenjenih za manipulisanje radnim objektom. Izvršni mehanizam koji osigurava transportna i orijentaciona kretanja naziva se *rukom* robota. Ako su segmenti izvršnog mehanizma industrijskog robota međusobno povezani samo rotacionim kinematskim parovima, u tom slučaju ti segmenti zajedno obrazuju ruku zglobnog tipa (zglobnu ruku).

Postolje robota je slično postolju alatnog uređaja, gdje osnovna ploča može biti lijevana ili zavarena od profilnog željeza. Postolje robota može biti izvedeno portalno, konzolno i učvršćeno na pod, zid ili plafon (slika 2.11.). Kod odabira vrste postolja važnu ulogu ima specifičnost zadatka koji robot treba da obavlja.

U slučaju da je postolje pokretno, tad se govori o podvozu robota koji može biti na šinama ili na kolicima.

Na postolju je smješten prvi rotacijski ili translacijski zglob, kao i motori, cilindri, uljni i ostali agregati.





Slika 2.11. Tipovi postolja i podvoza: a) stojeće, b) stropno, c) zidno, d) portalno postolje, e) podvoz u obliku tračnica, f) podvoz u obliku kolica

Za postolje robota je vezana ruka robota na koju se serijski nadovezuje korijen šake robota, koji s konstrukcionog stajališta čine jednu cjelinu. Njihov zadatak je da vode prihvatnicu na osnovu predviđenog upravljačkog algoritma. Zbog toga se još nazivaju sistemom vođenja prihvatnice.

Prihvatnicu robota (završni uređaj) je samostalna jedinica koja se nadovezuje na korijen šake i u direktnoj je vezi između predmeta nad kojim se vrši odgovarajuća operacija i kinematske strukture samog robota.

Prihvatnica robota se svrstava u grupu izmjenjivih elemenata industrijskih robota. Industrijski roboti se opremaju odgovarajućom prihvatnicom u zavisnosti od konkretnog zadatka. Prihvatnica može djelovati kao hvataljka u robotu za posluživanje i montažu, može biti alatka tehnološkog robota ili senzor mjernih robota. Najpoznatija njena primjena je u ulozi hvataljke i u toj funkciji se robot bitno razlikuje od ostalih strojeva. Još uvijek ne postoji rješenje hvataljke koja će imati opću namjenu, već se projektiraju specifična rješenja za posebne namjene. Pri izradi i odabiru konstrukcije hvataljke moraju se definirati zahtjevi općeg karaktera i specijalni zahtjevi:

- karakteristike robotske ruke s dozvoljenom težinom hvataljke i predmeta,
- karakteristike manipuliranog predmeta, npr. težina, krutost, materijal, geometrija, te položaj za vrijeme rada,
- uvjeti rada hvataljke (mogućnost brze zamjene, prilagodljivost promjenama predmeta manipulacije),
- uvjeti okoline (temperatura, vlažnost, smještaj robota).

Hvataljke se prema vrsti organa za hvatanje dijele na:

- a) mehanička kliješta,
- b) mehanički prsti,
- c) pneumatska hvataljka,
- d) vakuumska hvataljka,
- e) magnetska hvataljka.

Prema prihvatnom djelovanju hvataljke mogu biti:

- jednostrane (magnetska, vakumska i pneumatska),
- dvostrane (mehanička kliješta),
- mnogostrane (mehanički prsti).

Najčešća izvedba hvataljke su *mehanička kliješta*. Ovakva hvataljka se sastoji od dvije čeljusti koje se obično kreću simetrično, a pokreće ih isti pogon. Postoji više konstruktivnih rješenja, ovisno o broju cilindara. Mehanička kliješta imaju jedan stepen slobode kretanja (ovaj stepen slobode kretanja se ne ubraja u ukupni stepen slobode kretanja robota).

Mehanički prsti predstavljaju hvataljku čiji su članci zglibno povezani i većinom su opremljeni sa tri do pet prstiju. Zbog svoje složenosti ova vrsta hvataljke se malo primjenjuje za industrijske robote.

Pneumatska hvataljka, prikazana na slici 2.12.d, ima dva prsta sastavljena od elastičnog crijeva podjeljenog na komore (1), koje je pričvršćeno na čeličnu traku (2). Uz potisnuti tlak p_0 crijevo se savija u smjeru prikazanom strelicama i na taj način obuhvata željeni predmet. Pneumatska hvataljka je popustljiva i prilagodljiva različitim oblicima predmeta.

Vakuumska hvataljka je jednostavne izvedbe i ne zahtijeva teške pogone, ali joj je potrebno određeno vrijeme za postizanje vakuuma, te se pri samom otpuštanju mora povisiti pritisak. Površine predmeta kojima se manipulira moraju biti suhe, glatke i čiste.

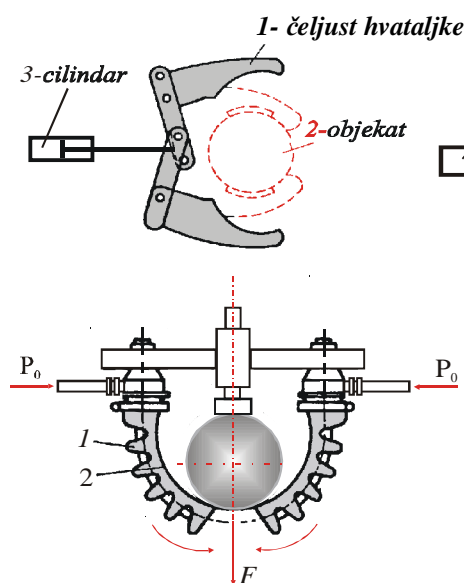
Magnetska hvataljka sastoji se od permanentnog magneta ili elektromagneta koji ostvaruje silu privlačenja magnetskih materijala (sl.2.12.f). Ova hvataljka je jednostavne konstrukcije, a osnovni nedostatak joj je što pri nestanku električne energije nema privlačne sile.

Na slici 2.12. prikazane su najčešće izvedbe hvataljki.

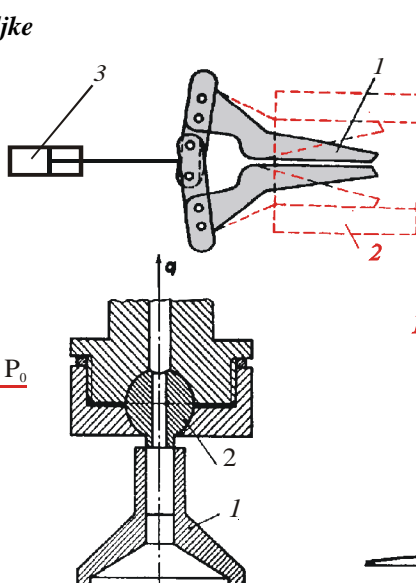
a) hvataljka – vanjska

b) hvataljka – unutrašnja

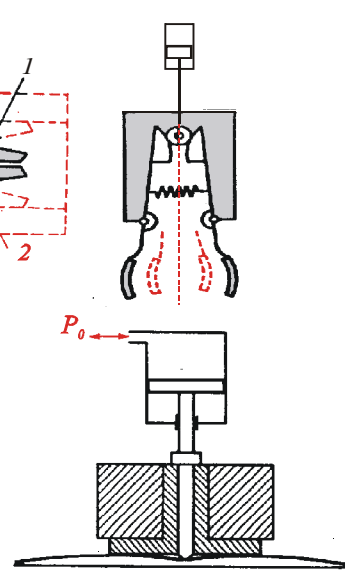
c) mehanička kliješta



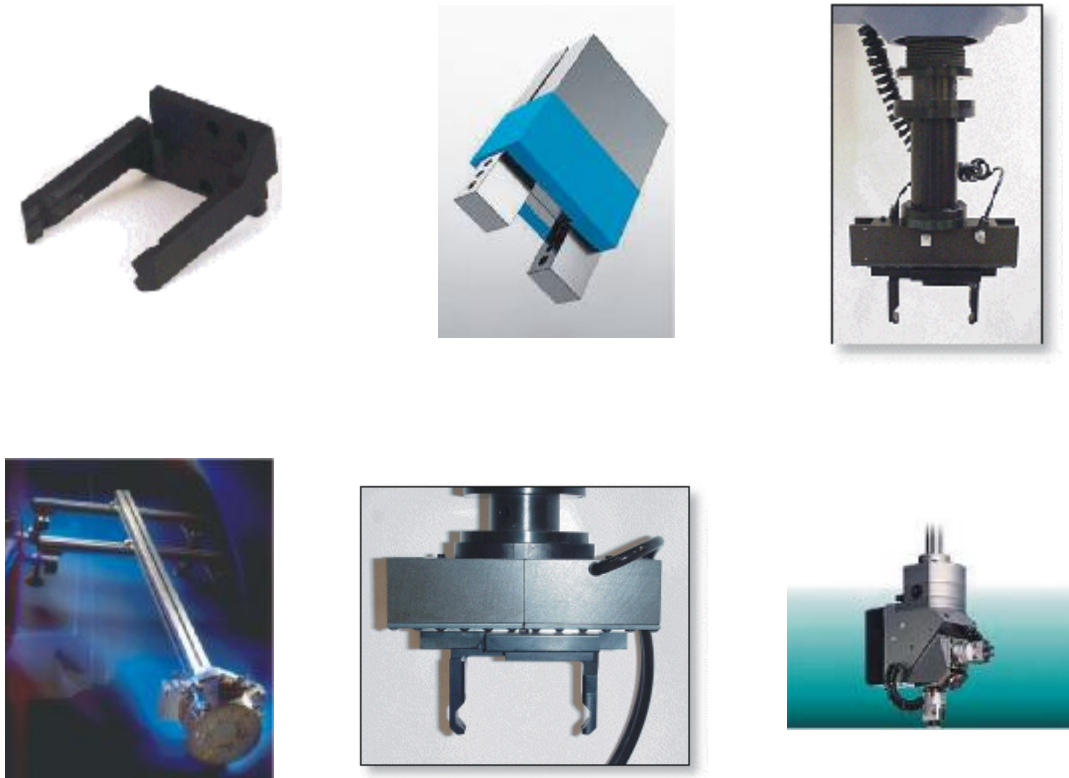
d) pneumatska hvataljka



e) vakuumaska hvataljka



f) magnetska hvataljka



Slika 2.12. Vrste hvataljki

Na osnovu naprijed rečenog, može se kazati da je namjena hvataljki prenošenje objekta iz početne u krajnju poziciju i reorijentacija istog u manipulacijskom prostoru.

Hvataljka robota mora da ima mogućnost:

- prihvatanja objekta,
- kontroliranja orijentacije objekta tokom prenosa,
- „osjećaja“ položaja objekta u odnosu na hvataljku.

Zavisno o namjeni robota ovisi i izbor same hvataljke. Ako se mijenja namjena robota, promijenice mu se samo završni uređaj (hvataljka), što je i potvrda fleksibilnosti robota kao elementa proizvodnog sistema.

Na slici 2.13. su prikazane neke od izvedbi industrijskih robota.

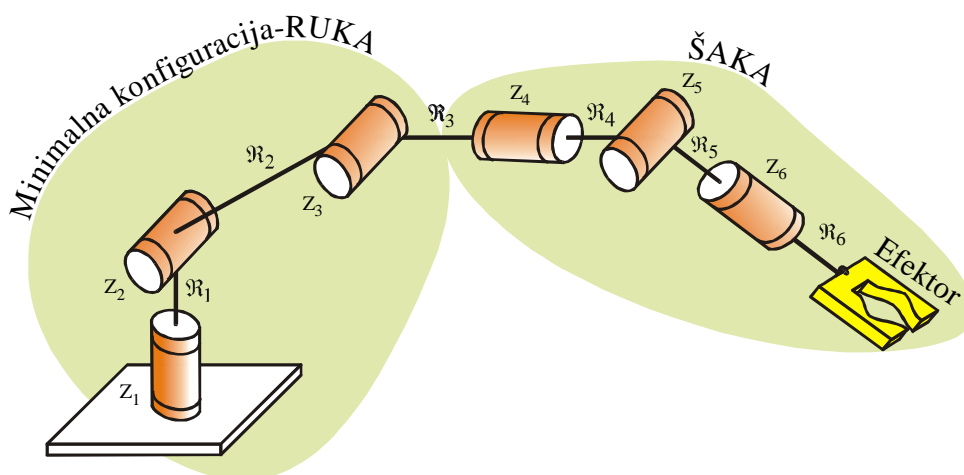


Slika 2.13. Moguće vrste industrijskih robota

2.4. Minimalna konfiguracija robota

Da bi jedan robot bio u upotrebi, on mora imati barem mogućnost pozicioniranja u prostoru. To znači da treba da se sastoji od tri zgloba, odnosno da ima tri stepena slobode kretanja. Takva struktura se naziva "minimalna konfiguracija robota". Na ovakvu minimalnu konfiguraciju se nadovezuje završni uređaj (prihvatnica).

Robot sa šest stepeni slobode kretanja može se podijeliti na dva dijela: na ruku i šaku. On u prostoru može da postigne potpuno pozicioniranje pomoću tri ose ruke i potpunu orijentaciju pomoću tri ose šake kako je to prikazano na slici 2.14.



Slika 2.14. Minimalna konfiguracija i šaka robota

Minimalna konfiguracija se često definiše kao mehanizam sa tri stepena slobode kretanja koji vrši pozicioniranje tj. dovođenje šake na željeno mjesto u radnom prostoru, pa se može reći da minimalna konfiguracija definiše poziciju korijena šake koji predstavlja mjesto njenog priključka. Normalno, ova minimalna konfiguracija robota može se sastojati od bilo koje kombinacije zglobova (translatorni ili rotacioni).

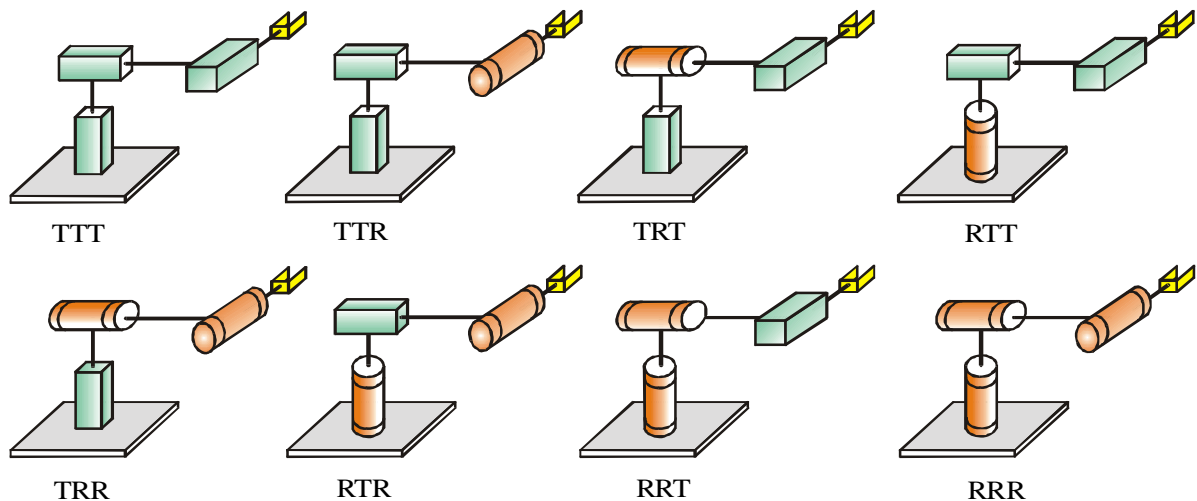
Broj mogućih varijacija strukture robota se može odrediti na osnovu izraza

$$V = n^f \quad (2.6)$$

gdje je: V - broj varijacija,
 n - broj zglobova,
 f - broj stepeni slobode kretanja.

Tako za tri stepena slobode kretanja i dva osnovna zgloba ruke (R i T) postoji $V = 2^3 = 8$ minimalnih konfiguracija robota (TTT , TTR , TRT , RTT , TRR , RTR , RRT , RRR).

Na slici 2.15. su prikazane moguće kinematske strukture minimalnih konfiguracija robota.



Slika 2.15. Moguće kinematske strukture minimalnih konfiguracija robota za $f = 3$
 T -translatorni zglob, R -rotacioni zglob

Definicijom minimalne konfiguracije robota određuje se njegov manipulacioni prostor u kojem on može obavljati zadane zadatke, odnosno u kojem on može da dovede efektor. Svaka od ovih struktura ima svoje dobre i loše strane, a rješenja s rotacijskim zglobovima imaju jednostavniju mehaničku konstrukciju, složenije programiranje kretanja i brži su od translacijskih.

Radni prostor

3

Dženana Gačo, Tehnički fakultet Bihać

3.1. Geometrija radnog prostora

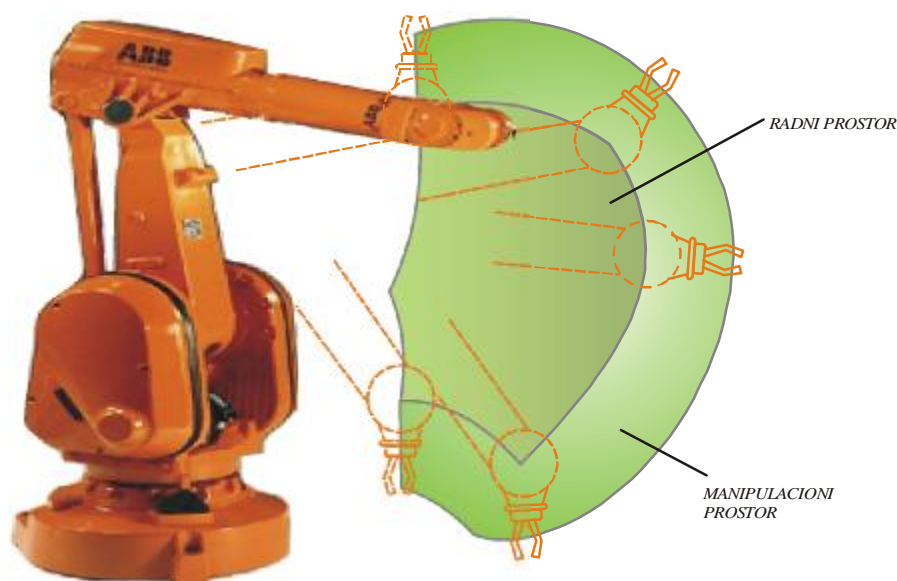
Na osnovu definicije minimalne konfiguracije robota moguće je odrediti i njegov manipulacioni prostor. Manipulacioni prostor je skup tačaka u koji robot može dovesti prihvatnicu (centar prihvata, vrh alata i drugo), odnosno obaviti radni zadatak, kako je prikazano na slici 3.1. Izvan manipulacionog prostora robot ne može obavljati zadane zadatke.

Radni prostor čine samo one tačke manipulacionog prostora koje robot može dostići uz proizvoljnu orijentaciju. Drugim riječima, radni prostor je prostor u kojem je moguć zahvat iz svih smjerova, dok u preostalom manipulacionom prostoru je moguće izvesti zahvat samo pod određenim uglom. Radni i manipulacioni prostor su određeni kinematskom strukturom i geometrijom kinematskih parova robota, te ograničenjem postavljenim na pojedine stepene slobode kretanja pojedinog zgloba. To znači da će o tipu i broju zglobova, zatim dužini članaka, postojećim fizičkim ograničenjima, a koja su neposredno povezana s konkretnom građom i izgledom robota, zavisiti i veličina radnog prostora.

S obzirom da ose prva tri zgloba robota određuju položaj ručnog zgloba, a ose preostala tri zgloba određuju orijentaciju alata, to i tipovi zglobova upotrijebljenih za prve tri ose određuju i geometriju radnog prostora robota.

Kolizijskim prostorom se naziva onaj dio manipulacionog i radnog prostora koji pripada grupi od dva ili više robota i u kojem može doći do sudara (kolizije).

Radni prostor može biti uređen ili neuređen. Za radni prostor se smatra da je uređen, ako je propisan položaj i orijentacija izratka te ako nema prepreka u radnom prostoru. Što je radni prostor uređeniji, to su zahtjevi na nivo inteligencije robota niži.



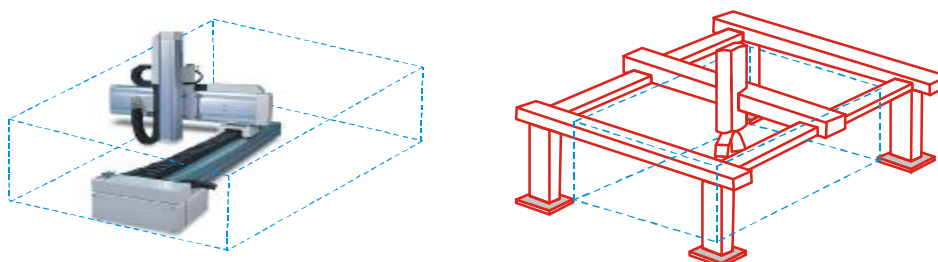
Slika 3.1. Radni i manipulacioni prostor robota

Kombinirajući međusobno rotacijske (R) i translacijske (T) zglobove za prve tri ose određuju se i slijedeće konfiguracije robota:

1. pravougaona ili TTT,
2. cilindrična ili RTT,
3. sferna ili RRT,
4. rotacijska ili RRR,
5. robot tipa SCARA- RTR, TRR ili RRT strukture.

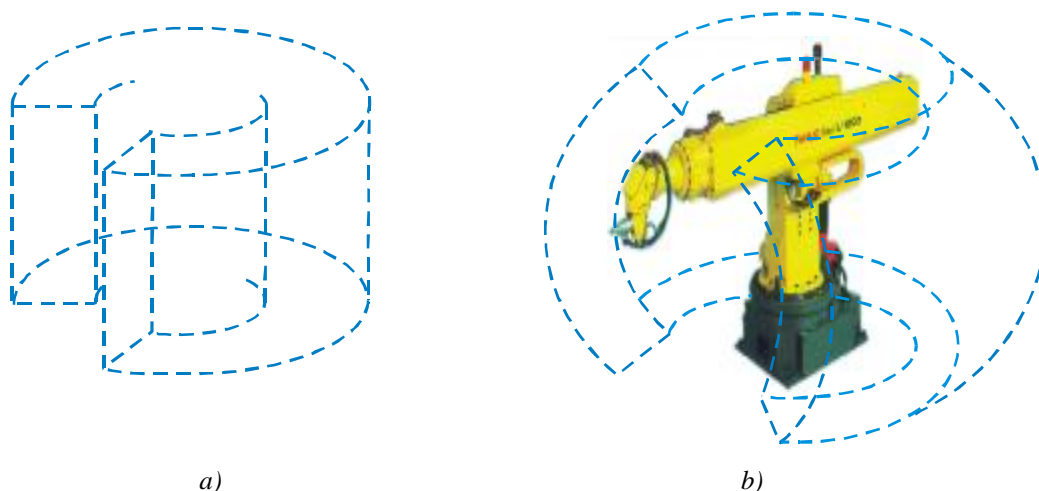
Određeni primjeri manipulacionih prostora za karakteristične strukture robota su prikazani na slijedećim slikama.

Na slici 3.2. prikazana su dva tipa robota (konzolni i portalni) sa pravougaonom (*engl. Cartesian*) konfiguracijom ili *TTT*, kod kog je radni prostor u obliku prizme.



Slika 3.2. Prikaz manipulacionog prostora ruke robota *TTT*

Ako se prvi zglob kod pravougaone konfiguracije robota zamijeni rotacijskim zglobom, tada se dobija robot cilindrične (*engl. cylindrical*) konfiguracije (RTT), na slici 3.3.a. Radni prostor takvog robota je zbog ograničenosti translatornog kretanja jednak zapremini između dva vertikalna koncentrična plašta valjaka. Roboti ovakve konfiguracije se koriste za opsluživanje alatnih mašina.

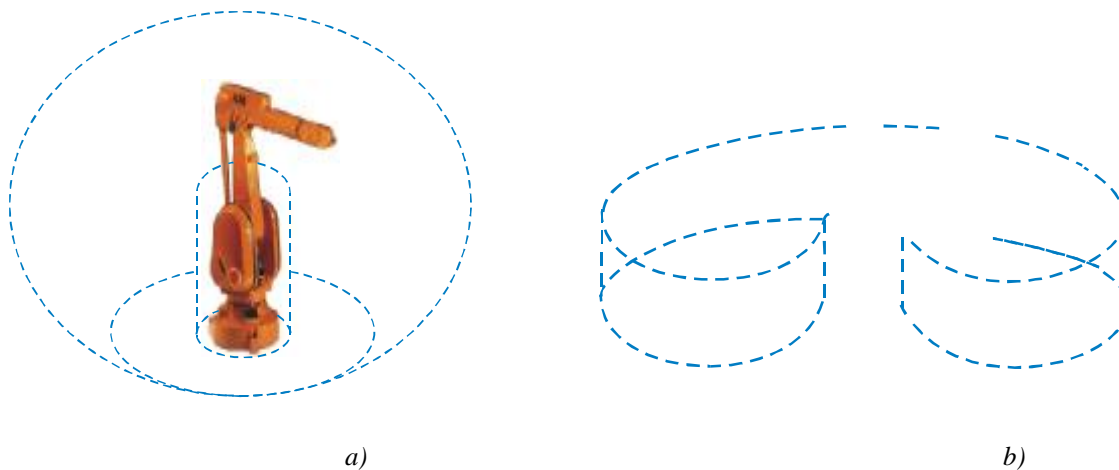


Slika 3.3. Prikaz različitih manipulacionih prostora:

a) robot RTT konfiguracije

b) robot RRT konfiguracije

Zamjeni li se drugi zglob cilindrične konfiguracije robota sa rotacijskim zglobom dobiva se robot sferne (*engl. spherical*) konfiguracije (RRT), prikazan na slici 3.3.b. Radni prostor tog tipa robota je, u slučaju da postoji ograničenje translatornog kretanja, zapremina između dvije koncentrične sfere. U slučaju da postoji ograničenje svih kretanja, radni prostor je dio zapremine između dvije koncentrične sfere. Roboti ovakve strukture imaju veliku fleksibilnost u pristupu određenoj lokaciji i primjenjuju se za tačkasto zavarivanje i za opsluživanje.



Slika 3.4. Prikaz manipulacionog prostora : a) robota RRR strukture,

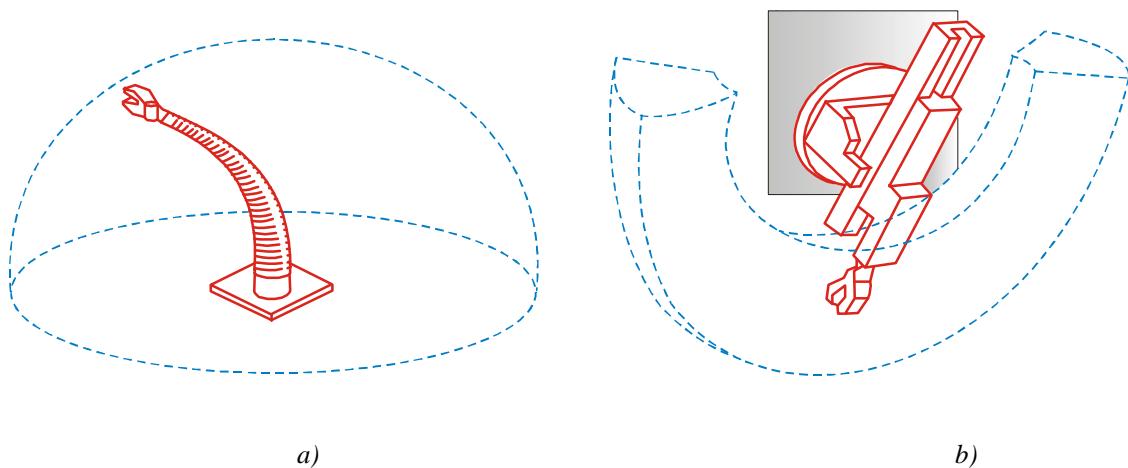
b) robota tipa SCARA

Na slici 3.4.a je prikaz robota rotacijske konfiguracije (RRR) kod koje su sva tri zgloba rotaciona. Ova konfiguracija se još naziva revolutna, laktasta, antropomorfna ili zglobna. Kod ove vrste robota radni prostor je kugla i to za slučaj da ne postoje

ograničenja rotacijskih kretanja. Kada postoje ograničenja u kretanju, radni prostor je dio kugle složenog oblika čiji je presjek sa strane najčešće u obliku polumjeseca.

Robot tipa SCARA (engl. Selected Compliance Assembly Robot Arm) ima osobine zglobnih i cilindričnih robota, oznaka njegove strukture je RRR-R i sve rotacije mu se nalaze u horizontalnoj ravni (sl.3.4.b).

Uz ove tipične konfiguracije robota u primjeni su i roboti nekonvencionalne strukture. Primjer takvog tipa robota je dat na slici 3.5.



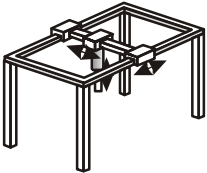
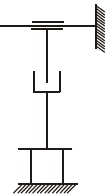
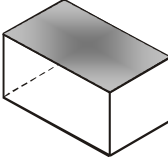

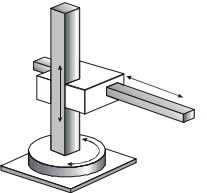
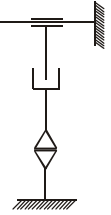


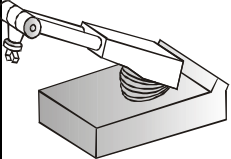
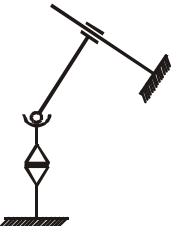
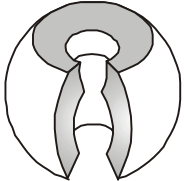

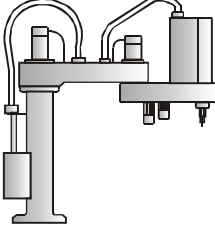
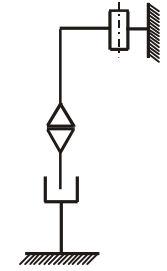
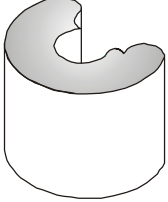

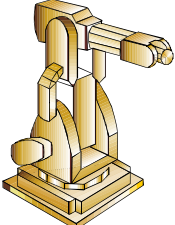
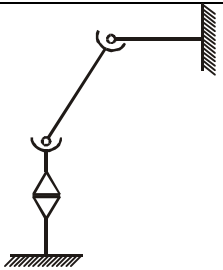
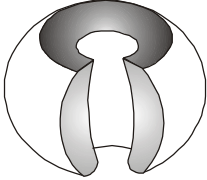

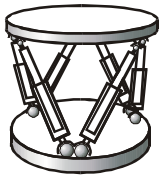
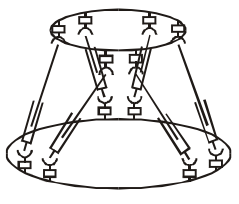
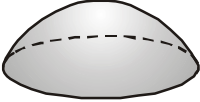

Slika 3.5. Prikaz manipulacionog prostora :
a) robota tipa Spine,
b) robota konfiguracije klatna

Slika 3.5.a daje prikaz robota tipa Spine čija je ruka sasvim gipka (podsjeća na surlu slona) i radni prostor mu je efikasno iskorišten. Bilo kojoj tački sferoidnog manipulacionog prostora može se prići iz bilo kojeg smjera, pa čak i sa stražnje strane, te je pogodan za rad na teško pristupačnim mjestima (npr. bojenje unutrašnjosti autokaroserija).

Drugi tip robota prikazan na slici 3.5.b je konfiguracije klatna čiji je radni prostor u obliku potkovice. Ovaj tip robota, koji se može montirati i na zid, je moguće koristiti za radove na mjestima gdje se uobičajene robotske konfiguracije ne mogu upotrebljavati.

U slijedećoj tabeli prikazane su tipične konfiguracije robota prema ISO 9506-3.

Tabela 3.1. Tipične minimalne konfiguracije robota na osnovu ISO 9506-3 standardu

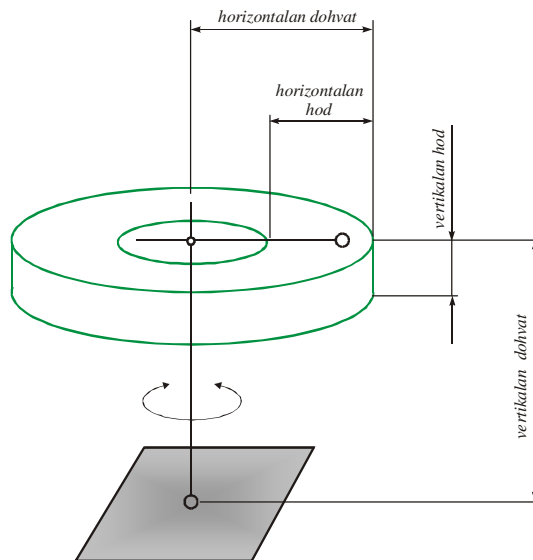
Vrsta robota	Kinematska struktura	Radni prostor	Primjer-fotografija robota
Pravougaoni robot 	$3 T$ 		
Cilindrični robot 	$2 T$ $1 R$ 		
Sferni robot 	$1 T$ $2 R$ 		
SCARA robot 	$2 T$ $1 R$ 		
Zglobni robot 	$3 R$ 		
Paralelni robot 			

Veličinu radnog prostora robota je moguće približno odrediti pomoću dohvata i hoda. Horizontalan dohvat je maksimalna udaljenost koju ručni zglob može dosegnuti. Mjeri se od vertikalne ose oko koje robot rotira.

Horizontalan hod predstavlja ukupnu udaljenost od vertikalne ose po kojoj se ručni zglob može kretati. Razlika između horizontalnog dohvata i hoda je minimalna udaljenost ručnog zgloba od glavne vertikalne ose. S obzirom da je ta veličina pozitivna, tada je dohvat uvijek veći ili jednak hodu.

Vertikalni dohvat robota predstavlja maksimalnu udaljenost ručnog zgloba robota od baze. Vertikalni hod robota je ukupna vertikalna udaljenost po kojoj se ručni zglob može kretati i manji je ili jednak vertikalnom dohvatu.

Na slici 3.6. je dat prikaz dohvata i hoda jednog cilindričnog robota. Sa prikazane slike se vidi da je horizontalan dohvat robota cilindrične konfiguracije poluprečnik vanjskog plašta valjka radnog prostora, a da je horizontalan hod razlika poluprečnika vanjskog i unutrašnjeg valjka.

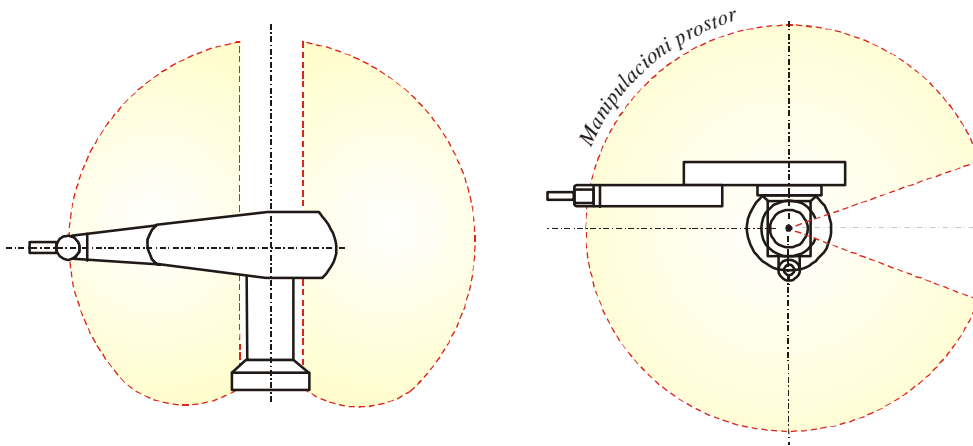


Slika 3.6. Dohvat i hod cilindričnog robota

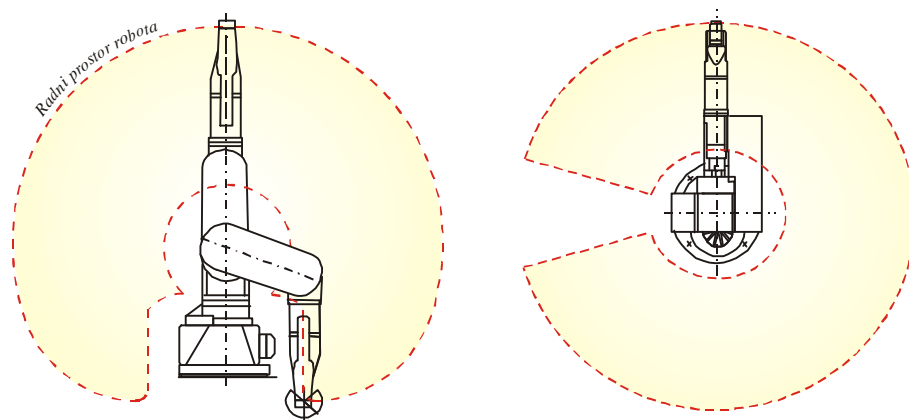
Vertikalni dohvat cilindričnog robota će biti veći od njegovog vertikalnog hoda ako se pomoću ograničenja u kretanju drugom osom ručnom zglobovima ne dopusti doticanje granice radnog prostora.

Kod rotacijskih robota dohvat je često jednak hodu, na osnovu čega je njihov radni prostor pun.

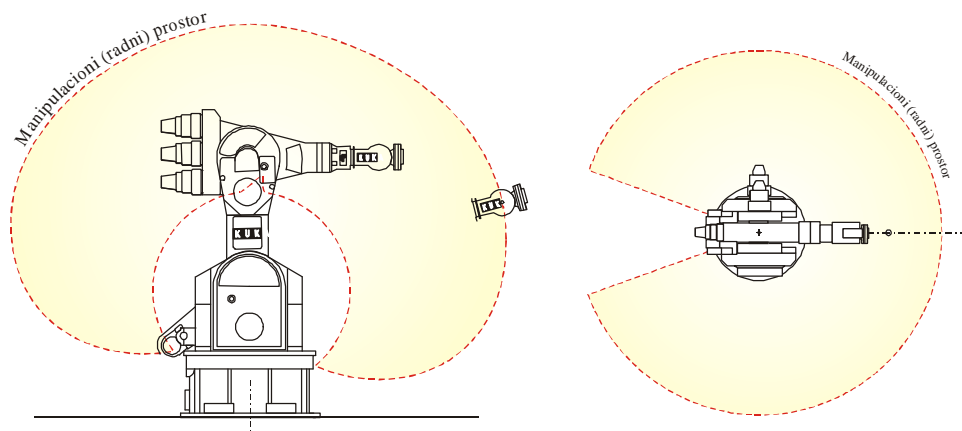
Na slijedećim slikama prikazani su primjeri manipulacionih prostora za različite vrste industrijskih robota.



Slika 3.7. Ravanski prikaz manipulacionog prostora robota PUMA 500



Slika 3.8. Ravanski prikaz manipulacionog prostora robota MANUTEC r3



Slika 3.9. Ravanski prikaz manipulacionog prostora robota KUKA IR 161/15.0

Kinematička analiza robota

4

Dženana Gačo, Tehnički fakultet Bihać

4.1. Opće teorijske postavke direktne kinematike

Robot se može modelirati kao lanac krutih tijela-članaka, međusobno povezanih zglobovima, gdje se na početku lanca nalazi nepomična baza robota, a na kraju lanca je završni uređaj (prihvatnica). Da bi se robot kretao u trodimenzionalnom prostoru, gdje obavlja određene poslove, potrebno je upravljati pozicijom i orijentacijom prihvatnice. Zbog toga je neophodno odrediti vezu između parametara zglobova robota te pozicije i orijentacije prihvatnice.

U svijetu postoje dva osnovna pristupa u opisivanju kinematike robota, a to su:

1. Denavit-Hartenbergov analitički pristup,
2. Numerički pristup na bazi Rodriguesove formule.

Ova dva pristupa su identična po svojoj kompleksnosti za slučaj kada se glavne ose inercije poklapaju sa osama zglobova i zajedničkom normalom, što je česta pojava kod industrijskih robota.

Denavit-Hartenbergov pristup je pogodniji kada se formiraju kinematičke jednačine robota, a pristup pomoću Rodriguesove formule je prikladniji za formiranje dinamičkih jednačina robota.

Denavit-Hartenbergov pristup se zasniva na homogenim transformacijama, koje definiraju položaj i orijentaciju jednog koordinatnog sistema u odnosu prema drugom. U vezi sa pozicioniranjem robota pojavljuje se problem na koji način se zadaje željena pozicija robota. Razlikuju se dva načina zadavanja koordinata robota:

- preko tzv. unutrašnjih koordinata robota (odnosno koordinata zglobova) i
- preko tzv. vanjskih koordinata robota.

4.2 Pojam vanjskih i unutrašnjih koordinata

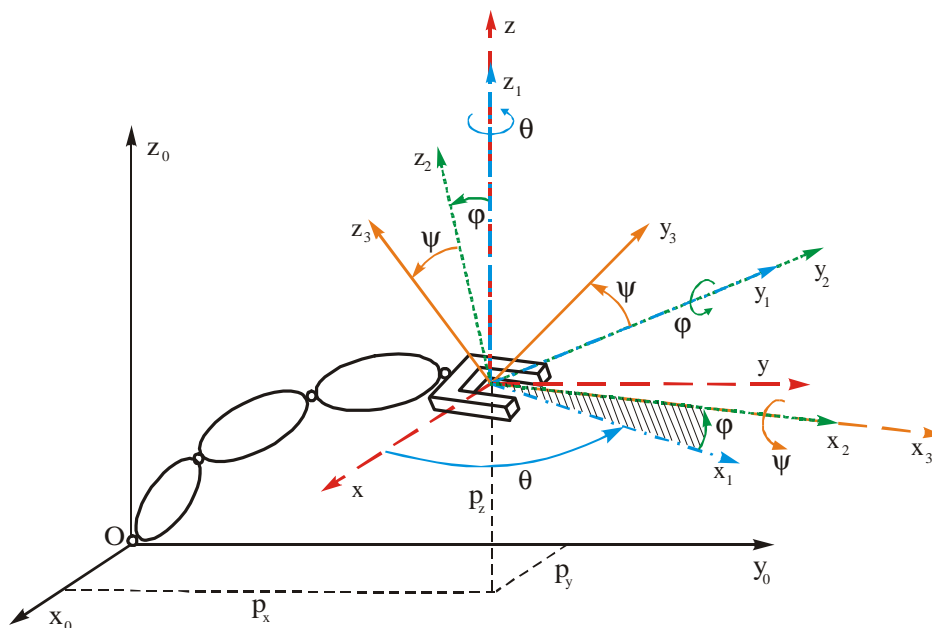
Pod *unutrašnjim koordinatama* jednog robota podrazumijevaju se skalarne veličine, koje opisuju relativni položaj jednog članka (segmenta) u odnosu na drugi članak kinematskog para.

Kod rotacionog zgloba unutrašnja koordinata je ugao zakretanja u zglobu, dok je kod translatornog kinematskog para unutrašnja koordinata predstavljena linearnim pomjeranjem duž ose zgloba. Unutrašnje koordinate se najčešće obilježavaju sa q_i ($i=1, \dots, n$) i čine vektor unutrašnjih koordinata:

$$\{q\} = (q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n)^T. \quad (4.1)$$

Broj unutrašnjih koordinata ovisi o broju stepeni slobode kretanja robota.

Vanjskim koordinatama se opisuje položaj prihvatnice robota u odnosu na nepokretni koordinatni sistem, koji je vezan za osnovu robota. Pozicija prihvatnice se najčešće opisuje Dekartovim koordinatama (p_x, p_y, p_z), a orijentacija prihvatnice se opisuje pomoću Eulerovih uglova zakretanja (θ, ϕ, ψ) između osa koordinatnog sistema vezanog za prihvatnicu i nepokretnog koordinatnog sistema.

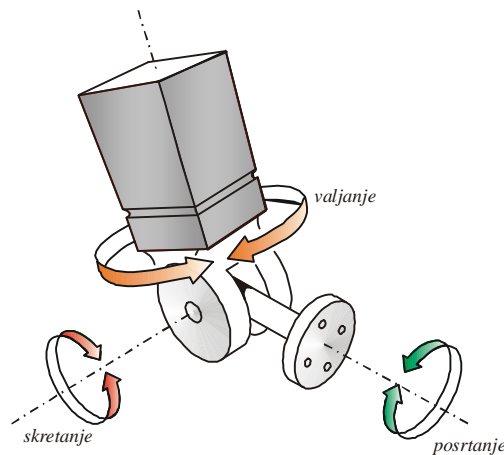


Slika 4.1. Izgled vanjskih koordinata prihvatnice robota

Vektor vanjskih koordinata čine koordinate neke tačke na prihvatnici (p_x, p_y, p_z) , najčešće je to centar inercije ili vrh prihvatnice, u odnosu na nepokretni koordinatni sistem, kao i uglovi (θ, φ, ψ) zakretanja između osa koordinatnog sistema vezanog za prihvatnicu i nepokretnog koordinatnog sistema (sl.4.1.).

Ugao skretanja (engl. yaw) θ odgovara rotaciji oko z ose nepokretnog koordinatnog sistema, ugao posrtanja φ (engl. pitch) odgovara rotaciji oko novodobijene ose y_1 , dok ugao valjanja ψ (engl. roll) odgovara rotaciji oko novodobijene ose x_2 . Konačno se vektor vanjskih koordinata može zapisati kao:

$$\{r\} = (p_x \ p_y \ p_z \ \theta \ \varphi \ \psi)^T. \quad (4.2)$$



Slika 4.2. Eulerovi uglovi prihvatnice robota

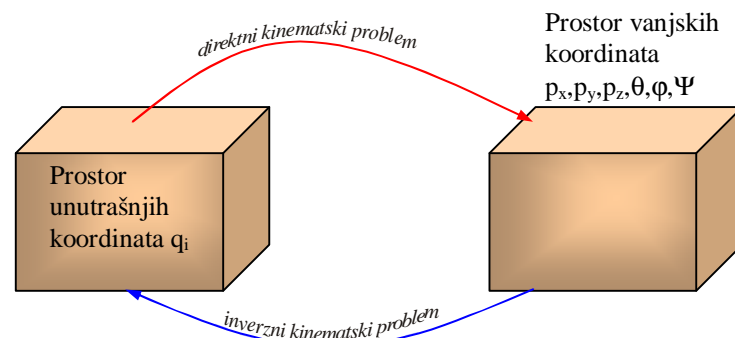
Pri promjeni unutrašnjih koordinata robota q_i ($i=1, \dots, n$) mijenjaju se i vanjske koordinate r_i ($i=1, \dots, m$). Ova veza se može opisati relacijom:

$$\{r\} = f\{q\}, \quad (4.3)$$

gdje je $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ nelinearna, neprekidna, diferencijabilna vektorska funkcija, koja unutrašnje koordinate preslikava u vanjske.

Problem određivanja vektora vanjskih koordinata $\{r\}$ za zadati vektor unutrašnjih koordinata $\{q\}$ je poznat kao direktan kinematski problem.

Veza između unutrašnjih i vanjskih koordinata prikazana je na slici 4.3.



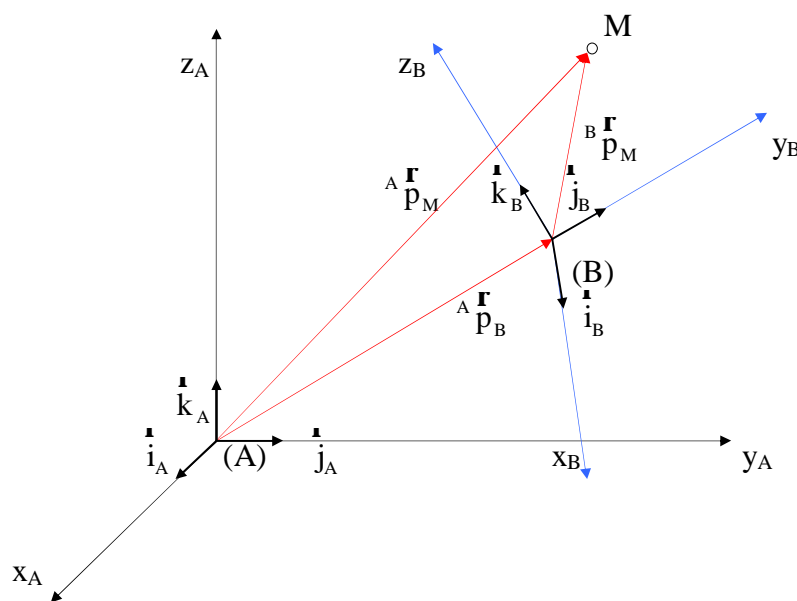
Slika 4.3. Veza između vanjskih i unutrašnjih koordinata

4.3. Rješavanje direktnog kinematičkog problema

Rješavanjem direktnog kinematičkog problema određuje se relativni položaj prihvatnice robota u odnosu na nepokretni, referentni koordinatni sistem, u funkciji unutrašnjih koordinata u zglobovima robota. Pri rješavanju ovog problema koriste se matrice homogenih transformacija.

4.3.1. Homogene transformacije

Pozicija i orijentacija jednog koordinatnog sistema u odnosu na drugi definišu se homogenim transformacijama. Drugim riječima, matricama homogenih transformacija se karakteristike zadanog vektora, odnosno tačke, iz jednog koordinatnog sistema preračunaju u drugi koordinatni sistem.



Slika 4.4. Transformacija koordinata iz jednog u drugi koordinatni sistem

Na slici 4.4. su prikazana dva koordinatna sistema (A) i (B), pri čemu je ishodište sistema (B) u odnosu na (A) pomjereno za vektor ${}^A \mathbf{p}_B$. Sistem (B) je zarotiran za određeni ugao u odnosu na sistem (A). Vektor položaja ${}^A \mathbf{p}_M$ neke tačke M u odnosu na sistem (A) je

$${}^A \mathbf{p}_M = {}^A \mathbf{p}_B + {}^B \mathbf{p}_M, \quad (4.4)$$

gdje je

${}^B \mathbf{p}_M$ - vektor položaja tačke M u odnosu na sistem (B).

Izraz (4.4) se može napisati i u obliku

$${}^A x_M \mathbf{i}_A + {}^A y_M \mathbf{j}_A + {}^A z_M \mathbf{k}_A = {}^A x_B \mathbf{i}_A + {}^A y_B \mathbf{j}_A + {}^A z_B \mathbf{k}_A + {}^B x_M \mathbf{i}_B + {}^B y_M \mathbf{j}_B + {}^B z_M \mathbf{k}_B, \quad (4.5)$$

gdje su

$\mathbf{i}_A, \mathbf{j}_A, \mathbf{k}_A$ - jedinični vektori sistema (A),

$\mathbf{i}_B, \mathbf{j}_B, \mathbf{k}_B$ - jedinični vektori sistema (B),

${}^A x_M, {}^A y_M, {}^A z_M$ - koordinate tačke M u sistemu (A),

${}^A x_B, {}^A y_B, {}^A z_B$ - koordinate ishodišta sistem (B) u sistemu (A),

${}^B x_M, {}^B y_M, {}^B z_M$ - koordinate tačke M u sistemu (B).

Množeći skalarno posljednju jednačinu sa jediničnim vektorima $\mathbf{i}_A, \mathbf{j}_A, \mathbf{k}_A$ dobit će se nove tri jednačine

$$\begin{aligned} {}^A x_M &= {}^A x_B + {}^B x_M (\mathbf{i}_A, \mathbf{i}_B) + {}^B y_M (\mathbf{i}_A, \mathbf{j}_B) + {}^B z_M (\mathbf{i}_A, \mathbf{k}_B), \\ {}^A y_M &= {}^A y_B + {}^B x_M (\mathbf{j}_A, \mathbf{i}_B) + {}^B y_M (\mathbf{j}_A, \mathbf{j}_B) + {}^B z_M (\mathbf{j}_A, \mathbf{k}_B), \\ {}^A z_M &= {}^A z_B + {}^B x_M (\mathbf{k}_A, \mathbf{i}_B) + {}^B y_M (\mathbf{k}_A, \mathbf{j}_B) + {}^B z_M (\mathbf{k}_A, \mathbf{k}_B), \end{aligned} \quad (4.6)$$

koje se mogu prikazati u matričnom obliku

$$\begin{Bmatrix} {}^A x_M \\ {}^A y_M \\ {}^A z_M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{i}_A, \mathbf{i}_B) & (\mathbf{i}_A, \mathbf{j}_B) & (\mathbf{i}_A, \mathbf{k}_B) \\ (\mathbf{j}_A, \mathbf{i}_B) & (\mathbf{j}_A, \mathbf{j}_B) & (\mathbf{j}_A, \mathbf{k}_B) \\ (\mathbf{k}_A, \mathbf{i}_B) & (\mathbf{k}_A, \mathbf{j}_B) & (\mathbf{k}_A, \mathbf{k}_B) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^B x_M \\ {}^B y_M \\ {}^B z_M \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} {}^A x_B \\ {}^A y_B \\ {}^A z_B \end{Bmatrix}, \quad (4.7)$$

odnosno, u obliku matrice 4x4

$$\begin{Bmatrix} {}^A x_M \\ {}^A y_M \\ {}^A z_M \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{i}_A, \mathbf{i}_B) & (\mathbf{i}_A, \mathbf{j}_B) & (\mathbf{i}_A, \mathbf{k}_B) & {}^A x_B \\ (\mathbf{j}_A, \mathbf{i}_B) & (\mathbf{j}_A, \mathbf{j}_B) & (\mathbf{j}_A, \mathbf{k}_B) & {}^A y_B \\ (\mathbf{k}_A, \mathbf{i}_B) & (\mathbf{k}_A, \mathbf{j}_B) & (\mathbf{k}_A, \mathbf{k}_B) & {}^A z_B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^B x_M \\ {}^B y_M \\ {}^B z_M \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (4.8)$$

U skraćenom obliku izraz (4.8) se može pisati kao

$$\begin{Bmatrix} \{ {}^A p_M \} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B [R] & \{ {}^A p_B \} \\ (0) & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{ {}^B p_M \} \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (4.9)$$

gdje su pojedini vektori izraženi u matričnoj formi:

$\{ {}^A p_M \} = ({}^A x_M \quad {}^A y_M \quad {}^A z_M)^T$ - vektor položaja tačke M u odnosu na sistem (A),

$\{ {}^A p_B \} = ({}^A x_B \quad {}^A y_B \quad {}^A z_B)^T$ - vektor položaja ishodišta sistema B u odnosu na sistem (A),

$\{ {}^B p_M \} = ({}^B x_M \quad {}^B y_M \quad {}^B z_M)^T$ - vektor položaja tačke M u odnosu na sistem (B).

Vektor $\{^A p_B\}$ ujedno predstavlja vektor translacije koordinatnog sistema (B) u odnosu na sistem (A) i on je dimenzija 3×1 .

Matrica

$${}^A_B [R] = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{i}_A & \dot{i}_B \\ \dot{i}_A & \dot{i}_B \\ \dot{i}_A & \dot{i}_B \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \dot{i}_A & \dot{i}_B \\ \dot{i}_A & \dot{i}_B \\ \dot{i}_A & \dot{i}_B \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \dot{i}_A & \dot{i}_B \\ \dot{i}_A & \dot{i}_B \\ \dot{i}_A & \dot{i}_B \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dot{i}_A & \dot{i}_B \\ \dot{i}_A & \dot{i}_B \\ \dot{i}_A & \dot{i}_B \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \dot{i}_A & \dot{i}_B \\ \dot{i}_A & \dot{i}_B \\ \dot{i}_A & \dot{i}_B \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \dot{i}_A & \dot{i}_B \\ \dot{i}_A & \dot{i}_B \\ \dot{i}_A & \dot{i}_B \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dot{i}_A & \dot{i}_B \\ \dot{i}_A & \dot{i}_B \\ \dot{i}_A & \dot{i}_B \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \dot{i}_A & \dot{i}_B \\ \dot{i}_A & \dot{i}_B \\ \dot{i}_A & \dot{i}_B \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \dot{i}_A & \dot{i}_B \\ \dot{i}_A & \dot{i}_B \\ \dot{i}_A & \dot{i}_B \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

predstavlja matricu rotacije koordinatnog sistema (B) u odnosu na sistem (A) i ona je dimenzija je 3×3 .

Matrica

$${}^A_B [D] = \begin{bmatrix} {}^B_A [R] & \{^A p_B\} \\ (0) & 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

predstavlja matricu transformacije koordinatnog sistema (B) u odnosu na sistem (A) i ona je dimenzija 4×4 . Ona u sebi sadrži vektor translacije, kao i matricu rotacije ${}^A_B [D]$. Osim toga, prva tri člana posljednje vrste su joj jednaki nuli, a posljednji član te vrste jednak je jedinici.

U slučaju kada su svi članovi matrice ${}^B_A [R]$ jednaki nuli matrica transformacije ${}^A_B [D]$ se transformiše u matricu translacije. U slučaju kada su svi članovi vektora translacije $\{^A p_B\}$ jednaki nuli, matrica transformacije ${}^A_B [D]$ se transformiše u proširenu matricu rotacije dimenzija 4×4 . Odnos tih matrica je dat relacijom

$${}^A_B [R]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} {}^B_A [R]_{3 \times 3} & \{0\} \\ (0) & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Pošto proširena matrica rotacije (4×4) u odnosu na matricu rotacije (3×3) ima dodate članove koji su jednaki nuli, izuzev dodatog krajnjeg dijagonalnog člana koji je jednak jedinici, očito je da te dvije matrice imaju isto značenje.

Da bi se formulisao kinematski model robota, potrebno je izvršiti nekoliko uzastopnih transformacija, bilo translacija, bilo rotacija koordinatnih sistema. Praktično je najbitniji odnos između prvog i zadnjeg koordinatnog sistema u kinematskom lancu jednog robota.

U opštem slučaju transformacija koordinata iz nekog sistema (m) u sistem (n) pri čemu je $m < n$, može se pisati

$$\begin{aligned} {}^m \{p_M\} &= {}^m_{m+1} [D]^{m+1} \{p_M\}, \\ {}^{m+1} \{p_M\} &= {}^{m+1}_{m+2} [D]^{m+2} \{p_M\}, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ {}^{n-1} \{p_M\} &= {}^{n-1}_n [D]^n \{p_M\}, \end{aligned}$$

tako da je

$${}^m\{p_M\} = {}^m[D]_{m+1} {}^{m+1}[D]_{m+2} \cdots {}^{n-1}[D]_n \{p_M\}. \quad (4.13)$$

Pošto je

$${}^m\{p_M\} = {}^m[D]_n \{p_M\}, \quad (4.14)$$

tada je na osnovu izraza (4.13) i (4.14) matrica transformacije sistema (n) u odnosu na sistem (m)

$${}^m[D]_n = {}^m[D]_{m+1} {}^{m+1}[D]_{m+2} \cdots {}^{n-1}[D]_n,$$

odnosno

$${}^m[D]_n = \prod_{i=m}^{n-1} {}^i[D]. \quad (4.15)$$

U slučajevima kada se transformacija vrše od nekog nepomičnog sistema (0) do sistema (n), tada se ona obično obilježava sa ${}^1[W]_n$, pri čemu je naravno: ${}^1[W]_n = {}^1[D]_n$.

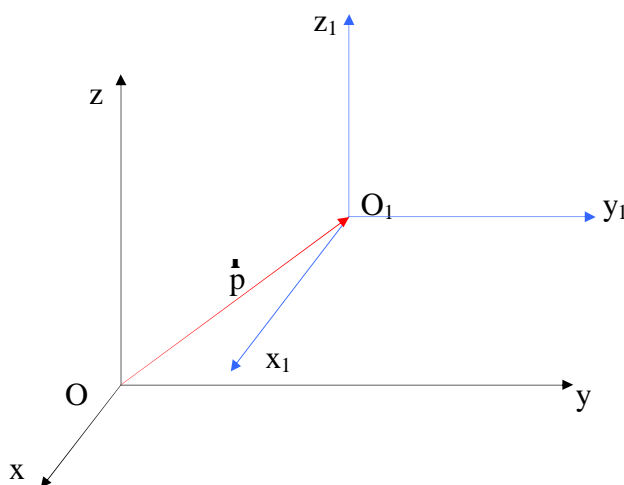
Kako se na robotu javljaju translacijski i rotacijski stepeni slobode kretanja, poželjno je objasniti transformacije translacije i rotacije, koje se mogu smatrati osnovnim transformacijama.

4.3.2. Transformacija translacije

Transformacija translacije se odnosi na pomjeranje ishodišta pokretnog koordinatnog sistema (B) za vektor

$$\{p\} = (p_x \quad p_y \quad p_z)^T$$

u odnosu na sistem (A), pri čemu su ose pokretnog koordinatnog sistema (B) paralelne osama sistema {A} (sl.4.5.).



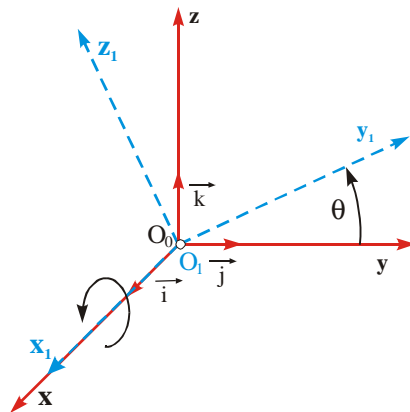
Slika 4.5. Translacija koordinatnog sistema

Koordinatni početak je pri tom pomjeren za veličinu translacije. Matrica translacije ima oblik

$$D_{\text{trans}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

4.3.3. Transformacije rotacije

Ako pokretni koordinatni sistem rotira oko jednog jediničnog vektora nepokretnog koordinatnog sistema, dobija se matrica transformacije koordinata, koja se naziva matricom osnovne rotacije. U trodimenzionalnom prostoru postoje tri različite osnovne rotacije. Nakon rotacije koja je izvršena oko jedne od osa koordinatnog sistema za veličinu ugla rotacije θ , koordinatni početak O_1 novog (zarotiranog) koordinatnog sistema će se poklapati s nepokretnim koordinatnim sistemom, a druge dvije ose će biti zarotirane za veličinu ugla θ . Na slici 4.6. prikazana je rotacija oko ose x .

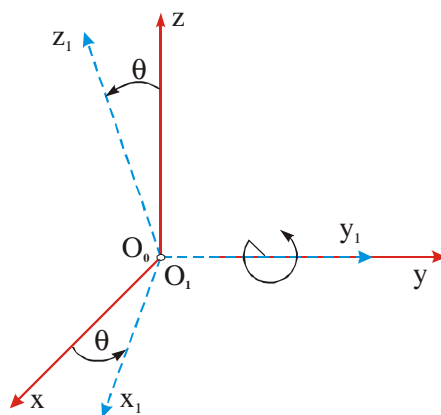


Slika 4.6. Rotacija oko x ose za veličinu ugla θ

Matrica rotacija oko x ose za ugao θ ima oblik

$$\text{Rot}(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Rotacija koordinatnog sistema oko ose y za veličinu ugla θ je prikazana na slici 4.7.

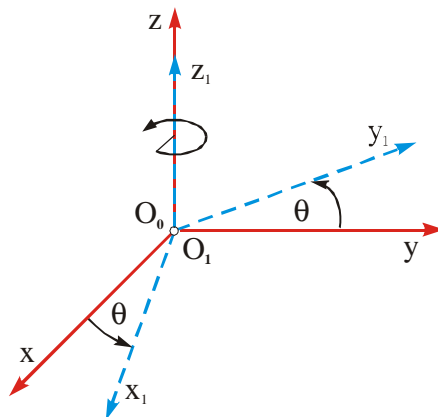


Slika 4.7. Rotacija oko y ose za veličinu ugla θ

Matrica rotacije oko y ose za ugao θ ima oblik

$$\text{Rot}(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Na slici 4.8. prikazana je rotacija oko ose z za ugao θ :



Slika 4.8. Rotacija oko z ose za veličinu ugla θ

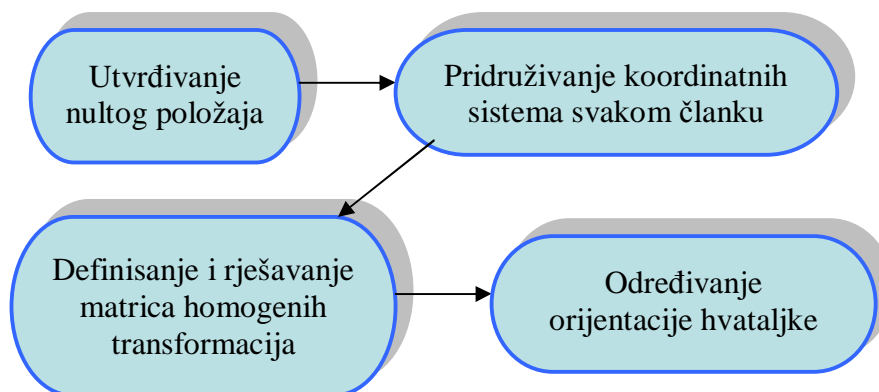
Matrica rotacija oko z ose za ugao θ ima oblik

$$\text{Rot}(z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Dok su transformacije translacije linearne transformacije, transformacije rotacije nisu linearne zbog postojanja funkcija sinusa i cosinusa.

4.4. Algoritam rješavanja direktnog kinematičkog problema

Rješavanje direktnog kinematičkog problema može se izvršiti prema algoritmu koji ima izgled kao na slici 4.9:



Slika 4.9. Algoritam rješavanja direktnog kinematičkog problema

4.4.1. Utvrđivanje nultog položaja industrijskog robota

Da bi se riješio direktni kinematički problem, potrebno je prvo ustanoviti simboličku shemu robota u odnosu prema odabranom nepokretnom koordinatnom sistemu. Ova simbolička shema treba da sadrži sve bitne dimenzije datog robota. Ustanovljeni položaj robota, gdje sve unutrašnje koordinate imaju vrijednosti jednake nuli ($q_i=0$) smatra se nultim položajem.

4.4.2. Pridruživanje koordinatnih sistema

Drugi korak u rješavanju direktnog kinematičkog problema je pridruživanje koordinatnih sistema pojedinim člancima robota, kojih mora biti najmanje onoliko koliko ima stepeni slobode kretanja. To pridruživanje koordinatnih sistema najčešće se obavlja na osnovu metode Denavit-Hartenberg (DH).

4.4.2.1. Denavit-Hartenbergovi parametri

Da bi se mogle prikazivati određene fizičke i geometrijske veličine vezane za kretanje elemenata robota, potrebno je definisati određene referentne koordinatne sisteme u kojima će se sve nevedene veličine prikazivati i računati. U tu svrhu je, između ostalog, potrebno operisati i sa matricama transformacije između različitih koordinatnih sistema. Kad je u pitanju veza koordinatnih sistema početnog i krajnjeg zgloba krutog članka sa rotacionim zglobovima, Denavit-Hartenbergova konvencija

daje sistematiku ustanovljavanja pojedinih veličina manipulatorskog članka, kao i njihovu vezu.

Prema ovoj konvenciji numeracija članaka se vrši tako da je baza robota ujedno nulti članak, prvi pokretni članak nosi oznaku 1 i tako sve do slobodnog kraja, to jest ruke robota koja je u stvari n-ti članak. U slučaju kada se radi o rotacionim zglobovima, svaki članak se može opisati sa dvije veličine (sl.4.10.):

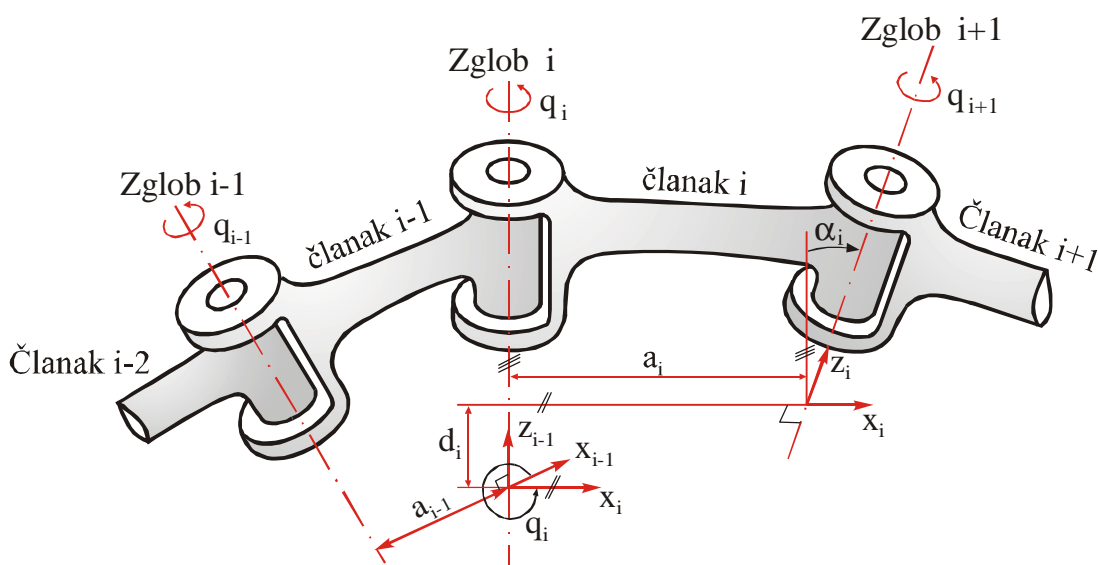
- dužinom a_i , koja predstavlja najkraće rastojanje između osa i -tog i $(i+1)$ -vog zgloba,
- uglom zakretanja α_i između ovih osa u ravni normalnoj na a_i , a mjeri se u smjeru suprotnom kretanju kazaljke na satu oko ose a_{i+1} .

Svaka osa zgloba ima dvije normale a_{i-1} i a_i , a rastojanje između njih je označeno sa d_i . Označi li se lokalni koordinatni sistem i -tog članka sa $O_i x_i y_i z_i$, njegov koordinatni početak će biti postavljen u tački presjeka zajedničke normale između ose i -tog zgloba i ose $(i+1)$ -vog zgloba i same ose i -tog zgloba. U slučaju da se ose zglobova sijeku, koordinatni početak se tad postavlja u tačku presjeka tih osa.

Za slučaj da su ose paralelne, koordinatni početak se bira tako da rastojanje duž ose zgloba (veličina d) bude jednako nuli za slijedeći članak, čiji je koordinatni početak definisan.

Kada se definisala tačka koordinatnog početka O_i , potrebno je odrediti i položaje osa koordinatnog sistema $O_i x_i y_i z_i$.

Osa z_i i -tog sistema se postavlja tako da se poklopi sa osom $(i+1)$ -vog zgloba, oko koje se vrši rotacija za iznos q_{i+1} (sl.4.10).



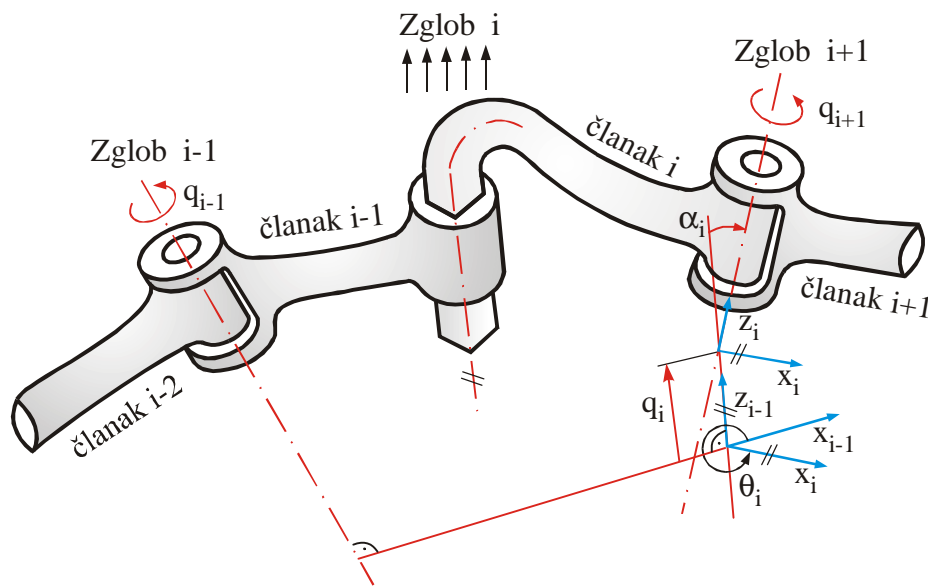
Slika 4.10. Denavit-Hartenbergovi kinematski parametri za rotacioni kinematski par

Osa x_i se postavlja duž bilo koje zajedničke normale koja je definisana (obično je to normala između osa i -tog i $(i+1)$ -vog zgloba). U slučaju da se ose sijeku, x_i se usvaja

tako da leži u pravcu vektora $\{z_{i-1}\} \times \{z_i\}$ ili $-\{z_{i-1}\} \times \{z_i\}$. Tad osa y_i treba da zadovolji uslov da je $\{x_i\} \times \{y_i\} = \{z_i\}$.

Unutrašnja koordinata q_i rotacionog zgloba je definisana kao ugao između prethodne ose (x_{i-1}) i naredne ose x_i . Ako su ove ose paralelne i istih smjerova, ugao q_i (odnosno θ_i) je tad jednak nuli. Ugao α_i je ugao zakretanja oko ose x_i i mjeri se od ose z_{i-1} do z_i ose.

Na slici 4.11. je prikazan jedan translatorni zglob, gdje je po Denavit-Hartenbergovoj notaciji sad rastojanje c_i u stvari unutrašnja koordinata q_i , a parametar a_i se postavlja na nulu. Koordinatni sistem koji odgovara translatornom zglobu se postavlja tako da se poklopi sa početkom slijedećeg koordinatnog sistema koji je definisan. Osa z_i se postavlja u pravcu ose zgloba, dok je osa x_i u pravcu ili u suprotnom pravcu od vektora $\{z_{i-1}\} \times \{z_i\}$.



Slika 4.11. Denavit-Hartenbergovi parametri za translatoran zglob

U slučaju da se koordinatni počeci sistema $O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ i $O_ix_iy_iz_i$ poklapaju, unutrašnja koordinata q_i tad ima nultu vrijednost.

Za translatorni zglob ugao q_i između osa x_{i-1} i x_i je fiksiran.

4.4.3. Definisane homogenih matrica transformacije pomoću D-H parametara

Homogene matrice transformacije su matrice reda 4x4, koje objedinjuju informaciju o rotaciji između dva koordinatna sistema i informaciju o rastojanju između njihovih koordinatnih početaka. To znači da se homogenom matricom transformacije koordinatni sistemi mogu prevoditi jedan u drugi pomoću dvije translacije i dvije rotacije. To se može zapisati u obliku matrice ${}^{i-1}_i[D]$ gdje je izvršena transformacija sistema i-1 u i-ti sistem:

$${}^{i-1}_i[D] = \text{Rot}(z_{i-1}, q_i) \cdot \text{Trans}(0, 0, d_i) \cdot \text{Trans}(a_i, 0, 0) \cdot \text{Rot}(x_i, \alpha_i). \quad (4.20)$$

Objašnjenje jednačine (4.20) je slijedeće:

- prvo je izvršena rotacija oko z_{i-1} ose za vrijednost ugla q_i (u slučaju da se radi o translatorskom zglobo, rotacija oko z_{i-1} ose bi se izvršila za vrijednost ugla θ_i),
- u drugom koraku je izvršena translacija duž ose z_{i-1} za veličinu d_i (odnosno veličinu q_i kod translatorsnog zgloba),
- treći korak je translacija duž ose $x_{i-1}=x_i$ za veličinu a_i ,
- četvrti korak je rotacija oko ose x_i za vrijednost ugla α_i .

Ovaj niz rotacija i translacija se može predstaviti kao proizvod slijedećih homogenih matrica transformacije:

$${}^{i-1}_i[D] = \begin{bmatrix} \cos q_i & -\sin q_i & 0 & 0 \\ \sin q_i & \cos q_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Izmnože li se matrice na desnoj strani jednačine (4.21) dobit će se homogena matrica transformacije ${}^{i-1}_i[D]$ između i -tog i $(i-1)$ -vog koordinatnog sistema, za rotacioni kinematski par:

$${}^{i-1}_i[D] = \begin{bmatrix} \cos q_i & -\sin q_i \cos \alpha_i & \sin q_i \sin \alpha_i & b_i \cos q_i \\ \sin q_i & \cos q_i \cos \alpha_i & -\cos q_i \sin \alpha_i & b_i \sin q_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & c_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Homogena matrica transformacije za slučaj translatorskog kinematskog para je prikazana u obliku:

$${}^{i-1}_i[D] = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & h_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

gdje je koordinatni sistem u ovom slučaju usvojen tako da je $b_i=0$, c_i je postalo unutrašnja koordinata h_i , a ugao zakretanja q_i kod rotacionog zgloba je sad fiksni parametar θ_i .

Na osnovu jednačina (4.22) i (4.23) se može zaključiti da su homogene matrice transformacije funkcije samo unutrašnjih koordinata.

Da bi se analitički oblik elemenata matrice ${}^{i-1}_i[D]$ pojednostavio, u praksi je uobičajeno da se uglovi α_i uzimaju reda veličine 0° ili $\pm 90^\circ$ (što ovisi o položaju osa zglobova, koje mogu biti paralelne ili okomite).

Pošto su matrice homogenih transformacija između susjednih članaka izračunate, moguće je dobiti i matricu homogene transformacije između nepokretnog koordinatnog sistema u bazi robota i koordinatnog sistema prihvatnice:

$${}^0_n[W] = {}^0_1[D] \cdot {}^1_2[D] \cdot {}^2_3[D] \cdot \dots \cdot {}^{n-2}_{n-1}[D] \cdot {}^{n-1}_n[D] \quad (4.24)$$

Prve tri kolone matrice ${}^0_n[W]$ predstavljaju matricu rotacije ${}^0_n[R]$ između koordinatnog sistema prihvatnice i nepokretnog koordinatnog sistema u osnovi robota, a četvrta kolona matrice ${}^0_n[W]$ je vektor položaja prihvatnice robota u nepokretnom sistemu:

$${}^0_n[W] = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & p_x \\ & {}^0_n[R] & & p_y \\ & & & p_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (4.25)$$

Direktan kinematski problem u potpunosti je riješen kada se odrede numeričke vrijednosti matrice ${}^0_n[W]$ i tri vanjske koordinate (Eulerovi uglovi) koje opisuju orijentaciju prihvatnice.

4.4.4. Određivanje orijentacije prihvatnice robota

Zadana orijentacija prihvatnice se može ostvariti kompozicijom homogenih rotacija oko nepokretnog koordinatnog sistema prema slijedećem rasporedu:

- rotacija oko ose z za vrijednost ugla q ,
- rotacija oko ose y za vrijednost ugla j , i
- rotacija oko ose x za vrijednost ugla y .

Ovaj niz rotacija se može zapisati u matričnom obliku kao :

$${}^0_n[R] = \text{Rot}(z, \theta) \cdot \text{Rot}(y, \varphi) \cdot \text{Rot}(x, \psi), \quad \text{tj.}$$

$${}^0_n[R] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Množenjem matrica u jednačini (4.26) dobija se:

$${}^0_n[R] = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi \sin \psi - \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \varphi \cos \psi + \sin \theta \sin \psi \\ \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \psi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \sin \psi & \cos \varphi \cos \psi \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Kako su jedinični vektori koordinatnog sistema prihvatnice: vektor normale $\{n\}$, vektor orijentacije $\{o\}$ i vektor djelovanja $\{a\}$ to se matrica rotacije ${}^0_n[R]$ može napisati i u slijedećem obliku:

$${}^0_n[R] = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Izjednače li se pojedine vrijednosti elemenata matrica (4.27) i (4.28) dobija se slijedeći sistem jednačina:

$$\left. \begin{aligned} n_x &= \cos \theta \cos \varphi \\ n_y &= \sin \theta \cos \varphi \\ n_z &= -\sin \varphi \end{aligned} \right\}, \quad (4.29)$$

$$\left. \begin{aligned} o_x &= \cos \theta \sin \varphi \sin \psi - \sin \theta \cos \psi \\ o_y &= \sin \theta \sin \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \psi \\ o_z &= \cos \varphi \sin \psi \end{aligned} \right\}, \quad (4.30)$$

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \cos \theta \sin \varphi \cos \psi + \sin \theta \sin \psi \\ a_y &= \sin \theta \sin \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \psi \\ a_z &= \cos \varphi \cos \psi \end{aligned} \right\}. \quad (4.31)$$

Zadanu orijentaciju prihvatnice moguće je ostvariti i pomoću Eulerovih uglova, kompozicijom homogenih rotacija oko pokretnog koordinatnog sistema slijedećim rasporedom:

- rotacija oko ose z za vrijednost ugla q ,
- rotacija oko nove ose y' za vrijednost ugla j , i
- rotacija oko nove ose z' za vrijednost ugla y .

Matrica složene homogene transformacije je rezultat množenja homogenih rotacija :

$${}^0_n[R] = \text{Rot}(z, \theta) \cdot \text{Rot}(y', \varphi) \cdot \text{Rot}(z', \psi), \quad \text{odnosno}$$

$${}^0_n[R] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

Nakon izvršenog množenja matrica u jednačini (4.32) dobije se matrica orijentacije hvataljke prikazana jednačinom

$${}^0_n[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi \cos \psi - \sin \theta \sin \psi & -\cos \theta \cos \varphi \sin \psi - \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \cos \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\sin \varphi \cos \psi & \sin \varphi \sin \psi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Izvrši li se poređenje izraza (4.28) i (4.33) dobiju se komponente ortova zarotiranog sistema, tj.:

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi \cos \psi - \sin \theta \sin \psi & -\cos \theta \cos \varphi \sin \psi - \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \cos \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\sin \varphi \cos \psi & \sin \varphi \sin \psi & \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

Veza između vektora orijentacije i Eulerovih uglova je data slijedećim izrazima:

$$\left. \begin{aligned} n_x &= \cos \theta \cos \varphi \cos \psi - \sin \theta \sin \psi \\ n_y &= \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \psi \\ n_z &= -\sin \varphi \cos \psi \\ \\ o_x &= -\cos \theta \cos \varphi \sin \psi - \sin \theta \cos \psi \\ o_y &= -\sin \theta \cos \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \psi \\ o_z &= \sin \varphi \sin \psi \\ \\ a_x &= \cos \theta \sin \varphi \\ a_y &= \sin \theta \sin \varphi \\ a_z &= \cos \varphi \end{aligned} \right\}. \quad (4.35)$$

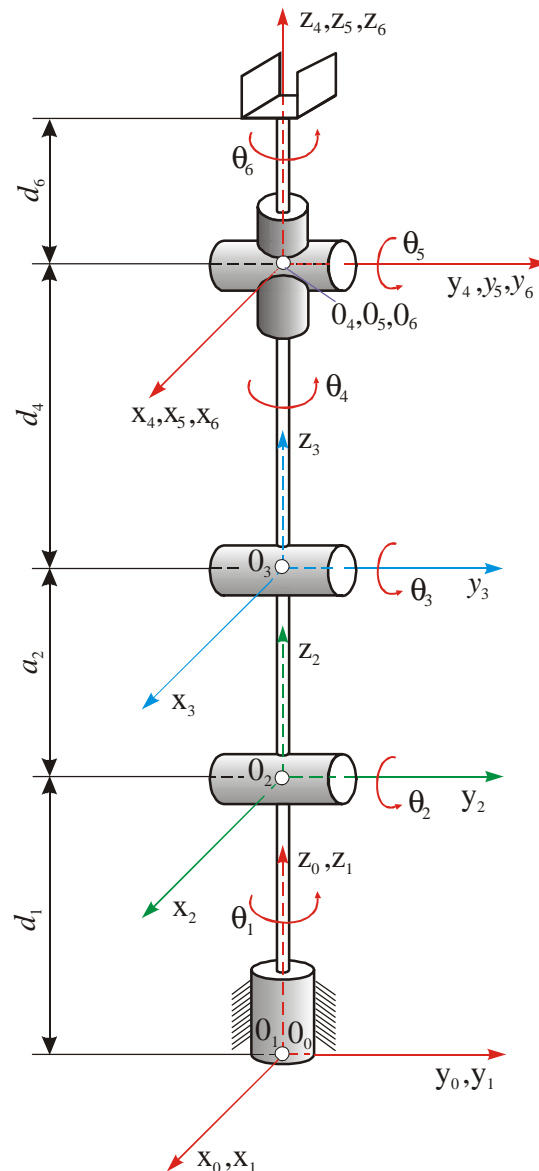
Izrazom (4.35) prikazana je veza između Eulerovih uglova i vektora orijentacije.

4.5. Primjeri rješavanja direktnog kinematičkog problema

4.5.1. Rješenje direktnog kinematičkog problema za robot tipa MANUTEC R3

Robot MANUTEC R3 ima šest stepeni slobode kretanja. Na osnovu općeg algoritma rješavanja direktnog kinematskog problema (slika 4.9.) nacrtan je nulti položaj robota ($q_i=0$), pridruženi su koordinatni sistemi svakom članku, te je zadnji koordinatni sistem postavljen u centar prihvatnice. Koordinatnih sistema ima najmanje onoliko koliko ima stepeni slobode kretanja.

Simbolička shema robota MANUTEC R3, kao i pridruženi koordinatni sistemi prikazani su na slici (4.12.). Nepokretni koordinatni sistem 0_0 je postavljen u osnovu robota.



Slika 4.12. Simbolička shema robota MANUTEC R3

Matrica prelaza iz prvog koordinatnog sistema (1) u nepokretni koordinatni sistem (0) se može napisati kao:

$${}^0_1[\mathbf{D}] = \text{Rot}(z, \theta_1). \quad (4.36)$$

Da bi se iz prvog koordinatnog sistema prešlo u drugi koordinatni sistem, najprije se ide translacijom sistema (1) po osi z za veličinu d_1 , a zatim rotacijom oko ose y za veličinu upravljane koordinate q_2 . Na osnovu ovoga se može napisati i matrica prelaza iz prvog u drugi koordinatni sistem

$${}^1_2[\mathbf{D}] = \text{Tran}(0,0,d_1) \quad \text{Rot}(y, \theta_2). \quad (4.37)$$

Ostale matrice prelaza iz jednog u drugi koordinatni sistem su slijedeće:

$${}^2_3[\mathbf{D}] = \text{Tran}(0,0,a_2) \quad \text{Rot}(y, \theta_3), \quad (4.38)$$

$${}^3_4[\mathbf{D}] = \text{Tran}(0,0,d_4) \quad \text{Rot}(z, \theta_4), \quad (4.39)$$

$${}^4_5[\mathbf{D}]^4 \mathbf{D}_5 = \text{Rot}(y, \theta_5), \quad (4.40)$$

$${}^5_6[\mathbf{D}] = \text{Rot}(z, \theta_6) \quad \text{Tran}(0,0,d_6). \quad (4.41)$$

Uvrste li se osnovne transformacije rotacije i translacije u gore navedene jednačine prelaza iz jednog koordinatnog sistema u drugi koordinatni sistem, slijedi

$${}^0_1[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1_2[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^2_3[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_3 & 0 & c_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^3_4[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^4_5[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_5 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^5_6[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pri čemu su uvedene slijedeće oznake zapisivanja trigonometrijskih funkcija:

$$s_i = \sin(\theta_i) \quad i \quad c_i = \cos(\theta_i).$$

Da bi se odredila homogena matrica transformacije između koordinatnog sistema prihvatnice i nepokretnog sistema potrebno je izvršiti množenje ovih matrica prelaza (transformacije) prema jednačini (4.15) u obliku

$${}^0_6[\mathbf{W}] = {}^0_1[\mathbf{D}] \cdot {}^1_2[\mathbf{D}] \cdot {}^2_3[\mathbf{D}] \cdot {}^3_4[\mathbf{D}] \cdot {}^4_5[\mathbf{D}] \cdot {}^5_6[\mathbf{D}]. \quad (4.42)$$

Pomnože li se prve dvije matrice, dobije se matrica ${}^0_2[\mathbf{W}] = {}^0_1[\mathbf{D}] \cdot {}^1_2[\mathbf{D}]$

$${}^0_2[\mathbf{W}] = {}^0_1[\mathbf{D}] \cdot {}^1_2[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_1 & c_1 s_2 & 0 \\ s_1 c_2 & c_1 & s_1 s_2 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Izvrši li se množenje i ostalih matrica dobije se rješenje jednačine (4.42) :

$${}^0_6[\mathbf{W}] = {}^0_1[\mathbf{D}] \cdot {}^1_2[\mathbf{D}] \cdot {}^2_3[\mathbf{D}] \cdot {}^3_4[\mathbf{D}] \cdot {}^4_5[\mathbf{D}] \cdot {}^5_6[\mathbf{D}],$$

$${}^0_6\mathbf{W}_6 = \begin{bmatrix} c_5(c_4 c_1 c_{23} - s_1 s_4) - s_5 c_1 s_{23} & -s_4 c_1 c_{23} - s_1 c_4 & s_5(c_4 c_1 c_{23} - s_1 s_4) + c_5 c_1 s_{23} \\ c_5(c_4 s_1 c_{23} + c_1 s_4) - s_5 s_1 s_{23} & -s_4 s_1 c_{23} + c_1 c_4 & s_5(c_4 s_1 c_{23} + c_1 s_4) + c_5 s_1 s_{23} \dots \\ -c_5 c_4 s_{23} - s_5 c_{23} & s_4 s_{23} & -s_5 c_4 s_{23} + c_5 c_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dots \begin{bmatrix} d_4 c_1 s_{23} + a_2 s_2 c_1 \\ d_4 s_1 s_{23} + a_2 s_1 s_2 \\ d_4 c_{23} + a_2 c_2 + d_1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.44)$$

gdje skraćeni zapisi odgovaraju slijedećim izrazima:

$$c_2 c_3 - s_2 s_3 = c_{23}$$

$$s_2 c_3 + c_2 s_3 = s_{23} \quad \text{pri čemu je } s_{23} = \sin(\theta_2 + \theta_3) \text{ i } c_{23} = \cos(\theta_2 + \theta_3)$$

što je dobijeno na osnovu poznatih trigonometrijskih jednakosti:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta$$

Na ovaj način određena je analitička zavisnost elemenata homogene matrice transformacije između koordinatnog sistema prihvatnice i nepokretnog sistema, od unutrašnjih uglova $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ i θ_6 . Za zadate vrijednosti ovih uglova sad je moguće odrediti i numeričke vrijednosti elemenata matrice (4.42).

Matrica transformacije ${}^0_6[\mathbf{W}]$ sadrži informaciju o orijentaciji robota, koja je izražena vektorima $\{n\}, \{o\}, \{a\}$ dok je informacija o vektoru vanjskih koordinata data vektorom $\{p\}$ (izraz 4.46).

$$\begin{aligned}
 n_x &= c_6 \{ c_5 [c_4 c_1 c_{23} - s_1 s_4] - s_5 c_1 s_{23} \} + s_6 \{ -s_4 c_1 c_{23} - s_1 c_4 \} \\
 n_y &= c_6 \{ c_5 [c_4 s_1 c_{23} + c_1 s_4] - s_5 s_1 s_{23} \} + s_6 \{ -s_4 s_1 c_{23} + c_1 c_4 \} \\
 n_z &= c_6 \{ -c_5 c_4 s_{23} - s_5 c_{23} \} + s_6 s_4 s_{23} \\
 \\
 o_x &= -s_6 \{ c_5 [c_4 c_1 c_{23} - s_1 s_4] - s_5 c_1 s_{23} \} + c_6 \{ -s_4 c_1 c_{23} - s_1 c_4 \} \\
 o_y &= -s_6 \{ c_5 [c_4 s_1 c_{23} + c_1 s_4] - s_5 s_1 s_{23} \} + c_6 \{ -s_4 s_1 c_{23} + c_1 c_4 \} \\
 o_z &= -s_6 \{ -c_5 c_4 s_{23} - s_5 c_{23} \} + c_6 s_4 s_{23} \\
 \\
 a_x &= s_5 [c_4 c_1 c_{23} - s_1 s_4] + c_5 c_1 s_{23} \\
 a_y &= s_5 [c_4 s_1 c_{23} + c_1 s_4] + c_5 s_1 s_{23} \\
 a_z &= -s_5 c_4 s_{23} + c_5 c_{23}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} n_x \\ n_y \\ n_z \\ o_x \\ o_y \\ o_z \\ a_x \\ a_y \\ a_z \end{aligned}} \right\} \text{ORIJENTACIJA} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned}
 p_x &= d_6 \{ s_5 [c_4 c_1 c_{23} - s_1 s_4] + c_5 c_1 s_{23} \} + d_4 c_1 s_{23} + a_2 s_2 c_1 \\
 p_y &= d_6 \{ s_5 [c_4 s_1 c_{23} + c_1 s_4] + c_5 s_1 s_{23} \} + d_4 s_1 s_{23} + a_2 s_1 s_2 \\
 p_z &= d_6 \{ -s_5 c_4 s_{23} + c_5 c_{23} \} + d_4 c_{23} + a_2 c_2 + d_1
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} p_x \\ p_y \\ p_z \end{aligned}} \right\} \text{POZICIJA} \quad (4.46)$$

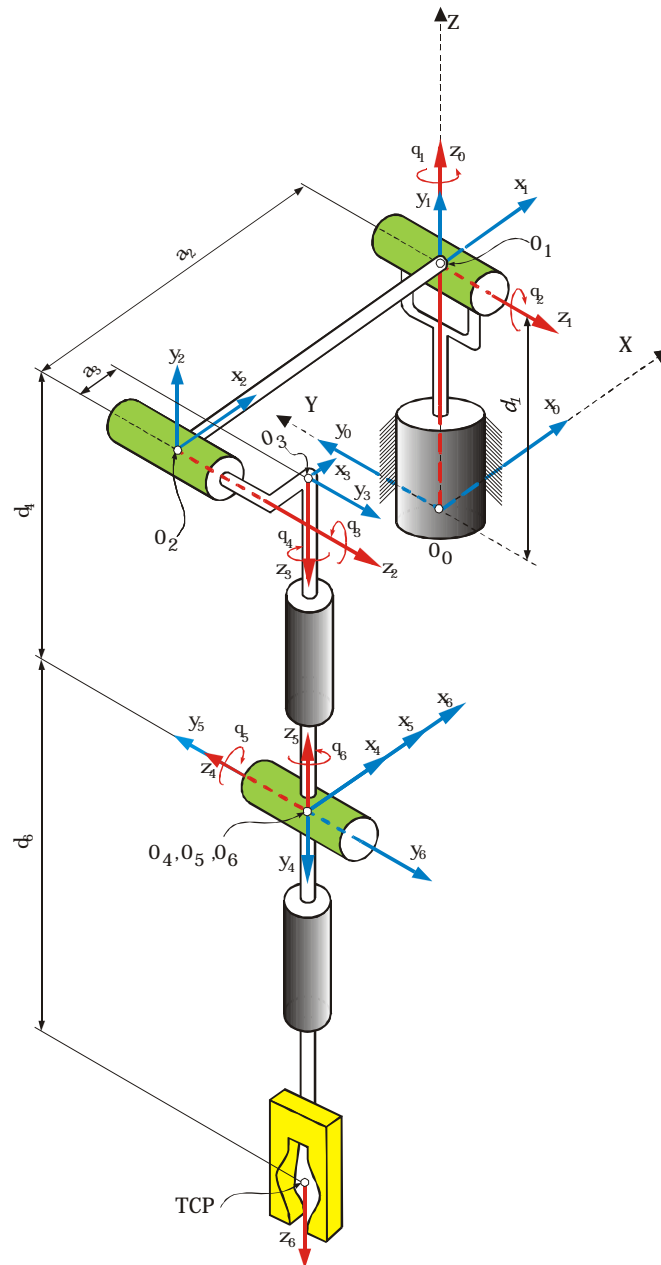
4.5.2. Rješenje direktnog kinematičkog problema za robot tipa KUKA IR 161/15.0 po Denavit – Hartenbergovoj metodi

Na osnovu DH-parametara za robot tipa KUKA IR 161/15.0 koji su dati u tabeli 4.1. može se prikazati njegova shema kinematskog modela po Denavit – Hartenbergu (slika 4.13.).

Tabela 4.1. DH-parametri za robot tipa KUKA IR 161/15.0

Zglob (i)	q_i	a_i (mm)	a_i (mm)	q_i	d_i (mm)	$\sin a_i$	$\cos a_i$
1	q_1	90,000	0,000	0,000	775,000	1	0
2	q_2	0,000	799,953	50,000	0,000	0	1
3	q_3	90,000	-0,034	220,000	0,000	1	0
4	q_4	90,000	0,000	180,000	799,970	1	0
5	q_5	90,000	0,000	180,000	0,000	1	0
6	q_6	0,000	0,000	0,000	140,000	0	1

Na osnovu parametara iz tabelle 4.1. za koordinatne sisteme kinematskog modela robota sa slike 4.13. moguće je izračunati matrice homogenih transformacija po DH metodi.



Slika 4.13. Kinematski model robota po Denavit – Hartenbergu za robot tipa KUKA IR 161/15.0

Matrice homogenih transformacija za parametre date u tabeli 4.1. za koordinatne sisteme kinematičkog modela robota prikazanog na slici 4.13. po D-H metodi se izračunavaju na osnovu matrice (4.22), i dobijaju slijedeći oblik:

$${}^0_1[D] = \begin{bmatrix} \cos q_1 & 0 & \sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & 0 & -\cos q_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \sin \alpha_1 &= 1 \\ \cos \alpha_1 &= 0 \\ a_1 &= 0 \\ d_1 &= 775 \text{ mm} \end{aligned} \quad (4.47)$$

$${}^1_2[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & a_2 \cos q_2 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & a_2 \sin q_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \sin \alpha_2 &= 0 \\ \cos \alpha_2 &= 1 \\ a_2 &= 799,953 \text{ mm} \\ d_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

$${}^2_3[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \cos q_3 & 0 & \sin q_3 & a_3 \cos q_3 \\ \sin q_3 & 0 & -\cos q_3 & a_3 \sin q_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \sin \alpha_3 &= 1 \\ \cos \alpha_3 &= 0 \\ a_3 &= -0,034 \text{ mm} \\ d_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.49)$$

$${}^3_4[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \cos q_4 & 0 & \sin q_4 & 0 \\ \sin q_4 & 0 & -\cos q_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \sin \alpha_4 &= 1 \\ \cos \alpha_4 &= 0 \\ a_4 &= 0 \\ d_4 &= 799,970 \text{ mm} \end{aligned} \quad (4.50)$$

$${}^4_5[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \cos q_5 & 0 & \sin q_5 & 0 \\ \sin q_5 & 0 & -\cos q_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \sin \alpha_5 &= 1 \\ \cos \alpha_5 &= 0 \\ a_5 &= 0 \\ d_5 &= 0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

$${}^5_6[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \cos q_6 & -\sin q_6 & 0 & 0 \\ \sin q_6 & \cos q_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \sin \alpha_6 &= 0 \\ \cos \alpha_6 &= 1 \\ a_6 &= 0 \\ d_6 &= 140 \text{ mm} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Množenjem matrica (4.47 – 4.52) dobija se matrica:

$${}^0_6[\mathbf{W}] = {}^0_1[\mathbf{D}] \cdot {}^1_2[\mathbf{D}] \cdot {}^2_3[\mathbf{D}] \cdot {}^3_4[\mathbf{D}] \cdot {}^4_5[\mathbf{D}] \cdot {}^5_6[\mathbf{D}], \quad (4.53)$$

koja predstavlja ukupno kretanje robota; tj. odnos između ukupnog kretanja prihvatnice i bazisa (bazni koordinatni sistem).

Nakon množenja i uvođenja slijedećih skraćenih zapisa

$$\begin{aligned} s_i &= \sin q_i & i & & c_i &= \cos q_i \\ \cos(q_i + q_j) &= c_{ij} & \cos(q_i - q_j) &= c_{i-j} \\ \sin(q_i + q_j) &= s_{ij} & \sin(q_i - q_j) &= s_{i-j} \end{aligned}$$

i na osnovu poznatih trigonometrijskih identiteta

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta,$$

$$c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3 = c_1 (c_2 c_3 - s_2 s_3) = c_1 c_{23}; \quad c_{23} = \cos(q_2 + q_3),$$

$$s_1 c_2 c_3 - s_1 s_2 s_3 = s_1 (c_2 c_3 - s_2 s_3) = s_1 c_{23},$$

$$c_1 c_2 s_3 + c_1 s_2 c_3 = c_1 (c_2 s_3 + s_2 c_3) = c_1 s_{23}; \quad s_{23} = \sin(q_2 + q_3),$$

$$s_1 c_2 s_3 + s_1 s_2 c_3 = s_1 (c_2 s_3 + s_2 c_3) = s_1 s_{23},$$

$$s_2 c_3 + c_2 s_3 = s_{23},$$

$$s_2 c_3 - c_2 s_3 = s_{2-3}; \quad s_{2-3} = \sin(q_2 - q_3),$$

$$s_2 s_3 - c_2 c_3 = -(c_2 c_3 - s_2 s_3) = -c_{23},$$

$$a_3 c_1 c_2 c_3 - a_3 c_1 s_2 s_3 + a_2 c_1 c_2 = c_1 (a_3 c_{23} + a_2 c_2),$$

$$a_3 s_1 c_2 c_3 - a_3 s_1 s_2 s_3 + a_2 s_1 c_2 = s_1 (a_3 c_{23} + a_2 c_2),$$

$$a_3 s_2 c_3 - a_3 s_3 c_2 + a_2 s_2 + d_1 = a_3 s_{2-3} + a_2 s_2 + d_1.$$

matrica (4.53) poprima slijedeći oblik:

$${}^0_6[W] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{64444444} \overset{\Gamma_n}{\text{projekcija vektora}} \mathbf{744444448} \\ c_1 c_{23} (c_4 c_5 c_6 + s_4 s_6) + s_1 (s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6) + c_1 s_{23} s_5 c_6 \\ s_1 c_{23} (c_4 c_5 c_6 + s_4 s_6) - c_1 (s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6) + s_1 s_{23} s_5 c_6 \\ s_{23} (c_4 c_5 c_6 + s_4 s_6) - c_{23} s_5 c_6 \\ 0 \\ \mathbf{64444444} \overset{\Gamma_n}{\text{projekcija vektora}} \mathbf{744444448} \\ c_1 c_{23} (s_4 c_6 - c_4 c_5 s_6) - s_1 (c_4 c_6 + s_4 c_5 s_6) - c_1 s_{23} s_5 s_6 \\ s_1 c_{23} (s_4 c_6 - c_4 c_5 s_6) + c_1 (c_4 c_6 + s_4 c_5 s_6) - s_1 s_{23} s_5 s_6 \\ s_{23} (s_4 c_6 - c_4 c_5 s_6) + c_{23} s_5 s_6 \\ 0 \\ \mathbf{644444} \overset{\Gamma_n}{\text{projekcija vektora}} \mathbf{744448} \\ c_1 c_{23} c_4 s_5 + s_1 s_4 s_5 - c_1 s_{23} c_5 \\ s_1 c_{23} c_4 s_5 - c_1 s_4 s_5 - s_1 s_{23} c_5 \\ s_{23} c_4 s_5 + c_{23} c_5 \\ 0 \end{array} \right] \quad \left. \begin{array}{c} \text{O} \\ \text{R} \\ \text{I} \\ \text{J} \\ \text{E} \\ \text{N} \\ \text{T} \\ \text{A} \\ \text{C} \\ \text{I} \\ \text{J} \\ \text{A} \end{array} \right\} \quad (4.54)$$

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{64444444} \text{ projekcija vektora pozicije } \mathbf{P}^n \\
 \mathbf{44444444} \mathbf{48} \\
 \left. \begin{array}{l}
 c_1 c_{23} c_4 s_5 d_6 + s_1 s_4 s_5 d_6 + c_1 s_{23} (d_4 - c_5 d_6) + c_1 (a_3 c_{23} + a_2 c_2) \\
 s_1 c_{23} c_4 s_5 d_6 - c_1 s_4 s_5 d_6 + s_1 s_{23} (d_4 - c_5 d_6) + s_1 (a_3 c_{23} + a_2 c_2) \\
 s_{23} c_4 s_5 d_6 - c_{23} (d_4 - c_5 d_6) + a_3 s_{2-3} + a_2 s_2 + d_1 \\
 1
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 O \\
 Z \\
 I \\
 C \\
 I \\
 J \\
 A
 \end{array} \quad (4.55)
 \end{array}$$

koja je kako se vidi iz izraza (4.54) i (4.55) sastavljena od projekcija vektora orijentacije i projekcija vektora pozicije prihvatnice.

Matrični zapis ukupnog kretanja prihvatnice može imati i slijedeći oblik:

$${}^0_6[W] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{l} \text{matrica} \\ \text{orijentacije} \\ 3 \times 3 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{l} \text{vektor} \\ \text{pozicije} \\ 3 \times 1 \end{array} \right] \end{array} \right]. \quad (4.56)
 \end{array}$$

Izjednačavajući članove matrica (4.54) i (4.55) sa (4.56) dobija se:

m *komponente ortova orijentacije hvataljke u odnosu na bazni koordinatni sistem u funkciji od unutrašnjih koordinata q_i*

$$\begin{array}{l}
 n_x = c_1 c_{23} (c_4 c_5 c_6 + s_4 s_6) + s_1 (s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6) + c_1 s_{23} s_5 c_6, \\
 n_y = s_1 c_{23} (c_4 c_5 c_6 + s_4 s_6) - c_1 (s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6) + s_1 s_{23} s_5 c_6, \\
 n_z = s_{23} (c_4 c_5 c_6 + s_4 s_6) - c_{23} s_5 c_6,
 \end{array} \quad (4.57)$$

$$\begin{array}{l}
 o_x = c_1 c_{23} (s_4 c_6 - c_4 c_5 s_6) - s_1 (c_4 c_6 + s_4 c_5 s_6) - c_1 s_{23} s_5 s_6, \\
 o_y = s_1 c_{23} (s_4 c_6 - c_4 c_5 s_6) + c_1 (c_4 c_6 + s_4 c_5 s_6) - s_1 s_{23} s_5 s_6, \\
 o_z = s_{23} (s_4 c_6 - c_4 c_5 s_6) + c_{23} s_5 s_6,
 \end{array} \quad (4.58)$$

$$\begin{array}{l}
 a_x = c_1 c_{23} c_4 s_5 + s_1 s_4 s_5 - c_1 s_{23} c_5, \\
 a_y = s_1 c_{23} c_4 s_5 - c_1 s_4 s_5 - s_1 s_{23} c_5, \\
 a_z = s_{23} c_4 s_5 + c_{23} c_5.
 \end{array} \quad (4.59)$$

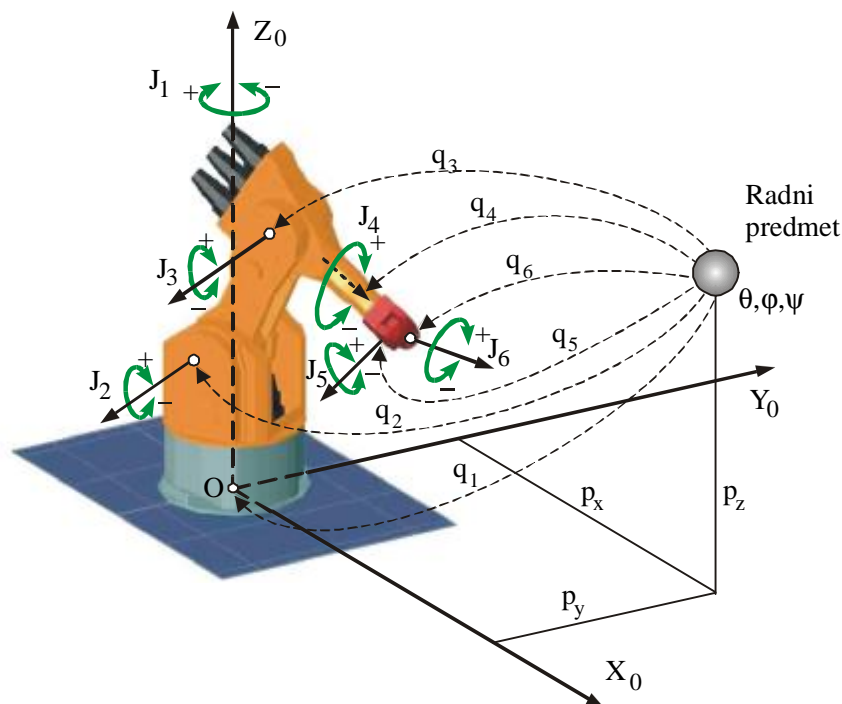
m *projekcije vektora pozicije prihvatnice u odnosu na bazni koordinatni sistem u funkciji od unutrašnjih koordinata q_i*

$$\begin{aligned}
 p_x &= c_1 c_{23} c_4 s_5 d_6 + s_1 s_4 s_5 d_6 + c_1 s_{23} (d_4 - c_5 d_6) + c_1 (a_3 c_{23} + a_2 c_2), \\
 p_y &= s_1 c_{23} c_4 s_5 d_6 - c_1 s_4 s_5 d_6 + s_1 s_{23} (d_4 - c_5 d_6) + s_1 (a_3 c_{23} + a_2 c_2), \\
 p_z &= s_{23} c_4 s_5 d_6 - c_{23} (d_4 - c_5 d_6) + a_3 s_{2-3} + a_2 s_2 + d_1.
 \end{aligned}
 \tag{4.60}$$

Prema tome, sada je u potpunosti definisana direktna kinematika, što znači da za određene vrijednosti unutrašnjih koordinata, vodeći računa o njihovoj definisanosti, s obzirom na mogućnosti robota, može se dobiti pozicija i orijentacija prihvatnice u prostoru vanjskih koordinata.

4.6. Opće teorijske postavke inverzne kinematike

Rješenje inverzne kinematike robota zasnovano je na određivanju vektora unutrašnjih koordinata $\{q\} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6]^T$, ako je poznat vektor vanjskih koordinata $\{r\} = [p_x \ p_y \ p_z \ \theta \ \varphi \ \psi]^T$, kako je to prikazano na slici 4.18.



Slika 4.14. Uz analizu inverzne kinematike robota

Inverzna kinematika se može opisati na način prikazan izrazom

$$q = f^{-1}(r). \tag{4.61}$$

Funkcija f koja povezuje vanjske i unutrašnje koordinate je nelinearna trigonometrijska funkcija. Inverzni kinematski problem nije jednostavno riješiti kao direktni problem, jer se njegovo rješenje svodi na rješavanje sistema nelinearnih jednačina. Pri tom se pojavljuje problem postojanja rješenja i problem više rješenja inverznog geometrijskog modela.

Određivanje inverzne funkcije f^{-1} zavisi i od dimenzija vektora $\{r\}$ i $\{q\}$.

Rješenje inverzne kinematike robota može biti analitičko i numeričko. Numerički postupci su općeniti i ne zavise od kinematičke strukture mehanizma robota. Primjenom numeričkih metoda dobija se samo jedno rješenje koje zahtijeva veći broj algebarskih operacija, a isto tako dolazi do gomilanja grešaka prilikom izvođenja svakog narednog numeričkog koraka. U daljnjem dijelu rada izložen je algoritam za analitičko rješenje inverzne kinematike robota.

4.6.1. Analitičko rješenje inverznog kinematičkog problema

Analitičko određivanje inverzne funkcije f^{-1} je složen problem i za proizvoljnu strukturu robota se ne može riješiti u općem obliku. To znači da je za neke strukture robota moguće odrediti analitičko rješenje inverznog kinematskog problema, dok za druge strukture to nije moguće.

Prednosti analitičkog rješenja u odnosu na numeričko su:

- izračunavanje traje znatno kraće, jer je manji broj potrebnih matematičkih operacija,
- daje sva rješenja koja su tačna i bez nagomilavanja numeričke greške,
- singularna stanja u kojima robot gubi jedan ili više stepeni slobode je moguće unaprijed predvidjeti i uzeti u obzir.

Matrica prelaza iz n -tog u m -ti koordinatni sistem, pri čemu je $m < n$, data je izrazom (4.15.), tako da se analitičko rješenje inverznog kinematskog problema može naći na osnovu jednačine:

$$\left. \begin{array}{l} {}^0[D]^{-1} \cdot {}^0_n[W] = {}^1_n[W] \\ {}^1[D]^{-1} \cdot {}^0_1[D]^{-1} \cdot {}^0_n[W] = {}^2_n[W] \\ \cdot \\ \cdot \\ {}^{n-2}[D]^{-1} \cdot \dots \cdot {}^2_3[D]^{-1} \cdot {}^1_2[D]^{-1} \cdot {}^0_1[D]^{-1} \cdot {}^0_n[W] = {}^{n-1}_n[W] \end{array} \right\} \quad (4.62)$$

Drugi način dobijanja rješenja inverznog problema u analitičkom obliku sastoji se u podjeli inverznog problema na dva potproblema, pri čemu prvi problem predstavlja određivanje rješenja za minimalnu konfiguraciju (kretanje ruke) robota, a drugi potproblem predstavlja određivanje rješenja za prihvatnicu robota. Matrični zapis bi bio slijedećeg oblika:

$${}^0_n[W] = {}^0_R[W] \cdot {}^R_H[W], \quad (4.63)$$

pri čemu se pojedine matrice odnose na:

$$\begin{aligned} {}^0_n[W] & - \text{ukupno kretanje robota,} \\ {}^0_R[W] & - \text{kretanje ruke (minimalna konfiguracija robota),} \\ {}^R_H[W] & - \text{kretanje hvataljke robota.} \end{aligned}$$

Ovakav pristup rješavanju inverznog problema je moguć ako zadnja tri stepena slobode čine sferični zglob, odnosno sve tri ose se sijeku u jednoj tački. U ovom slučaju se na osnovu zadate pozicije i orijentacije prihvatnice može odrediti položaj vrha minimalne konfiguracije robota.

Kod nekih struktura robota, kao i kod redundantnih robota, analitičko rješenje inverznog kinematičkog problema se ne može odrediti i u tom slučaju se pristupa numeričkom rješavanju ovog problema.

4.6.2. Numeričko (iterativno) rješenje inverznog kinematičkog problema

Da bi se došlo do rješenja skupa nelinearnih jednačina primjenjuju se različite numeričke metode (Newtonova metoda, metoda približavanja po pojedinim koordinatama, Cebishevljevo približavanje, gradijentni postupak itd.). Ovi su postupci opšti i ne ovise o kinematskoj strukturi robota.

Stoga se i prednost numeričkih postupaka ogleda u mogućnosti izrade jednog univerzalnog programa za različite konfiguracije robota. Problemi koji se javljaju pri izvođenju jednog takvog programa su:

- neprepoznavanje singularnih stanja robota i
- moguća divergencija postupka računanja.

Najviše korištena metoda rješavanja inverznog kinematskog problema robota je Newtonova metoda, gdje je potrebno odrediti Jacobijevu matricu $J(q)$ kao i njenu inverznu matricu J^{-1} .

Nedostaci ove metode u odnosu na analitičko rješavanje inverzne kinematike su:

- potrebno relativno veliko vrijeme za izračunavanje inverzne matrice,
- treba poznavati početno rješenje, koje mora biti blisko stvarnom rješenju,
- potrebno je izvršiti modifikaciju trajektorije ili je zadati u prostoru unutrašnjih koordinata pri pojavi singulariteta (u okolini takvih tačaka ne može se izračunati J^{-1}).

Posmatra li se funkcija $\mathbf{F}(q)$:

$$\mathbf{F}(q) = f(q) - r \quad (4.64)$$

gdje je : $r_i, i = 1, \dots, m$ - vanjska koordinata robota odnosno $r \in R^m$,

$q_i, i = 1, \dots, n$ - unutrašnja koordinata, odnosno $q \in R^n$, za slučaj neredundantnih robota ($m=n$)

tad je

$f : R^n \rightarrow R^n$ neprekidna, diferencijabilna funkcija koja preslikava unutrašnje koordinate u vanjske.

Za funkciju $F(q)$ je potrebno odrediti nulu funkcije koja se nalazi u okolini nekog približnog rješenja q_k . Izvrši li se razvijanje funkcije $F(q)$ u Taylorov red i zadrže li se samo prva dva člana dobije se:

$$F(q) + J(q_k) \cdot (q - q_k) = 0, \quad (4.65)$$

pri čemu je: J - Jacobieva matrica parcijalnih izvoda funkcije $f(q)$ koja ima oblik:

$$J = \frac{\partial f}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{bmatrix}, \text{ ako je } m = n \Rightarrow J \in R^{n \times n}. \quad (4.66)$$

Jacobi-jeva matrica povezuje brzinu promjene unutrašnjih koordinata $\dot{q} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3 \ \dots \ \dot{q}_n]^T$ sa brzinama promjene vanjskih koordinata $\dot{r} = [\dot{r}_x \ \dot{r}_y \ \dot{r}_z \ \dot{\theta} \ \dot{\phi} \ \dot{\psi}]^T$ i ima velik značaj u sintezi kretanja robota.

Na osnovu izraza (4.65) slijedi

$$q = q_k - J^{-1}(q_k)(f(q_k) - r) = q_k + J^{-1}(q_k)\Delta r_k, \quad (4.67)$$

gdje je :

- $J^{-1}(q_k)$ - inverzna matrica Jacobieve matrice J ,
- $\Delta r_k = r - f(q_k)$ - vektor priraštaja vanjskih koordinata u odnosu na koordinate koje odgovaraju približnom rješenju q_k .

Usvoji li se u izrazu (4.67) da je $q = q_{k+1}$, dobiće se iterativan (ponovljen) postupak. Kada je $\|\Delta r_k\| < \varepsilon$, gdje je ε mala pozitivna konstanta, postupak se smatra završenim. Newtonov postupak ima kvadratnu konvergenciju, što znači da iterativan postupak brzo konvergira. Ovaj postupak daje samo jedno rješenje inverznog problema i to ono koje se nalazi u okolini približnog rješenja q_k . Postojanje inverzne matrice je zavisno o determinanti Jacobieve matrice, tako ako je $\det |J(q)| \neq 0$, inverzna matrica postoji. Kod položaja robota gdje se javljaju singularne tačke inverzni Jacobijan nije moguće odrediti i tad je $\det |J(q)| = 0$.

4.7. Jacobieva matrica

Jacobi-jeva matrica povezuje brzinu promjene unutrašnjih koordinata $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3 \ \dots \ \dot{q}_n]^T$ sa brzinama promjene vanjskih koordinata $\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ \dot{\theta} \ \dot{\varphi} \ \dot{\psi}]^T$ i definisana je izrazom:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}. \quad (4.68)$$

Povezivanje vanjskih sila, koje djeluju na prihvatnicu i momenata koji se prenose na zglobove robota vrši se Jacobijevom matricom. Ova matrica zavisi od tipa vektora vanjskih koordinata.

S obzirom da vektor vanjskih koordinata definiše poziciju i orijentaciju prihvatnice robota u odnosu na neki referentni koordinatni sistem (najčešće u bazi robota) :

$$\{r\} = [p_x \ p_y \ p_z \ \theta \ \varphi \ \psi]^T,$$

moguće je izvršiti njegovu podjelu na dva dijela i to:

$$\{r\} = [r_p^T \ r_o^T]^T, \quad (4.69)$$

gdje je:

- $\{r_p\} \in R^3$ - vektor pozicije se opisuje na slijedeći način $r_p = [p_x \ p_y \ p_z]^T$,
- $\{r_o\} \in R^3$ - vektor orijentacije i opisuje se kao $r_o = [\theta \ \varphi \ \psi]^T$.

Jednačina (4.68) se tad može napisati u slijedećem obliku:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_p \\ \dot{\mathbf{x}}_o \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} J_p \\ J_o \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{q}}, \quad (4.70)$$

pri čemu su: - $J_p \in R^{3 \times n}$ i $J_o \in R^{3 \times n}$ podmatrice Jacobijeve matrice.

Kako je pozicija vrha prihvatnice opisana pravouglim koordinatama $r = [p_x \ p_y \ p_z]^T$ u odnosu na nepokretni koordinatni sistem u bazi robota, to $\dot{\mathbf{x}} = [v_x \ v_y \ v_z]^T = \{v\}$ predstavlja translatornu brzinu vrha hvataljke robota. Označi li se sa $\{v_i\}$ dio brzine koji potiče samo od brzine promjene i-te unutrašnje koordinate q_i biće:

$$\{v\} = \dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n \{v_i\}. \quad (4.71)$$

Kada se radi o rotacionim zglobovima, komponenta brzine $\{v_i\}$ je tad data izrazom:

$$\{v_i\} = \{z_{i-1}\} \times [p_{i-1,h}] \cdot \dot{q}_i. \quad (4.72)$$

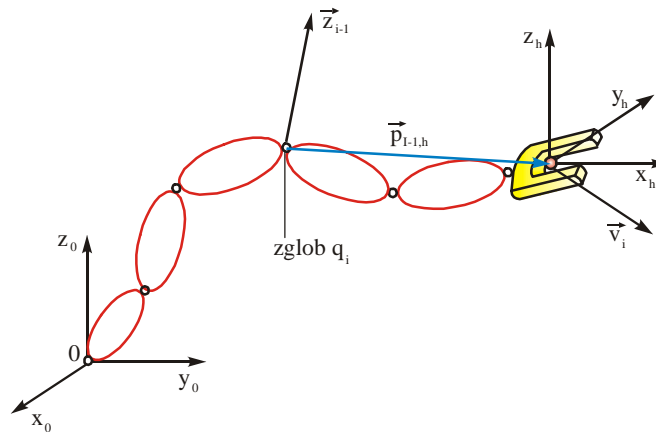
U slučaju da je i-ti zglob translatoran, $\{v_i\}$ ima oblik

$$\{v_i\} = \{z_{i-1}\} \cdot \mathcal{Q}_i, \quad (4.73)$$

gdje je :

$\{z_{i-1}\}$ - vektor ose i -tog zgloba (sl.4.15.),

$\{p_{i-1,h}\}$ - vektor rastojanja između centra i -tog zgloba ($(i-1)$ -vog sistema) i centra prihvatnice robota, oba izražena u odnosu na nepokretni sistem.



Slika 4.15. Vektori važni za izračunavanje Jakobijana

Izvrši li se zamjena (4.72) i (4.73) u (4.71) i (4.70), dobija se Jacobijeva podmatrica za Descartesove koordinate J_{pD} u slijedećem obliku:

$$J_p \equiv J_{pD} = [\{j_1\} \dots \{j_h\}], \quad (4.74)$$

gdje su kolone $\{j_i\}$ date sa:

$$\{j_i\} = \{z_{i-1}\} \times \{p_{i-1,h}\} (1 - \xi_i^2) + \{z_{i-1}\} \cdot \xi_i^2,$$

pri čemu je ξ_i^2 indikator kinematskog para koji određuje tip zglobne veze, odnosno da li je zglob rotacioni ($\xi_i^2 = 0$) ili translatorsni ($\xi_i^2 = 1$).

Potrebno je izračunati i podmatricu J_o Jacobijeve matrice kad je orijentacija opisana Eulerovim uglovima prihvatnice θ, φ i ψ . Ova podmatrica J_o Jacobijeve matrice povezuje ugaone brzine prihvatnice sa brzinama promjene unutrašnjih koordinata.

Prvo je potrebno odrediti vektor ugaone brzine $\{\omega_i\}$ i -tog članka u odnosu na nepokretni koordinatni sistem. Vektor ugaone brzine $\{\omega_i\}$ se može izraziti kao zbir ugaone brzine $\{\omega_{i-1}\}$ prethodnog članka i relativne ugaone brzine $\{\bar{\omega}_{i-1}\}$ između i -tog i $(i-1)$ -vog članka.

Za rotacioni zglob je:

$$\{\omega_i\} = \{\omega_{i-1}\} + \mathcal{Q}_i \cdot \{z_{i-1}\} \quad (4.75)$$

gdje je: $\{z_{i-1}\}$ jedinični vektor ose i -tog zgloba.

Sve tačke na članku imaju istu ugaonu brzinu. U slučaju translatornog zgloba relativna rotacija između članaka ne postoji tako da je:

$$\{\omega_i\} = \{\omega_{i-1}\} \quad (4.76)$$

Izrazi (4.75) i (4.76) se mogu prikazati u obliku jedinstvene relacije:

$$\{\omega_i\} = \{\omega_{i-1}\} + \mathfrak{d}_i \cdot \{z_{i-1}\} (1 - \xi_i^2). \quad (4.77)$$

Sumiranjem izraza (4.77) za $i=1, \dots, n$ dobija se nerekurzivni izraz za ugaonu brzinu zadnjeg n -tog članka:

$$\{\omega\} = \{\omega_n\} = \sum_{i=1}^n \mathfrak{d}_i \cdot \{z_{i-1}\} (1 - \xi_i^2). \quad (4.78)$$

U matričnom obliku izraz (4.78) se može predstaviti kao:

$$\{\omega_n\} = \mathfrak{d} \cdot E \quad (4.79)$$

gdje je E matrica, koja povezuje ugaonu brzinu hvataljke sa brzinom promjene unutrašnjih koordinata, data sa:

$$E = \left[(1 - \xi_1^2) \{z_{i-1}\} \dots (1 - \xi_n^2) \{z_{n-1}\} \right]^T. \quad (4.80)$$

Kako je

$$\{\omega_n\} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = J_\omega \cdot \mathfrak{d} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \theta & \cos \varphi \cos \theta \\ 0 & \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta \\ 1 & 0 & -\sin \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathfrak{d} \\ \mathfrak{d} \\ \mathfrak{d} \end{bmatrix}, \quad (4.81)$$

to će zamjenom u (4.79) biti:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\sin \theta & \cos \varphi \cos \theta \\ 0 & \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta \\ 1 & 0 & -\sin \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathfrak{d} \\ \mathfrak{d} \\ \mathfrak{d} \end{bmatrix} = E \cdot \mathfrak{d}. \quad (4.82)$$

Izraz (4.82) direktno povezuje brzinu promjene unutrašnjih koordinata \mathfrak{d} sa brzinama promjene Eulerovih uglova $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}$ i \mathfrak{d} .

Slijedi da Jacobijeva podmatrica J_o za Eulerove uglove ima slijedeći oblik:

$$J_o = \begin{bmatrix} \cos \theta \operatorname{tg} \varphi & \sin \theta \operatorname{tg} \varphi & 1 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \frac{\cos \theta}{\cos \varphi} & \frac{\sin \theta}{\cos \varphi} & 0 \end{bmatrix} \cdot E. \quad (4.83)$$

Kako se za $\varphi = k\pi/2$ javlja problem divergencije elemenata matrice (4.83), to je potrebno za zadate brzine promjene Eulerovih uglova θ, ϕ, ψ izračunati odgovarajuću ugaonu brzinu hvataljke preko relacije (4.81), a zatim pri inverziji Jacobijeve matrice J (4.70) za donju podmatricu J_0 uzimati E datu izrazom (4.80), jer ona povezuje ugaonu brzinu hvataljke sa brzinom promjene unutrašnjih koordinata ϕ .

4.8. Primjeri rješavanja inverznog kinematičkog problema

4.8.1. Rješenje inverznog kinematičkog problema za robot tipa MANUTEC R3

Analitičko rješenje inverznog kinematičkog problema se nalazi na osnovu opšte jednačine, koja glasi:

$${}^{n-2}[D]^{-1} \cdot \dots \cdot {}^2_3[D]^{-1} \cdot {}^1_2[D]^{-1} \cdot {}^0_1[D]^{-1} \cdot {}^0_n[W] = {}^{n-1}_n[W] .$$

Za robot MANUTEC R3, koji ima šest stepeni slobode, analitičko rješenje inverznog problema se nalazi u rješavanju slijedećeg niza jednačina:

$${}^0_1[D]^{-1} \cdot {}^0_n[W] = {}^1_6[W] , \quad (4.84)$$

$${}^1_2[D]^{-1} \cdot {}^0_1[D]^{-1} \cdot {}^0_n[W] = {}^2_6[W] , \quad (4.85)$$

$${}^2_3[D]^{-1} \cdot {}^1_2[D]^{-1} \cdot {}^0_1[D]^{-1} \cdot {}^0_n[W] = {}^3_6[W] , \quad (4.86)$$

$${}^3_4[D]^{-1} \cdot {}^2_3[D]^{-1} \cdot {}^1_2[D]^{-1} \cdot {}^0_1[D]^{-1} \cdot {}^0_n[W] = {}^4_6[W] , \quad (4.87)$$

$${}^4_5[D]^{-1} \cdot {}^3_4[D]^{-1} \cdot {}^2_3[D]^{-1} \cdot {}^1_2[D]^{-1} \cdot {}^0_1[D]^{-1} \cdot {}^0_n[W] = {}^5_6[W] . \quad (4.88)$$

Homogena matrica ${}^0_n[W]$ predstavlja orijentaciju i poziciju tačke središta prihvatnice (end efektor) u odnosu na nepokretni koordinatni sistem definisan kao referentni sistem robota smješten u bazi robota: $0_0x_0y_0z_0$, gdje je:

$${}^0_n[W] = \left[\begin{array}{ccc|c} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & {}^0_n[R] & & {}^0_n[P] \\ & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] ,$$

pri čemu je ${}^0_n[R]$ matrica orijentacije prihvatnice u odnosu na nepokretni koordinatni sistem $0_0x_0y_0z_0$, gdje je

$\{a_z\}$ - vektor pristupa objektu,

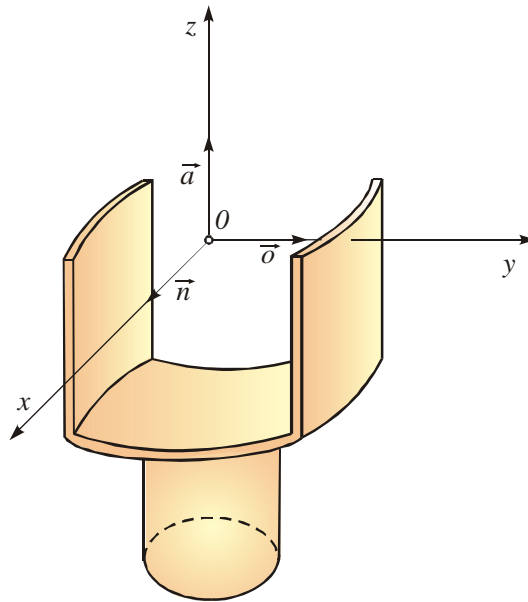
$\{o_y\}$ - vektor orijentacije,

$\{n_x\}$ - vektor normale koji je prikazan na sl. 4.16.

Matrica ${}^0_n[\mathbf{P}]$ predstavlja poziciju prihvatnice u odnosu na nepokretni koordinatni sistem.

Matrice ${}^0_n[\mathbf{R}]$ i ${}^0_n[\mathbf{P}]$ imaju oblik

$${}^0_n[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}, \quad {}^0_n[\mathbf{P}] = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}.$$



Slika 4.16. Definisiranje vektora $\{n\}$, $\{o\}$ i $\{a\}$

Da bi se riješio niz jednačina (4.84) – (4.88) potrebno je prvo naći inverzne matrice koje glase:

$${}^0_1[\mathbf{D}]^{-1} = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1_2[\mathbf{D}]^{-1} = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 & s_2 d_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 & -c_2 d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^2_3[\mathbf{D}]^{-1} = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & -s_3 & s_3 a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_3 & 0 & c_3 & -c_3 a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^3_4[\mathbf{D}]^{-1} = \begin{bmatrix} c_4 & s_4 & 0 & 0 \\ -s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^4_5[D]^{-1} = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & -s_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_5 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^5_6[D]^{-1} = \begin{bmatrix} c_6 & s_6 & 0 & 0 \\ -s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Vrijednosti upravljanih koordinata $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ i θ_6 se dobiju rješavanjem jednačina (4.84) – (4.88).

Tako se iz jednačine : ${}^0_1[D]^{-1} \cdot {}^0_n[W] = {}^1_n[W]$

dobije analitičko rješenje ugla prve rotacije

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{p_y - a_y d_6}{p_x - a_x d_6}\right). \quad (4.89)$$

Analitički izraz za ugao rotacije drugog zgloba θ_2 ima slijedeći oblik:

$$\theta_2 = \arctg \left(\frac{\begin{aligned} & [c_1 p_x + s_1 p_y - d_6 (c_1 a_x + s_1 a_y)]^2 + \\ & \pm 2a_2 \sqrt{[c_1 p_x + s_1 p_y - d_6 (c_1 a_x + s_1 a_y)]^2 + (p_z - d_6 a_z - d_1)^2 -} \\ & \dots \\ & + (p_z - d_6 a_z - d_1)^2 + a_2^2 - d_4^2 \\ & \dots \end{aligned}}{\left[\frac{[c_1 p_x + s_1 p_y - d_6 (c_1 a_x + s_1 a_y)]^2 + [p_z - d_6 a_z - d_1]^2 + a_2^2 - d_4^2}{2a_2} \right]^2} \right) - \arctg \left(\frac{p_z - d_6 a_z - d_1}{c_1 p_x + s_1 p_y - d_6 (c_1 a_x + s_1 a_y)} \right) \quad (4.90)$$

Predznak (-) ispred korijena označava položaj “lakta” dole, odnosno tzv. lijevoramenu konfiguraciju, a znak (+) tzv. desnoramenu konfiguraciju.

Da bi se dobila vrijednost slijedeće upravljane koordinate potrebno je da se u jednačini (4.85) izmnože date matrice, tj.

$${}^1_2[D]^{-1} \cdot {}^0_1[D]^{-1} \cdot {}^0_n[W] = {}^2_n[W] \quad \text{čije je rješenje:}$$

$$\theta_3 = \arctg \frac{c_2 c_1 (p_x - d_6 a_x) + c_2 s_1 (p_y - d_6 a_y) + s_2 (d_6 a_z - p_z) + s_2 d_1}{s_2 c_1 (p_x - d_6 a_x) + s_2 s_1 (p_y - d_6 a_y) + c_2 (p_z - d_6 a_z) - c_2 d_1 - a_2}. \quad (4.91)$$

Ugao rotacije trećeg zgloba θ_4 se dobije rješavanjem jednačine (4.86) :

$${}^2_3[D]^{-1} \cdot {}^1_2[D]^{-1} \cdot {}^0_1[D]^{-1} \cdot {}^0_n[W] = {}^3_n[W], \quad \text{te je analitički izraz za ugao } \theta_4 :$$

$$\theta_4 = \operatorname{arctg} \frac{-s_1 p_x + c_1 p_y}{c_{23}(c_1 p_x + s_1 p_y) + s_{23}(d_1 - p_z) + s_3 a_2}. \quad (4.92)$$

Nakon množenja matrica u jednačinama (4.87) i (4.88) dobiju se analitički izrazi za ugao rotacije θ_5 i θ_6 , koji glase:

$$\begin{aligned} \theta_5 &= \operatorname{arctg} \frac{s_5}{c_5} = \\ &= \operatorname{arctg} \frac{p_x(c_1 c_{23} c_4 - s_1 s_4) + p_y(s_1 c_{23} c_4 + c_1 s_4) - p_z s_{23} c_4 + c_4(d_1 s_{23} + s_3 a_2)}{p_x c_1 s_{23} + p_y s_1 s_{23} + p_z c_{23} - d_1 c_{23} - c_3 a_2 - d_4} \end{aligned} \quad (4.93)$$

i

$$\begin{aligned} \theta_6 &= \operatorname{arctg} \frac{n_x(-c_1 c_{23} s_4 - s_1 c_4) + n_y(-s_1 c_{23} s_4 + c_1 c_4) + \dots}{n_x[c_5(c_1 c_{23} c_4 - s_1 s_4) + s_5 c_1 s_{23}] + \dots} \\ &\dots \frac{n_z s_{23} s_4}{n_y[s_5(s_1 c_{23} c_4 + c_1 s_4) + s_5 s_1 s_{23}] + n_z(-c_5 s_{23} c_4 + s_5 c_{23})} \end{aligned} \quad (4.94)$$

Može se primjetiti da je vrijednost rotacijske upravljane koordinate uvijek tražena preko funkcije arkus tangensa, jer je tačnost izračunavanja arctg funkcije u cijelom području njene definicije jednaka. Kod upotrebe funkcija \arcsin i \arccos tačnost izračunavanja postaje problematična u području tačke $\pi/2$ odnosno 0.

Rješenja funkcije arctg su u intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$.

4.8.2. Rješenje inverznog kinematičkog problema za robot tipa KUKA IR 161/15.0

Rješenje inverznog kinematičkog problema za robot sa šest rotacionih stepeni slobode kretanja, tipa KUKA IR 161/15.0 se dobije rastavljanjem na dva problema, tako što se odrede prvo tri rotacijska ugla minimalne strukture robota, pa po njihovom rješenju određujemo preostala tri rotacijska ugla prihvatnice.

Translacija se definiše na slijedeći način:

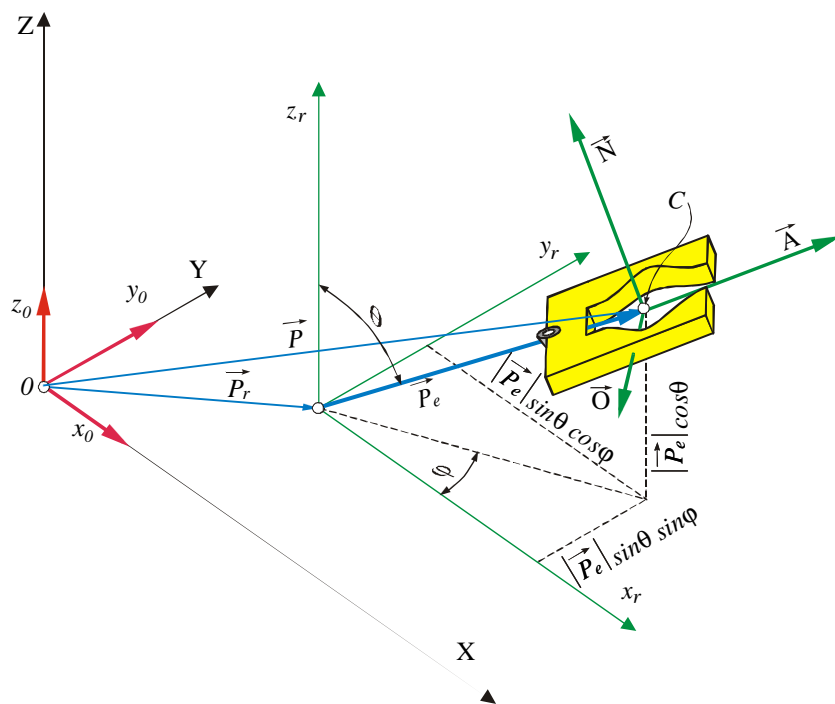
$$[ukupna\ translacija] = [translacija\ ruke] + [translacija\ centra\ hvataljke].$$

Prethodna tekstualna jednačina je identična jednačini :

$$\{P\} = \{P_r\} + \{P_e\}, \quad (4.95)$$

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{rx} \\ P_{ry} \\ P_{rz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{ex} \\ P_{ey} \\ P_{ez} \end{bmatrix}. \quad (4.96)$$

Kod većine robotskih sistema vektor $\{P_e\}$ je usmjeren u pravcu vektora $\{A\}$ koji prolazi kroz centar efektora što je i slučaj kod konkretnog robota u ovom radu, kako je to prikazano na slici 4.17:



Slika 4.17. Položaj vektora pozicije u odnosu na jedinične vektore efektora

Uglovi koje vektor translacije centra efektora zaklapa sa osama baznog koordinatnog sistema određuju se pomoću poznatih projekcija jediničnog vektora $\{A\}$, takođe projiciranih na ose baznog koordinatnog sistema, tj.:

$$\operatorname{tg} j = \frac{A_y}{A_x}, \text{ odakle se dobije}$$

$$j = \arctan\left(\frac{A_y}{A_x}\right) \quad \text{i} \quad (4.97)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} q &= \frac{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}}{A_z}, \quad \text{odakle je} \\ q &= \arctan \left(\frac{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}}{A_z} \right). \end{aligned} \quad (4.98)$$

Poznavajući uglove u izrazima (4.97) i (4.98) dobiju se projekcije vektora \vec{P}_e na osi baznog koordinatnog sistema što se vidi i na slici 4.17. tj.:

$$\begin{aligned} P_{ex} &= \left| \vec{P}_e \right| \cdot \sin \theta \cos \varphi, \\ P_{ey} &= \left| \vec{P}_e \right| \cdot \sin \theta \sin \varphi, \\ P_{ez} &= \left| \vec{P}_e \right| \cdot \cos \theta. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Primjenjujući izraze (4.95) i (4.96), vektor translacije ruke robota je dat slijedećim izrazom:

$$\{P_r\} = \{P\} - \{P_e\}, \quad (4.100)$$

odnosno njegove projekcije na osi baznog koordinatnog sistema pomoću projekcija $\{P_e\}$ iz (4.99)

$$\begin{bmatrix} P_{rx} \\ P_{ry} \\ P_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \left| \vec{P}_e \right| \cdot \sin \theta \cos \varphi \\ \left| \vec{P}_e \right| \cdot \sin \theta \sin \varphi \\ \left| \vec{P}_e \right| \cdot \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (4.101)$$

Vektor translacije ruke $\{P_r\}$ zavisi od same konfiguracije robota tj. od tipa njegove ruke, tako da kod robota *KUKA IR 161/15.0* ovaj se vektor dobije množenjem matrice (4.63) vektora pozicije i orijentacije ruke sa vektorom pozicije koji definiše rastojanje od ishodišta koordinatnih sistema O_3 do ishodišta koordinatnih sistema O_4, O_5, O_6 za veličinu d_4 kako je to prikazano na slici 4.13. D-H položaja robota i D-H tabeli 4.1, u pravcu z_3 ose, tj.

$${}^0_n[W] = {}^0_R[W] \cdot {}^R_H[W], \quad \text{odnosno} \quad {}^0_r[W] = {}^0_1[D] \cdot {}^1_2[D] \cdot {}^2_3[D], \quad \text{te je:}$$

$${}^0_r[W] = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & s_1 & c_1 s_{23} & c_1 (a_3 c_{23} + a_2 c_2) \\ s_1 c_{23} & -c_1 & s_1 s_{23} & s_1 (a_3 c_{23} + a_2 c_2) \\ s_{23} & 0 & -c_{23} & a_3 s_{23} + a_2 s_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.102)$$

$$\begin{aligned}
{}^0\bar{P} = {}_r\bar{P} &= \left\{ {}^0_r[W] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ ,} \\
&\text{translatomi} \\
&\text{(pozicioni)} \\
&\text{dio} \\
{}^0\bar{P} = {}_r\bar{P} &= \left\{ \begin{bmatrix} c_1c_{23} & s_1 & c_1s_{23} & c_1(a_3c_{23} + a_2c_2) \\ s_1c_{23} & -c_1 & s_1s_{23} & s_1(a_3c_{23} + a_2c_2) \\ s_{23} & 0 & -c_{23} & a_3s_{2-3} + a_2s_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ ,} \\
&\text{translatomi} \\
&\text{(pozicioni)} \\
&\text{dio} \\
\bar{P}_r &= \begin{bmatrix} c_1s_{23}d_4 + c_1(a_3c_{23} + a_2c_2) \\ s_1s_{23}d_4 + s_1(a_3c_{23} + a_2c_2) \\ -c_{23}d_4 + a_3s_{2-3} + a_2s_2 + d_1 \\ 1 \end{bmatrix} . \tag{4.103}
\end{aligned}$$

Na osnovu matrica (4.101) dobija se

$$\bar{P}_r = \begin{bmatrix} P_{rx} \\ P_{ry} \\ P_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x - \left| \frac{\mathbf{r}}{P_e} \right| \cdot \sin\theta \cos\varphi \\ P_y - \left| \frac{\mathbf{r}}{P_e} \right| \cdot \sin\theta \sin\varphi \\ P_z - \left| \frac{\mathbf{r}}{P_e} \right| \cdot \cos\theta \end{bmatrix} \tag{4.104}$$

i koristeći izraz (4.103) mogu se dobiti projekcije vektora translacije ruke u obliku:

$$\begin{aligned}
c_1s_{23}d_4 + c_1(a_3c_{23} + a_2c_2) &= P_x - \left| \frac{\mathbf{r}}{P_e} \right| \cdot \sin q \cos j \text{ ,} \\
s_1s_{23}d_4 + s_1(a_3c_{23} + a_2c_2) &= P_y - \left| \frac{\mathbf{r}}{P_e} \right| \cdot \sin q \sin j \text{ ,} \\
-c_{23}d_4 + a_3s_{2-3} + a_2s_2 + d_1 &= P_z - \left| \frac{\mathbf{r}}{P_e} \right| \cdot \cos q .
\end{aligned} \tag{4.105}$$

U konkretnom slučaju za robot KUKA IR 161/15 veličina $\left| \frac{\mathbf{r}}{P_e} \right| = d_6$ predstavlja udaljenost od centra ruke do centra hvataljke odnosno do tačke (TCP), tako da jednačine (4.105) poprimaju slijedeći oblik:

$$\begin{aligned}
c_1s_{23}d_4 + c_1(a_3c_{23} + a_2c_2) &= P_x - d_6 \cdot \sin q \cos j \text{ ,} \\
s_1s_{23}d_4 + s_1(a_3c_{23} + a_2c_2) &= P_y - d_6 \cdot \sin q \sin j \text{ ,} \\
-c_{23}d_4 + a_3s_{2-3} + a_2s_2 + d_1 &= P_z - d_6 \cdot \cos q .
\end{aligned} \tag{4.106}$$

Dobijene su tri jednačine sa tri nepoznanice q_1, q_2 i q_3 koje treba riješiti.

U jednačinama (4.106), veličina $a_3 = -0,034$ mm se može zanemariti radi lakšeg iznalaženja analitičkih izraza za uglove θ_1, θ_2 i θ_3 ; ista veličina je postavljena u D-H tablici 4.1. zbog izbjegavanja singularnog položaja robota.

Na osnovu prethodne konstatacije jednačine (4.106) poprimaju slijedeći oblik:

$$\begin{aligned} c_1 s_{23} d_4 + c_1 a_2 c_2 &= P_x - d_6 \cdot \sin q \cos j , \\ s_1 s_{23} d_4 + s_1 a_2 c_2 &= P_y - d_6 \cdot \sin q \sin j , \\ -c_{23} d_4 + a_2 s_2 + d_1 &= P_z - d_6 \cdot \cos q . \end{aligned} \quad (4.107)$$

Jednačine (4.107) su definisane kinematskim modelom robota po D-H parametrima te se mora postaviti njihova funkcionalna zavisnost u odnosu na nulti položaj robota, što se postiže uvođenjem smjena kao u direktnoj kinematici, tj.:

$$\begin{aligned} s_1 &= \sin q_1 \\ c_1 &= \cos q_1 \\ s_2 &= \sin(50^0 + q_2) \\ c_2 &= \cos(50^0 + q_2) \\ s_{23} &= -\cos(q_2 + q_3) \\ c_{23} &= \sin(q_2 + q_3) \end{aligned} .$$

Uvođenjem gornjih smjena u jednačine (4.107), iste dobivaju slijedeći oblik:

$$\begin{aligned} -\cos q_1 \cos(q_2 + q_3) d_4 + \cos q_1 \cos(50^0 + q_2) a_2 &= P_x - d_6 \cdot \sin q \cos j , \\ -\sin q_1 \cos(q_2 + q_3) d_4 + \sin q_1 \cos(50^0 + q_2) a_2 &= P_y - d_6 \cdot \sin q \sin j , \\ -\sin(q_2 + q_3) d_4 + a_2 \sin(50^0 + q_2) + d_1 &= P_z - d_6 \cdot \cos q . \end{aligned} \quad (4.108)$$

Da bi se izbjegle negativne veličine za X-koordinate, lijeva strana prve jednačine u jednačinama (4.108) mora se pomnožiti sa (-1) da se dobije pozitivna vrijednost X-koordinate zbog same orijentacije baznog koordinatnog sistema kako je to prikazano na kinematskom modelu po D-H parametrima datom na slici 4.13. tj.:

$$\begin{aligned} \cos q_1 \cos(q_2 + q_3) d_4 - \cos q_1 \cos(50^0 + q_2) a_2 &= P_x - d_6 \cdot \sin q \cos j , \\ -\sin q_1 \cos(q_2 + q_3) d_4 + \sin q_1 \cos(50^0 + q_2) a_2 &= P_y - d_6 \cdot \sin q \sin j , \\ -\sin(q_2 + q_3) d_4 + a_2 \sin(50^0 + q_2) + d_1 &= P_z - d_6 \cdot \cos q . \end{aligned} \quad (4.109)$$

Kao nepoznate veličine ovdje se pojavljuju uglovi rotacija prva tri zglobova (minimalna struktura robota) q_1, q_2 i q_3 ; čije je analitičke izraze potrebno riješiti.

Nakon rješavanja jednačina (4.105) dobiju se analitička rješenja prve rotacije θ_1 (rotacija baze), kao i uglovi rotacije θ_2 i θ_3 koji iznose:

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{d_6 \cdot \sin \theta \sin \varphi - P_y}{P_x - d_6 \cdot \sin \theta \cos \varphi}\right), \quad (4.110)$$

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{\pm \beta}{\sqrt{(d_1 - P_z + d_6 \cdot \cos \theta)^2 + \alpha^2 - \beta^2}}\right) - \arctan\left(\frac{\alpha}{d_1 - P_z + d_6 \cdot \cos \theta}\right) - 50^\circ, \quad (4.111)$$

pri čemu je uvedena smjena jednaka slijedećim izrazima

$$(P_x - d_6 \cdot \sin \theta \cos \varphi) \cdot \cos \theta_1 + (d_6 \cdot \sin \theta \sin \varphi - P_y) \cdot \sin \theta_1 = \alpha,$$

$$\beta = \frac{d_4^2 - a_2^2 - (d_1 - P_z + d_6 \cos \theta)^2 - \alpha^2}{2a_2},$$

$$\theta_3 = \arctan\left[\frac{a_2 \sin(50^\circ + \theta_2) + d_1 - P_z + d_6 \cdot \cos \theta}{\alpha + \cos(50^\circ + \theta_2)a_2}\right] - \left\{ \arctan\left[\frac{\pm \beta}{\sqrt{(d_1 - P_z + d_6 \cdot \cos \theta)^2 + \alpha^2 - \beta^2}}\right] - \arctan\left(\frac{\alpha}{d_1 - P_z + d_6 \cdot \cos \theta}\right) - 50^\circ \right\} \quad (4.112)$$

Jednačinama (4.110), (4.111) i (4.112) određen je analitički oblik inverzne kinematike za robot KUKA IR 161/15.0 i kao što se vidi one su funkcije vanjskih koordinata, konkretno pozicije i vrijednosti rotacija prethodnih zglobova.

Poslije analitičkog definisanja uglova rotacije ruke (minimalne strukture robota) q_1, q_2 i q_3 , slijedeći korak je određivanje uglova koji definišu orijentaciju efektora čija centralna tačka predstavlja jedan zglob u kom se sve tri ose rotacija sijeku. U suštini je ovdje potrebno odrediti za zadate Eulerove uglove, rotacije osa z_4, z_5 i z_6 koje predstavljaju orijentaciju efektoru u odnosu na nepokretan koordinatni sistem koji se nalazi u bazi robota. U centralnu tačku, tj. tačku koja predstavlja mjesto u kojem robot prihvata određeni objekt ili izvodi određenu radnu operaciju, smješta se jedan od najvažnijih koordinatnih sistema, pošto se nalazi na kraju robota

U konkretnom slučaju radi se o uglovima θ_4, θ_5 i q_6 koje treba analitički definisati.

Matrica kretanja efektoru ${}^e[W]$ se dobija kao proizvod posljednje tri matrice homogenih transformacija (4.50), (4.51) i (4.52) tj.:

$${}^r_e[W] = {}^3_4[D] \cdot {}^4_5[D] \cdot {}^5_6[D], \quad (4.113)$$

ili nakon množenja

$${}^r_e[W] = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 + s_4s_6 & -c_4c_5s_6 + s_4c_6 & c_4s_5 & c_4s_5d_6 \\ s_4c_5c_6 - c_4s_6 & -s_4c_5s_6 - c_4c_6 & s_4s_5 & s_4s_5d_6 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & -c_5 & -c_5d_6 + d_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.114)$$

Pomoću translatornog dijela određeni su uglovi rotacije zglobova ruke (minimalne strukture robota), a pomoću preostalog rotacionog dijela odredit će se uglovi orijentacije efektora robota θ_4, θ_5 i q_6 .

Ukupna rotacija efektora [sastoji se od proizvoda dvaju subrotacija, i to rotacije ruke i rotacije zgloba efektor, tj.:

$$[\text{ukupna rotacija}] = [\text{rotacija ruke}] + [\text{rotacija zgloba efektor}] \\ [R] = {}^0_3[R] \cdot {}^3_6[R].$$

Ako se prethodna matična jednačina (4.115) pomnoži s lijeve strane inverznom matricom ${}^0_3R^{-1}$, moguće je izračunati matricu rotacije zgloba efektor kao

$${}^3_6[R] = {}^0_3[R]^{-1} \cdot [R].$$

Matrica ${}^3_6[R]$ predstavlja submatricu rotacija matrice prikazane izrazom

$${}^r_e[R] = \begin{bmatrix} n_{ex} & o_{ex} & a_{ex} \\ n_{ey} & o_{ey} & a_{ey} \\ n_{ez} & o_{ez} & a_{ez} \end{bmatrix},$$

koja se izjednačava sa submatricom rotacija (4.114); tj.:

$$\begin{matrix} {}^3_6[R] & {}^r_e[R] \\ \mathbf{6447448} & \mathbf{644444474444448} \end{matrix} \begin{bmatrix} n_{ex} & o_{ex} & a_{ex} \\ n_{ey} & o_{ey} & a_{ey} \\ n_{ez} & o_{ez} & a_{ez} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 + s_4s_6 & -c_4c_5s_6 + s_4c_6 & c_4s_5 \\ s_4c_5c_6 - c_4s_6 & -s_4c_5s_6 - c_4c_6 & s_4s_5 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & -c_5 \end{bmatrix}. \quad (4.118)$$

Matrica ${}^0_3[R]$ se izjednačava sa submatricom rotacija (4.102), tj.:

$$\begin{matrix} {}^0_3[R] & {}^0_3[R] \\ \mathbf{6447448} & \mathbf{644474448} \end{matrix} \begin{bmatrix} n_{rx} & o_{rx} & a_{rx} \\ n_{ry} & o_{ry} & a_{ry} \\ n_{rz} & o_{rz} & a_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & s_1 & c_1s_{23} \\ s_1c_{23} & -c_1 & s_1s_{23} \\ s_{23} & 0 & -c_{23} \end{bmatrix}. \quad (4.119)$$

Da bi se mogla riješiti matična jednačina (4.116) potrebna je inverzija matrice ${}^0_3[R]$.

Ako je matrica ${}^0_3[R]$ reda "n" regularna ($\det {}^0_3[R] \neq 0$), onda se elementi njene adjungovane matrice ${}^0_3[R]**$ mogu pomnožiti brojem $\frac{1}{\det {}^0_3[R]}$. Tako dobijena matrica zove se *inverzna matrica* matrice ${}^0_3[R]$ u oznaci:

$${}^0_3[R]^{-1} = \frac{1}{\det {}^0_3[R]} {}^0_3[R]** \quad (4.120)$$

i ima svojstvo da pomnožena sa ${}^0_3[R]$ bilo s lijeva, bilo s desna daje jediničnu matricu I, tj.:

$${}^0_3[R] \cdot {}^0_3[R]^{-1} = {}^0_3[R]^{-1} \cdot {}^0_3[R] = I \quad (4.121)$$

Treba napomenuti da adjungovana matrica ${}^0_3[R]**$ predstavlja transponovanu kofaktor matricu ${}^0_3[R]^*$, odnosno ${}^0_3[R]** = {}^0_3[R]^*T$. Kofaktor matrica ${}^0_3[R]^*$ je matrica kofaktora koji predstavljaju vrijednosti subdeterminanti članova matrice ${}^0_3[R]$.

Za određivanje inverzne matrice matrice ${}^0_3[R]$, potreban je određeni broj računskih operacija. Međutim postoji još jedan oblik matrica koje ispunjavaju slijedeći uvjet:

$${}^0_3[R] \cdot {}^0_3[R]^T = I, \quad (4.122)$$

to su tzv. *ortogonalne matrice* kod kojih je inverzna matrica identički jednaka transponovanoj matrici, tj.

$${}^0_3[R]^{-1} = {}^0_3[R]^T. \quad (4.123)$$

Osnovni uvjet da bi matrica bila ortogonalna potrebno je da su njeni redovi i kolone ortogonalni, odnosno da zbrovi kvadrata članova matrice po redovima i kolonama budu jednaki jedinici, tj.:

$${}^0_3[R] = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & s_1 & c_1 s_{23} \\ s_1 c_{23} & -c_1 & s_1 s_{23} \\ s_{23} & 0 & -c_{23} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} (c_1 c_{23})^2 + s_1^2 + (c_1 s_{23})^2 &= 1 \\ (s_1 c_{23})^2 + (-c_1)^2 + (s_1 s_{23})^2 &= 1, \\ s_{23}^2 + (-c_{23})^2 &= 1 \end{aligned} \quad (4.124)$$

$$\begin{array}{ccc} (c_1 c_{23})^2 & s_1^2 & (c_1 s_{23})^2 \\ + & + & + \\ (s_1 c_{23})^2 & (-c_1)^2 & (s_1 s_{23})^2 \\ + & + & + \\ s_{23}^2 & 0 & (-c_{23})^2 \\ = & = & = \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Kao što se vidi matrica ${}^0_3[R]$ je u potpunosti ortogonalnog tipa što znači da je za njenu inverziju potrebno samo iznaći njenu transponovanu matricu ${}^0_3[R]^T$ koja se dobije na taj način što se svi redovi uzmu za kolone u istom poretku, a sve kolone za redove, takođe u istom poretku, tj.:

$${}^0_3[R] = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & s_1 & c_1 s_{23} \\ s_1 c_{23} & -c_1 & s_1 s_{23} \\ s_{23} & 0 & -c_{23} \end{bmatrix} \Rightarrow {}^0_3[R]^{-1} = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & s_1 c_{23} & s_{23} \\ s_1 & -c_1 & 0 \\ c_1 s_{23} & s_1 s_{23} & -c_{23} \end{bmatrix}. \quad (4.125)$$

Zamjenom jednačine (4.118) i jednačine za inverznu matricu (4.125) u jednačinu (4.116) dobije se

$$\begin{bmatrix} n_{ex} & o_{ex} & a_{ex} \\ n_{ey} & o_{ey} & a_{ey} \\ n_{ez} & o_{ez} & a_{ez} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & s_1 c_{23} & s_{23} \\ s_1 & -c_1 & 0 \\ c_1 s_{23} & s_1 s_{23} & -c_{23} \end{bmatrix} \cdot R, \quad (4.126)$$

gdje “ R ” matrica ciljne orijentacije efektora definisane matricom,

$${}_v[R] = \begin{bmatrix} \text{matrica} \\ \text{vanjske} \\ \text{orijentacije} \\ 3 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_x & O_x & A_x \\ N_y & O_y & A_y \\ N_z & O_z & A_z \end{bmatrix}, \quad (4.127)$$

koja je sastavljena od projekcija vektora orijentacije spoljašnjih koordinata u odnosu na osi baznog koordinatnog sistema.

S obzirom da se rješavaju posljednja tri ugla rotacije efektora može se reći da će matrica rotacija od zadnja tri zgloba biti računata po slijedećem obrascu:

$${}^3_6[R] = {}^3_4[R] \cdot {}^4_5[R] \cdot {}^5_6[R], \quad (4.128)$$

gdje su ${}^3_4[R]$, ${}^4_5[R]$, ${}^5_6[R]$ proizvodi submatrica matrica homogenih transformacija, koje predstavljaju rotacioni dio; tj.:

$${}^3_4[R] = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 \\ s_4 & 0 & -c_4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad {}^4_5[R] = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 \\ s_5 & 0 & -c_5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad {}^5_6[R] = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.129)$$

Ako jednačinu (4.128) pomnožimo sa lijeve strane matricom ${}^3_4[R]^{-1}$ dobija se

$${}^3_4[R]^T \cdot {}^3_6[R] = {}^4_5[R] \cdot {}^5_6[R], \quad (4.130)$$

i koristeći jednačinu (4.118) slijedi

$${}^3_4[R]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} n_{ex} & o_{ex} & a_{ex} \\ n_{ey} & o_{ey} & a_{ey} \\ n_{ez} & o_{ez} & a_{ez} \end{bmatrix} = {}^4_5[R] \cdot {}^5_6[R]. \quad (4.131)$$

Kako je matrica ${}^3_4[R] = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 \\ s_4 & 0 & -c_4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ortogonalna matrica, to je njena inverzija jednaka njenoj transponovanoj matrici, tj.:

$${}^3_4[R]^{-1} = {}^3_4[R]^T = \begin{bmatrix} c_4 & s_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ s_4 & -c_4 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.132)$$

tako da izraz (4.131) poprima slijedeći oblik:

$$\begin{bmatrix} c_4 & s_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ s_4 & -c_4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_{ex} & o_{ex} & a_{ex} \\ n_{ey} & o_{ey} & a_{ey} \\ n_{ez} & o_{ez} & a_{ez} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 \\ s_5 & 0 & -c_5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ odnosno}$$

$$\begin{bmatrix} c_4 n_{ex} + s_4 n_{ey} & c_4 o_{ex} + s_4 o_{ey} & c_4 a_{ex} + s_4 a_{ey} \\ n_{ez} & o_{ez} & a_{ez} \\ s_4 n_{ex} - c_4 n_{ey} & s_4 o_{ex} - c_4 o_{ey} & s_4 a_{ex} - c_4 a_{ey} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_5 c_6 & -c_5 s_6 & s_5 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & -c_5 \\ s_6 & c_6 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.133)$$

Izjednačavajući članove matrica (4.133) moguće je dobiti analitička rješenja preostala tri ugla.

Ugao rotacije q_4 se dobije izjednačavanjem članova matrica u jednačini (4.132)

$$q_4 = \arctan\left(\frac{a_{ey}}{a_{ex}}\right), \quad (4.134)$$

ili

$$q_4 = q_4 + 180^\circ. \quad (4.135)$$

Analitičko rješenje ugla q_5 je

$$q_5 = \arctan\left[\frac{\left(\frac{a_{ex}}{\pm\sqrt{a_{ex}^2 + a_{ey}^2}} a_{ex} + \frac{a_{ey}}{\pm\sqrt{a_{ex}^2 + a_{ey}^2}} a_{ey}\right)}{-a_{ez}}\right] = \arctan\left[-\frac{(a_{ex}^2 + a_{ey}^2)}{\pm a_{ez} \sqrt{a_{ex}^2 + a_{ey}^2}}\right],$$

odnosno

$$q_5 = \arctan \left[-\frac{\left(\pm \sqrt{a_{ex}^2 + a_{ey}^2} \right)}{a_{ez}} \right]. \quad (4.136)$$

Analitičko rješenje ugla q_6 se dobije u slijedećem obliku:

$$q_6 = \arctan \left(\frac{\frac{a_{ey}}{\pm \sqrt{a_{ex}^2 + a_{ey}^2}} n_{ex} - \frac{a_{ex}}{\pm \sqrt{a_{ex}^2 + a_{ey}^2}} n_{ey}}{\frac{a_{ey}}{\pm \sqrt{a_{ex}^2 + a_{ey}^2}} o_{ex} - \frac{a_{ex}}{\pm \sqrt{a_{ex}^2 + a_{ey}^2}} o_{ey}} \right), \quad \text{odnosno}$$

$$q_6 = \arctan \left(\frac{a_{ey} n_{ex} - a_{ex} n_{ey}}{a_{ey} o_{ex} - a_{ex} o_{ey}} \right). \quad (4.137)$$

Jednačinama (4.134), (4.136) i (4.137) definisano je analitičko rješenje inverzne kinematike u funkciji projekcija jediničnih vektora općenite orijentacije, dok je potrebno odrediti i uglove rotacije θ_4, θ_5 i q_6 u funkciji ciljne orijentacije.

Da bi se dobilo analitičko rješenje inverzne kinematike [potrebno je projekcije jediničnih vektora unutrašnje orijentacije ${}^r[R]$ izraziti preko projekcija jediničnih vektora spoljnje orijentacije R_v , koji predstavljaju ciljnu odnosno željenu orijentaciju efektora robota.

Koristeći jednačine (4.126) i (4.127) dobija se slijedeća matrična jednačina

$$\begin{bmatrix} n_{ex} & o_{ex} & a_{ex} \\ n_{ey} & o_{ey} & a_{ey} \\ n_{ez} & o_{ez} & a_{ez} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & s_1 c_{23} & s_{23} \\ s_1 & -c_1 & 0 \\ c_1 s_{23} & s_1 s_{23} & -c_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_x & O_y & A_z \\ N_y & O_y & A_y \\ N_z & O_z & A_z \end{bmatrix}, \quad \text{odnosno}$$

$$\begin{bmatrix} n_{ex} & o_{ex} & a_{ex} \\ n_{ey} & o_{ey} & a_{ey} \\ n_{ez} & o_{ez} & a_{ez} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} N_x + s_1 c_{23} N_y + s_{23} N_z & c_1 c_{23} O_x + s_1 c_{23} O_y + s_{23} O_z & c_1 c_{23} A_x + s_1 c_{23} A_y + s_{23} A_z \\ s_1 N_x - c_1 N_y & s_1 O_x - c_1 O_y & s_1 A_x - c_1 A_y \\ c_1 s_{23} N_x + s_1 s_{23} N_y - c_{23} N_z & c_1 s_{23} O_x + s_1 s_{23} O_y - c_{23} O_z & c_1 s_{23} A_x + s_1 s_{23} A_y - c_{23} A_z \end{bmatrix}. \quad (4.138)$$

Na osnovu jednakosti članova, matrica u jednačini (4.138) dobija slijedeće:

$$\begin{aligned} n_{ex} &= c_1 c_{23} N_x + s_1 c_{23} N_y + s_{23} N_z, \\ n_{ey} &= s_1 N_x - c_1 N_y, \\ n_{ez} &= c_1 s_{23} N_x + s_1 s_{23} N_y - c_{23} N_z, \end{aligned} \quad (4.139)$$

$$\begin{aligned} o_{ex} &= c_1 c_{23} O_x + s_1 c_{23} O_y + s_{23} O_z, \\ o_{ey} &= s_1 O_x - c_1 O_y, \\ o_{ez} &= c_1 s_{23} O_x + s_1 s_{23} O_y - c_{23} O_z, \end{aligned} \quad (4.140)$$

$$\begin{aligned}
a_{ex} &= c_1 c_{23} A_x + s_1 c_{23} A_y + s_{23} A_z, \\
a_{ey} &= s_1 A_x - c_1 A_y, \\
a_{ez} &= c_1 s_{23} A_x + s_1 s_{23} A_y - c_{23} A_z.
\end{aligned} \tag{4.141}$$

Na osnovu (4.139)-(4.141) i koristeći obrasce (4.134), (4.136) i (4.137), dobijaju se analitičke funkcije za q_4, q_5 i q_6 , tj.:

$$\theta_4 = \arctan\left(\frac{s_1 A_x - c_1 A_y}{c_1 c_{23} A_x + s_1 c_{23} A_y + s_{23} A_z}\right), \tag{4.142}$$

$$q_5 = \arctan\left\{-\frac{\left[\pm\sqrt{(c_1 c_{23} A_x + s_1 c_{23} A_y + s_{23} A_z)^2 + (s_1 A_x - c_1 A_y)^2}\right]}{(c_1 s_{23} A_x + s_1 s_{23} A_y - c_{23} A_z)}\right\}, \tag{4.143}$$

$$q_6 = \arctan\left[\frac{(s_1 A_x - c_1 A_y) \cdot (c_1 c_{23} N_x + s_1 c_{23} N_y + s_{23} N_z) - (c_1 c_{23} A_x + s_1 c_{23} A_y + s_{23} A_z) \cdot (s_1 N_x - c_1 N_y)}{(s_1 A_x - c_1 A_y) \cdot (c_1 c_{23} O_x + s_1 c_{23} O_y + s_{23} O_z) - (c_1 c_{23} A_x + s_1 c_{23} A_y + s_{23} A_z) \cdot (s_1 O_x - c_1 O_y)}\right]. \tag{4.144}$$

Jednačine (4.142)-(4.144) definisane su kinematskim modelom robota po D-H parametrima, te se mora postaviti njihov funkcionalna zavisnost u odnosu na nulti položaj robota, a to se postiže uvođenjem smjena kao u direktnoj kinematici, tj.:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \sin q_1 & s_{23} &= -\cos(q_2 + q_3) \\
c_1 &= \cos q_1 & c_{23} &= \sin(q_2 + q_3)
\end{aligned}$$

$$q_4 = \arctan\left[\frac{\sin q_1 \cdot A_x - \cos q_1 \cdot A_y}{\cos q_1 \sin(q_2 + q_3) \cdot A_x + \sin q_1 \sin(q_2 + q_3) \cdot A_y - \cos(q_2 + q_3) \cdot A_z}\right], \tag{4.145}$$

$$q_5 = \arctan\left\langle -\frac{\left\{\pm\sqrt{[\cos q_1 \sin(q_2 + q_3) \cdot A_x + \sin q_1 \sin(q_2 + q_3) \cdot A_y - \cos(q_2 + q_3) \cdot A_z]^2 + (\sin q_1 \cdot A_x - \cos q_1 \cdot A_y)^2}\right\}}{[-\cos q_1 \cos(q_2 + q_3) \cdot A_x - \sin q_1 \cos(q_2 + q_3) \cdot A_y - \sin(q_2 + q_3) \cdot A_z]}\right\rangle \tag{4.146}$$

$$\begin{aligned}
q_6 = \arctan\left\{ \frac{(s_1 q_1 \cdot A_x - \cos q_1 \cdot A_y) \cdot [\cos q_1 \sin(q_2 + q_3) \cdot N_x + \sin q_1 \sin(q_2 + q_3) \cdot N_y - \cos(q_2 + q_3) \cdot N_z] -}{(s_1 q_1 \cdot A_x - \cos q_1 \cdot A_y) \cdot [\cos q_1 \sin(q_2 + q_3) \cdot O_x + \sin q_1 \sin(q_2 + q_3) \cdot O_y - \cos(q_2 + q_3) \cdot O_z]} \dots \right. \\
\left. \dots \frac{-[\cos q_1 \sin(q_2 + q_3) \cdot A_x + \sin q_1 \sin(q_2 + q_3) \cdot A_y - \cos(q_2 + q_3) \cdot A_z] \cdot (s_1 q_1 \cdot N_x - \cos q_1 \cdot N_y)}{-[\cos q_1 \sin(q_2 + q_3) \cdot A_x + \sin q_1 \sin(q_2 + q_3) \cdot A_y - \cos(q_2 + q_3) \cdot A_z] \cdot (s_1 q_1 \cdot O_x - \cos q_1 \cdot O_y)} \right\}
\end{aligned} \tag{4.147}$$

U jednačinama (4.145)-(4.147) dat je analitički oblik promjene uglova rotacije posljednja tri zgloba kao funkcije prva tri ugla i ciljne vanjske orijentacije.

LITERATURA:

- [1] Craig, J. J.: *Introduction to Robotics*, Addison -Wesley Publishing Company, 1989.
- [2] Denavit, J.; Hartenberg, R.S.: *Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices*, ASMEJ of Applied Mechanics, 1955.
- [3] Dieter W. Wloka: *Roboter systeme 1-Teschnische Grundlagen*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992.
- [4] Gačo, Dž.: *Kinematska analiza robota pri zadanoj trajektoriji efektora*, Magistarski rad, Tehnički fakultet Bihać, 2001.
- [5] Halilagić, R.: *Prilog kinematičkoj analizi industrijskog robota sa šest rotacionih stepeni slobode kretanja*, Magistarski rad, Tehnički fakultet Bihać, 2001.
- [6] Husty, M.; Karger, A.; Sachs, H. & Steinhilper, W.: *Kinematik und Robotik*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.
- [7] Kovačić, Z.; Laci, V.; Bogdan, S.: *Osnove robotike*, FER, Zagreb, 1999.
- [8] Kreuzer, E.J.; Lugtenburg, J.-B.; Meißner, H.-G. & Trckenbrodt, A.: *Industrie roboter-Technik, Berechnung und anwendungsorientierte Auslegung*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994.
- [9] Kecskeméthy, A.: *Kinematics of Robots and Mehanisms*, Internatonal Summer School on Modeling and Control of Mechanisms and Robots, Publisching, Singapore, 1996.
- [10] Paul, R. P.: *Robot Manipulators. Mathematichs, Programming and Control*, Conference on Robots and Automation. Philadelphia, 1981.
- [11] Ranky, P.G. & Ho, C. Y. : *Robotmodeling*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985.
- [12] Šurina, T. ; Crneković, D.: *Industrijski roboti*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.
- [13] Vukobratović, M.; Cvetković, V.; Krišćanski, M.: *Kinematički i dinamički prilaz sintezi kretanja manipulacionih robota*, Institut "Mihajlo Pupin", Beograd, 1983.

- [14] Vukobratović, M.; Stokić, D.; Kriščanski, N.; Kriščanski, M.; Hristić, D.; Karan, B.; Vujić, D.; Đurović, M.: *Uvod u Robotiku*, Institut "Mihajlo Pupin", Beograd, 1986.

- [15] Wolka, D.W.: *Roboter sisteme*, Technische Universität des Saarlandes im Stadtwald, 1992.

Dinamička analiza robota

5

Avdo Voloder, Mašinski fakultet Sarajevo

5.1. Osnovne napomene o značaju i metodama proučavanja dinamike robota

Kada je u pitanju izučavanje dinamike robotskog sistema, u početku se pri njegovom projektovanju puna pažnja posvećivala uglavnom njegovoj kinematici, dok se razmatranje dinamičkih efekata pri kretanju većinom baziralo na iskustvima, bez detaljnije analize.

Savremena tehnologija postavlja sve strožije zahtjeve u pogledu veće preciznosti, pouzdanosti i brzine rada proizvodnih sistema uopšte, što je posebno izraženo kada je riječ o robotskim sistemima. Veoma složeni zahtjevi u pogledu projektovanja robota, kao što su promjenljivost njegove geometrije, režima rada i opterećenja, optimizacija vremena kretanja i potrošnje pogonske energije itd, doveli su do potrebe sagledavanja kompleksne dinamike robota. Ovi zahtjevi su doprinijeli da dinamika robota postane jedna od najznačajnijih oblasti istraživanja u robotici. Već i sama promjenljiva geometrija robota doprinosi priličnom usložnjavanju njegovog dinamičkog modela. Pri tome treba imati u vidu da u dinamici sistema često veći problem predstavlja promjenljiva geometrija sistema čak i pri jednostavnom obliku kretanja, nego najkomplicovaniji zakoni kretanja geometrijski nepromjenljivog sistema u toku vremena.

Izučavanje dinamike robota se svodi na rješavanje dva problema. U prvom slučaju radi se o direktnom problemu dinamike, što podrazumjeva određivanje pogonskog opterećenja (sila/momenata) aktuatora koji izazivaju zadano kretanje sistema robota,

odnosno članaka i njegove prihvatnice, pri čemu se polazi od poznatih unutrašnjih koordinata robota. Unutrašnje koordinate je potrebno dobiti polazeći od zahtjevanih vanjskih koordinata, a što je vezano za inverzni problem kinematike robota. Rješavanjem direktnog problema dinamike se ujedno rješava problem upravljanja. Kod inverznog problema dinamike polazi se od poznatih sila/momenata, a određuju se zakoni kretanja koje će one izazvati, što je vezano za problem simulacije. U tom slučaju se dobivaju kinematske veličine kretanja u lokalnim koordinatama, pri čemu je korištenjem direktnog problemu kinematike potrebno te koordinate preračunati u globalne koordinate. U oba slučaja je moguće određivanje i nekih drugih mehaničkih veličina, kao što su unutrašnje sile u zglobovima robota, deformacije, naprezanja itd. Inverzni problem dinamike je složeniji, jer pri tome veliku poteškoću predstavlja rješavanje obimnih nelinearnih diferencijalnih jednačina kretanja koje su transcendentnog karaktera, pri čemu su one spregnute kako po unutrašnjim koordinatama robota, tako i po karakteristikama brzina i ubrzanja robotskog sistema. Direktni dinamički problem je moguće riješiti analitičkim načinom, dok je inverzni problem, zbog pomenutog karaktera diferencijalnih jednačina kretanja, moguće riješiti jedino numeričkim metodama.

Sa gledišta dinamike, značajno je i pitanje izbora tipa aktuatora, kao pokretača robota, zatim prenosnika snage, njihova veza sa člancima robota, kao i pitanje pogonske energije. Problem pogonske energije je bitan pogotovu kada se zna da su roboti u prosjeku veći potrošači energije nego njima slične konvencionalne mašine.

S obzirom na način formiranja dinamičkih jednačina robota, postupci njihovog formiranja se mogu podijeliti na ručne i automatske.

Ručni način formiranja jednačina dinamičkog modela robota podrazumijeva korištenje klasičnog postupka uz upotrebu olovke i papira, nekom odabranom metodom. Kao rezultat toga dobiju se određene jednačine koje daju vezu između pogonskih opterećenja robota i karakteristika kretanja. Ovaj način formiranja jednačina podrazumijeva veliku koncentraciju, a ponekad i potrebu za više puta ponovljenom kontrolom postupka. Zbog toga je on pogodniji u slučajevima kada robot ima manje stepeni slobode kretanja, dok je za veći broj stepeni slobode kretanja prilično mukotrpan.

Automatski način formiranja dinamičkih jednačina kretanja robota je usavršen u novije vrijeme zahvaljujući naglom razvoju računarske tehnike. Veoma je pogodan za robote sa više stepeni slobode kretanja. Pri tom računar nekom odabranom metodom sam automatski formira dinamičke jednačine. Ovaj postupak je zasnovan na korištenju rekursivnih kinematskih i dinamičkih jednačina. Dobijeni rezultati su u numeričkom obliku. Nedostatak ovog metoda je u složenosti strukture ovog načina modeliranja. Isto tako, usljed numeričkog oblika dobijenih rezultata, ne može se u dovoljnoj mjeri napraviti analiza uticaja pojedinih parametara na krajni rezultat.

S obzirom na zakone mehanike koji se koriste pri formiranju jednačina kretanja, metode njihovog formiranja mogu da budu:

- metoda na bazi Newton-Eulerovih zakona,
- metoda na bazi Lagrangeovih jednačina,
- metoda na bazi Appelovih jednačina.

Uglavnom se koriste prve dvije metode i one će ovdje biti prikazane. Newton-Eulerova metoda koristi rekurzivne kinematske i dinamičke relacije, pri čemu u jednačinama figurišu kako pogonska opterećenja robota, tako i zakoni kretanja kao i unutrašnje reakcije u zglobovima. Lagrangeova metoda je ustvari energetska metoda i njenim korištenjem u dobijenim jednačinama figurišu pogonska opterećenja robota, kao i zakoni kretanja. Prednost prve metode nad drugom je što se njenim korištenjem mogu odrediti i nepoznate dinamičke reakcije u zglobovima robota, a nedostatak je što se ne može izbjeći određivanje tih veličina čak i u slučaju kada se one ne traže kao nepoznati parametri.

5.2. Kinematske relacije potrebne za primjenu Newton-Eulerove i Lagrangeove metode

Ovdje će biti prikazano izvođenje kinematskih matričnih izraza, na osnovu kojih se mogu naći rekurzivne relacije potrebne za primjenu Newton-Eulerove kao i relacije potrebne za primjenu Lagrangeove metode. Kada su u pitanju kinematske relacije za primjenu prve metode, kao što će se vidjeti, potrebno je koristiti izraze za ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje članka, za ubrzanje ishodišta članka, kao i ubrzanje njegovog centra inercije. Za primjenu druge metode potrebno je poznavati brzinske karakteristike pojedinih članaka. Prvo će se pomenute kinematske veličine izraziti u nepomičnom koordinatnom sistemu (0).

5.2.1. Brzina tačke

Neka je (0) nepomični koordinatni sistem, a (A) pomični sistem u odnosu na koji se relativno kreće tačka Q (sl. 5.1.). Ako je ${}^A\{p_Q\}$ relativni radijus vektor tačke Q u odnosu na sistem (A), prikazan u tom sistemu, tada je radijus vektor tačke Q u odnosu na sistem (0), prikazan u tom sistemu:

$${}^0\{p_Q\} = {}^0\{p_A\} + {}^A\{p_Q\} = {}^0\{p_A\} + {}^0[R]^A\{p_Q\}, \quad (5.1)$$

gdje je:

${}^0\{p_A\}$ - relativni radijus vektor ishodišta sistema (A), u odnosu na ishodište sistema (0), prikazan u tom sistemu,

${}^0[R]^A$ - matrica rotacije koordinatnog sistema (A) u odnosu na nepomični koordinatni sistem (0),

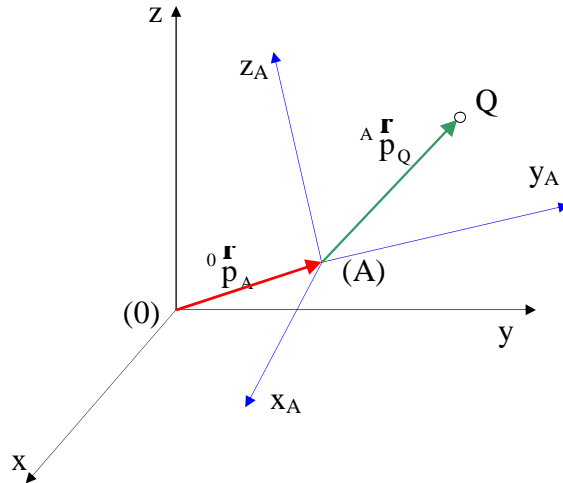
Apsolutna brzina tačke Q, prikazana u nepomičnom sistemu, prema teoremi slaganja brzina za složeno kretanje tačke, je

$${}^0\{v_Q\} = {}^0\{v_A\} + {}^0\{\omega_A\} \times {}^A\{p_Q\} + {}^A\{v_Q\}, \quad (5.2)$$

gdje je:

${}^0\{\omega_A\}$ - vektor ugaone brzine sistema A, prikazan u nepomičnom sistemu.

${}^0\{v_Q^A\}$ - vektor relativne brzine tačke Q u odnosu na sistem (A), prikazan u sistemu (0),



Slika 5.1. Uz analizu brzine tačke

Izraz (5.2) se može pisati u obliku

$${}^0\{v_Q\} = {}^0\{v_A\} + {}^0\{\omega_A\} \times ({}^0[\mathbf{R}]^A \{p_Q^A\}) + {}^0[\mathbf{R}]^A \{v_Q^A\}. \quad (5.3)$$

S druge strane, vektor brzine tačke Q se može dobiti i direktnim diferenciranjem izraza (5.1) po vremenu

$${}^0\{v_Q\} = \frac{d}{dt} ({}^0\{p_A\}) + \frac{d}{dt} ({}^0[\mathbf{R}]^A \{p_Q^A\}) = {}^0\{v_A\} + \frac{d}{dt} ({}^0[\mathbf{R}]^A \{p_Q^A\}). \quad (5.4)$$

Upoređivanjem izraza (5.3) i (5.4) dobija se izvod po vremenu umnoška matrice rotacije ${}^0[\mathbf{R}]^A$ i relativnog radijus vektora tačke Q u odnosu na sistem (A), prikazanog u tom sistemu

$$\frac{d}{dt} ({}^0[\mathbf{R}]^A \{p_Q^A\}) = {}^0\{\omega_A\} \times ({}^0[\mathbf{R}]^A \{p_Q^A\}) + {}^0[\mathbf{R}]^A \{v_Q^A\}. \quad (5.5)$$

Ova relacija je od bitnog značaja, zbog toga što se može iskoristiti kada je u pitanju izvod po vremenu proizvoda matrice rotacije proizvoljnog pomičnog koordinatnog sistema u odnosu na nepomični sistem (0) i bilo kojeg relativnog vektora u odnosu na pomični sistem, prikazanog u tom sistemu.

Ukoliko tačka Q ima konstantan položaj u odnosu na sistem (A), tada je

$$\{^A v_Q\} = 0,$$

pa je brzina tačke Q

$${}^0\{v_Q\} = {}^0\{v_A\} + {}^0\{\omega_A\} \times ({}^0[R]^A \{^A p_Q\}). \quad (5.6)$$

5.2.2. Ubrzanje tačke

Diferencirajući izraz (5.3) po vremenu, dobit će se ubrzanje tačke Q prikazano u nepomičnom sistemu, za opšti slučaj kada tačka Q ima promjenljiv položaj u odnosu na pomični koordinatni sistem (A)

$$\begin{aligned} {}^0\{a_Q\} = & \frac{d}{dt} ({}^0\{v_A\}) + \frac{d}{dt} ({}^0\{\omega_A\}) \times ({}^0[R]^A \{^A p_Q\}) + {}^0\{\omega_A\} \times \frac{d}{dt} ({}^0[R]^A \{^A p_Q\}) + \\ & + \frac{d}{dt} ({}^0[R]^A \{^A v_Q\}) \end{aligned} \quad (5.7)$$

U prethodnom izrazu je:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} ({}^0\{v_A\}) = & {}^0\{a_A\} - \text{ubrzanje ishodišta sistema (A) prikazano u nepomičnom sistemu,} \\ \frac{d}{dt} ({}^0\{\omega_A\}) = & {}^0\{\epsilon_A\} - \text{ugaono ubrzanje sistema (A) prikazano u nepomičnom sistemu.} \end{aligned}$$

Analogno izrazu (5.5), izvod po vremenu proizvoda matrice rotacije ${}^0[R]^A$ i vektora relativne brzine ${}^A\{v_Q\}$ je

$$\frac{d}{dt} ({}^0[R]^A \{^A v_Q\}) = {}^0\{\omega_A\} \times ({}^0[R]^A \{^A v_Q\}) + {}^0[R]^A \{^A a_Q\}, \quad (5.8)$$

gdje je:

$${}^0\{^A a_Q\} - \text{vektor relativnog ubrzanja tačke Q u odnosu na sistem (A), prikazan u sistemu (0).}$$

Izraz (5.7) se tada transformiše u oblik

$$\begin{aligned} {}^0\{a_Q\} = & {}^0\{a_A\} + {}^0\{\epsilon_A\} \times ({}^0[R]^A \{^A p_Q\}) + {}^0\{\omega_A\} \times [{}^0\{\omega_A\} \times ({}^0[R]^A \{^A p_Q\})] + \\ & + 2 \cdot {}^0\{\omega_A\} \times ({}^0[R]^A \{^A v_Q\}) + {}^0[R]^A \{^A a_Q\}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

U slučaju kada je vektor $\{^A p_Q\}$ konstantan u sistemu (A), tada je

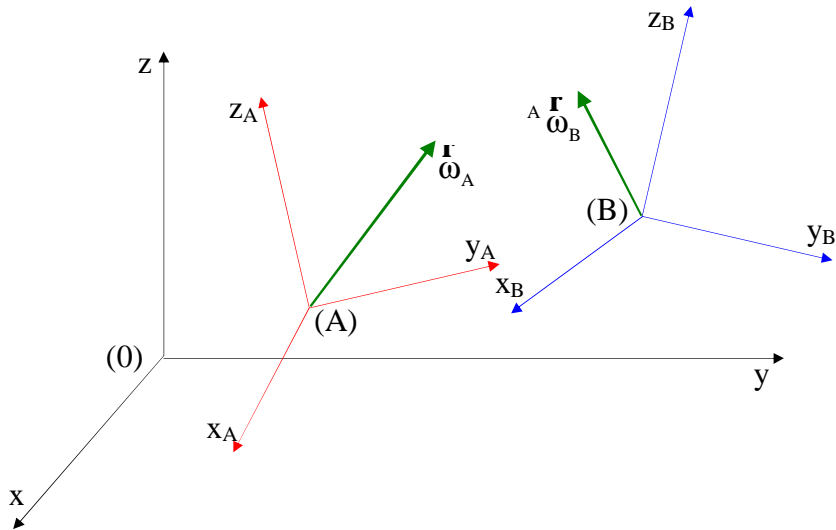
$$\{^A v_Q\} = 0, \quad \{^A a_Q\} = 0,$$

pa je

$${}^0\{a_Q\} = {}^0\{a_A\} + {}^0\{\varepsilon_A\} \times ({}^0[R]^A \{^A p_Q\}) + {}^0\{\omega_A\} \times [{}^0\{\omega_A\} \times ({}^0[R]^A \{^A p_Q\})]. \quad (5.10)$$

5.2.3. Ugaona brzina tijela

Pretpostavimo da koordinatni sistem (A) ima apsolutnu ugaonu brzinu $\{\omega_A\}$, a da koordinatni sistem (B) ima relativnu ugaonu brzinu $\{^A \omega_B\}$ u odnosu na sistem (A) (sl. 5.2.). Tada je apsolutna ugaona brzina sistema (B) prikazana u nepomičnom sistemu (0)



Slika 5.2. Uz analizu ugaone brzine tijela

$${}^0\{\omega_B\} = {}^0\{\omega_A\} + \{^A \omega_B\}, \quad (5.11)$$

odnosno

$${}^0\{\omega_B\} = {}^0\{\omega_A\} + {}^0[R]^A \{^A \omega_B\}. \quad (5.12)$$

5.2.4. Ugaono ubrzanje tijela

Ukoliko se izraz (5.12) diferencira po vremenu, dobit će se ugaono ubrzanje sistema (B) prikazano u sistemu (0)

$${}^0\{\boldsymbol{\varepsilon}_B\} = \frac{d}{dt}({}^0\{\boldsymbol{\omega}_B\}) = \frac{d}{dt}({}^0\{\boldsymbol{\omega}_A\}) + \frac{d}{dt}({}^0[\mathbf{R}]^A \{{}^A\boldsymbol{\omega}_B\}). \quad (5.13)$$

Prvi član sa desne strane izraza (5.13) predstavlja ugaono ubrzanje sistema (A), prikazano u sistemu (0)

$$\frac{d}{dt}({}^0\{\boldsymbol{\omega}_A\}) = {}^0\{\boldsymbol{\varepsilon}_A\},$$

a drugi član, analogno izrazu (5.5), je

$$\frac{d}{dt}({}^0[\mathbf{R}]^A \{{}^A\boldsymbol{\omega}_B\}) = {}^0\{\boldsymbol{\omega}_A\} \times ({}^0[\mathbf{R}]^A \{{}^A\boldsymbol{\omega}_B\}) + {}^0[\mathbf{R}]^A \{{}^A\boldsymbol{\varepsilon}_B\}, \quad (5.14)$$

gdje je :

${}^A\{\boldsymbol{\varepsilon}_B\}$ - relativno ugaono ubrzanje sistema (B) u odnosu na sistem (A), prikazano u tom sistemu.

Prema tome slijedi

$${}^0\{\boldsymbol{\varepsilon}_B\} = {}^0\{\boldsymbol{\varepsilon}_A\} + {}^0\{\boldsymbol{\omega}_A\} \times ({}^0[\mathbf{R}]^A \{{}^A\boldsymbol{\omega}_B\}) + {}^0[\mathbf{R}]^A \{{}^A\boldsymbol{\varepsilon}_B\}. \quad (5.15)$$

Na osnovu dobijenih izraza: (5.3), (5.6), (5.9), (5.10), (5.12) i (5.15) mogu se dobiti relacije za kinematske karakteristike robotskog članka, kao funkcije pojedinih parametara istog članka i parametara susjednog članka.

5.3. Newton-Eulerova metoda

Newton-Eulerova metoda (Newton-Eulerov iteracioni dinamički algoritam) sastoji se iz dva dijela: spoljašnje i unutrašnje iteracije.

U spoljašnjoj iteraciji se, idući od baznog ka izvršnom članku robota, određuju kinematske karakteristike pojedinih članaka: ugaone brzine, ugaona ubrzanja, ubrzanja ishodišta članaka i ubrzanja njihovih centara inercije, kao i dinamičke karakteristike: glavni vektori sila koje djeluju na članke, glavni momenti sila u odnosu na njihove centre inercije kao pol.

U okviru unutrašnje iteracije se, idući od izvršnog ka baznom članku robota, određuju sile i momenti međusobnog djelovanja susjednih članaka u njihovim zglobovima, kao i sile/momenti aktuatora članaka robota.

Pomenute veličine je potrebno izraziti u matričnom obliku, u koordinatnim sistemima posmatranih članaka. U tom cilju koristit će se već dobijeni izrazi.

5.3.1. Spoljašnja iteracija

a) Ugaona brzina članka

Ako su i -ti i $(i+1)$ -ti članak robota međusobno vezani rotacionim zglobovom $(i+1)$, tada će na osnovu izraza (5.12) ugaona brzina članka $(i+1)$, prikazana u nepomičnom koordinatnom sistemu biti

$${}^0\{\omega_{i+1}\} = {}^0\{\omega_i\} + {}^0[R]_i^i \{ \omega_{i+1} \}, \quad (5.16)$$

gdje je:

${}^i\{\omega_{i+1}\}$ - relativna ugaona brzina članka $(i+1)$ u odnosu na sistem (i) , prikazana u tom koordinatnom sistemu.

Ugaona brzina članka $(i+1)$ prikazana u njegovom koordinatnom sistemu dobit će se ako se izraz (5.16) pomnoži sa lijeve strane matricom rotacije ${}^{i+1}_0[R]$:

$$\begin{aligned} {}^{i+1}\{\omega_{i+1}\} &= {}^{i+1}_0[R] \cdot {}^0\{\omega_{i+1}\} = {}^{i+1}_0[R] \cdot {}^0\{\omega_i\} + {}^{i+1}_0[R] \cdot {}^0[R]_i^i \{ \omega_{i+1} \} = \\ &= {}^{i+1}\{\omega_i\} + {}^{i+1}_i[R] \{ \omega_{i+1} \} = {}^{i+1}_i[R] \{ \omega_i \} + {}^{i+1}_i \{ \omega_{i+1} \}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Posljednji član u prethodnom izrazu se može napisati u obliku

$${}^{i+1}_i \{ \omega_{i+1} \} = \mathfrak{G}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\{\hat{z}_{i+1}\} \quad (5.18)$$

gdje je :

\mathfrak{G}_{i+1} - projekcija zglobne ugaone brzine članka $(i+1)$ u odnosu na članak (i) na osu rotacije z_{i+1} ,

${}^{i+1}\{\hat{z}_{i+1}\} = (0 \ 1 \ 0)^T$ - jedinični vektor zglobne ose članka $(i+1)$, prikazan u sistemu tog članka.

Prema tome je

$${}^{i+1}\{\omega_{i+1}\} = {}^{i+1}_i[R] \{ \omega_i \} + \mathfrak{G}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\{\hat{z}_{i+1}\}. \quad (5.19)$$

Za slučaj kada je $(i+1)$ -ti zglob robota translatoran (prizmastičan), relativna ugaona brzina članka $(i+1)$ u odnosu na prethodni članak (zglobna ugaona brzina) jednaka je nuli

$$\mathfrak{G}_{i+1} = 0,$$

pa je ugaona brzina tog članka

$${}^{i+1}\{\omega_{i+1}\} = {}^{i+1}[\mathbf{R}]^i \{\omega_i\}. \quad (5.20)$$

b) Ugaono ubrzanje članka

Ako su i -ti i $(i+1)$ -ti članak robota međusobno vezani rotacionim zglobovom $(i+1)$, tada će na osnovu izraza (5.15) ugaono ubrzanje članka $(i+1)$ prikazano u nepomičnom koordinatnom sistemu biti

$${}^0\{\epsilon_{i+1}\} = {}^0\{\epsilon_i\} + {}^0\{\omega_i\} \times \left({}^0[\mathbf{R}]^i \{\omega_{i+1}\} \right) + {}^0[\mathbf{R}]^i \{\epsilon_{i+1}\}, \quad (5.21)$$

gdje je:

${}^i\{\epsilon_{i+1}\}$ - relativno ugaono ubrzanje članka $(i+1)$ u odnosu na sistem (i) , prikazano u tom koordinatnom sistemu.

Slično kao u prethodnom slučaju, ugaono ubrzanje članka $(i+1)$ prikazano u njegovom koordinatnom sistemu dobit će se ako se izraz (5.21) pomnoži sa lijeve strane matricom rotacije ${}^{i+1}[\mathbf{R}]^0$:

$$\begin{aligned} {}^{i+1}\{\epsilon_{i+1}\} &= {}^{i+1}[\mathbf{R}]^0 \left\{ {}^0\{\epsilon_{i+1}\} = {}^{i+1}[\mathbf{R}]^0 \{\epsilon_i\} + \left({}^{i+1}[\mathbf{R}]^0 \{\omega_i\} \right) \times \left({}^{i+1}[\mathbf{R}]^0 [\mathbf{R}]^i \{\omega_{i+1}\} \right) + \right. \\ &\quad \left. + {}^{i+1}[\mathbf{R}]^0 [\mathbf{R}]^i \{\epsilon_{i+1}\} \right\} = {}^{i+1}\{\epsilon_i\} + {}^{i+1}\{\omega_i\} \times \left({}^{i+1}[\mathbf{R}]^0 \cdot \{\omega_{i+1}\} \right) + {}^{i+1}[\mathbf{R}]^i \{\epsilon_{i+1}\} = \\ &= {}^{i+1}[\mathbf{R}]^i \{\epsilon_i\} + \left({}^{i+1}[\mathbf{R}]^i \{\omega_i\} \right) \times \left({}^{i+1}\{\omega_{i+1}\} \right) + {}^{i+1}\{\epsilon_{i+1}\}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Pošto je

$${}^{i+1}\{\bar{\epsilon}_{i+1}\} = \mathfrak{G}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\{\hat{z}_{i+1}\},$$

gdje je : \mathfrak{G}_{i+1} - projekcija zglobnog ugaonog ubrzanja članka $(i+1)$ u odnosu na i -ti članak, na osu rotacije z_{i+1} ,

tada se dobija:

$${}^{i+1}\{\epsilon_{i+1}\} = {}^{i+1}[\mathbf{R}]^i \{\epsilon_i\} + \mathfrak{G}_{i+1} \left({}^{i+1}[\mathbf{R}]^i \{\omega_i\} \right) \times {}^{i+1}\{\hat{z}_{i+1}\} + \mathfrak{G}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\{\hat{z}_{i+1}\}. \quad (5.23)$$

Za slučaj kada je $(i+1)$ -ti zglob robota translatoran (prizmastičan), tada je i relativno ugaono ubrzanje članka $(i+1)$ u odnosu na prethodni članak (zglobno ugaono ubrzanje) jednako nuli

$$\mathfrak{G}_{i+1} = 0,$$

pa je ugaono ubrzanje tog članka

$${}^{i+1}\{\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}\} = {}^{i+1}[\mathbf{R}]^i \{\boldsymbol{\varepsilon}_i\}. \quad (5.24)$$

c) Ubrzanje ishodišta koordinatnog sistema članka

Ako su i -ti i $(i+1)$ -ti članak robota međusobno vezani rotacionim zglobovom $(i+1)$, tada će na osnovu izraza (5.10) ubrzanje ishodišta članka $(i+1)$, prikazano u nepomičnom koordinatnom sistemu biti

$${}^0\{\mathbf{a}_{i+1}\} = {}^0\{\mathbf{a}_i\} + {}^0\{\boldsymbol{\varepsilon}_i\} \times \left({}^0[\mathbf{R}]^i \{^i\mathbf{p}_{i+1}\} \right) + {}^0\{\boldsymbol{\omega}_i\} \times \left[{}^0\{\boldsymbol{\omega}_i\} \times \left({}^0[\mathbf{R}]^i \{^i\mathbf{p}_{i+1}\} \right) \right], \quad (5.25)$$

gdje je :

${}^0\{\mathbf{a}_i\}$ - ubrzanje ishodišta koordinatnog sistema (i) izraženo u nepomičnom koordinatnom sistemu,

$\{^i\mathbf{p}_{i+1}\}$ - relativni radijus vektor ishodišta sistema $(i+1)$ u odnosu na koordinatni sistem (i) , izražen u tom sistemu.

Množeći izraz (5.25) matricom rotacije ${}^{i+1}_0[\mathbf{R}]$ dobija se ubrzanje ishodišta koordinatnog sistema $(i+1)$ prikazano u istom sistemu

$$\begin{aligned} {}^{i+1}\{\mathbf{a}_{i+1}\} &= {}^{i+1}[\mathbf{R}]^0 \{\mathbf{a}_{i+1}\} = {}^{i+1}\{\mathbf{a}_i\} + {}^{i+1}\{\boldsymbol{\varepsilon}_i\} \times \left({}^{i+1}[\mathbf{R}]^i \{^i\mathbf{p}_{i+1}\} \right) + {}^{i+1}\{\boldsymbol{\omega}_i\} \times \left[{}^{i+1}\{\boldsymbol{\omega}_i\} \times \left({}^{i+1}[\mathbf{R}]^i \{^i\mathbf{p}_{i+1}\} \right) \right] = \\ &= {}^{i+1}[\mathbf{R}]^i \{\mathbf{a}_i\} + \left({}^{i+1}[\mathbf{R}]^i \{\boldsymbol{\varepsilon}_i\} \right) \times \left({}^{i+1}[\mathbf{R}]^i \{^i\mathbf{p}_{i+1}\} \right) + \\ &+ \left({}^{i+1}[\mathbf{R}]^i \{\boldsymbol{\omega}_i\} \right) \times \left[\left({}^{i+1}[\mathbf{R}]^i \{\boldsymbol{\omega}_i\} \right) \times \left({}^{i+1}[\mathbf{R}]^i \{^i\mathbf{p}_{i+1}\} \right) \right], \end{aligned}$$

odnosno

$${}^{i+1}\{\mathbf{a}_{i+1}\} = {}^{i+1}[\mathbf{R}] \cdot \left[{}^i\{\mathbf{a}_i\} + {}^i\{\boldsymbol{\varepsilon}_i\} \times \{^i\mathbf{p}_{i+1}\} + {}^i\{\boldsymbol{\omega}_i\} \times \left[{}^i\{\boldsymbol{\omega}_i\} \times \{^i\mathbf{p}_{i+1}\} \right] \right]. \quad (5.26)$$

Ako se radi o translatornom $(i+1)$ -tom zglobovu robota, tada je na osnovu izraza (5.9) ubrzanje ishodišta članka $(i+1)$ prikazano u nepomičnom sistemu

$$\begin{aligned} {}^0\{\mathbf{a}_{i+1}\} &= {}^0\{\mathbf{a}_i\} + {}^0\{\boldsymbol{\varepsilon}_i\} \times \left({}^0[\mathbf{R}]^i \{^i\mathbf{p}_{i+1}\} \right) + {}^0\{\boldsymbol{\omega}_i\} \times \left[{}^0\{\boldsymbol{\omega}_i\} \times \left({}^0[\mathbf{R}]^i \{^i\mathbf{p}_{i+1}\} \right) \right] + \\ &+ 2 \cdot {}^0\{\boldsymbol{\omega}_i\} \times \left({}^0[\mathbf{R}]^i \{^i\mathbf{v}_{i+1}\} \right) + {}^0[\mathbf{R}]^i \{^i\mathbf{a}_{i+1}\}, \end{aligned} \quad (5.27)$$

gdje je:

$\{^i\mathbf{v}_{i+1}\}$, $\{^i\mathbf{a}_{i+1}\}$ - relativna brzina i relativno ubrzanje ishodišta koordinatnog sistema $(i+1)$ -og translatornog članka u odnosu na članak (i) , prikazan u sistemu članka (i) .

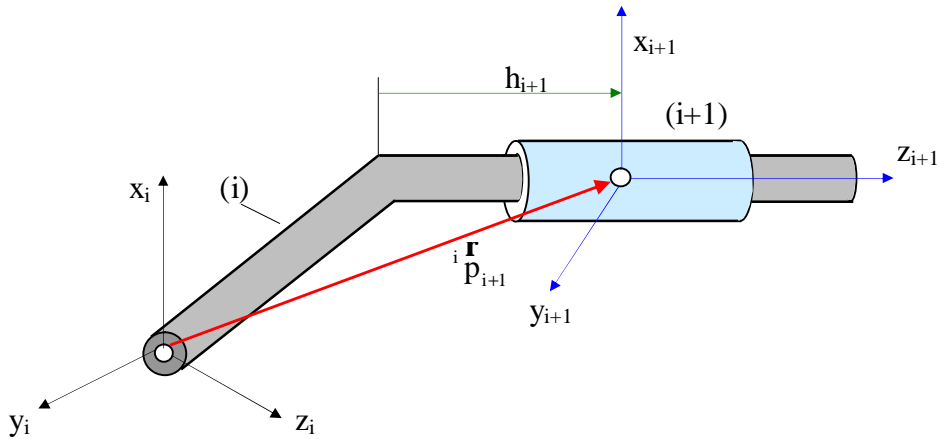
Pomenute relativne veličine prikazane u sistemu (i) će biti (sl.5.3.)

$${}^i\{v_{i+1}\} = {}^i[R]^{i+1} \{v_{i+1}\} = {}^i[R] \cdot \mathbb{H}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\{\hat{z}_{i+1}\}, \quad (5.28)$$

$${}^i\{a_{i+1}\} = {}^i[R]^{i+1} \{a_{i+1}\} = {}^i[R] \cdot \mathbb{H}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\{\hat{z}_{i+1}\}, \quad (5.29)$$

gdje je:

h_{i+1} - promjenljiva relativna translatorska koordinata članka (i+1) u odnosu na članak (i).



Slika 5.3. Uz analizu karakteristika robotskog članka sa translatorsnim zglobom

Ubrzanje ishodišta koordinatnog sistema translatorsnog (i+1)-og članka prikazano u tom sistemu će biti

$${}^{i+1}\{a_{i+1}\} = {}^{i+1}[R]^0 \{a_{i+1}\} = {}^{i+1}\{a_i\} + {}^{i+1}\{\epsilon_i\} \times \left({}^{i+1}[R] \cdot {}^i\{p_{i+1}\} \right) + {}^{i+1}\{\omega_i\} \times \left[{}^{i+1}\{\omega_i\} \times \left({}^{i+1}[R] \cdot {}^i\{p_{i+1}\} \right) \right] + 2 \cdot {}^{i+1}\{\omega_i\} \times \left({}^{i+1}[R] \cdot {}^i[R] \cdot \mathbb{H}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\{\hat{z}_{i+1}\} \right) + {}^{i+1}[R] \cdot {}^i[R] \cdot \mathbb{H}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\{\hat{z}_{i+1}\}. \quad (5.30)$$

Transformacijom izraza (5.30), pri čemu treba imati u vidu da za translatorsni zglob vrijedi

$${}^{i+1}\{\omega_i\} = {}^{i+1}\{\omega_{i+1}\},$$

dobija se

$${}^{i+1}\{a_{i+1}\} = {}^{i+1}[R] \cdot \left[{}^i\{a_i\} + {}^i\{\epsilon_i\} \times {}^i\{p_{i+1}\} + {}^i\{\omega_i\} \times \left({}^i\{\omega_i\} \times {}^i\{p_{i+1}\} \right) \right] + 2 \cdot \mathbb{H}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\{\omega_{i+1}\} \times {}^{i+1}\{\hat{z}_{i+1}\} + \mathbb{H}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\{\hat{z}_{i+1}\}. \quad (5.31)$$

d) Ubrzanje centra inercije članka

Na sličan način se dobija ubrzanje centra inercije članka (i+1), bez obzira da li je on rotacioni ili translacioni. Ako se vektor centra inercije članka (i+1) u odnosu na ishodište tog sistema i prikazan u tom sistemu obilježi sa: ${}^{i+1}\{p_{ci+1}\}$, na osnovu izraza (5.10) će ubrzanje centra inercije članka (i+1) u nepomičnom koordinatnom sistemu biti

$${}^0\{a_{ci+1}\} = {}^0\{a_{i+1}\} + {}^0\{\varepsilon_{i+1}\} \times \left({}^0[R] {}^{i+1}\{p_{ci+1}\} \right) + {}^0\{\omega_{i+1}\} \times \left[{}^0\{\omega_{i+1}\} \times \left({}^0[R] {}^{i+1}\{p_{ci+1}\} \right) \right], \quad (5.32)$$

a u sistemu (i+1) bit će

$${}^{i+1}\{a_{ci+1}\} = {}^{i+1}[R] {}^0\{a_{ci+1}\}$$

odnosno

$${}^{i+1}\{a_{ci+1}\} = {}^{i+1}\{a_{i+1}\} + {}^{i+1}\{\varepsilon_{i+1}\} \times {}^{i+1}\{p_{ci+1}\} + {}^{i+1}\{\omega_{i+1}\} \times \left({}^{i+1}\{\omega_{i+1}\} \times {}^{i+1}\{p_{ci+1}\} \right). \quad (5.33)$$

e) Glavni vektor spoljašnjih sila članka

Glavni vektor spoljašnjih sila koje djeluju na članak (i+1) prikazan u sistemu tog članka, prema zakonu o kretanju centra inercije je

$${}^{i+1}\{S_{i+1}\} = m_{i+1} \cdot {}^{i+1}\{a_{ci+1}\}, \quad (5.34)$$

gdje je: m_{i+1} – masa članka (i+1)

f) Glavni moment spoljašnjih sila članka

Glavni moment spoljašnjih sila koje djeluju na članak (i+1), za njegov centar inercije kao pol, u sistemu tog članka, je prema Ojlerovim dinamičkim jednačinama

$${}^{i+1}\{N_{i+1}\} = {}^{i+1}[J_c] {}^{i+1}\{\varepsilon_{i+1}\} + {}^{i+1}\{\omega_{i+1}\} \times \left({}^{i+1}[J_c] {}^{i+1}\{\omega_{i+1}\} \right), \quad (5.35)$$

gdje je:

${}^{i+1}[J_c]$ - matrica inercije članka (i+1) za centralne ose tog članka, koje su paralelne osama: x_{i+1} , y_{i+1} , z_{i+1} .

Matrica inercije ima oblik

$$[J_{ci+1}] = \begin{bmatrix} {}^{i+1}J_{cx} & -{}^{i+1}J_{cxy} & -{}^{i+1}J_{cxz} \\ -{}^{i+1}J_{cxy} & {}^{i+1}J_{cy} & -{}^{i+1}J_{cyz} \\ -{}^{i+1}J_{cxz} & -{}^{i+1}J_{cyz} & {}^{i+1}J_{cz} \end{bmatrix}, \quad (5.36)$$

pri čemu su:

${}^{i+1}J_{cx}$, ${}^{i+1}J_{cy}$, ${}^{i+1}J_{cz}$ - aksijalni momenti inercije članka (i+1) za centralne ose paralelne osama sistema (i+1),

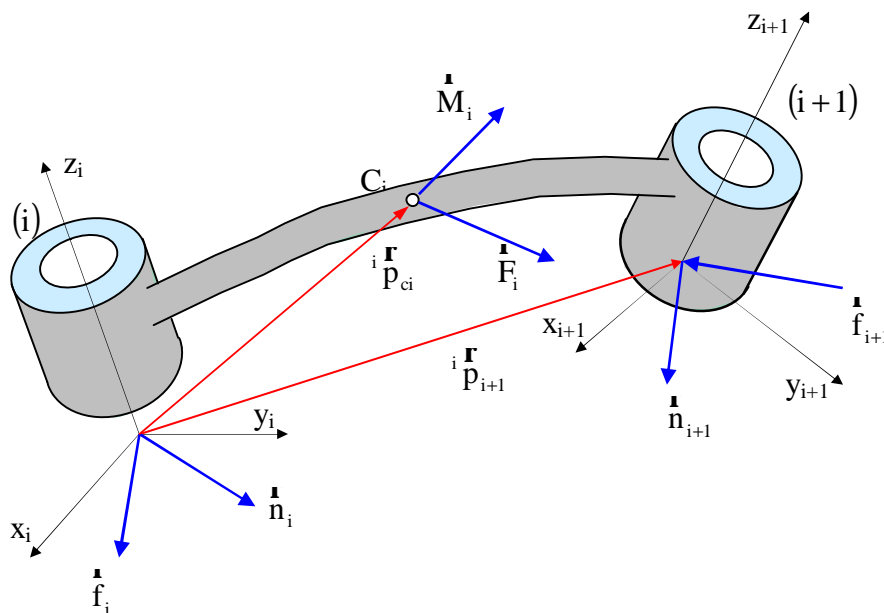
${}^{i+1}J_{cxy}$, ${}^{i+1}J_{cxz}$, ${}^{i+1}J_{cyz}$ - centrifugalni momenti inercije članka za parove centralnih osa paralelnih osama sistema (i+1).

Jednačine (5.19), (5.23), (5.26), (5.33), (5.34), (5.35) predstavljaju jednačine spoljašnje dinamičke iteracije u slučaju rotacionih članaka robota, a jednačine (5.20), (5.24), (5.31), (5.33), (5.34), (5.35) predstavljaju jednačine spoljašnje dinamičke iteracije, u slučaju translatorskih članaka robota. Drugim riječima, pomenute jednačine predstavljaju jednačine “propagacije” (član po član) od unutrašnjeg ka krajnjem članku robota.

5.3.2. Unutrašnja iteracija

a) Sile kojima prethodni članak djeluje na posmatrani članak

Neka i-ti članak robotskog sistema (rotacioni ili translatorski) vrši određeno kretanje pod uticajem sila (sl.5.4).



Slika 5.4. Opterećenja koja djeluju na članak robota

Također neka je:

- $\{f_i\}$ - glavni vektor sila kojima članak (i-1) djeluje na članak (i),
- $\{n_i\}$ - glavni moment tih sila za ishodište koordinatnog sistema (i) kao pol,
- $\{f_{i+1}\}$ - glavni vektor sila kojima članak (i) djeluje na članak (i+1),
- $\{n_{i+1}\}$ - glavni moment tih sila za ishodište koordinatnog sistema (i+1) kao pol,
- $\{F_i\}$ - glavni vektor svih ostalih realnih sila, koje djeluju na članak (i) a koje nisu posljedica djelovanja između članka (i) i njemu susjednih članaka (gravitacija itd),
- $\{M_i\}$ - glavni moment tih sila za centar inercije članka (i) kao pol.

Tada je glavni vektor svih sila koje djeluju na članak (i)

$${}^i\{S_i\} = {}^i\{f_i\} + {}^i\{F_i\} - {}^i\{f_{i+1}\} \quad (5.37)$$

odnosno

$${}^i\{S_i\} = {}^i\{f_i\} + {}^i\{F_i\} - {}^{i+1}[R]^{i+1}\{f_{i+1}\}, \quad (5.38)$$

odakle je glavni vektor sila kojima članak (i-1) djeluje na članak (i)

$${}^i\{f_i\} = {}^i\{S_i\} - {}^i\{F_i\} + {}^{i+1}[R]^{i+1}\{f_{i+1}\}. \quad (5.39)$$

b) Moment sila kojima prethodni članak djeluje na posmatrani članak

Glavni moment svih sila koje djeluju na članak (i) u odnosu na njegov centar inercije kao pol, prikazan u koordinatnom sistemu (i) je (sl.5.4)

$${}^i\{N_i\} = {}^i\{n_i\} + {}^i\{M_i\} - {}^i\{n_{i+1}\} - \left\{ {}^i p_{ci} \right\} \times \left\{ {}^i f_i \right\} - \left(\left\{ {}^i p_{i+1} \right\} - \left\{ {}^i p_{ci} \right\} \right) \times \left\{ {}^i f_{i+1} \right\}. \quad (5.40)$$

Uvrštavajući izraz (5.39) u (5.40) slijedi

$$\begin{aligned} {}^i\{N_i\} &= {}^i\{n_i\} + {}^i\{M_i\} - {}^{i+1}[R]^{i+1}\{n_{i+1}\} - \left\{ {}^i p_{ci} \right\} \times \left({}^i\{S_i\} - {}^i\{F_i\} + {}^{i+1}[R]^{i+1}\{f_{i+1}\} \right) - \\ &\quad - \left\{ {}^i p_{i+1} \right\} \times \left({}^{i+1}[R]^{i+1}\{f_{i+1}\} \right) + \left\{ {}^i p_{ci} \right\} \times \left({}^{i+1}[R]^{i+1}\{f_{i+1}\} \right) = {}^i\{n_i\} + {}^i\{M_i\} - {}^{i+1}[R]^{i+1}\{n_{i+1}\} - \\ &\quad - \left\{ {}^i p_{ci} \right\} \times {}^i\{S_i\} + \left\{ {}^i p_{ci} \right\} \times {}^i\{F_i\} - \left\{ {}^i p_{i+1} \right\} \times \left({}^{i+1}[R]^{i+1}\{f_{i+1}\} \right), \end{aligned}$$

odakle je vektor ${}^i\{n_i\}$

$$\begin{aligned} {}^i\{n_i\} &= {}^i\{N_i\} - {}^i\{M_i\} + {}^{i+1}[R]^{i+1}\{n_{i+1}\} + \left\{ {}^i p_{ci} \right\} \times {}^i\{S_i\} - \left\{ {}^i p_{ci} \right\} \times {}^i\{F_i\} + \\ &\quad + \left\{ {}^i p_{i+1} \right\} \times \left({}^{i+1}[R]^{i+1}\{f_{i+1}\} \right). \end{aligned} \quad (5.41)$$

c) Pogonsko opterećenje aktuatora

Moment aktuatora u rotacionom zglobu (i) jednak je projekciji momenta kojim članak (i-1) djeluje na članak (i), na osu rotacije z_i , odnosno jednak je skalarnom proizvodu između momenta ${}^i\{n_i\}$ i jediničnog vektora ${}^i\{\hat{z}_i\}$ ose rotacije članka (i)

$$M_i^{\text{ak}} = {}^i\{n_i\}^T \cdot {}^i\{\hat{z}_i\}. \quad (5.42)$$

Ukoliko je zglob (i) translatorni, tada je sila aktuatora

$$F_i^{\text{ak}} = {}^i\{f_i\}^T \cdot {}^i\{\hat{z}_i\}. \quad (5.43)$$

Jednačine (5.39), (5.41), (5.42) predstavljaju jednačine unutrašnje dinamičke iteracije u slučaju rotacionih članaka robota, a jednačine (5.39), (5.41), (5.43) predstavljaju jednačine unutrašnje dinamičke iteracije u slučaju translatorskih članaka. Drugim riječima, pomenute jednačine predstavljaju jednačine “propagacije” (član po član) od krajnjeg ka unutrašnjem članku robota.

Primjenom izraza (5.42) odnosno (5.43) za sve aktuatora robota, dobija se sistem jednačina koje povezuju pogonska opterećenja pojedinih aktuatora, zglobne koordinate, zglobne brzine i ubrzanja. Sistem tih jednačina se u matričnom obliku može izraziti kao

$$\{\tau\} = [A(q)]\{\ddot{q}\} + \{B(q, \dot{q})\} + \{C(q)\}, \quad (5.44)$$

gdje je:

- $\{\tau\}$ - vektor sila/momenata u aktuatorima robota,
- $[A(q)]$ - matrica inercije robota,
- $\{\ddot{q}\}$ - vektor generalisanih ubrzanja,
- $\{B(q, \dot{q})\}$ - vektor Coriolisovih i centrifugalnih djelovanja,
- $\{C(q)\}$ - vektor djelovanja gravitacije.

Izraz (5.44) predstavlja ujedno rješenje direktnog problema dinamike robota.

Rješenje inverznog dinamičkog problema se može dobiti jedino numeričkim putem.

5.4. Lagrangeove jednačine

Lagrangeova metoda pripada grupi energetske metoda u mehanici i bazirana je na poznavanju kinetičke energije sistema i generalisanih sila. Za određivanje kinetičke energije potrebne su karakteristike brzina elemenata sistema, a generalisane sile se određuju na osnovu samog opterećenja sistema.

Može se postaviti onoliko Lagrangeovih jednačina koliko ima i stepeni slobode kretanja sistema (s)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j=1, \dots, s) \quad (5.45)$$

gdje je:

K – kinetička energija sistema,
 q_j - j-ta generalisana koordinata,
 \dot{q}_j - j-ta generalisana brzina,
 Q_j - j-ta generalisana sila.

Kada je u pitanju sistem robota, ukoliko se zanemare otpori kretanja, tada se j-ta generalisana sila sastoji od generalisane sile j-tog aktuatora i generalisane sile usljed rada pojedinih težina na pomjeranju po j-toj generalisanoj koordinati

$$Q_j = Q_j^{\text{ak}} + Q_j^{\text{mg}}. \quad (5.46)$$

Pošto je veličina Q_j^{ak} jednaka ustvari pogonskom opterećenju j-tog aktuatora (sila/moment)

$$Q_j^{\text{ak}} = \tau_j^{\text{ak}}, \quad (5.47)$$

a s druge strane je Q_j^{mg} jednaka negativnom izvodu potencijalne energije P cijelog sistema u odnosu na neki referentni nivo, po generalisanoj koordinati q_j

$$Q_j^{\text{mg}} = - \frac{\partial P}{\partial q_j}, \quad (5.48)$$

tada je na osnovu izraza (5.44)- (5.47) pogonsko opterećenje j-tog aktuatora

$$\tau_j^{\text{ak}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} + \frac{\partial P}{\partial q_j}. \quad (5.49)$$

Kinetička energija cijelog sistema je

$$K = \frac{1}{2} \int_{(m)} v^2 \cdot dm, \quad (5.50)$$

ili u matričnom obliku

$$K = \frac{1}{2} \int_{(m)} {}^i\{v\}^T \cdot {}^i\{v\} \cdot dm, \quad (5.51)$$

gdje je:

${}^i\{v\}$ - vektor brzine posmatrane tačke sistema prikazan u i-tom koordinatnom sistemu,
 dm - elementarna masa.

Ako je u pitanju robot čije se deformacije mogu zanemariti (model robota sa krutim elementima) tada je kinetička energija nekog njegovog i-tog elementa u opštem slučaju kretanja (pod elementom robota može se podrazumijevati članak, prihvatnica, teret ili bilo koji njegov dio)

$$K_i = \frac{1}{2} m_i \cdot {}^i\{v_{ci}\}^T \cdot {}^i\{v_{ci}\} + \frac{1}{2} \cdot {}^i\{\omega_i\}^T \cdot [J_c]^i \cdot {}^i\{\omega_i\}, \quad (5.52)$$

gdje je:

m_i - masa i-tog elementa robota,
 ${}^i\{v_{ci}\}$ - vektor brzine centra inercije i-tog elementa robota prikazan u sistemu tog elementa,
 ${}^i\{\omega_i\}$ - vektor ugaone brzine i-tog elementa prikazan u koordinatnom sistemu tog elementa.

Za neke specijalne slučajeve kretanja će izrazi za kinetičku energiju slijediti iz izraza (5.52).

Tako će za slučaj translacije i-tog elementa njegova kinetička energija biti

$$K_i = \frac{1}{2} m_i \cdot {}^i\{v_i\}^T \cdot {}^i\{v_i\}, \quad (5.53)$$

gdje je:

${}^i\{v_i\}$ - vektor brzine bilo koje tačke i-tog elementa robota, pa prema tome i brzine ishodišta i-tog koordinatnog sistema, prikazan u istom koordinatnom sistemu.

Potpuno isti izraz će važiti i u slučaju kada se i-ti element može smatrati materijalnom tačkom, bez obzira kako se on kreće.

Kada je u pitanju rotacija i-tog elementa robota oko stalne ose, tada će u slučaju kada se bilo koja od osa x_i , y_i , z_i poklapa sa osom rotacije, njegova kinetička energija biti

$$K_i = \frac{1}{2} \cdot {}^i\{\omega_i\}^T \cdot [J]^i \cdot {}^i\{\omega_i\}, \quad (5.54)$$

gdje je:

${}^i[J]$ - matrica inercije i -tog elementa za ose x_i, y_i, z_i .

Ukoliko se ni jedna od osa x_i, y_i, z_i ne poklapa sa stalnom osom rotacije, tada se kinetička energija i -tog elementa može računati direktno na osnovu izraza (5.52).

Ako i -ti element robota vrši sferno kretanje i ako ose x_i, y_i, z_i stalno prolaze kroz neku nepomičnu tačku, tada se kinetička energija tog elementa može računati prema izrazu (5.54), a ako bar jedna od pomenutih osa ne prolazi kroz nepomičnu tačku tada se direktno može koristiti izraz (5.52).

Kada i -ti element vrši ravno kretanje, tada se za određivanje njegove kinetičke energije može koristiti izraz (5.52).

Brzina ishodišta koordinatnog sistema rotacionog članka ($i+1$) u iterativnom matričnom obliku, izražena u nepomičnom koordinatnom sistemu je prema izrazu (5.6)

$${}^0\{v_{i+1}\} = {}^0\{v_i\} + {}^0\{\omega_i\} \times \left({}^0[R]^i \{p_{i+1}\} \right). \quad (5.55)$$

Brzina te tačke izražena u koordinatnom sistemu ($i+1$) će se dobiti ako se izraz (5.55) pomnoži sa lijeve strane matricom rotacije ${}^{i+1}_0[R]$

$${}^{i+1}\{v_{i+1}\} = {}^{i+1}_i[R] \left({}^0\{v_{i+1}\} = {}^0\{v_i\} + {}^0\{\omega_i\} \times \left({}^0[R]^i \{p_{i+1}\} \right) \right),$$

odnosno

$${}^{i+1}\{v_{i+1}\} = {}^{i+1}_i[R] \left({}^i\{v_i\} + {}^i\{\omega_i\} \times \{p_{i+1}\} \right). \quad (5.56)$$

Za slučaj translatornog ($i+1$)-og članka je prema izrazu (5.3)

$${}^0\{v_{i+1}\} = {}^0\{v_i\} + {}^0\{\omega_i\} \times \left({}^0[R]^i \{p_{i+1}\} \right) + {}^0[R]^i \{v_{i+1}\}. \quad (5.57)$$

Imajući, između ostalog, u vidu izraz (5.28), na osnovu (5.57), u koordinatnom sistemu ($i+1$) slijedi

$${}^{i+1}\{v_{i+1}\} = {}^{i+1}_0[R] \left({}^0\{v_{i+1}\} = {}^0\{v_i\} + {}^0\{\omega_i\} \times \left({}^0[R]^i \{p_{i+1}\} \right) \right) + \mathbf{H}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\{\hat{z}_{i+1}\},$$

odnosno

$${}^{i+1}\{v_{i+1}\} = {}^{i+1}_i[R] \cdot \left({}^i\{v_i\} + {}^i\{\omega_i\} \times \{p_{i+1}\} \right) + \mathbf{H}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\{\hat{z}_{i+1}\}. \quad (5.58)$$

Takođe je prema izrazu (5.6) brzina centra inercije ($i+1$)-og rotacionog ili translatornog članka robota prikazana u nepomičnom koordinatnom sistemu

$${}^0\{v_{ci+1}\} = {}^0\{v_{i+1}\} + {}^0\{\omega_{i+1}\} \times \left({}^0[R]^{i+1} \{ {}^{i+1}p_{ci+1} \} \right), \quad (5.59)$$

a u sistemu (i+1) bit će

$${}^{i+1}\{v_{ci+1}\} = {}^{i+1}\{v_{i+1}\} + {}^{i+1}\{\omega_{i+1}\} \times \{ {}^{i+1}p_{ci+1} \}. \quad (5.60)$$

Potencijalna energija i-tog elementa robota u odnosu na nivo nepomičnog koordinatnog sistema (0) je

$$P_i = -m_i \cdot {}^0\{g\}^T \cdot {}^0\{p_{ci}\}, \quad (5.61)$$

gdje je :

${}^0\{g\} = (g_{x0} \quad g_{y0} \quad g_{z0})^T$ - vektor ubrzanja Zemljine teže prikazan u nepomičnom koordinatnom sistemu,

${}^0\{p_{ci}\}$ - vektor položaja centra inercije i-tog elementa robota u odnosu na nepomični sistem, prikazan u nepomičnom sistemu.

Kada se za sve aktuatora robota primjeni jednačina (5.49) i u tako dobijene izraze uvrste svi potrebni podaci, dobija se sistem jednačina koji je u matičnom obliku isti kao i u izrazu (5.44)

5.5. Neke napomene vezane za dinamičku simulaciju robota

Kao što je rečeno, primjenom Newton-Eulerove iterativne metode, između ostalog se dobiju jednačine koje povezuju sile/momente pojedinih aktuatora, zglobove koordinate, zglobove brzine i ubrzanja, što se takođe dobija i primjenom Lagrangeove metode. Što se tiče rješenja inverznog dinamičkog problema, odnosno rješenja jednačine (5.44) po generalisanim koordinatama, a što je vezano za dinamičku simulaciju robota, mogu se koristiti različiti numerički algoritmi.

Radi ilustracije, ovdje će biti prikazan jedan od najjednostavnijih algoritama te vrste – Eulerov integracioni algoritam. Naime, na nekom vremenskom intervalu

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n$$

pretpostavlja se da je vektor generalisanih ubrzanja $\{a\}_n$ konstantan. Tu su: t_n, t_{n+1} - vremenski trenuci na početku i na kraju posmatranog intervala ($n=0, 1, 2, \dots, w$), gdje je: w - broj vremenskih intervala posmatranog vremena kretanja.

Ta pretpostavka je tačnija ukoliko je interval Δt manji. U tom slučaju za neki trenutak t , pri čemu je: $t_n \leq t \leq t_{n+1}$, će vrijediti

$$\int_{\mathbf{q}_n}^{\mathbf{q}} d\{\mathbf{q}\} = \int_{t_n}^t \{\mathbf{v}\}_n \cdot dt,$$

tako da je u trenutku t vektor generalisanih brzina

$$\{\mathbf{v}\} = \{\mathbf{v}\}_n + \{\mathbf{a}\}_n (t - t_n). \quad (5.62)$$

Integracijom posljednjeg izraza po vremenu dobija se vektor generalisanih koordinata u trenutku t

$$\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{q}\}_n + \{\mathbf{v}\}_n (t - t_n) + \frac{1}{2} \{\mathbf{a}\}_n (t - t_n)^2. \quad (5.63)$$

Na kraju posmatranog intervala, kada je $t = t_{n+1}$, na osnovu izraza (5.62) i (5.63) će vektori generalisanih brzina i generalisanih koordinata biti

$$\{\mathbf{v}\}_{n+1} = \{\mathbf{v}\}_n + \{\mathbf{a}\}_n \cdot \Delta t, \quad (5.64)$$

$$\{\mathbf{q}\}_{n+1} = \{\mathbf{q}\}_n + \{\mathbf{v}\}_n \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \{\mathbf{a}\}_n \Delta t^2. \quad (5.65)$$

S druge strane, na osnovu izraza (5.44) je vektor generalisanih ubrzanja u bilo kojem trenutku

$$\{\mathbf{a}\} = [A(\mathbf{q})]^{-1} \cdot [\{\tau\} - \{B(\mathbf{q}, \mathbf{v})\} - \{C(\mathbf{q})\}]. \quad (5.66)$$

Kada se u posljednji izraz uvrste izrazi (5.64) i (5.65) dobija se na kraju posmatranog intervala nova korigovana vrijednost vektora generalisanih ubrzanja

$$\{\mathbf{a}\}_{n+1} = [A(\mathbf{q}_{n+1})]^{-1} \cdot [\{\tau\}_{n+1} - \{B(\mathbf{q}_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1})\} - \{C(\mathbf{q}_{n+1})\}]. \quad (5.67)$$

Sa tom vrijednošću se startuje za sljedeći vremenski interval (t_{n+1}, t_{n+2}) , računaju se novi vektori $\{\mathbf{v}\}_{n+2}$, $\{\mathbf{q}\}_{n+2}$ i tako se proces ponavlja za sve navedene vremenske intervale.

Za početak integracije potrebno je poznavati početne uslove. To su vektori generalisanih brzina i koordinata na početku posmatranog kretanja

$$\begin{aligned} \{\mathbf{v}\}_0 &= \{\mathbf{v}\}_{t=0}, \\ \{\mathbf{q}\}_0 &= \{\mathbf{q}\}_{t=0}. \end{aligned}$$

Početni vektor generalisanih ubrzanja $\{\mathbf{a}\}_0$ će se dobiti uvrštavanjem navedenih početnih uslova u jednačinu (5.66), tako da će za $t=0$ biti

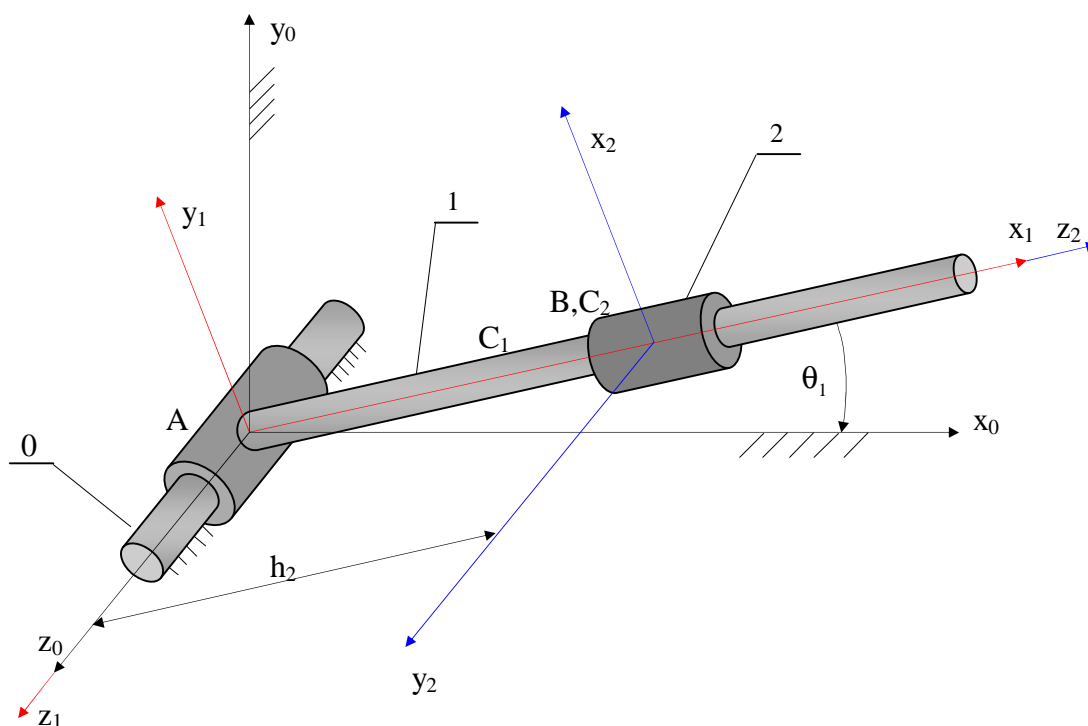
$$\{\mathbf{a}\}_0 = [A(\mathbf{q}_0)]^{-1} \cdot [\{\tau\}_0 - \{B(\mathbf{q}_0, \mathbf{v}_0)\} - \{C(\mathbf{q}_0)\}]. \quad (5.68)$$

5.6. Primjeri primjene prikazanih metoda rješavanja dinamike robota

U cilju ilustracije prikazanih metoda rješavanja dinamike robotskog sistema, ovdje će biti prikazana dva primjera sa kompletnim rješenjima direktnog zadatka dinamike robota.

5.6.1. Prvi primjer - rotaciona robotska ruka sa translatorskim člankom

Na slici 5.5. prikazana je robotska ruka 1 koja vrši rotaciju oko horizontalne ose koja prolazi kroz tačku A, pri čemu po ruci klizi translatorski članak 2. Za prvi članak je poznata njegova masa, položaj centra inercije, kao i momenti inercije tog članka za ose njegovog koordinatnog sistema x_1, y_1, z_1 . Članak 2 zajedno sa prihvatnicom i teretom se može smatrati jednim tijelom čija je masa poznata, a takođe su poznati i momenti inercije za njegove centralne ose, koje se poklapaju sa osama samog sistema tog članka: x_2, y_2, z_2 , koje prolaze kroz tačku B. Potrebno je primjenom Newton-Eulerove kao i Lagrangeove metode odrediti pogonska opterećenja aktuatora, ako su za svaki položaj robota poznata ugaona brzina i ugaono ubrzanje članka 1, kao i relativna brzina i relativno ubrzanje članka 2 u odnosu na prvi član (karakteristike zglobnih brzina i ubrzanja). Dobijene jednačine potrebno je takođe prikazati i u matricnom obliku.



Slika 5.5. Robot sa jednim rotacionim i jednim translatorskim zglobovom

a) Newton-Eulerova metoda

Prvo je potrebno odrediti matrice rotacije između koordinatnih sistema koji su vezani za pojedine članke. Općenit izraz za matricu rotacije od (i-1)-og ka i-tom koordinatnog sistema, prema izrazu (4.10), je

$${}_{i-1}^i[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{i-1}^i \\ \mathbf{j}_{i-1}^i \\ \mathbf{k}_{i-1}^i \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{i-1}^i \\ \mathbf{j}_{i-1}^i \\ \mathbf{k}_{i-1}^i \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{i-1}^i \\ \mathbf{j}_{i-1}^i \\ \mathbf{i}_{i-1}^i \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{i-1}^i \\ \mathbf{j}_{i-1}^i \\ \mathbf{k}_{i-1}^i \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{i-1}^i \\ \mathbf{j}_{i-1}^i \\ \mathbf{k}_{i-1}^i \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{i-1}^i \\ \mathbf{j}_{i-1}^i \\ \mathbf{i}_{i-1}^i \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{i-1}^i \\ \mathbf{j}_{i-1}^i \\ \mathbf{k}_{i-1}^i \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{i-1}^i \\ \mathbf{j}_{i-1}^i \\ \mathbf{k}_{i-1}^i \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{i-1}^i \\ \mathbf{j}_{i-1}^i \\ \mathbf{i}_{i-1}^i \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \quad (5.69)$$

gdje su:

$\mathbf{i}_{i-1}^i, \mathbf{j}_{i-1}^i, \mathbf{k}_{i-1}^i$ - jedinični vektori koordinatnog sistema (i-1),
 $\mathbf{i}_i, \mathbf{j}_i, \mathbf{k}_i$ - jedinični vektori koordinatnog sistema (i).

Tako će pojedine matrice biti:

$${}^1_0[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.70)$$

$${}^2_1[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.71)$$

1. Spoljašnja iteracija

Poći će se od nepomičnog sistema (0) za koji je:

$${}^0\{\boldsymbol{\omega}_0\} = \{0\}, \quad {}^0\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\} = \{0\}, \quad {}^0\{a_0\} = \{0\}. \quad (5.72)$$

Primjenom izraza za spoljašnje iteracije za rotacione članke: (5.19), (5.23), (5.26), (5.33), (5.34), (5.35), za članak 1 će biti:

ugaona brzina:

$${}^1\{\boldsymbol{\omega}_1\} = {}^1_0[\mathbf{R}] {}^0\{\boldsymbol{\omega}_0\} + \boldsymbol{\Theta}_1 \cdot {}^1\{\hat{z}_1\}, \quad (5.73)$$

ugaono ubrzanje:

$${}^1\{\boldsymbol{\varepsilon}_1\} = {}^1_0[\mathbf{R}] {}^0\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\} + \boldsymbol{\Theta}_1 \left({}^1_0[\mathbf{R}] {}^0\{\boldsymbol{\omega}_0\} \right) \times {}^1\{\hat{z}_1\} + \boldsymbol{\Theta}_1 \cdot {}^1\{\hat{z}_1\}, \quad (5.74)$$

ubrzanje ishodišta koordinatnog sistema članka:

$${}^1\{a_1\} = {}^1[R] \cdot \left[{}^0\{a_0\} + {}^0\{\varepsilon_0\} \times {}^0\{p_1\} + {}^0\{\omega_0\} \times \left({}^0\{\omega_0\} \times {}^0\{p_1\} \right) \right], \quad (5.75)$$

ubrzanje centra inercije članka:

$${}^1\{a_{c1}\} = {}^1\{a_1\} + {}^1\{\varepsilon_1\} \times {}^1\{p_{c1}\} + {}^1\{\omega_1\} \times \left({}^1\{\omega_1\} \times {}^1\{p_{c1}\} \right), \quad (5.76)$$

glavni vektor sila koje djeluju na članak:

$${}^1\{S_1\} = m_1 \cdot {}^1\{a_{c1}\}, \quad (5.77)$$

glavni moment sila koje djeluju na članak, za njegov centar inercije kao pol:

$${}^1\{N_1\} = {}^1[J_c] \cdot {}^1\{\varepsilon_1\} + {}^1\{\omega_1\} \times \left({}^1[J_c] \cdot {}^1\{\omega_1\} \right), \quad (5.78)$$

odnosno:

$${}^1\{\omega_1\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix}, \quad (5.79)$$

$${}^1\{\varepsilon_1\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{pmatrix}, \quad (5.80)$$

$${}^1\{a_1\} = \{0\}, \quad (5.81)$$

$${}^1\{a_{c1}\} = x_{c1} \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_1^2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.82)$$

$${}^1\{S_1\} = m_1 x_{c1} \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_1^2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.83)$$

$${}^1\{N_1\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^1J_{cz} \cdot \ddot{\theta}_1 \end{pmatrix}, \quad (5.84)$$

gdje je: x_{c1} - koordinata centra inercije članka 1 po osi x_1 .

Primjenom izraza za spoljašnje iteracije za translatorne članke: (5.20), (5.24), (5.31), (5.33), (5.34), (5.35), za članak 2 će se dobiti:

$${}^2\{\omega_2\} = {}^2[R]^{-1} \{ \omega_1 \}, \quad (5.85)$$

$${}^2\{\varepsilon_2\} = {}^2[R]^{-1} \{ \varepsilon_1 \}, \quad (5.86)$$

$${}^2\{a_2\} = {}^2[R] \cdot \left[{}^1\{a_1\} + {}^1\{\varepsilon_1\} \times {}^1\{p_2\} + {}^1\{\omega_1\} \times \left({}^1\{\omega_1\} \times {}^1\{p_2\} \right) \right] + 2 \cdot \mathbb{H}_2 \cdot {}^2\{\omega_2\} \times {}^2\{z_2\} + \mathbb{H}_2 \cdot {}^2\{z_2\}, \quad (5.87)$$

$${}^2\{a_{c2}\} = {}^2\{a_2\} + {}^2\{\varepsilon_2\} \times {}^2\{p_{c2}\} + {}^2\{\omega_2\} \times \left({}^2\{\omega_2\} \times {}^2\{p_{c2}\} \right), \quad (5.88)$$

$${}^2\{S_2\} = m_2 \cdot {}^2\{a_{c2}\}, \quad (5.89)$$

$${}^2\{K_2\} = {}^2[J_c] \cdot {}^2\{\varepsilon_2\} + {}^2\{\omega_2\} \times \left({}^2[J_c] \cdot {}^2\{\omega_2\} \right), \quad (5.90)$$

odnosno

$${}^2\{\omega_2\} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{G}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.91)$$

$${}^2\{\varepsilon_2\} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{G}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.92)$$

$${}^2\{a_2\} = \begin{Bmatrix} h_2 \mathbb{G}_1 + 2 \mathbb{H}_2 \mathbb{G}_1 \\ 0 \\ \mathbb{H}_2 - h_2 \mathbb{G}_1^2 \end{Bmatrix}, \quad (5.93)$$

$${}^2\{a_{c2}\} = \begin{Bmatrix} h_2 \mathbb{G}_1 + 2 \mathbb{H}_2 \mathbb{G}_1 \\ 0 \\ \mathbb{H}_2 - h_2 \mathbb{G}_1^2 \end{Bmatrix}, \quad (5.94)$$

$${}^2\{S_2\} = m_2 \cdot \begin{Bmatrix} h_2 \mathbb{G}_1 + 2 \mathbb{H}_2 \mathbb{G}_1 \\ 0 \\ \mathbb{H}_2 - h_2 \mathbb{G}_1^2 \end{Bmatrix}. \quad (5.95)$$

Pod pretpostavkom da su ose cx_2 , cy_2 , cz_2 ujedno glavne ose inercije, glavni moment sila koje djeluju na članak 2, za njegov centar inercije kao pol, je

$${}^2\{\mathbf{R}_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ {}^2J_{cy} \cdot \mathbf{0}_2 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (5.96)$$

2. Unutrašnja iteracija

Glavni vektor sila kojima članak 1 djeluje na članak 2, na osnovu izraza (5.39), je

$${}^2\{f_2\} = {}^2\{\mathcal{S}_2\}^{-2}\{F_2\} + {}^2[\mathbf{R}] \cdot {}^3\{f_3\}. \quad (5.97)$$

Pri tome se ima u vidu da je glavni vektor sila kojima članak 2 djeluje na neki članak 3, koji je fiktivan jer i ne postoji, jednak nuli

$${}^3\{f_3\} = \{0\}, \quad (5.98)$$

tako da slijedi

$${}^2\{f_2\} = {}^2\{\mathcal{S}_2\}^{-2}\{F_2\}. \quad (5.99)$$

Vektor ${}^2\{F_2\}$ zapravo predstavlja vektor težine članka 2, koji u nepomičnom sistemu ima oblik

$${}^0\{F_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_2g \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (5.100)$$

a u koordinatnom sistemu (2) je

$${}^2\{F_2\} = {}^2[\mathbf{R}] \cdot {}^0\{F_2\}. \quad (5.101)$$

Matrica rotacije ${}^2[\mathbf{R}]$ je

$${}^2[\mathbf{R}] = {}^2[\mathbf{R}] \cdot {}^1[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c_1 & s_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.102)$$

Vektor težine članka 2 u koordinatnom sistemu (2) se dobija u obliku

$${}^2\{F_2\} = -m_2g \begin{Bmatrix} c_1 \\ 0 \\ s_1 \end{Bmatrix}, \quad (5.103)$$

pa je glavni vektor sila kojima članak 1 djeluje na članak 2

$${}^2\{f_2\} = m_2 \cdot \begin{Bmatrix} h_2 \ddot{\theta}_1 + 2h_2 \dot{\theta}_1 + gc_1 \\ 0 \\ \ddot{h}_2 - h_2 \dot{\theta}_1^2 + gs_1 \end{Bmatrix}. \quad (5.104)$$

Primjenom izraza (5.40) za glavni moment sila kojim članak 1 djeluje na članak 2, dobija se

$${}^2\{n_2\} = {}^2\{n_2\} + {}^2\{M_2\} + {}^2_3[R] \cdot {}^3\{n_3\} + {}^2\{p_{c2}\} \times {}^2\{S_2\} + {}^2\{p_{c2}\} \times {}^2\{F_2\} + {}^2\{p_3\} \times ({}^2_3[R] \cdot {}^3\{f_3\}). \quad (5.105)$$

Moment ${}^2\{M_2\}$ je ustvari moment težine članka 2 za njegov centar inercije, koji je jednak nuli

$${}^2\{M_2\} = \{0\}.$$

S druge strane, s obzirom da je članak 3 fiktivan, slijedi

$${}^3\{n_3\} = 0.$$

Sada se moment ${}^2\{n_2\}$ dobija u obliku

$${}^2\{n_2\} = \begin{pmatrix} 0 \\ {}^2J_{cy} \cdot \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.106)$$

Prema izrazu (5.43) pogonska sila aktuatora 2 je

$$F_2^{\text{ak}} = {}^2\{f_2\}^T \cdot {}^2\{\hat{z}_2\}, \quad (5.107)$$

što znači da je on jednak izrazu u trećoj vrsti vektora ${}^2\{f_2\}$

$$F_2^{\text{ak}} = m_2 \cdot (\ddot{h}_2 - h_2 \dot{\theta}_1^2 + gs_1). \quad (5.108)$$

Primjenjujući jednačinu (5.41) dobija se glavni moment sila kojim postolje djeluje na članak 1, u odnosu na ishodište članka 1 kao pol, u obliku

$${}^1\{n_1\} = {}^1\{n_1\} + {}^1\{M_1\} + {}^1_2[R] \cdot {}^2\{n_2\} + {}^1\{r_{c1}\} \times {}^1\{S_1\} + {}^1\{p_{c1}\} \times {}^1\{F_1\} + {}^1\{p_2\} \times ({}^1_2[R] \cdot {}^2\{f_2\}). \quad (5.109)$$

Vektor ${}^1\{M_1\}$, kao i u prethodnom slučaju, predstavlja moment težine članka 1 za njegov centar inercije kao pol, koji je jednak nuli

$${}^1\{M_1\} = \{0\}.$$

S druge strane, vektor ${}^1\{F_1\}$ predstavlja vektor težine članka 1 koji u nepomičnom sistemu iznosi

$${}^0\{F_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_1 g \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (5.110)$$

a u sistemu (1) će biti

$${}^1\{F_1\} = {}^1[R] {}^0\{F_1\} = -m_1 g \cdot \begin{Bmatrix} s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (5.111)$$

Ostali članovi u izrazu (5.109) su ranije izračunati, tako da je vektor ${}^1\{n_1\}$

$${}^1\{n_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ ({}^1J_{cz} + {}^2J_{cy} + m_1 x_{c1}^2 + m_2 h_2^2) \cdot \ddot{\theta}_1 + 2m_2 h_2 \dot{h}_2 \dot{\theta}_1 + (m_1 x_{c1} + m_2 h_2) g c_1 \end{Bmatrix}. \quad (5.112)$$

Prema izrazu (5.42) je moment aktuatora članka 1

$$M_1^{\text{ak}} = {}^1\{n_1\}^T \cdot {}^1\{\hat{z}_1\}, \quad (5.113)$$

odnosno

$$M_1^{\text{ak}} = ({}^1J_{cz} + {}^2J_{cy} + m_1 x_{c1}^2 + m_2 h_2^2) \cdot \ddot{\theta}_1 + 2m_2 h_2 \dot{h}_2 \dot{\theta}_1 + (m_1 x_{c1} + m_2 h_2) g c_1. \quad (5.114)$$

Pošto je prema Steinerovoj teoremi

$${}^1J_{cz} + m_1 x_{c1}^2 = {}^1J_z, \quad (5.115)$$

tada se može pisati

$$M_1^{\text{ak}} = ({}^1J_z + {}^2J_{cy} + m_2 h_2^2) \cdot \ddot{\theta}_1 + 2m_2 h_2 \dot{h}_2 \dot{\theta}_1 + (m_1 x_{c1} + m_2 h_2) g c_1. \quad (5.116)$$

b) Lagrangeova metoda

Članak 1 vrši rotaciju oko stalne ose z_1 , pa je prema izrazu (5.54) njegova kinetička energija

$$\mathbf{K}_1 = \frac{1}{2} \cdot {}^1\{\boldsymbol{\omega}_1\}^T \cdot {}^1[\mathbf{J}] \cdot {}^1\{\boldsymbol{\omega}_1\}, \quad (5.117)$$

odnosno

$$\mathbf{K}_1 = \frac{1}{2} \cdot {}^1J_y \cdot \dot{\theta}_1^2. \quad (5.118)$$

Članak 2 vrši ravno kretanje, pa je prema izrazu (5.52) njegova kinetička energija

$$\mathbf{K}_2 = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot {}^2\{v_{c2}\}^T \cdot {}^2\{v_{c2}\} + \frac{1}{2} \cdot {}^2\{\boldsymbol{\omega}_2\}^T \cdot {}^2[\mathbf{J}_c] \cdot {}^2\{\boldsymbol{\omega}_2\}, \quad (5.119)$$

gdje je :

${}^2\{v_{c2}\}$ - vektor brzine centra inercije članka 2 prikazan u koordinatnom sistemu tog članka,

${}^2[\mathbf{J}_c]$ - matrica momenata inercije članka 2 za njegov centar inercije.

Da bi se odredila brzina centra inercije članka 2, potrebno je prvo odrediti brzinu ishodišta njegovog koordinatnog sistema, koja je prema izrazu (5.58)

$${}^2\{v_2\} = {}^2[\mathbf{R}] \cdot \left({}^1\{v_1\} + {}^1\{\boldsymbol{\omega}_1\} \times {}^1\{p_2\} \right) + \mathbf{h}_2 \cdot {}^2\{\dot{z}_2\}. \quad (5.120)$$

Imajući u vidu da se ishodište koordinatnog sistema (1) poklapa sa nepomičnom tačkom, tada je

$${}^1\{v_1\} = \{0\},$$

tako da se dobija

$${}^2\{v_2\} = \begin{Bmatrix} h_2 \dot{\theta}_1 \\ 0 \\ \dot{z}_2 \end{Bmatrix}. \quad (5.121)$$

Prema izrazu (5.60) je brzina centra inercije članka 2

$${}^2\{v_{c2}\} = {}^2\{v_2\} + {}^2\{\boldsymbol{\omega}_2\} \times {}^2\{p_{c2}\}, \quad (5.122)$$

pri čemu je

$${}^2\{p_{c2}\} = \{0\},$$

tako da se dobija

$${}^2\{v_{c2}\} = \begin{Bmatrix} h_2 \dot{\theta}_1 \\ 0 \\ \dot{z}_2 \end{Bmatrix}. \quad (5.123)$$

Kinetička energija članka 2 je sada

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 (h_2^2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{h}_2^2) + \frac{1}{2} J_{cy} \dot{\theta}_1^2. \quad (5.124)$$

Ukupna kinetička energija sistema je

$$K = \frac{1}{2} \cdot ({}^1J_z + {}^2J_{cy} + m_2 h_2^2) \cdot \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{h}_2^2. \quad (5.125)$$

Koordinate centra inercije pojedinih članaka robota po osi y_0 nepokretnog sistema su

$${}^0y_{c1} = x_{c1} s_1, \quad {}^0y_{c2} = h_2 \cdot s_1.$$

Potencijalna energija sistema je

$$P = (m_1 \cdot {}^0y_{c1} + m_2 \cdot {}^0y_{c2}) g, \quad (5.126)$$

odnosno

$$P = (m_1 \cdot x_{c1} + m_2 h_2) g s_1. \quad (5.127)$$

Potrebni izvodi pojedinih komponenti energije sistema po generalisanoj koordinati θ_1 , kao i generalisanoj brzini $\dot{\theta}_1$ su

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_1} = ({}^1J_z + {}^2J_{cy} + m_2 \cdot h_2^2) \dot{\theta}_1, \quad (5.128)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = ({}^1J_z + {}^2J_{cy} + m_2 \cdot h_2^2) \ddot{\theta}_1 + 2m_2 h_2 \dot{h}_2 \dot{\theta}_1, \quad (5.129)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \theta_1} = 0, \quad (5.130)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta_1} = (m_1 \cdot x_{c1} + m_2 h_2) g c_1. \quad (5.131)$$

Pogonski moment aktuatora prvog članka je prema izrazu (5.49)

$$M_1^{ak} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial K}{\partial \theta_1} + \frac{\partial P}{\partial \theta_1} \quad (5.132)$$

odnosno

$$M_1^{\text{ak}} = \left({}^1J_z + {}^2J_{cy} + m_2 h_2^2 \right) \ddot{\theta}_1 + 2m_2 h_2 \dot{h}_2 \dot{\theta}_1 + (m_1 x_{c1} + m_2 h_2) g c_1. \quad (5.133)$$

Izvodi pojedinih komponenti energije sistema po generalisanoj koordinati h_2 , kao i generalisanoj brzini \dot{h}_2 su

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{h}_2} = m_2 \dot{h}_2, \quad (5.134)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{h}_2} \right) = m_2 \ddot{h}_2, \quad (5.135)$$

$$\frac{\partial K}{\partial h_2} = m_2 h_2 \ddot{\theta}_1, \quad (5.136)$$

$$\frac{\partial P}{\partial h_2} = m_2 g s_1, \quad (5.137)$$

tako da je pogonska sila drugog aktuatora

$$F_2^{\text{ak}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{h}_2} \right) - \frac{\partial K}{\partial h_2} + \frac{\partial P}{\partial h_2}, \quad (5.138)$$

odnosno

$$F_2^{\text{ak}} = m_2 \cdot \left(\ddot{h}_2 - h_2 \ddot{\theta}_1^2 + g s_1 \right). \quad (5.139)$$

Dobijeni izrazi su isti kao i izrazi za pogonska opterećenja pojedinih aktuatora dobijeni primjenom Newton-Eulerove metode.

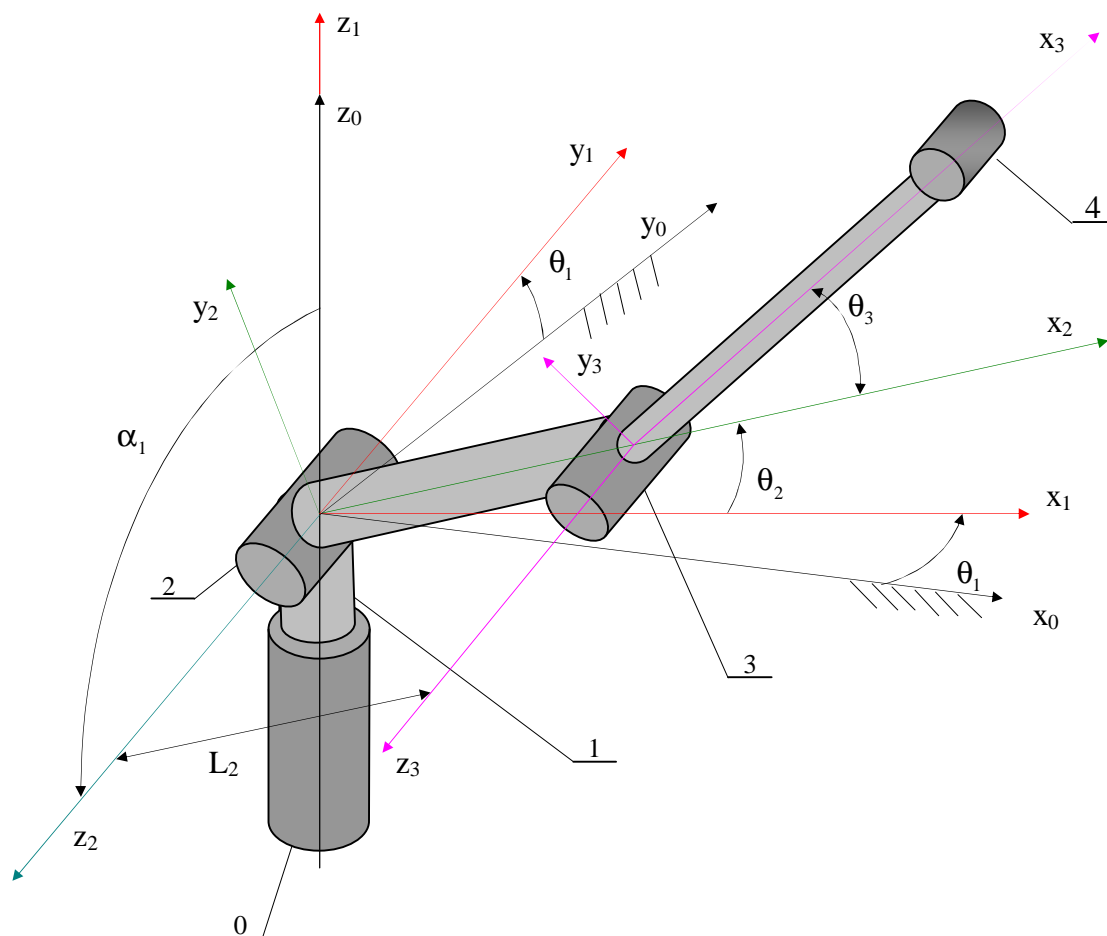
Shodno izrazu (5.44) sistem jednačina (5.133) i (5.139) se može u matricnom obliku napisati kao

$$\begin{Bmatrix} M_1^{\text{ak}} \\ F_2^{\text{ak}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1J_z + {}^2J_{cy} + m_2 h_2^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{h}_2 \end{Bmatrix} + m_2 h_2 \begin{Bmatrix} 2\dot{\theta}_1 \dot{h}_2 \\ -\dot{\theta}_1^2 \end{Bmatrix} + g \begin{Bmatrix} (m_1 x_{c1} + m_2 h_2) c_1 \\ m_2 s_1 \end{Bmatrix}. \quad (5.140)$$

5.6.2. Drugi primjer - robot sa tri rotaciona zgloba

Na slici 5.6. prikazan je robot sa tri rotaciona zgloba. Pod pretpostavkom da se aktuatori mogu smatrati sastavnim dijelovima odgovarajućih članaka na njihovim počecima, kao i da se prihvatnica zajedno sa teretom može smatrati koncentrisanom masom na kraju posljednjeg članka robota, primjenom Newton-Eulerove kao i Lagrangeove metode potrebno je odrediti pogonske momente aktuatora, ako su za svaki položaj robota poznate zglobne ugaone brzine kao i zglobna ugaona ubrzanja pojedinih

članaka robota. Takođe su poznate geometrijske i dinamičke karakteristike pojedinih elemenata (mase i momenti inercija). Kao i u prethodnom primjeru, dobijene jednačine potrebno je prikazati i u matričnom obliku.



Slika 5.6. Robot sa tri rotaciona zgloba

a) Newton-Eulerova metoda

Kao i u prethodnom primjeru, prvo je potrebno odrediti matrice rotacije između koordinatnih sistema koji su vezani za pojedine članke. Na osnovu izraza (5.69) će pojedine matrice rotacije biti

$${}^1_0[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.141)$$

$${}^2_1[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.142)$$

$${}^3_2[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.143)$$

1. Spoljašnja iteracija

Poći će se od nepomičnog sistema (0) za koji je:

$${}^0\{\omega_0\} = \{0\}, \quad {}^0\{\varepsilon_0\} = \{0\}, \quad {}^0\{a_0\} = \{0\}, \quad {}^0\{a_{c0}\} = \{0\}. \quad (5.144)$$

Tako će se primjenom izraza za spoljašnje iteracije za rotacione članke: (5.19), (5.23), (5.26), (5.33), (5.34), (5.35), za članak 1 dobiti:

ugaona brzina:

$${}^1\{\omega_1\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \otimes_1 \end{pmatrix}, \quad (5.145)$$

ugaono ubrzanje:

$${}^1\{\varepsilon_1\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \otimes_1 \end{pmatrix}, \quad (5.146)$$

ubrzanje ishodišta koordinatnog sistema članka:

$${}^1\{a_1\} = \{0\}, \quad (5.147)$$

ubrzanje centra inercije članka:

$${}^1\{a_{c1}\} = \{0\}, \quad (5.148)$$

glavni vektor sila koje djeluju na članak:

$${}^1\{S_1\} = \{0\}, \quad (5.149)$$

glavni moment sila koje djeluju na članak, za njegov centar inercije kao pol:

$${}^1\{K_1\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^1J_{cz} \cdot \ddot{\theta}_1 \end{pmatrix}. \quad (5.150)$$

Za članak 2 se primjenom istih jednačina dobija:

$${}^2\{\omega_2\} = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \cdot s_2 \\ \ddot{\theta}_1 \cdot c_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix}, \quad (5.151)$$

$${}^2\{\varepsilon_2\} = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \cdot s_2 + \ddot{\theta}_1 \ddot{\theta}_2 c_2 \\ \ddot{\theta}_1 \cdot c_2 - \ddot{\theta}_1 \ddot{\theta}_2 s_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix}, \quad (5.152)$$

$${}^2\{a_2\} = \{0\}, \quad (5.153)$$

$${}^2\{a_{c2}\} = \begin{Bmatrix} -x_{c2} \cdot (\ddot{\theta}_1 \cdot c_2^2 + \ddot{\theta}_2^2) \\ x_{c2} \cdot (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 \ddot{\theta}_2 s_2 c_2) \\ x_{c2} \cdot (2\ddot{\theta}_1 \ddot{\theta}_2 s_2 - \ddot{\theta}_1 c_2) \end{Bmatrix}, \quad (5.154)$$

$${}^2\{S_2\} = m_2 \cdot \begin{Bmatrix} -x_{c2} \cdot (\ddot{\theta}_1 \cdot c_2^2 + \ddot{\theta}_2^2) \\ x_{c2} \cdot (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 \ddot{\theta}_2 s_2 c_2) \\ x_{c2} \cdot (2\ddot{\theta}_1 \ddot{\theta}_2 s_2 - \ddot{\theta}_1 c_2) \end{Bmatrix}, \quad (5.155)$$

gdje je: x_{c2} - koordinata centra inercije članka 2 po osi x_2 .

Pod pretpostavkom da su ose cx_2 , cy_2 , cz_2 ujedno glavne ose inercije, glavni moment sila koje djeluju na članak 2 za njegov centar inercije kao pol se dobija u obliku

$${}^2\{\mathbf{x}_2\} = \begin{Bmatrix} {}^2J_{cx} \mathfrak{G}_1 s_2 + ({}^2J_{cx} + {}^2J_{cz} - {}^2J_{cy}) \cdot \mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 c_2 \\ {}^2J_{cy} \mathfrak{G}_1 c_2 + ({}^2J_{cx} - {}^2J_{cy} - {}^2J_{cz}) \cdot \mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 s_2 \\ {}^2J_{cz} \mathfrak{G}_2 + ({}^2J_{cy} - {}^2J_{cx}) \cdot \mathfrak{G}_1 s_2 c_2 \end{Bmatrix}. \quad (5.156)$$

Za članak 3, na sličan način kao za prethodne članke, dobija se:

$${}^3\{\omega_3\} = \begin{Bmatrix} \mathfrak{G}_1 \cdot s_{23} \\ \mathfrak{G}_1 \cdot c_{23} \\ \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_3 \end{Bmatrix}, \quad (5.157)$$

$${}^3\{\varepsilon_3\} = \begin{Bmatrix} \mathfrak{G}_1 \cdot s_{23} + \mathfrak{G}_1 (\mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_3) \cdot c_{23} \\ \mathfrak{G}_1 \cdot c_{23} - \mathfrak{G}_1 (\mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_3) \cdot s_{23} \\ \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_3 \end{Bmatrix}, \quad (5.158)$$

$${}^3\{a_3\} = \begin{Bmatrix} L_2 \cdot (\mathfrak{G}_2 s_3 - \mathfrak{G}_1^2 c_2 c_{23} - \mathfrak{G}_2^2 c_3) \\ L_2 \cdot (\mathfrak{G}_2 c_3 + \mathfrak{G}_1^2 c_2 s_{23} + \mathfrak{G}_2^2 s_3) \\ L_2 \cdot (2\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 s_2 - \mathfrak{G}_1 c_2) \end{Bmatrix}, \quad (5.159)$$

$${}^3\{a_{c3}\} = \begin{Bmatrix} L_2 \cdot \mathfrak{G}_2 s_3 - (L_2 c_2 c_{23} + x_{c3} c_{23}^2) \mathfrak{G}_1^2 - L_2 c_3 \mathfrak{G}_2^2 - x_{c3} (\mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_3)^2 \\ (L_2 c_3 + x_{c3}) \mathfrak{G}_2^2 + x_{c3} \mathfrak{G}_3^2 + (L_2 c_2 s_{23} + x_{c3} c_{23} s_{23}) \mathfrak{G}_1^2 + L_2 s_3 \mathfrak{G}_2^2 \\ -(L_2 c_2 + x_{c3} c_{23}) \cdot \mathfrak{G}_1 + 2(L_2 s_2 + x_{c3} s_{23}) \mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 + 2x_{c3} s_{23} \mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_3 \end{Bmatrix}, \quad (5.160)$$

$${}^3\{\mathfrak{S}_3\} = m_3 \cdot {}^3\{a_{c3}\} = m_3 \begin{Bmatrix} L_2 \cdot \mathfrak{G}_2 s_3 - (L_2 c_2 c_{23} + x_{c3} c_{23}^2) \mathfrak{G}_1^2 - L_2 c_3 \mathfrak{G}_2^2 - x_{c3} (\mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_3)^2 \\ (L_2 c_3 + x_{c3}) \mathfrak{G}_2^2 + x_{c3} \mathfrak{G}_3^2 + (L_2 c_2 s_{23} + x_{c3} c_{23} s_{23}) \mathfrak{G}_1^2 + L_2 s_3 \mathfrak{G}_2^2 \\ -(L_2 c_2 + x_{c3} c_{23}) \cdot \mathfrak{G}_1 + 2(L_2 s_2 + x_{c3} s_{23}) \mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 + 2x_{c3} s_{23} \mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_3 \end{Bmatrix}, \quad (5.161)$$

pri čemu je: L_2 – dužina članka 2.

Pod pretpostavkom da su ose cx_3, cy_3, cz_3 ujedno glavne ose inercije, za članak 3 se dobija glavni moment sila koje djeluju na njega, u odnosu njegov centar inercije kao pol:

$${}^3\{\mathbf{x}_3\} = \begin{Bmatrix} {}^3J_{cx} \mathfrak{G}_1 s_{23} + ({}^3J_{cz} + {}^3J_{cx} - {}^3J_{cy}) \cdot \mathfrak{G}_1 (\mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_3) \cdot c_{23} \\ {}^3J_{cy} \mathfrak{G}_1 c_{23} + ({}^3J_{cx} - {}^3J_{cy} - {}^3J_{cz}) \cdot \mathfrak{G}_1 (\mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_3) \cdot s_{23} \\ {}^3J_{cz} \cdot (\mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_3) + ({}^3J_{cy} - {}^3J_{cx}) \cdot \mathfrak{G}_1 s_{23} c_{23} \end{Bmatrix}. \quad (5.162)$$

Pod pretpostavkom da se teret zajedno sa prihvatnicom može smatrati koncentrisanom masom, tada je za njih potrebno odrediti one karakteristike koje se odnose na materijalnu tačku. Teret sa prihvatnicom će se označiti indeksom (4). Ustanovit će se

koordinatni sistem (4), koji je čvrsto vezan za teret, uz pretpostavku da se ishodište tog sistema poklapa sa teretom, a orijentacija tog sistema je ista kao i orijentacija sistema (3). Tako će se za prihvatnicu sa teretom dobiti:

$${}^4\{a_4\} = {}^3\{a_4\} = \begin{Bmatrix} L_2 s_3 \theta_2 - (L_2 c_2 c_{23} + L_3 c_{23}^2) \theta_1^2 - L_2 c_3 \theta_2^2 - L_3 (\theta_2 + \theta_3)^2 \\ (L_2 c_3 + L_3) \theta_2^2 + L_3 \theta_3^2 + (L_2 c_2 s_{23} + L_3 c_{23} s_{23}) \theta_1^2 + L_2 s_3 \theta_2^2 \\ -(L_2 c_2 + L_3 c_{23}) \cdot \theta_1 + 2(L_2 s_2 + L_3 s_{23}) \theta_1 \theta_2 + 2L_3 s_{23} \theta_1 \theta_3 \end{Bmatrix}, \quad (5.163)$$

$${}^4\{S_4\} = m_4 \cdot {}^4\{a_4\},$$

$${}^4\{S_4\} = m_4 \cdot \begin{Bmatrix} L_2 s_3 \theta_2 - (L_2 c_2 c_{23} + L_3 c_{23}^2) \theta_1^2 - L_2 c_3 \theta_2^2 - L_3 (\theta_2 + \theta_3)^2 \\ (L_2 c_3 + L_3) \theta_2^2 + L_3 \theta_3^2 + (L_2 c_2 s_{23} + L_3 c_{23} s_{23}) \theta_1^2 + L_2 s_3 \theta_2^2 \\ -(L_2 c_2 + L_3 c_{23}) \cdot \theta_1 + 2(L_2 s_2 + L_3 s_{23}) \theta_1 \theta_2 + 2L_3 s_{23} \theta_1 \theta_3 \end{Bmatrix}, \quad (5.164)$$

$${}^4\{x_4\} = \{0\}, \quad (5.165)$$

gdje je: L_3 – dužina članka 3.

2. Unutrašnja iteracija

Glavni vektor sila kojima članak 3 djeluje na prihvatnicu sa teretom, na osnovu izraza (5.39), je

$${}^4\{f_4\} = {}^4\{S_4\} - {}^4\{F_4\} + {}^4[R] {}^5\{f_5\}. \quad (5.166)$$

Pri tome se ima u vidu da je glavni vektor sila kojima prihvatnica sa teretom djeluje na neki članak 5, koji je fiktivan jer i ne postoji, jednak nuli

$${}^5\{f_5\} = \{0\}, \quad (5.167)$$

tako da slijedi

$${}^4\{f_4\} = {}^4\{S_4\} - {}^4\{F_4\}. \quad (5.168)$$

Vektor ${}^4\{F_4\}$ zapravo predstavlja vektor težine prihvatnice sa teretom, koji u nepomičnom sistemu ima oblik

$${}^0\{F_4\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_4 g \end{Bmatrix}, \quad (5.169)$$

a u koordinatnom sistemu (4) je

$${}^4\{F_4\} = {}^4[R] {}^0\{F_4\} = {}^3[R] {}^0\{F_4\}. \quad (5.170)$$

Matrica rotacije ${}^4[R]$, odnosno ${}^3[R]$, je

$${}^4[R] = {}^3[R] = {}^2[R] {}^1[R] = \begin{bmatrix} c_1 \cdot c_{23} & s_1 \cdot c_{23} & s_{23} \\ -c_1 \cdot s_{23} & -s_1 \cdot s_{23} & c_{23} \\ s_1 & -c_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.171)$$

Sada je

$${}^4\{F_4\} = -m_4 g \begin{Bmatrix} s_{23} \\ c_{23} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (5.172)$$

pa je glavni vektor sila kojima članak 3 djeluje na prihvatnicu sa teretom

$${}^4\{f_4\} = m_4 \cdot \begin{Bmatrix} L_2 s_3 \theta_2^2 - (L_2 c_2 c_{23} + L_3 c_{23}^2) \theta_1^2 - L_2 c_3 \theta_2^2 - L_3 (\theta_2 + \theta_3)^2 + g s_{23} \\ (L_2 c_3 + L_3) \theta_2^2 + L_3 \theta_3^2 + (L_2 c_2 s_{23} + L_3 c_{23} s_{23}) \theta_1^2 + L_2 s_3 \theta_2^2 + g c_{23} \\ -(L_2 c_2 + L_3 c_{23}) \cdot \theta_1 + 2(L_2 s_2 + L_3 s_{23}) \theta_1 \theta_2 + 2L_3 s_{23} \theta_1 \theta_3 \end{Bmatrix}. \quad (5.173)$$

S druge strane, s obzirom da se prihvatnica sa teretom može posmatrati kao materijalna tačka, slijedi

$${}^4\{n_4\} = 0.$$

Primjenom jednačine (5.39) dobija se i glavni vektor sila kojima članak 2 djeluje na članak 3

$${}^3\{f_3\} = {}^3\{F_3\} + {}^3[R] {}^4\{f_4\}. \quad (5.174)$$

Vektor ${}^3\{F_3\}$ će biti jednak vektoru težine članka 3, koji u nepomičnom sistemu ima oblik

$${}^0\{F_3\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_3 g \end{Bmatrix}, \quad (5.175)$$

a u koordinatnom sistemu (3) je

$${}^3\{F_3\} = {}^3[R] {}^0\{F_3\}, \quad (5.176)$$

odnosno

$${}^3\{F_3\} = -m_3 g \begin{Bmatrix} s_{23} \\ c_{23} \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (5.177)$$

Poslije uvrštavanja dobijenih vrijednosti u izraz (5.174) dobija se

$${}^3\{f_3\} = \begin{Bmatrix} L_2(m_3 + m_4) \cdot s_3 \mathfrak{G}_2 - [L_2(m_3 + m_4) \cdot c_2 c_{23} + (m_3 x_{c3} + m_4 L_3) \cdot c_{23}^2] \cdot \mathfrak{G}_1^2 - \\ - L_2(m_3 + m_4) \cdot c_3 \mathfrak{G}_2^2 - (m_3 x_{c3} + m_4 L_3) (\mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_3)^2 + (m_3 + m_4) \cdot g s_{23} \\ [L_2(m_3 + m_4) \cdot c_3 + m_3 x_{c3} + m_4 L_3] \cdot \mathfrak{G}_2 + (m_3 x_{c3} + m_4 L_3) \cdot \mathfrak{G}_3 + [L_2(m_3 + m_4) \cdot c_2 s_{23} + \\ + (m_3 x_{c3} + m_4 L_3) c_{23} s_{23}] \cdot \mathfrak{G}_1^2 + L_2(m_3 + m_4) \cdot s_3 \mathfrak{G}_2^2 + (m_3 + m_4) \cdot g c_{23} \\ - [(m_3 x_{c3} + m_4 L_3) \cdot c_{23} + L_2(m_3 + m_4) \cdot c_2] \mathfrak{G}_1 + 2[L_2(m_3 + m_4) \cdot s_2 + \\ + (m_3 x_{c3} + m_4 L_3) s_{23}] \cdot \mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 + 2(m_3 x_{c3} + m_4 L_3) \cdot s_{23} \mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_3 \end{Bmatrix} \quad (5.178)$$

Primjenom izraza (5.41) za glavni moment sila kojim članak 2 djeluje na članak 3, slijedi

$${}^3\{n_3\} = {}^3\{\mathfrak{R}_3\} \cdot {}^3\{M_3\} + {}^3\{R\} \cdot {}^4\{n_4\} + {}^3\{p_{c3}\} \times {}^3\{\mathfrak{S}_3\} + {}^3\{p_{c3}\} \times {}^3\{F_3\} + {}^3\{p_4\} \times ({}^3\{R\} \cdot {}^4\{f_4\}). \quad (5.179)$$

Moment ${}^3\{M_3\}$ je ustvari moment težine članka 3 za njegov centar inercije, koji je jednak nuli

$${}^3\{M_3\} = \{0\}.$$

Uvrštavanjem ranije dobijenih potrebnih vrijednosti u izraz (5.179) dobija se

$${}^3\{n_3\} = \begin{Bmatrix} {}^3J_{cx} s_{23} \mathfrak{G}_1 + ({}^3J_{cz} + {}^3J_{cx} - {}^3J_{cy}) \cdot \mathfrak{G}_1 (\mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_3) \cdot c_{23} \\ [{}^3J_{cy} c_{23} + L_2(m_3 x_{c3} + m_4 L_3) \cdot c_2 + (m_3 x_{c3}^2 + m_4 L_3^2) \cdot c_{23}] \mathfrak{G}_1 + \\ + [({}^3J_{cx} - {}^3J_{cy} - {}^3J_{cz}) \cdot s_{23} - 2L_2(m_3 x_{c3} + m_4 L_3) \cdot s_2 - 2(m_3 x_{c3}^2 + m_4 L_3^2) \cdot s_{23}] \cdot \mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 + \\ + [({}^3J_{cx} - {}^3J_{cy} - {}^3J_{cz}) \cdot s_{23} - 2(m_3 x_{c3}^2 + m_4 L_3^2) s_{23}] \cdot \mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_3 \\ [m_3 x_{c3}^2 + m_4 L_3^2 + {}^3J_{cz} + L_2(m_3 x_{c3} + m_4 L_3) c_3] \cdot \mathfrak{G}_2 + (m_3 x_{c3}^2 + m_4 L_3^2 + {}^3J_{cz}) \cdot \mathfrak{G}_3 + \\ + [(m_3 x_{c3}^2 + m_4 L_3^2 + {}^3J_{cy} - {}^3J_{cx}) \cdot s_{23} c_{23} + L_2(m_3 x_{c3} + m_4 L_3) c_2 s_{23}] \cdot \mathfrak{G}_1^2 + \\ + L_2(m_3 x_{c3} + m_4 L_3) \cdot s_3 \mathfrak{G}_2^2 + (m_3 x_{c3} + m_4 L_3) \cdot g c_{23} \end{Bmatrix} \quad (5.180)$$

Prema izrazu (5.42) moment aktuatora 3 je

$$M_3^{\text{ak}} = {}^3\{\mathbf{n}_3\}^T \cdot {}^3\{\hat{\mathbf{z}}_3\}, \quad (5.181)$$

što znači da je on jednak izrazu u trećoj vrsti vektora ${}^3\{\mathbf{n}_3\}$

$$\begin{aligned} M_3^{\text{ak}} = & \left[{}^3J_{c_z} + m_3 x_{c3}^2 + m_4 L_3^2 + L_2 (m_3 x_{c3} + m_4 L_3) \cdot c_3 \right] \theta_2^2 + \left({}^3J_{c_z} + m_3 x_{c3}^2 + m_4 L_3^2 \right) \cdot \theta_3^2 + \\ & + \left[\left({}^3J_{c_y} - {}^3J_{c_x} + m_3 x_{c3}^2 + m_4 L_3^2 \right) \cdot s_{23} c_{23} + L_2 (m_3 x_{c3} + m_4 L_3) \cdot c_2 s_{23} \right] \cdot \theta_1^2 + \\ & + L_2 (m_3 x_{c3} + m_4 L_3) \cdot s_3 \theta_2^2 + (m_3 x_{c3} + m_4 L_3) \cdot g c_{23}. \end{aligned} \quad (5.182)$$

Primjenjujući istu proceduru za unutrašnju iteraciju, idući ka baznom članku, dobit će se momenti pojedinih aktuatora u obliku:

$$\begin{aligned} M_2^{\text{ak}} = & \left[{}^2J_z + {}^3J_{c_z} + m_3 (L_2^2 + x_{c3}^2) + m_4 (L_2^2 + L_3^2) + 2L_2 (m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3) c_3 \right] \theta_2^2 + \\ & + \left[{}^3J_{c_z} + m_3 \cdot x_{c3}^2 + m_4 \cdot L_3^2 + L_2 (m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3) c_3 \right] \cdot \theta_3^2 + \\ & + \left[\left({}^2J_y - {}^2J_x + m_3 L_2^2 + m_4 \cdot L_2^2 \right) \cdot c_2 s_2 + \left({}^3J_{c_y} - {}^3J_{c_x} + m_3 x_{c3}^2 + m_4 \cdot L_3^2 \right) \cdot c_{23} s_{23} + \right. \\ & + L_2 (m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3) \cdot s_2 c_{23} + L_2 (m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3) \cdot c_2 s_{23} \left. \right] \theta_1^2 - \\ & - 2L_2 (m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3) \cdot s_3 \theta_2 \theta_3 - L_2 (m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3) \cdot s_3 \theta_3^2 + \\ & + \left[(m_2 x_{c2} + m_3 L_2 + m_4 L_2) \cdot c_2 + m_4 L_3 c_{23} \right] \cdot g, \end{aligned} \quad (5.183)$$

$$\begin{aligned} M_1^{\text{ak}} = & \left[{}^1J_z + \left({}^2J_y + m_3 \cdot L_2^2 + m_4 \cdot L_2^2 \right) c_2^2 + {}^2J_x \cdot s_2^2 + \left({}^3J_{c_y} + m_3 \cdot x_{c3}^2 + m_4 \cdot L_3^2 \right) c_{23}^2 + \right. \\ & + {}^3J_{c_x} s_{23}^2 + 2L_2 (m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3) c_2 c_{23} \left. \right] \theta_1^2 + 2 \cdot \left[\left({}^2J_x - {}^2J_y - m_3 L_2^3 - m_4 L_2^3 \right) s_2 c_2 + \right. \\ & + \left({}^3J_{c_x} - {}^3J_{c_y} - m_3 x_{c3}^3 - m_4 L_3^3 \right) s_{23} c_{23} - L_2 (m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3) s_2 c_{23} - \\ & - L_2 (m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3) c_2 s_{23} \left. \right] \cdot \theta_1 \theta_2 + 2 \cdot \left[\left({}^3J_{c_x} - {}^3J_{c_y} - m_3 x_{c3}^3 - m_4 L_3^3 \right) s_{23} c_{23} - \right. \\ & - L_2 (m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3) c_2 s_{23} \left. \right] \theta_1 \theta_3. \end{aligned} \quad (5.184)$$

b) Lagrangeova metoda

Članak 1 vrši rotaciju oko stalne ose z_1 , pa je prema izrazu (5.54) njegova kinetička energija

$$K_1 = \frac{1}{2} \cdot {}^1\{\omega_1\}^T \cdot {}^1[J] \cdot {}^1\{\omega_1\}, \quad (5.185)$$

odnosno

$$K_1 = \frac{1}{2} \cdot {}^1J_z \cdot \omega_1^2. \quad (5.186)$$

Članak 2 vrši sferno kretanje, pri čemu sve tri ose njegovog koordinatnog sistema (x_2 , y_2 , z_2) prolaze kroz nepomičnu tačku (sl.5.5), pa je prema izrazu (5.54) kinetička energija tog članka

$$K_2 = \frac{1}{2} \cdot {}^2\{\omega_2\}^T \cdot {}^2[J] \cdot {}^2\{\omega_2\}, \quad (5.187)$$

gdje je : ${}^2[J]$ - matrica momenata inercije članka 2 za ishodište koordinatnog sistema 2,

tako da se dobija

$$K_2 = \frac{1}{2} \left({}^2J_x \theta_1^2 s_2^2 + {}^2J_y \theta_1^2 c_2^2 + {}^2J_z \theta_2^2 \right). \quad (5.188)$$

Članak 3 vrši složeno kretanje u prostoru, pa je prema izrazu (5.52) njegova kinetička energija

$$K_3 = \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot {}^3\{v_{c3}\}^T \cdot {}^3\{v_{c3}\} + \frac{1}{2} \cdot {}^3\{\omega_3\}^T \cdot {}^3[J_c] \cdot {}^3\{\omega_3\}, \quad (5.189)$$

gdje je :

${}^3\{v_{c3}\}$ - vektor brzine centra inercije članka 3 prikazan u koordinatnom sistemu (3),

${}^3[J_c]$ - matrica momenata inercije članka 3 za njegov centar inercije.

Da bi se odredila brzina centra inercije članka 3, potrebno je prvo odrediti brzinu ishodišta koordinatnog sistema članka 3, koja je prema izrazu (5.56)

$${}^3\{v_3\} = {}^3[R] \left({}^2\{v_2\} + {}^2\{\omega_2\} \times {}^2\{p_3\} \right). \quad (5.190)$$

Imajući u vidu da se ishodište koordinatnog sistema (2) poklapa sa nepomičnom tačkom, tada je

$${}^2\{v_2\} = \{0\},$$

tako da se dobija

$${}^3\{v_3\} = L_2 \begin{Bmatrix} \theta_2 s_3 \\ \theta_2 c_3 \\ -\theta_1 c_2 \end{Bmatrix}. \quad (5.191)$$

Prema izrazu (5.60) je brzina centra inercije članka 3

$${}^3\{v_{c3}\} = {}^3\{v_3\} + {}^3\{\omega_3\} \times {}^3\{p_{c3}\}, \quad (5.192)$$

odnosno

$${}^3\{v_{c3}\} = \begin{Bmatrix} L_2 \dot{\theta}_2 s_3 \\ L_2 \dot{\theta}_2 c_3 + x_{c3} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\ -L_2 \dot{\theta}_1 c_2 - x_{c3} \dot{\theta}_1 c_{23} \end{Bmatrix}. \quad (5.193)$$

Sada je kinetička energija članka 3 konačno

$$K_3 = \frac{1}{2} m_3 \left[L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + x_{c3}^2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 + 2L_2 x_{c3} \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) c_3 + L_2^2 \dot{\theta}_1^2 c_2^2 + x_{c3}^2 \dot{\theta}_1^2 c_{23}^2 + 2L_2 x_{c3} \dot{\theta}_1 c_2 c_{23} \right] + \frac{1}{2} \left[{}^3J_{cx} \dot{\theta}_1^2 s_{23}^2 + {}^3J_{cy} \dot{\theta}_1^2 c_{23}^2 + {}^3J_{cz} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 \right]. \quad (5.194)$$

Kinetička energija tijela tereta sa prihvatnicom je

$$K_4 = \frac{1}{2} m_4 {}^4\{v_4\}^T \cdot {}^4\{v_4\}. \quad (5.195)$$

Prema izrazu (5.56) je brzina tereta sa prihvatnicom

$${}^4\{v_4\} = {}^4[R] \left({}^3\{v_3\} + {}^3\{\omega_3\} \times {}^3\{p_4\} \right), \quad (5.196)$$

odnosno

$${}^4\{v_4\} = \begin{Bmatrix} L_2 \dot{\theta}_2 s_3 \\ L_2 \dot{\theta}_2 c_3 + L_3 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\ -L_2 \dot{\theta}_1 c_2 - L_3 \dot{\theta}_1 c_{23} \end{Bmatrix}, \quad (5.197)$$

pa je kinetička energija tereta sa prihvatnicom

$$K_4 = \frac{1}{2} m_4 \left[L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + L_3^2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 + 2L_2 L_3 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) c_3 + L_2^2 \dot{\theta}_1^2 c_2^2 + L_3^2 \dot{\theta}_1^2 c_{23}^2 + 2L_2 L_3 \dot{\theta}_1 c_2 c_{23} \right]. \quad (5.198)$$

Ukupna kinetička energija sistema je

$$K = K_1 + K_2 + K_3 + K_4. \quad (5.199)$$

Koordinate centara inercije pojedinih članaka robota po osi z_0 nepokretnog sistema (0) su

$${}^0z_{c1} = \text{const.},$$

$$\begin{aligned}
{}^0z_{c2} &= x_{c2} \cdot s_2, \\
{}^0z_{c3} &= L_2 \cdot s_2 + x_{c3} \cdot s_{23}, \\
{}^0z_4 &= L_2 \cdot s_2 + L_3 \cdot s_{23}.
\end{aligned} \tag{5.200}$$

Potencijalna energija sistema robota je

$$P = (m_1 \cdot {}^0z_{c1} + m_2 \cdot {}^0z_{c2} + m_3 \cdot {}^0z_{c3} + m_4 \cdot {}^0z_4)g, \tag{5.201}$$

odnosno

$$P = [m_1 \cdot {}^0z_{c1} + (m_2 \cdot x_{c2} + m_3 \cdot L_2 + m_4 L_2)s_2 + (m_3 x_{c3} + m_4 L_3) \cdot s_{23}]g. \tag{5.202}$$

Potrebni izvodi pojedinih komponenti energije sistema po generalisanoj koordinati θ_1 , kao i generalisanoj brzini $\dot{\theta}_1$ su

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_1} &= [{}^1J_z + ({}^2J_y + m_3 \cdot L_2^2 + m_4 \cdot L_2^2)c_2^2 + {}^2J_x \cdot s_2^2 + ({}^3J_{cy} + m_3 \cdot x_{c3}^2 + m_4 \cdot L_3^2)c_{23}^2 + \\
&\quad + {}^3J_{cx} s_{23}^2 + 2L_2(m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3)c_2 c_{23}] \dot{\theta}_1,
\end{aligned} \tag{5.203}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= [{}^1J_z + ({}^2J_y + m_3 \cdot L_2^2 + m_4 \cdot L_2^2)c_2^2 + {}^2J_x \cdot s_2^2 + ({}^3J_{cy} + m_3 \cdot x_{c3}^2 + m_4 \cdot L_3^2)c_{23}^2 + \\
&\quad + {}^3J_{cx} s_{23}^2 + 2L_2(m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3)c_2 c_{23}] \ddot{\theta}_1 + 2 \cdot [({}^2J_x - {}^2J_y - m_3 L_2^3 - m_4 L_2^3)s_2 c_2 + \\
&\quad + ({}^3J_{cx} - {}^3J_{cy} - m_3 x_{c3}^3 - m_4 L_3^3)s_{23} c_{23} - L_2(m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3)s_2 c_{23} - \\
&\quad - L_2(m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3)c_2 s_{23}] \cdot \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + 2 \cdot [({}^3J_{cx} - {}^3J_{cy} - m_3 x_{c3}^3 - m_4 L_3^3)s_{23} c_{23} - \\
&\quad - L_2(m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3)c_2 s_{23}] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3,
\end{aligned} \tag{5.204}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \theta_1} = 0, \tag{5.205}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta_1} = 0. \tag{5.206}$$

Pogonski moment aktuatora prvog članka je

$$M_1^{ak} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial K}{\partial \theta_1} + \frac{\partial P}{\partial \theta_1}, \tag{5.207}$$

odnosno

$$\begin{aligned}
M_1^{\text{ak}} = & \left[{}^1J_z + \left({}^2J_y + m_3 \cdot L_2^2 + m_4 \cdot L_2^2 \right) c_2^2 + {}^2J_x \cdot s_2^2 + \left({}^3J_{cy} + m_3 \cdot x_{c3}^2 + m_4 \cdot L_3^2 \right) c_{23}^2 + \right. \\
& + {}^3J_{cx} s_{23}^2 + 2L_2 \left(m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3 \right) c_2 c_{23} \left. \right] \theta_1 + 2 \cdot \left[\left({}^2J_x - {}^2J_y - m_3 L_2^2 - m_4 L_2^2 \right) s_2 c_2 + \right. \\
& + \left({}^3J_{cx} - {}^3J_{cy} - m_3 x_{c3}^2 - m_4 L_3^2 \right) s_{23} c_{23} - L_2 \left(m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3 \right) s_2 c_{23} - \\
& - L_2 \left(m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3 \right) c_2 s_{23} \left. \right] \cdot \theta_1 \theta_2 + 2 \cdot \left[\left({}^3J_{cx} - {}^3J_{cy} - m_3 x_{c3}^2 - m_4 L_3^2 \right) s_{23} c_{23} - \right. \\
& \left. - L_2 \left(m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3 \right) c_2 s_{23} \right] \theta_1 \theta_3. \tag{5.208}
\end{aligned}$$

Izvodi pojedinih komponenti energije sistema po generalisanoj koordinati θ_2 , kao i generalisanoj brzini $\dot{\theta}_2$ su

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_2} = & \left[{}^2J_z + {}^3J_{cz} + m_3 \left(L_2^2 + x_{c3}^2 \right) + m_4 \left(L_2^2 + L_3^2 \right) + 2L_2 \left(m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3 \right) c_3 \right] \dot{\theta}_2 + \\
& + \left[{}^3J_{cz} + m_3 \cdot x_{c3}^2 + m_4 \cdot L_3^2 + L_2 \left(m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3 \right) c_3 \right] \dot{\theta}_3, \tag{5.209}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = & \left[{}^2J_z + {}^3J_{cz} + m_3 \left(L_2^2 + x_{c3}^2 \right) + m_4 \left(L_2^2 + L_3^2 \right) + 2L_2 \left(m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3 \right) c_3 \right] \ddot{\theta}_2 + \\
& + \left[{}^3J_{cz} + m_3 \cdot x_{c3}^2 + m_4 \cdot L_3^2 + L_2 \left(m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3 \right) c_3 \right] \ddot{\theta}_3 - \\
& - 2L_2 \left(m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3 \right) s_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - L_2 \left(m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3 \right) s_3 \dot{\theta}_3^2, \tag{5.210}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K}{\partial \theta_2} = & \left[\left({}^2J_x - {}^2J_y - m_3 L_2^2 - m_4 \cdot L_2^2 \right) c_2 s_2 + \left({}^3J_{cx} - {}^3J_{cy} - m_3 x_{c3}^2 - m_4 \cdot L_3^2 \right) c_{23} s_{23} - \right. \\
& \left. - L_2 \left(m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3 \right) s_2 c_{23} - L_2 \left(m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3 \right) c_2 s_{23} \right] \theta_1^2, \tag{5.211}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta_2} = \left[\left(m_2 x_{c2} + m_3 L_2 + m_4 L_2 \right) c_2 + m_4 L_3 c_{23} \right] \cdot g. \tag{5.212}$$

Pogonski moment drugog aktuatora je

$$M_2^{\text{ak}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial K}{\partial \theta_2} + \frac{\partial P}{\partial \theta_2}, \tag{5.213}$$

odnosno

$$\begin{aligned}
M_2^{\text{ak}} = & \left[{}^2J_z + {}^3J_{cz} + m_3 \left(L_2^2 + x_{c3}^2 \right) + m_4 \left(L_2^2 + L_3^2 \right) + 2L_2 \left(m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3 \right) c_3 \right] \dot{\theta}_2 + \\
& + \left[{}^3J_{cz} + m_3 \cdot x_{c3}^2 + m_4 \cdot L_3^2 + L_2 \left(m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3 \right) c_3 \right] \dot{\theta}_3 + \\
& + \left[\left({}^2J_y - {}^2J_x + m_3 L_2^2 + m_4 \cdot L_2^2 \right) c_2 s_2 + \left({}^3J_{cy} - {}^3J_{cx} + m_3 x_{c3}^2 + m_4 \cdot L_3^2 \right) c_{23} s_{23} + \right. \\
& + L_2 \left(m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3 \right) s_2 c_{23} + L_2 \left(m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3 \right) c_2 s_{23} \left. \right] \theta_1^2 - \\
& - 2L_2 \left(m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3 \right) s_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - L_2 \left(m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3 \right) s_3 \dot{\theta}_3^2 + \\
& + \left[\left(m_2 x_{c2} + m_3 L_2 + m_4 L_2 \right) c_2 + m_4 L_3 c_{23} \right] \cdot g. \tag{5.214}
\end{aligned}$$

Slično će se postupiti i sa trećom generalisanom koordinatom, odnosno generalisanom brzinom

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_3} &= \left[{}^3J_{cz} + m_3 x_{c3}^2 + m_4 \cdot L_3^2 + L_2 (m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3) c_3 \right] \dot{\theta}_2 + \\ &+ \left({}^3J_{cz} + m_3 x_{c3}^2 + m_4 \cdot L_3^2 \right) \dot{\theta}_3, \end{aligned} \quad (5.215)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_3} \right) &= \left[{}^3J_{cz} + m_3 x_{c3}^2 + m_4 \cdot L_3^2 + L_2 (m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3) c_3 \right] \ddot{\theta}_2 + \\ &+ \left({}^3J_{cz} + m_3 x_{c3}^2 + m_4 \cdot L_3^2 \right) \ddot{\theta}_3 - L_2 (m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3) s_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3, \end{aligned} \quad (5.216)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial \theta_3} &= \left[\left({}^3J_{cx} - {}^3J_{cy} - m_3 x_{c3}^2 - m_4 \cdot L_3^2 \right) c_{23} s_{23} - L_2 (m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3) c_2 s_{23} \right] \dot{\theta}_1 - \\ &- L_2 (m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3) s_3 \dot{\theta}_2^2 - L_2 (m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3) s_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3, \end{aligned} \quad (5.217)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta_3} = (m_3 x_{c3} + m_4 L_3) \cdot g \cdot c_{23}. \quad (5.218)$$

Moment trećeg aktuatora je

$$M_3^{\text{ak}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_3} \right) - \frac{\partial K}{\partial \theta_3} + \frac{\partial P}{\partial \theta_3}, \quad (5.219)$$

odnosno

$$\begin{aligned} M_3^{\text{ak}} &= \left[{}^3J_{cz} + m_3 x_{c3}^2 + m_4 L_3^2 + L_2 (m_3 x_{c3} + m_4 L_3) c_3 \right] \dot{\theta}_2 + \left({}^3J_{cz} + m_3 x_{c3}^2 + m_4 L_3^2 \right) \dot{\theta}_3 + \\ &+ \left[\left({}^3J_{cy} - {}^3J_{cx} + m_3 x_{c3}^2 + m_4 L_3^2 \right) s_{23} c_{23} + L_2 (m_3 x_{c3} + m_4 L_3) c_2 s_{23} \right] \dot{\theta}_1^2 + \\ &+ L_2 (m_3 x_{c3} + m_4 L_3) s_3 \dot{\theta}_2^2 + (m_3 x_{c3} + m_4 L_3) g c_{23}. \end{aligned} \quad (5.220)$$

Dobijeni izraz je isti kao i izraz za moment trećeg aktuatora dobijen primjenom Newton-Eulerove metode.

Ako se dobijene jednačine (5.208), (5.214), (5.220) prikažu u matičnom obliku (5.44), dobit će se

$$\begin{Bmatrix} M_1^{\text{ak}} \\ M_2^{\text{ak}} \\ M_3^{\text{ak}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix}, \quad (5.221)$$

pri čemu članovi pojedinih matrica odnosno vektora u posljednjem izrazu imaju vrijednosti

$$A_{11} = \left[{}^1J_z + \left({}^2J_y + m_3 \cdot L_2^2 + m_4 \cdot L_2^2 \right) c_2^2 + {}^2J_x \cdot s_2^2 + \left({}^3J_{cy} + m_3 \cdot x_{c3}^2 + m_4 \cdot L_3^2 \right) c_{23}^2 + {}^3J_{cx} s_{23}^2 + 2L_2 (m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3) c_2 c_{23} \right], \quad (5.222)$$

$$A_{12} = 0, \quad A_{13} = 0, \quad A_{21} = 0, \quad (5.223)$$

$$A_{22} = {}^2J_{cz} + {}^3J_{cz} + m_3 (L_2^2 + x_{c3}^2) + m_4 (L_2^2 + L_3^2) + 2L_2 (m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3) c_3, \quad (5.224)$$

$$A_{23} = {}^3J_{cz} + m_3 \cdot x_{c3}^2 + m_4 \cdot L_3^2 + L_2 (m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3) c_3, \quad (5.225)$$

$$A_{31} = 0, \quad (5.226)$$

$$A_{32} = {}^3J_{cz} + m_3 x_{c3}^2 + m_4 L_3^2 + L_2 (m_3 x_{c3} + m_4 L_3) c_3, \quad (5.227)$$

$$A_{33} = {}^3J_{cz} + m_3 x_{c3}^2 + m_4 L_3^2, \quad (5.228)$$

$$B_1 = 2 \cdot \left[\left({}^2J_x - {}^2J_y - m_3 L_2^3 - m_4 L_2^3 \right) s_2 c_2 + \left({}^3J_{cx} - {}^3J_{cy} - m_3 x_{c3}^3 - m_4 L_3^2 \right) s_{23} c_{23} - L_2 (m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3) s_2 c_{23} - L_2 (m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3) c_2 s_{23} \right] \cdot \mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 + 2 \cdot \left[\left({}^3J_{cx} - {}^3J_{cy} - m_3 x_{c3}^3 - m_4 L_3^2 \right) s_{23} c_{23} - L_2 (m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3) c_2 s_{23} \right] \mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_3, \quad (5.229)$$

$$B_2 = \left[\left({}^2J_y - {}^2J_x + m_3 L_2^2 + m_4 \cdot L_2^2 \right) c_2 s_2 + \left({}^3J_{cy} - {}^3J_{cx} + m_3 x_{c3}^2 + m_4 \cdot L_3^2 \right) c_{23} s_{23} + L_2 (m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3) s_2 c_{23} + L_2 (m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3) c_2 s_{23} \right] \mathfrak{G}_1^2 - 2L_2 (m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3) s_3 \mathfrak{G}_2 \mathfrak{G}_3 - L_2 (m_3 \cdot x_{c3} + m_4 \cdot L_3) s_3 \mathfrak{G}_3^2, \quad (5.230)$$

$$B_3 = \left[(m_3 x_{c3}^2 + m_4 L_3^2 + {}^3J_{cy} - {}^3J_{cx}) s_{23} c_{23} + L_2 (m_3 x_{c3} + m_4 L_3) c_2 s_{23} \right] \mathfrak{G}_1^2 + L_2 (m_3 x_{c3} + m_4 L_3) s_3 \mathfrak{G}_2^2, \quad (5.231)$$

$$C_1 = 0, \quad (5.232)$$

$$C_2 = \left[(m_2 x_{c2} + m_3 L_2 + m_4 L_2) c_2 + m_4 L_3 c_{23} \right] \cdot g, \quad (5.233)$$

$$C_3 = (m_3 x_{c3} + m_4 L_3) g c_{23}. \quad (5.234)$$

LITERATURA:

- [1] Beljanin, P.N.: *Promišljenje roboti*, Mašinstroenije, Moskva, 1983.
- [2] Burden, R.L.; Faires, J.D.: *Numerical Analysis*, PWS-KENT Publishing Company, Boston, 1989.
- [3] Coffiet, P.; Chirouze, M.: *An Introduction to Robot Technology*, Kogan Page, London, 1983.
- [4] Craig, J. J.: *Introduction to Robotics*, Addison -Wesley Publish. Comp. 1989.
- [5] Čohodar, M.; Kulenović, M.; Voloder, A.: *Kinematic Modeling of Robot Arm and Analysis its Singularity*, The 12th INTERNATIONAL DAAAM SYMPOSIUM "Intelligent Manyfacturing & Automation: Focus on Precision Engineering", Jena, 2001.
- [6] Doleček, V.; Voloder, A.: *Matematski model prostornog robotskog manipulatora sa fleksibilnim članovima*, III Međunarodni naučno-stručni skup "Tendencije u razvoju mašinskih konstrukcija i tehnologija", Zenica, 1996.
- [7] Karabegović, I.; Voloder, A.: *Application of Hamilton's principle on the dynamic model of flexible robotic manipulator*, 3rd International Congress of Croatian Society of Mechanics, Cavtat/Dubrovnik, 2000.
- [8] McKerrow, P. J.: *Introduction to Robotics*, Addison-Wesley Publishing Company, Sydney, 1991.
- [9] Meirovitch, L.: *Methods of Analitical Dynamics*, McGraw-Hill Company, New York, 1970.
- [10] Moris, W. D.: *Differential Equations-for Engineers and Applied Scientists*, McGraw-Hill, Maidenhead, 1974.
- [11] Sciavicco, L.; Siciliano, B.: *Modeling and Control of Robot Manipulators*, McGraw-Hill International Editions, 1996.
- [12] Shoham, M.: *A Textbook of robotics: I-Basic concepts*, Kogan Page Ltd, London, 1984.
- [13] Šurina, T.; Crneković, M.: *Industrijski roboti*, Školska knjiga - Zagreb, 1990.
- [14] Voloder, A.: *Prilog dinamičkom modeliranju elastičnih prostornih manipulatora*, doktorska disertacija, Mašinski fakultet Sarajevo, 1999.
- [15] Voloder, A.; Doleček V.: *Analiza uticajnih faktora na vibracije elastičnog manipulatorskog članka*, 2. Međunarodni skup "Revitalizacija i modernizacija proizvodnje, RIM 99", Bihać, 1999.

Senzori u robotici

6

Isak Karabegović, Tehnički fakultet Bihać
Husein Rošić, Tehnički fakultet Bihać

6.1. Uvod

Sam razvoj uređaja koji čovjeka zamjenjuju na onim mjestima, za koja su se strojevi pokazali produktivnijim, tekao je određenim slijedom.

Došlo je do velikog razvoja robota, čija će primjena biti izražena i u budućnosti. Za same proizvođače postavlja se jedan veoma osjetljiv zadatak, a to je proizvodnja senzora, i zamjena ljudskih visoko razvijenih senzoričkih sposobnosti. Tu dolazimo do pojma senzora koji nije baš jasno definiran u literaturi, što se vidi iz niza različitih naziva: sonda, mjerni davač, pretvornik i dr.

Senzori isporučuju samo djelomičnu informaciju, zbog čega je potrebno razviti sisteme koji su izgrađeni s više različitih senzora. Neki od zahtjeva koji se postavljaju za primjenu senzora u robotici su:

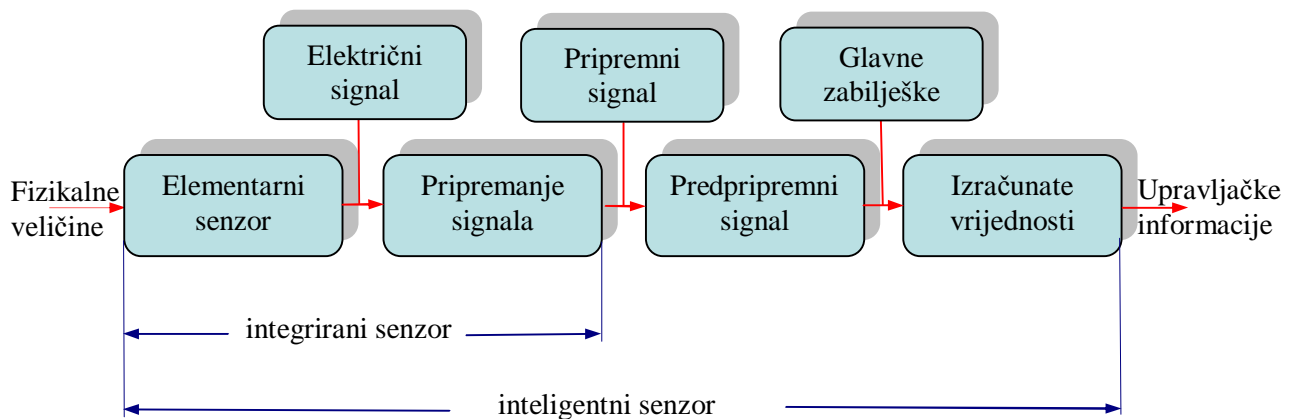
- da bi prikazali uglovni položaj zgloba, obično se na svaku osovinu robota stavlja enkoder,
- mogućnost transformacije zglobnih koordinata u kartezijskom koordinatnom sistemu,
- primjena telerobotike na mjestima gdje ne može biti prisutan čovjek (npr. svemir),
- stepen određenja je određen autonomno od okoline i teško se održava.

Tri principijelna problema mjerenja su:

1. postojeće kretanje točkica mora se uzeti u obzir i izračunati kartezijsko kretanje,
2. na osnovu mjernih grešaka (posrtanja) mora prevozno sredstvo posjedovati mogućnost da se ručno orjentiše zbog vanjskih okolnosti. Fleksibilnost je jako ograničena (npr. indukciono klizanje po podu),
3. smetnje. Posebno izraženo kod stavljanja palete od dodirnih senzora sve do nedodirljivih senzora, koji mogu određivati poziciju, oblik i neke smetnje.

Do danas nije riješen problem slobodne dodirne površine željenog objekta. Senzori su sistemi koji pretvaraju fizikalne veličine i njihove promjene u pogodne električne signale. Ako u potpunosti razumijemo sisteme i ne susreću se nekontrolisane smetnje, onda možemo primjetiti upravljanje. Ako se susreću smetnje, onda na to moraju utjecati ulazne veličine zbog primjene informacija o izlaznim veličinama.

Sam slijed informacije u sistemu senzora prikazan je na slici 6.1.



Slika 6.1. Protok informacija u sistemu senzora

Elementarni senzor preuzima mjerne veličine i pretvara ih u primarni oblik signala. Integrirajući senzor predstavlja kombinaciju integrirajućih senzora sa upravljanjem izračunatih vrijednosti.

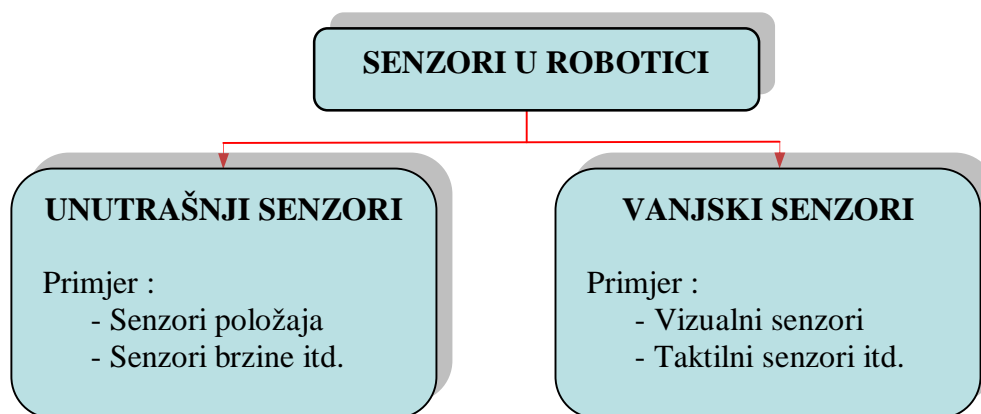
Dakle, to su grubi koraci: mjerne veličine → preuzimanje → priprema informacije + rješavanje → izlaz → rezultat.

Kompleksiniji sistemi imaju različite preuzimače podataka prema lokalnoj pripremi informacije uvezuju se rezultati uz pomoć procesnih maodela i tako nastaju kompleksniji opisi stanja. Pojedinični sistemi senzora mogu ukazati na informacije.

6.2. Podjela senzora

Postoje unutrašnji (pozicija, brzina, odklon, inercijalni, navigacioni sistem) i vanjski (taktilni, približni, odstupanja, virtualni, pozicije) senzori.

Podjela senzora u robotici je uglavnom na unutrašnje i vanjske kako je to prikazano na slici 6.2.



Slika 6.2. Podjela senzora u robotici

Način na koji se vrši klasifikacija senzora uključuju:

- fizički princip na kojem je senzor baziran,
- fizičku ili hemijsku veličinu koju senzor mijenja,
- tehnologiju koja se koristi kod izrade vlakana,
- tip energije: solarna, električna, mehanička,
- odnos senzora i objekta koji se sensorira: kontakt, bez kontakta.

Danas se senzori vanjskog stanja više koriste od senzora unutrašnjeg stanja. Regulacija rada motora i cilindra vrši se mjerenjem brzine, pomaka, uglova i sila.

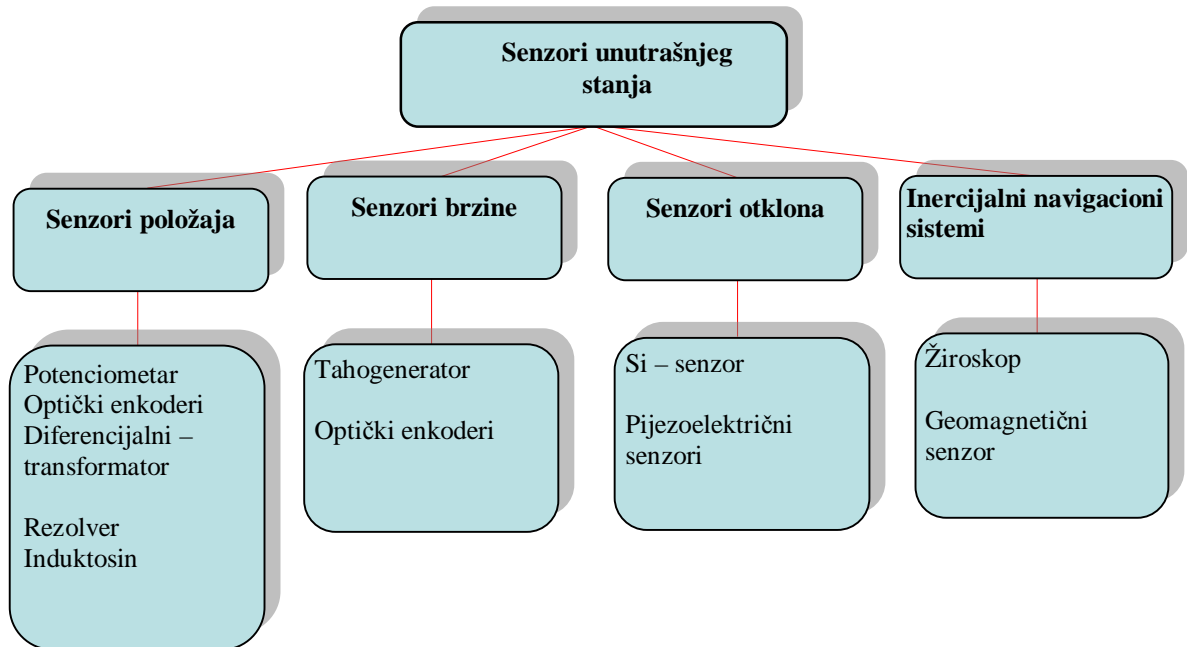
Razvijanjem robota ide se i na razvoj senzora kao sistema za prepoznavanje vanjskih stanja tj. sistema koji će prikupljati podatke o stanju okoline robota (oblicima, udaljenosti, razmiještaju predmeta, preprekama itd.)

Roboti će moći da reaguju na takve situacije u okolini samo uz podršku računara novijih generacija.

6.3. Senzori unutrašnjeg stanja

Za senzore unutrašnjeg stanja najbitnija je regulacija pravilnog rada motora. To je ostvarivo mjerenjem pomaka od uglova mehaničkog sistema, a od senzora se zahtijeva ponajprije tačnost, koja je ovisna o greškama koje se mogu javiti u mehaničkom sistemu.

Osnovne skupine senzora unutrašnjeg stanja date su na slici 6.3.



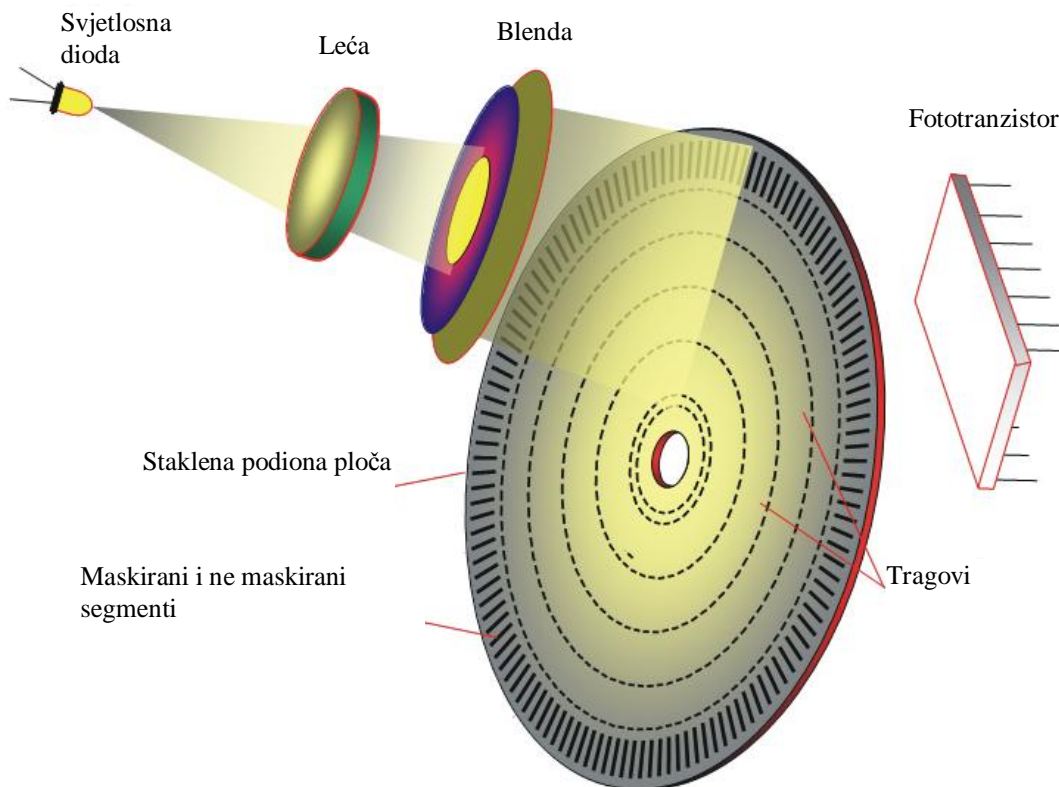
Slika 6.3. Grupe senzora unutrašnjeg stanja

Kao što vidimo sa slike 6.3, senzori unutrašnjeg stanja su klasificirani u četiri grupe: senzori položaja, senzori brzine, senzori otklona i inercijalni navigacioni sistem. Mi ćemo ovdje opisati rad apsolutnih analognih mjernih sistema (potenciometar, rezolver i induktosin) digitalni mjerni sistemi i inkrementalni (osnovni) mjerni sistemi.

6.3.1. Senzori položaja

6.3.1.1. Inkrementalni enkoder

Za ove mjerne davače karakteristično je mjerenje ugla obrtanja vratila pomoću fotoelektričnog efekta. Na slici 6.4 dat je prikaz principa rada inkrementalnog enkodera.



Slika 6.4. Princip rada inkrementalnog enkodera

Obrtanjem diska dobija se niz električnih impulsa čiji je broj direktna mjera za zakretni ugao. Inkrementalni (osnovni) enkoder se sastoji od podione staklene ploče po kojoj su radijalno postavljene crte, a te crte predstavljaju maskirane i nemaskirane segmente.

Između izvora svjetlosti i podione ploče postavlja se ploča za očitavanje. Za inkrementalni enkoder karakteristično je to da jedan trag na podionoj ploči za svaki okretaj osovine proizvodi određen broj sinusnih ili pravougaonih talasa.

Broj izlaznih implusa je proporcionalan ocrtanom.

Za mjerenje okretaja određenog ugla većeg od 360° primjenjuje se treći trag gdje se određuje referentni signal za svako kompaktno okretanje.

Sva polja ovakve radijalne mreže su osvjetljena paralelnim zracima preko blende usmjerenim od jedne svjetlosne diode.

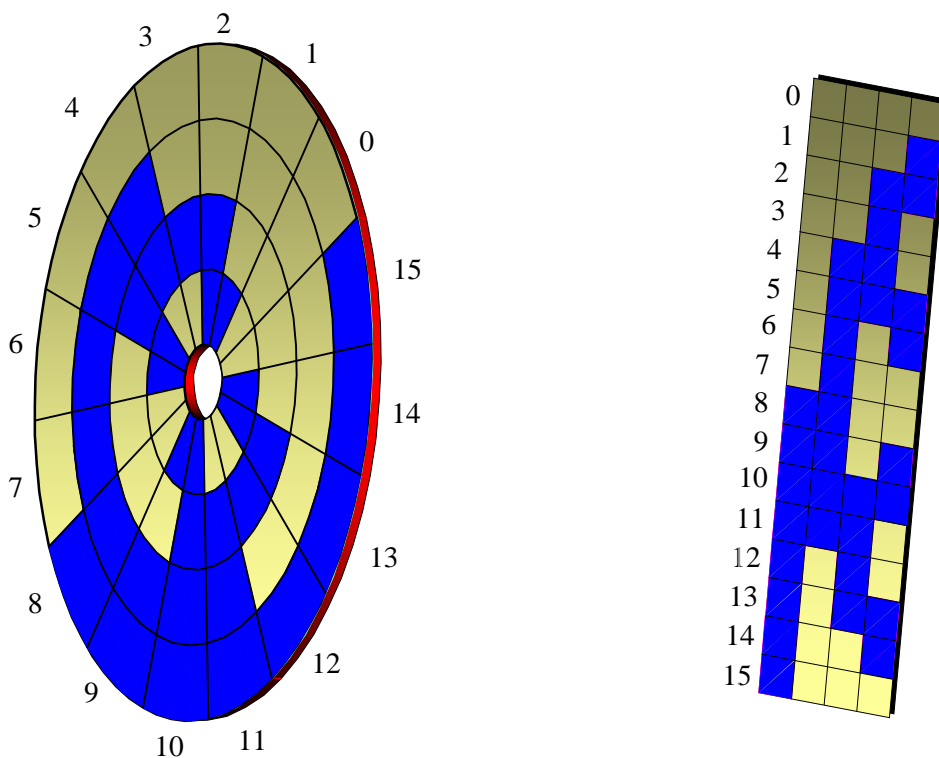
Obratanje podione ploče dolazi do naizmjeničnog propuštanaja svjetlosti. Fototranzistori registruju svaki put kad svjetlost prođe kroz nemaskirani segment podione ploče.

Inkrementalni enkodери mogu imati razlučivanje od **250 do 2500 implusa/okr.**

Ugradnjom dodatnog optičkog sistema može se razlučivanje povećati i do **1 mm**. Problem ovih senzora je taj, da se u slučaju nestanka dovoda struje gube sve relevantne pozicione informacije i sistem se mora ponovo kalibrirati.

6.3.1.2. Apsolutni enkoder

Apsolutni enkoder se temelji na apsolutnom mjernom postupku. Za svaki položaj pridružuje se binarna kombinacija. Apsolutni enkoder može biti izveden kao podiona ploča odnosno kao kodno ravnalo kako je to prikazano na slici 6.6.



Slika 6.6. Apsolutni enkoder: a) kodna ploča, b) kodno ravnalo

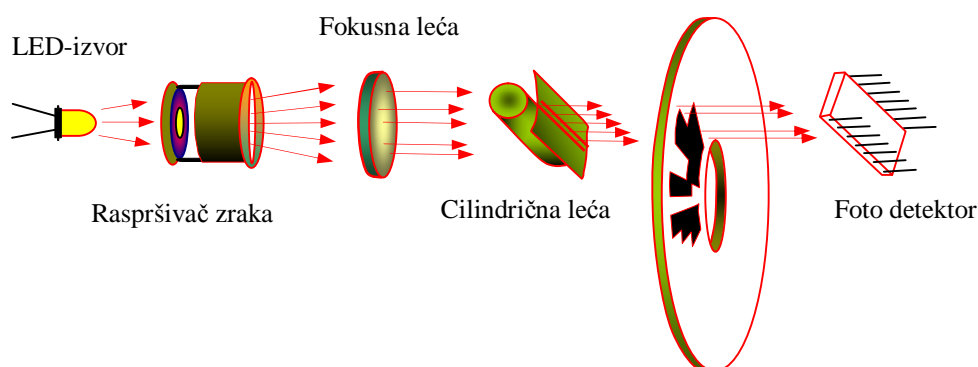
Kodna ploča se primjenjuje za mjerenje ugla i ona je izrađena od visoko kvalitetnog stakla.

Svaki je korak na ploči kodno definisan.

Elementi koji utiču na tačnost apsolutnog enkodera su:

- kvaliteta radijalne mreže,
- greška pri uključivanju spojnice s rotorom,
- zazor u ležajevima,
- ekscentricitet podione ploče u odnosu na uležištenje.

Princip rada apsolutnog enkodera dat je na slici 6.7.



Slika 6.7. Princip rada apsolutnog enkodera

Princip očitavanja je sličan kako kod inkrementalnog enkodera. Svjetlost pada aksijalno na kodnu ploču, a s donje strane se nalaze fotočelije koje pri osvjetljenju daju fotonapon od $2,5\text{ V}$ i tom naponu se daje binarna cifra 1 . Ako detektor svjetlosti nije osvjetljen napon je 0 , što odgovara binarnoj cifri 0 . Na slici je data kodna ploča sa četiri traga tako da imamo $2^4=24$ kombinacija. To znači da se sa ovakvom kodnom pločom može identificirati 16 položaja odnosno 16 uglova.

U praksi se primjenjuju kodne ploče sa $18-16$ tragova a najčešće sa 12 tragova. Takva kodna ploča može idneticirati $2^{12}=4096$ mogućih položaja. U slučaju da treba pokriti 360^0 , imamo da je najmanja vrijednost razlučivanja:

$$s = \frac{360^0}{4096} \approx 0,088^0 = 5,28'$$

Ako se želi povećati tačnost očitavanja uglova, potrebno je da ploča ima više tragova, a samim tim se i povećavaju dimenzije kodne ploče.

Ponekad se zbog klizanja iz različitih položaja mijenja više različitih bita, a to dovodi i do greške očitavanja. Zbog toga se kod označavanja niza kodnih brojeva upotrebljava Gray-ev kod, kod koga se između susjednih brojeva mijenja najviše **1bit**.

Gray-ev kod spada u klasu cikličnih kodova. Zbog smanjenja mogućnosti greške našao je primjenu u A/D pretvaračima, apsolutni enkoderima i sl.

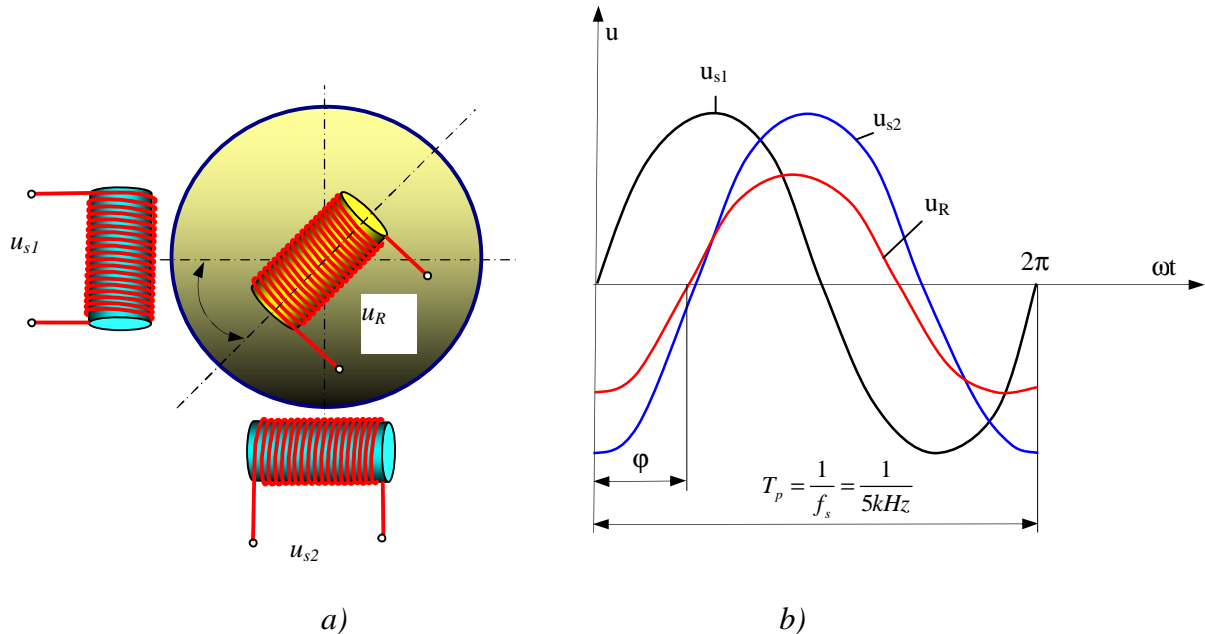
Osim **Gray**-ovog koda u robotici se koriste još **BCD kod** – **8421** koji predstavlja tzv. binarno dekadni brojni sistem.

Pored navedenog imamo još i **Gray-eksces** – **3** kod koji je ustvari mješavina BCD i Gray-evog koda.

6.3.1.3. Rezolver

Rezolveri koji sliče elektromotorima, spadaju u grupu elektromehaničkih mjernih uređaja za obrađivanje pozicije vratila zgloba robota. Rezolver se sastoji od statora sa dva namotaja geometrijskih postavljenih pod uglom od 90° i rotora u kojem se nalazi jedan namotaj.

Šematski prikaz rezolvera je dat na slici 6.9.



Slika 6.9. Rezolver: a) shema djelovanja, b) grafički prikaz pobudnih napona

Rad rezolvera je zasnovan na elektromagnetskoj indukciji. Na namotaj statora se dovode napon u_{s1} i u_{s2} , čije su amplitude jednake, a tačno pomaknute za 90° :

$$u_{s1} = U_s \sin(\omega_s t) \quad (6.1)$$

$$u_{s2} = U_s \sin\left(\omega_s t - \frac{\pi}{2}\right) = U_s \cos \omega_s t \quad (6.2)$$

Regulaciju pobudnih napona vrši brojilo. Vratilo zgloba pokreće rotor čiji se ugao φ mjeri.

U namotu rotora se inducira napon:

$$u_R = K[u_{s1} \cos(j) + u_{s2} \sin(j)] \quad (6.3)$$

Uvrštavanjem izraza za napon u_{s1} i korištenjem trigonometrijskih transformacija dobija se napon koji se indukuje u namotajima rotora:

$$u_R = K \cdot U_s [\sin(\omega_s t) \cdot \cos j + \cos(\omega_s t) \cdot \sin j],$$

$$u_R = U_R \sin(\omega_s t - j) \quad (6.4)$$

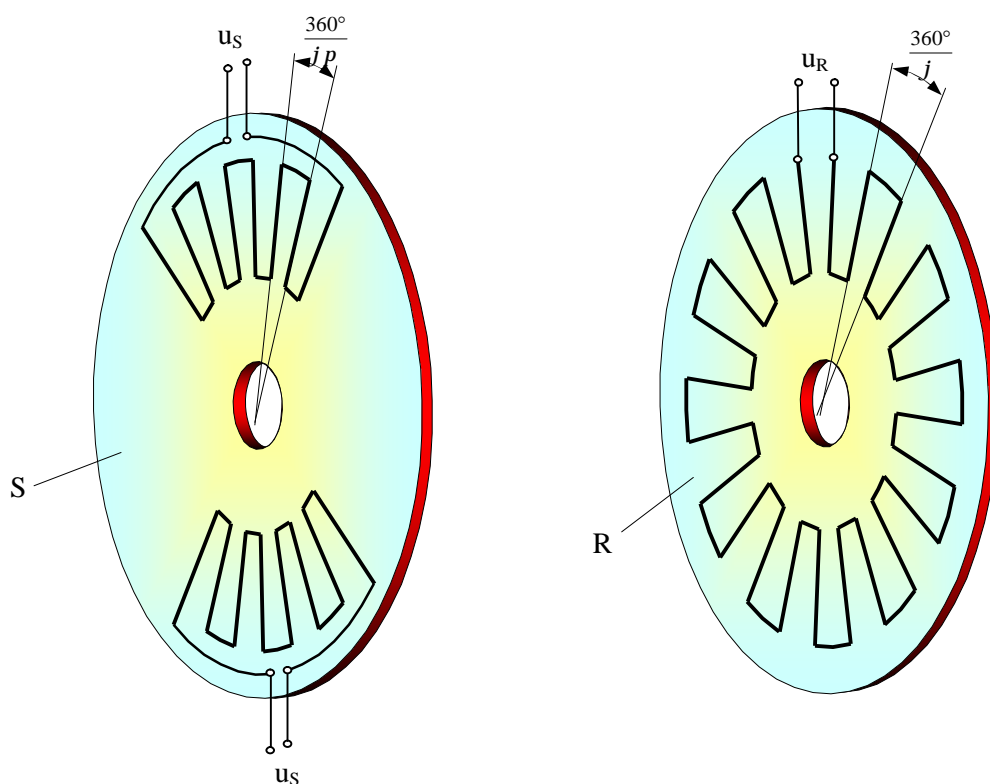
K – naponski odnos

Kao što se vidi napon je u funkciji ugla φ koji je ugao zakretanja vratila zgloba robota. Grafički prikaz pobudnih napona dat je na slici 6.9.b).

6.3.1.4. Induktosin

Induktosin se sastoji od statora i rotora, koji imaju oblik dviju okruglih ploča napravljenih od nemagnetičkog materijala, kako je to prikazano na slici 6.10.

Princip rada induktosina je sličan principu rada rezolvera. Na statoru su nanešena 2 voda, a na rotoru 1.



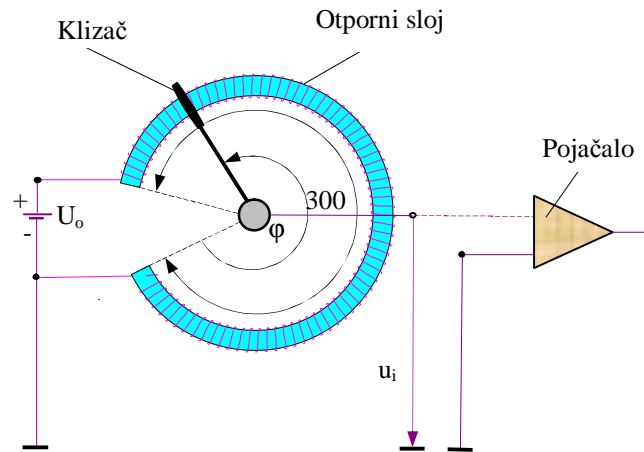
Slika 6.10. Induktosin

Obje ploče se montiraju jedna uz drugu sa zazorom od 0,15 do 0,4 mm. Održavanje uskih tolerancija zazora između ploča, njihova paralelnost i ekscentričnost čine ovaj mjerni sistem skupljim. Induktosinom se može postići i razlučivanje do 1 sec. Moguće su izvedbe induktosina za mjerenje pomaka, samo su u tom slučaju i stator i rotor u obliku ravnala.

6.3.1.5. Potenciometri

Ovi senzori predstavljaju najjednostavniju grupu sistema za mjerenje položaja. Pretvaraju pomake (linearne i uglovne) u električni napon.

Na slici 6.11 je prikazan rotacijski potenciometar. Element otpornosti može biti kalem od hrom-nikl (žica, ugljena šipka ili otporna plastika).



Slika 6.11. Rotacijski potenciometar

Otpornički elemenat u većini slučajeva ima linearnu otpornost. Klizač je spojen s osovinom zgloba robota, čije se kretanje mjeri. Pomjeranjem zgloba pomjera se i klizač po otporničkom dijelu. Napon je proporcionalan položaju zgloba. Tačnost mjerenja položaja pomoću potenciometra je približno 0,5 %. Za tačnije mjerenje izvor napona mora biti izuzetno stabilan.

Na krajeve potenciometra se obično priključi napon U_o tako da kroz njih teče struja.

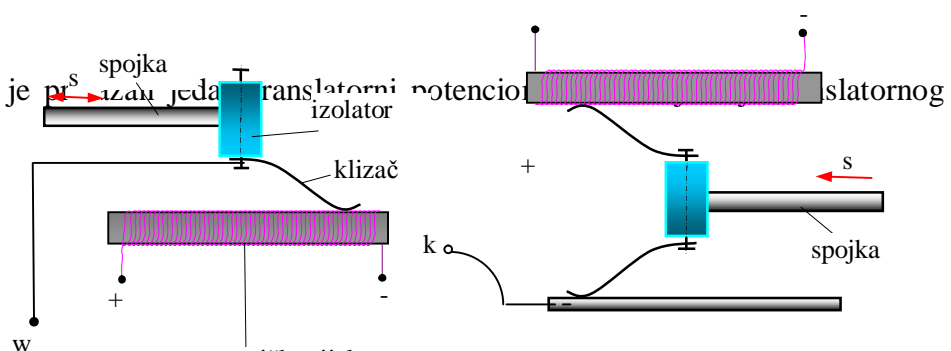
$$I = U_o/R.$$

Zbog niske energetske razine izlaznog signala, na izlazu se priključuje elektronički sklop, najčešće pojačalo na osnovu čega se može postaviti jednačina napona u_i u funkciji od ugla klizača j .

$$u_i = \frac{j}{335} U_o \quad (6.5)$$

Za ugao j koji će se kretati u intervalu $0 < j \leq 335^\circ$ napon u_i će imati linearnu zavisnost od j .

Na slici 6.12. je prikazan translacioni potenciometar.



Slika 6.12. Translatorni potenciometar

Translatorni potenciometar se sastoji od dva otpornika. Oni omogućuju mjerenje pomjeranja u pozitivnom i negativnom smjeru.

Proticanjem struje kroz klizač, napon je:

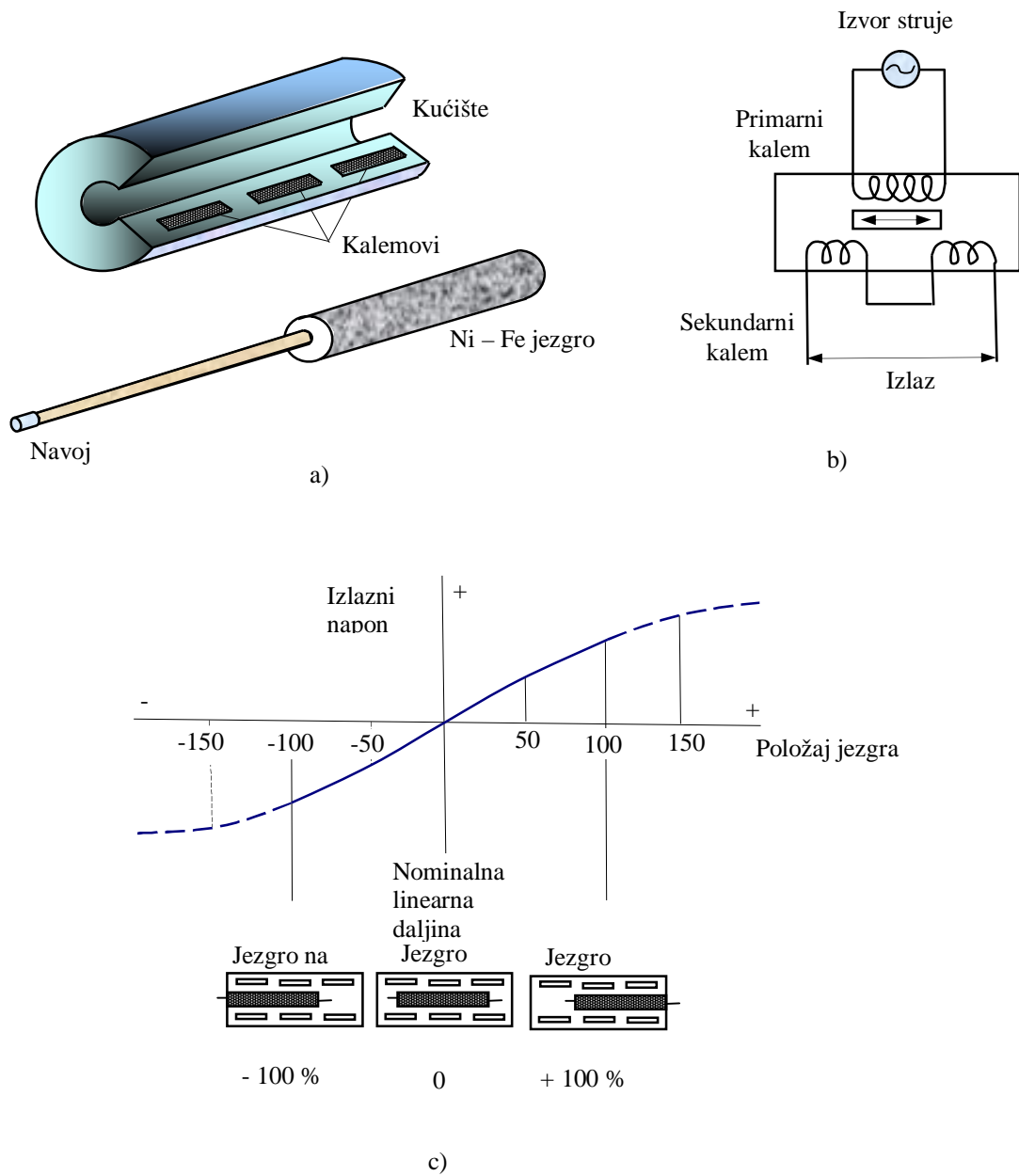
$$U = R I \quad (6.6)$$

6.3.1.6. Linearni diferencijalni transformator

Diferencijalni transformator slika 6.13.a) služi za određivanje pomaka zglobova. Jedan diferencijalni transformator se sastoji od magnetne jezgre koja se kreće unutar tri cilindrična kalema slika 6.13b).

Primarni ili centralni kalem se pobuđuje sa neizmjeničnom strujom. Sekundarni kalemovi se namotavaju suprotnim pravcima, tako da su njihovi izlazi naponi suprotnog polariteta.

Kada je šipkasto jezgro u centralnom položaju izlazni napon na sekundarnim namotajima je 0 slika 6.13 c).



Slika 6.15. Linearni diferencijalni transformator

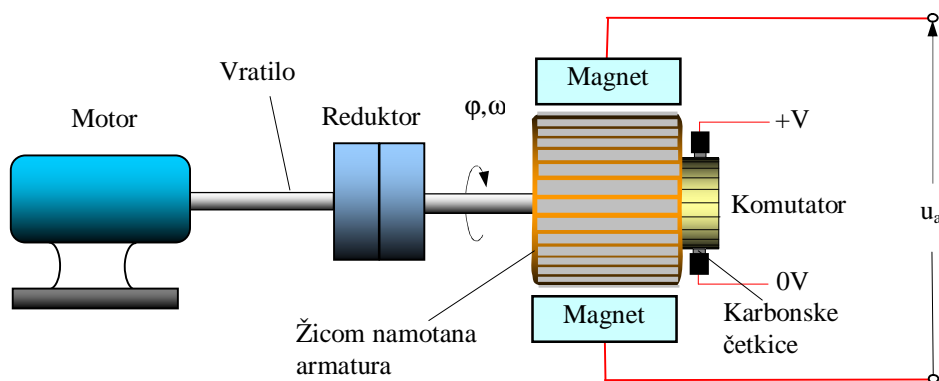
Kretanjem jezgra dalje od centra, jezgro prekriva jedan sekundarni kalem više od drugog povećavajući fluks jednog kalema, a smanjujući fluks drugog kalema. Izlazni napon je proporcionalan rastojanju jezgre od centralnog položaja. Linearnost opada na 0,5 % na 150 % od nominalne daljine. Koriste se za mjerenje pomaka od ± 125 mm do ± 250 mm.

6.3.2. Senzori brzine

Za proučavanje kinematičko – dinamičkih karakteristika nije dovoljno poznavati samo položaje robota. Do sada smo obrađivali senzore koji su nam davali informacije o položaju robota. Senzori brzine nam daju informacije o veličini zglobnih brzina i ubrzanja. Pošto se u robotici najčešće koriste rotacioni zglobovi, to će ovdje biti obrađeni neki važniji senzori brzine npr. tahogenerator.

6.3.2.1. Tahogenerator

Izlazni signal kod ovih senzora je proporcionalan ulaznoj ugaonoj brzini. Tahogenerator ustvari nije ništa drugo nego motor istosmjerne struje sa permanentim magnetima, slika 6.16. Njegova funkcija u ovom slučaju je obrnuta i on radi kao generator.



Slika 6.16. Jednosmjerni tahogenerator

Da bi izmjerili ugaonu brzinu zgloba, vrtilo tahogeneratorskog senzora se preko reduktora spoji sa zglobom. Tahogenerator se sastoji od rotora sa namotajem koji rotira unutar magnetnog polja pobuđenog magnetima koji su fiksirani na statoru. Okretanjem osovine zgloba okreće se i rotor, tako da se u armaturnom namotaju indukuje napon u_a :

$$u_a = K \cdot \frac{dj}{dt} = K \cdot w \quad (6.7)$$

gdje je:

K – konstanta.

Pa možemo reći da je izlazni napon armature u_a proporcionalan ulaznoj ugaonoj brzini w .

6.3.2.2. Digitalni tahometri

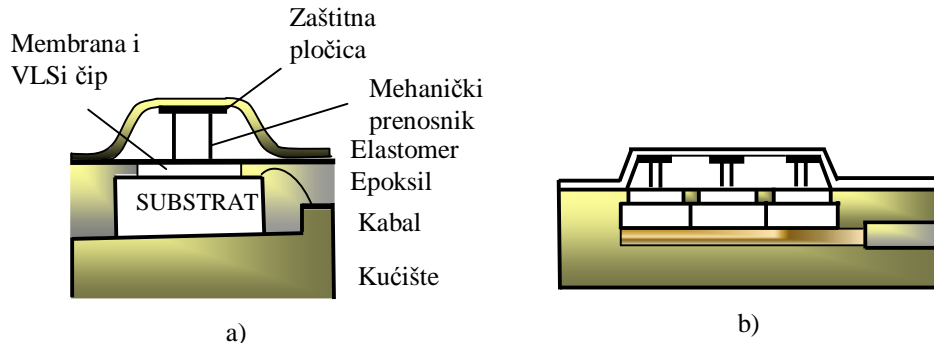
Radi na principu brojača, slično inkrementalnom enkoderu. Brojač registrira određeni broj impulsa dobivenih od fotoelemenata na koje pada svjetlost kroz zareze na kodnoj ploči na taj način smo dobili izmjeren ugao, a kada se taj ugao podijeli s vremenskim intervalom tokom kojeg je generiran, impulsi niz dobija se ugaona brzina.

6.3.3. Senzori otklona

Za ovu vrstu senzora je neophodno visoko rješenje i visoka tačnost. Za njihovu primjenu su neophodni autonomni mobilni roboti .

6.3.3.1. Si-senzori

Kod Si-senzora prekid se ne može direktno izmjeriti, nego se mora indirektno odrediti preko djelovanja nosive mase. Ovi senzori spadaju u grupu senzora nove generacije. Na silicijumsku osnovu se postavlja sloj elastomera slika 6.17. u cilju zaštite od mehaničkih oštećenja.



Slika 6.17. Si-senzor: a) izgled senzora , b) raspored taktela

Uopšteni mjerni instrument je Si-čip koji se u osnovi sastoji od mase postavljene na ležaj. Silicijum kao materijal mikromehaničkih elemenata se pokazao kao izvanredan jer ima linearnu deformaciju, izvanrednu čvrstoću i dobre dinamičke karakteristike.

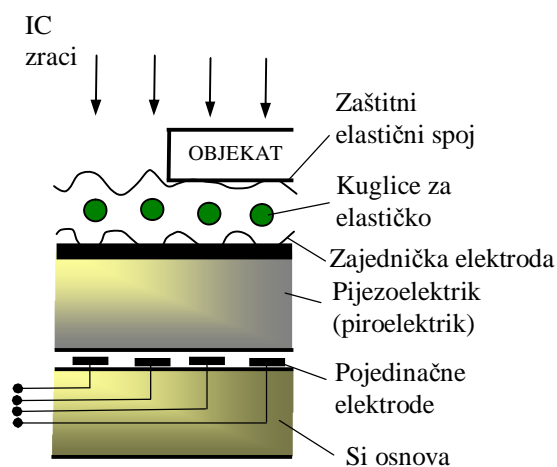
Deformacioni element je u obliku membrane. U centru membrane se nalazi cilindrični štapić za prenos vanjske sile. Na vrhu se nalazi zaštitna pločica debljine 250 nm čija je namjena sprječavanje kidanja elastomera.

Deformacija elemenata se detektuje pomoću pijeootpornika spojenih u Wheatstoneov most. Tipične redukcije je $0,25, \times 0,25 \text{ mm}$ sa frekvencijom očitavanja 60 Hz .

6.3.3.2. Pijezoelektrični senzor

Struktura ovih senzora je višeslojna slika 6.18. Osnova senzora je od silicijuma i na njoj su nanijete elektrode prečnika 1,5 do 6 mm.

Elektrode su zalivene smolom da bi se postigla čvrstoća. Nadalje imamo sloj pijezokeramike (10-100 nm) od barijum - titanita.



Slika 6.18. Pijezoelektrični senzor

Dobri rezultati kod ovih senzora se postižu promjenom polikristalnih materijala. Ovaj senzor nema vještačku kožu kao deformacioni elemenat. Za ove senzore karakteristična je pojava pijezoelektriciteta. Na osnovu pijezoelektričnog efekta dobija se projekcija produkta na površinu senzora.

Moguće je detektovati sile od 0.01 N, linearnost 0.2-0.3 % i frekventni opseg 0.2-0.3 %. Slika se dobije u binarnom obliku, pa onda se posebnim programom računa pozicija i orijentacija predmeta. Kod složenih slučajeva informacije sa taktela se skeniraju i nadalje se obrađuje radi dobivanja integralne slike.

Programi za obradu slike poboljšavaju tačnost senzora, tako npr. za senzor 16x16 elemenata prostorne rezolucije 8 mm prečnika 6 mm, centar se detektuje sa greškom $\pm 0,25$ mm.

6.3.4. INS (*Intercijalni navigacioni sistem*)

Senzori pravca su naročito važni za određivanje pozicije mobilnih robota. Svaka greška u orijentaciji prouzrokuje konstantne rastuće greške u poziciji.

Zbog tog razloga povećava se prednost ukoliko se greške u orijentaciji otkriju i neposredno se isprave. Od ovih senzora mi ćemo ovdje spomenuti žiroskop i geomagnetični senzor. Žiroskopi mogu biti mehanički i optički.

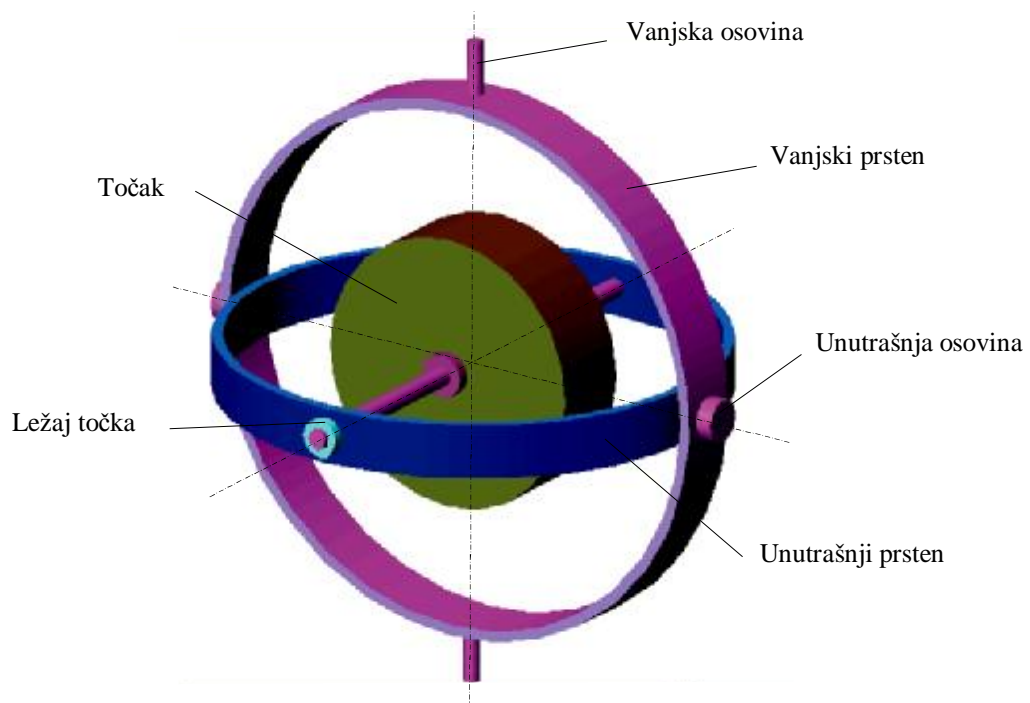
6.3.4.1. *Mehanički žiroskop*

Mehanički žiroskop je vrlo poznat senzor rotacije čiji je rad baziran na inercijalnim osobinama rapidnog napretnog rotora. Mehanički žiroskop je razvijen rane 1800. godine. Prvi poznati žiroskop je napravljen 1810. god. (G.C. Bomberger) u Njemačkoj.

1852. godine francuski fizičar Leon Foucault je prikazao da žiroskop može otkriti rotaciju Zemlje (Carter, 1966.).

Žiroskopi se koriste kod robota da bi se održavala stabilnost robota. Njihova namjena i jeste održavanje stabilnosti na onim mjestima gdje se koriste.

Princip rada mehaničkog žiroskopa slika 6.19. se može prikazati na primjeru vožnje bicikla.



Slika 6.29. *Mehanički žiroskop*

Interesantnu osobinu mehaničkog žiroskopa, poznatu kao preciznost žiroskopa, osjetio je vozač bicikla. Ukoliko vozač bicikla nagne biciklo na lijevu stranu oko njegovih horizontalnih osa, prednja osovinu se okreće lijevo oko vertikalnih osa.

Učinak je još veći, ukoliko se osovinu odvoji od bicikla i drži oba kraja osovine dok se ubrzano pomjera.

Nastaje iznenađujuće velika reakcija, gdje umjesto uvijanja nastaje horizontalno okretanje osovine. To je zbog toga što je ugaoni moment povezan sa naprezanjima slobodne osovine koja razdvaja primjenjenu silu pri 90° u smjeru naprezanja.

6.3.4.2. Geomagnetični senzori

Značaj ovih senzora se ogleda u njegovom utjecaju na greške. Ovi senzori omogućavaju mjerenje apsolutnog upravljanja i relativne ugaone brzine i zbog toga su kao takvi bitni u rješavanju navigacionih problema. Najopštiji poznati senzor ove vrste je magnetni kompas. Uobičajena terminologija je da se mjeri jačina magnetnog polja, gustina magnetnog fluksa B koja se mjeri u G (gaus). Alternativne jedinice su Tesla ($1T$), pri čemu je $1T=10^4G$.

Instrumenti koji mjere magnetna polja su poznati kao magnetometri. Senzori ove vrste koji se koriste kod mobilnih robota se mogu podijeliti u sljedeće kategorije:

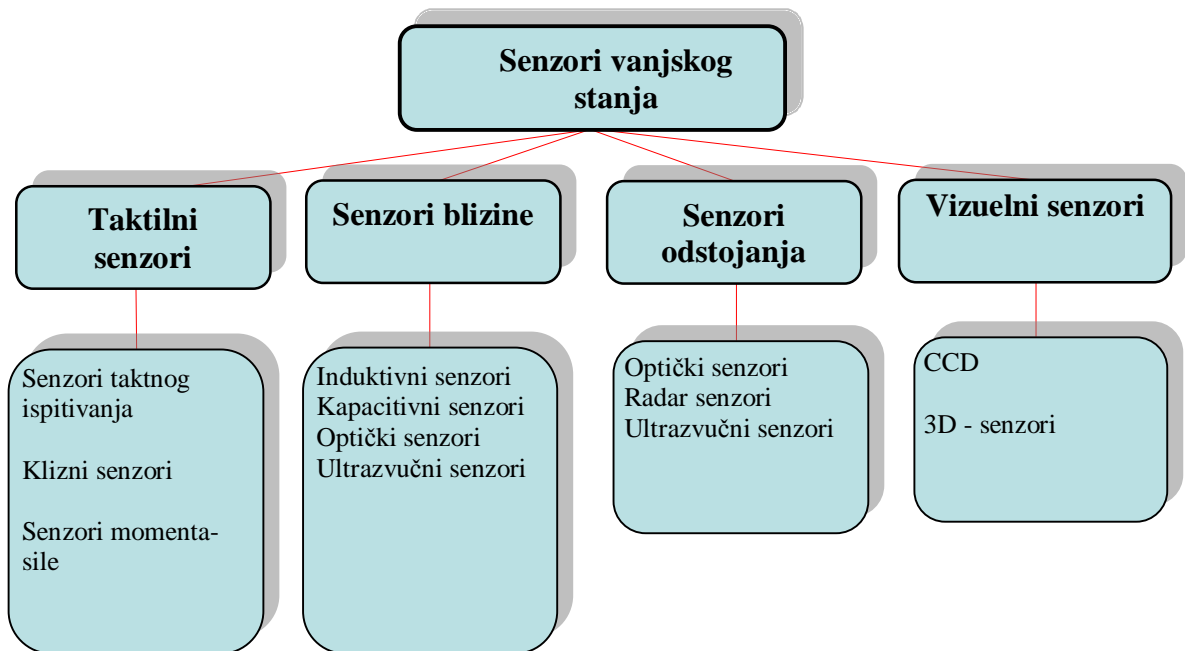
- mehanički magnetni kompasi,
- kompasi sa podlogom za fluks,
- kompasi sa Hall-ovim efektom,
- magnetootporni kompasi i
- magnetoelastični kompasi.

6.4. Senzori vanjskog stanja

Za pravilnu orijentaciju i ponašanje robota u okolini, nužno je da robot posjeduje takve mjerne instrumente koji će prikupljati podatke iz okoline.

Klasifikacija senzora vanjskog stanja data je na slici 6.20.

Senzori vanjskog stanja se mogu klasificirati na kontaktne i beskontaktne, ovisno o tome da li postoji kontakt ili ne.



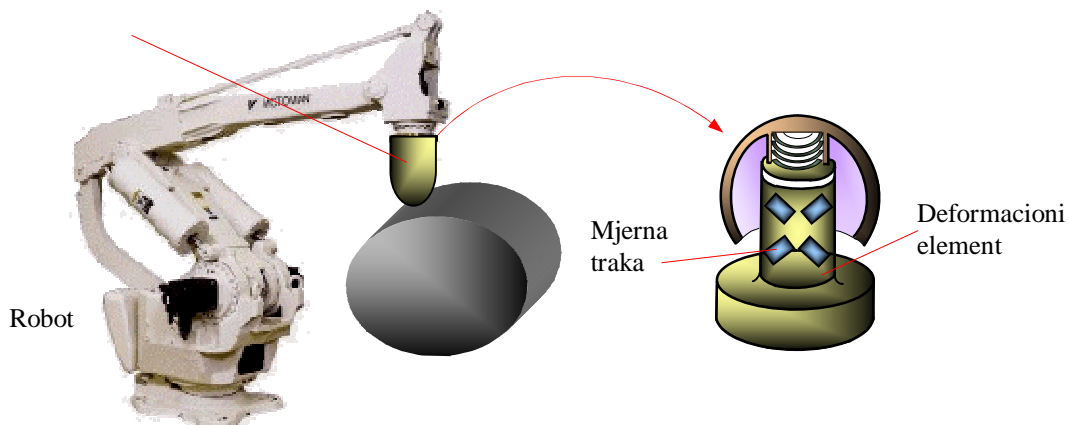
Slika 6.20. Osnovne grupe senzora vanjskog stanja

6.4.1. Taktilni senzori

Da bi robot mogao adekvatno djelovati na promjene okoline u kojoj radi, nužno je da posjeduje takve senzore koji će mjeriti fizičke veličine radne okoline robota. Ovi senzori spadaju u grupu binarnih uređaja. Jednim dijelovima spadaju u grupu senzora sile, jer u mnogim slučajevima daju informaciju, ne samo o obliku objekta, već i o sili stezanja datog objekta.

Ako se mjere samo rezultante pri dejstvu sila, momenata duž kontaktne linije ili površine, taktilni se senzor može da napravi kao minijaturni šestokomponentni senzor sile/momenta montiran na vrhu prsta slika 6.21.

Šestokomponentni senzor
sile/momenta sa mjernim
trakama



Slika 6.21. Mjerenje kontaktne sile šestokomponentnim senzorom na prstu

Vršenjem manipulacije predmeta neophodno je praćenje svih sila u tačkama kontakta.

Tada je potrebno imati niz senzora koji su poredani u matice.

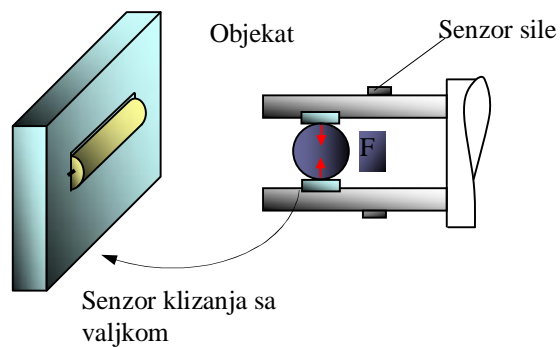
Postoji veliki broj senzora ove vrste, međutim samo neki od njih će biti obrađeni u narednim naslovima.

6.4.1.1 Senzor klizanja

Klizanje je česta pojava i ona se manifestuje kao kretanje objekta između prstiju.

Zbog toga je potrebno ugraditi i takve senzore koji će vršiti kontrolu i detekciju, a sve u cilju pouzdanijih i stabilnijih držanja objekta.

Jedan takav jednostavniji senzor je prikazan na slici 6.22.



Slika 6.22. Jednostavni senzor klizanja

Veoma je bitno voditi računa o tangencijalnom trenju, jer povećanjem tangencijalnog trenja dolazi do širenja zone klizanja.

Da bi imali stabilnu kontrolu klizanja, potrebno je ugraditi senzor koji će razlikovati normalne sile i sile smicanja.

To se postiže na dva načina:

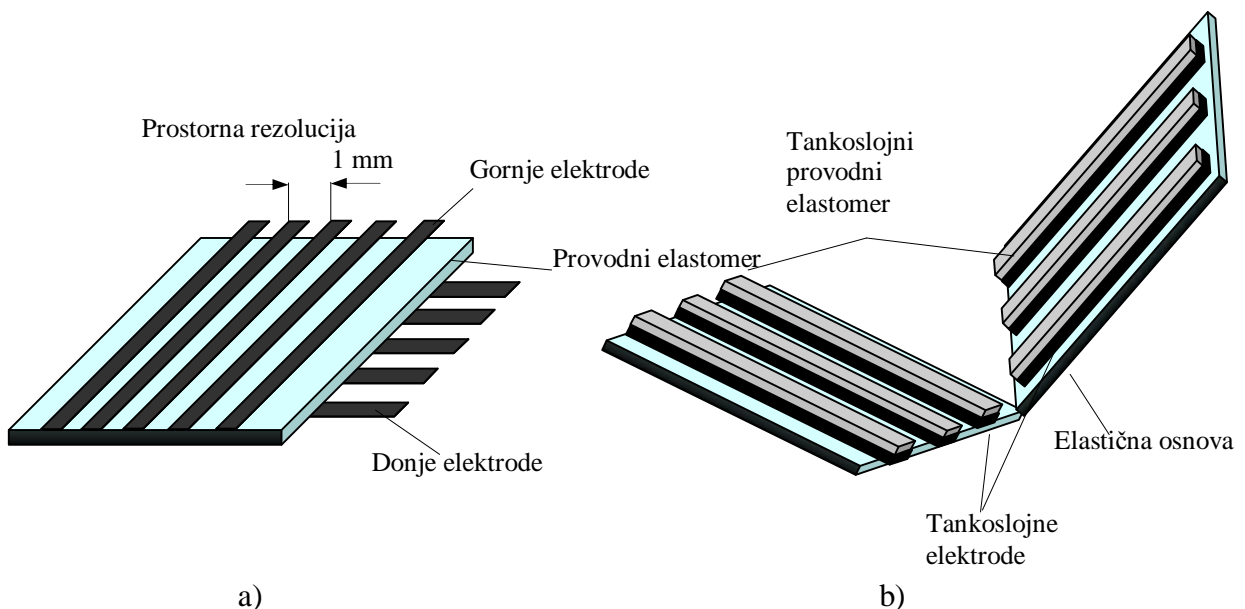
- ugradnjom senzora klizanja koji će se pomjerati proporcionalno klizanju objekta,
- primjenom programa koji će vršiti poređenje slika dobijenih u obliku niza ili matrice za određeni vremenski period.

Prvi način je dosta jednostavniji.

6.4.1.2. Senzori bazirani na promjeni otpora

Jedan od ovakvih senzora je prikazan na slici 6.23. Struktura ovakvih senzora se sastoji od dva niza paralelnih elektroda. Između niza paralelnih elektroda nalazi se sloj elastomera koji je provodan.

Nizovi elektroda su poredani normalno jedni u odnosu na druge. Usljed kontaktne sile dolazi do pojave lokalne deformacije elastičnog sloja, odnosno do promjene otpora koja se detektuje između dviju elektroda.



Slika 6.23. Senzori bazirani na promjeni otpora: a) konstrukcija sa otporničkim slojem, b) sa trakama od polimera

Ovakvi se senzori uglavnom ugrađuju na prst robota. Postavljanjem ovakvog senzora na sve prste robota dobija se jasna slika predmeta. Po jednostavnosti bez premca su među taktilnim sensorima. Glavni nedostatak im je veliki broj žica potrebnih za povezivanje. Savremenija konstrukcija je data na slici 6.23b).

Sastavljena je od dvije osnovne polimerne osnove na koje su nanijete tankoslojne metalne trake provodnika, a preko njih tankoslojni otpornički polimer debljine 0,05 mm.

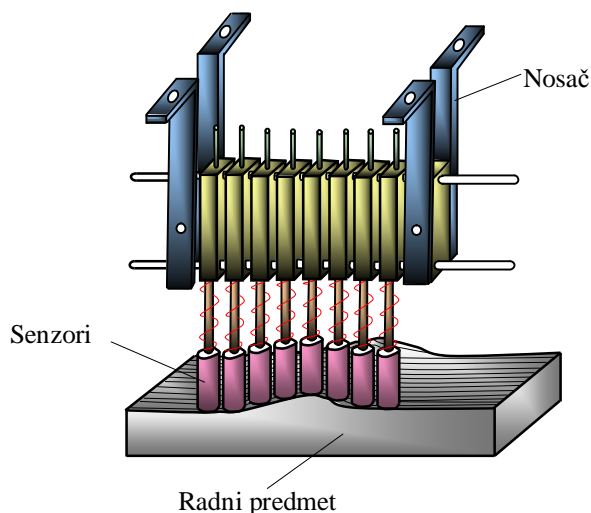
Dvije ovakve strukture se spajaju pod uglom od 90° .

Ukupna debljina ovakvog senzora može da bude svega od 0,125 mm.

6.4.1.3. Elektromagnetski induktivni senzor

Ovi senzori su robusnije građe i oni kao takvi su pogodni za detekciju većih objekata. Na slici 6.24. je prikazan jedan takav senzor koji ima 8x8 induktivnih elemenata transformacijskog tipa. Svaki element se sastoji od čeličnog šiljka koji je smješten u plastičnom cilindru i opruge od fosforne bronz.

Ova bronza je upotrebljena za izradu opruga, čime opruga dobiva dobra elastična svojstva i ne ometa magnetsko polje. Pomjeranjem mjernog šiljka mijenja se napon u primarnim i sekundarnim namotajima smještenim u gornjem dijelu uređaja. I ovdje imamo da je izlazni signal binaran, tako da se pomoću određenog sklopa može dobiti binarna slika objekta koji se mjeri.

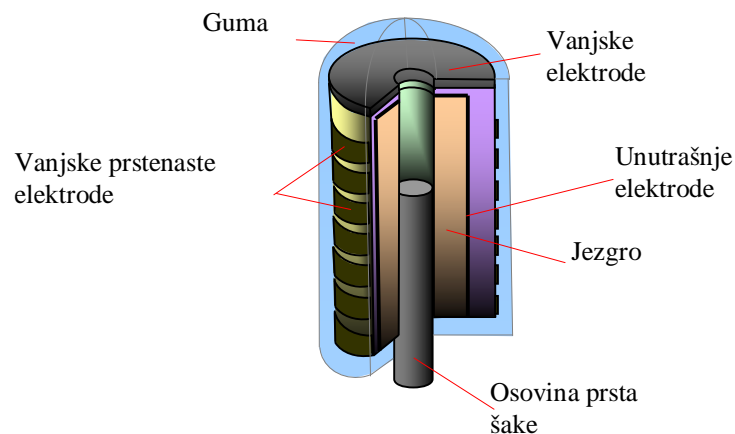


Slika 6.24. Elektromagnetski induktivni taktilni senzor

Poželjno je da senzor prati što manje krivine i posebno treba voditi računa da ne dođe do zaglavlivanja šiljaka u cijevi.

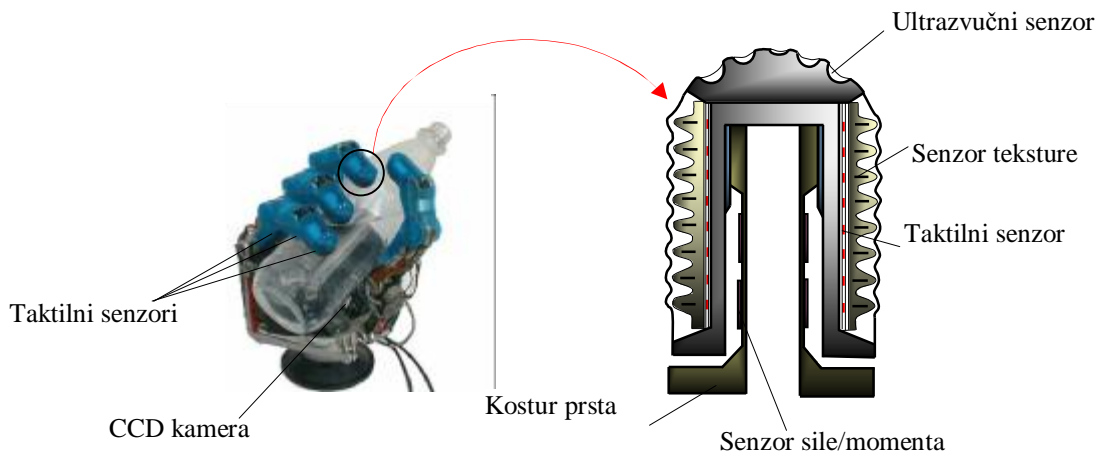
6.4.1.4. Kapacitivni taktilni senzor

Kapacitivni senzori mogu ostvariti rezoluciju od 1 mm pri detekciji predmeta. Većinom se koriste odn. nalaze u prstima šake robota kako je to prikazano na slici 6.25. Većinom se prsti robota u obliku cilindra sa jezgrom od plastike. Oko jezgra imamo postavljene cilindrične elektrode, a izvan imamo elektrode u obliku matrice 7x7 do 7x20. Usljed pomjeranja vanjskih elektroda dolazi do promjene kapacitivnosti kondenzatora. Opisani taktilni senzor nam omogućuje da se odredi oblik predmeta.



Slika 6.25. Raspored pločastih kondenzatora na prstu

Pored predhodnih vrsta senzora postoje još i pijezelektrični, ultrazvučni, optoelektronski, termički i drugi senzori. Sve prednosti i nedostaci različitih vrsta senzora kombinuje se u jedan složeni taktilni sistem radi dobijanja potpunije informacije o predmetima u šaci robota slika 6.26.



Slika 6.26. Kombinovani taktilni senzor na prstu prihvatnice

Svaki senzor ima definisanu namjenu, tako npr. šestokomponentni senzor služi za mijenjanje rezultante sile momenta.

6.4.2. Senzori sile i momenta

Postoji više različitih senzora za mjerenje sile i momenta. U robotici nije dovoljno izmjeriti samo jednu komponentu sile, već je potrebno da se izmjere sve tri komponente sile i momenta.

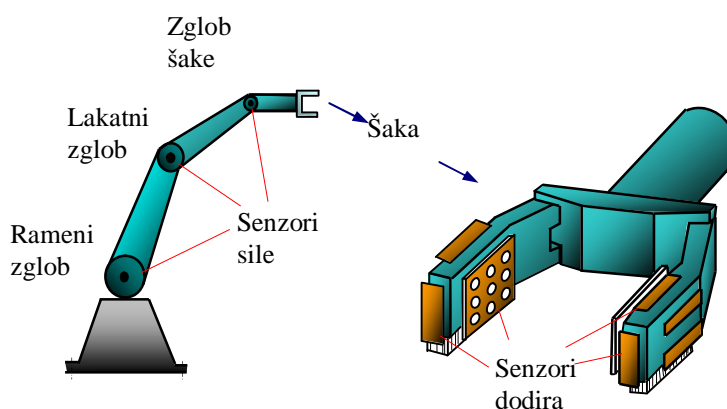
Postoje dva temeljna principa mjerenja sile. Kod prvog principa imamo promjenu osobina materijala kao što su npr. induktivnost, električna otpornost itd; tada je materijal pod dejstvom sile. Drugi princip obuhvata mjerenje elastične deformacije.

Usljed deformacije izazvanih dejstvom sile, elastične komponente mjernog uređaja se deformiše, pa se tako dobijaju pomjeranja koja sadrže informacije o sili.

Na slici 6.27. su prikazana osnovna mjesta ugradnje senzora sile i momenta.

To su uglavnom:

- zglob šake,
- zglob lakta,
- zglob ramena i
- šaka.



Slika 6.27. Mjesta ugradnje senzora sile/momenta

Tokom obavljanja nekih zadataka kao što su poliranje, lakiranje, montaža itd. upravljačka jedinica robota kontroliše sva kretanja na osnovu zadatih pozicija sve dok ne nastupi kontakt prihvatnice sa radnim objektom.

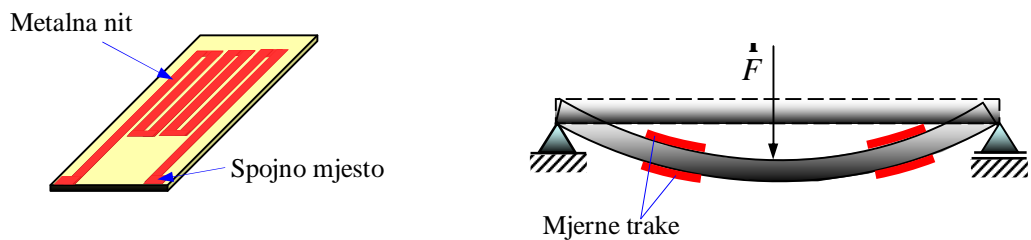
U tom slučaju moramo imati senzore koji će nam davati informacije o sili. U memoriji upravljačke jedinice robota memorisana je tzv. referentna konstanta sile koja se tokom kretanja upoređuje sa dodirnom sile. Upravljački algoritam se projektuje tako da omogućuje smanjivanje razlike između njih.

6.4.2.1. Primjena mjernih traka kod senzora sile/momenta

Mjerne trake se danas dosta primjenjuju na onim mjestima kada je potrebno odrediti pomjeranje uzrokovano opterećenjem. To pomjeranje mjerne trake mjere na osnovu električne otpornosti koja nastaje kao posljedica promjene dužine otpornika.

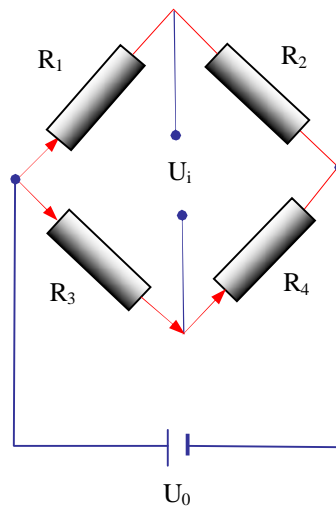
Tanka nit debljine **20-50 μm** , od legure bakra i nikla lijepi se između dva lista papira ili plastične folije (kod temperatura viših od 300°C koriste se niti od platine ili njenih legura).

Jedna samoljepljiva traka sa metalnom niti veličine 5-50 μm je prikazana na slici 6.28.



Slika 6.28. Mjerna traka i mjesta ugradnje mjernih traka

Mjerne se trake ugrađuju u Wheastaneov most slika 6.29. Na taj se način poništavaju utjecaji okoline a povećeva linearnost.



Slika 6.29. Wheastoneov most

Električni otpor mjerne trake se izračunava iz jednačine:

$$R = \frac{r \cdot l}{A} [\Omega] \quad (6.10)$$

gdje su:

A -površina presjeka niti [m^2]

l -dužina niti [m] i

r -električni otpor materijala [Ωm]

Naravno, pri mjerenju izduženja materijala uzima se u obzir i relativno izduženje mjerne trake (e), iskazano promjenom dužine (Δl) i ukupne dužine (L):

$$e = \frac{\Delta l}{L} \quad (6.11)$$

Promjenom dužine dolazi i do promjene otpora.

Relativna promjena električnog otpora se izražava odnosom promjene otpora (ΔR) i ukupnog otpora (R):

$$\frac{\Delta R}{R} \quad (6.12)$$

Odnos relativnog izduženja i relativne promjene električnog otpora moguće je definisati izrazom

$$\frac{\Delta R}{R} = K \cdot \frac{\Delta l}{L} = K \cdot e \quad (6.13)$$

gdje je:

K -koeficijent proporcionalnosti mjerne trake

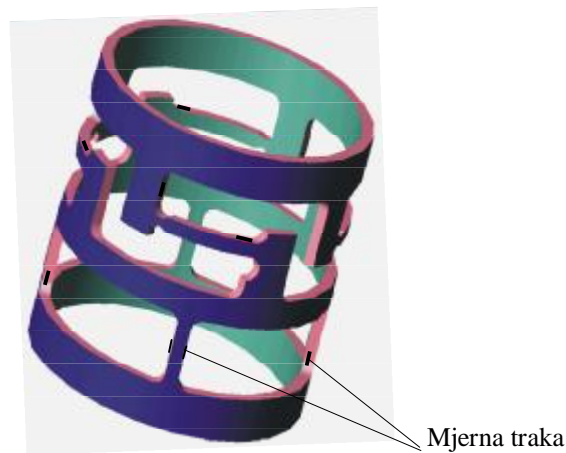
Za mjerenje pomoću Wheastoneovog mosta potrebno je prije podesiti otpore tako, da je izlazni napon jednak nuli, tada za most kažemo da je izbalansiran.

6.4.2.2. Šestokomponentni senzori sile šake

Ovi senzori svrstavaju u grupu digitalnih senzora. Njihova osobina je velika kompaktnost.

Na slici 6.28. je prikazan šestokomponentni senzor sile šake u obliku šupljog cilindra. Deformirajuće tijelo je specijalno oblikovan šuplji cilindar prečnika 75mm. Struktura ovoga cilindra se sastoji od 4 uzdužna i 4 poprečna elastična pera koja su osjetljiva na uzdužnu i poprečnu deformaciju cilindra.

Na svakom peru se nalaze po dvije mjerne trake koje služe za mjerenje lokalnih deformacija istog intenziteta, a suprotnih znakova. Zadatak senzora je mjerenje triju komponentata sile i triju komponentata momenta .



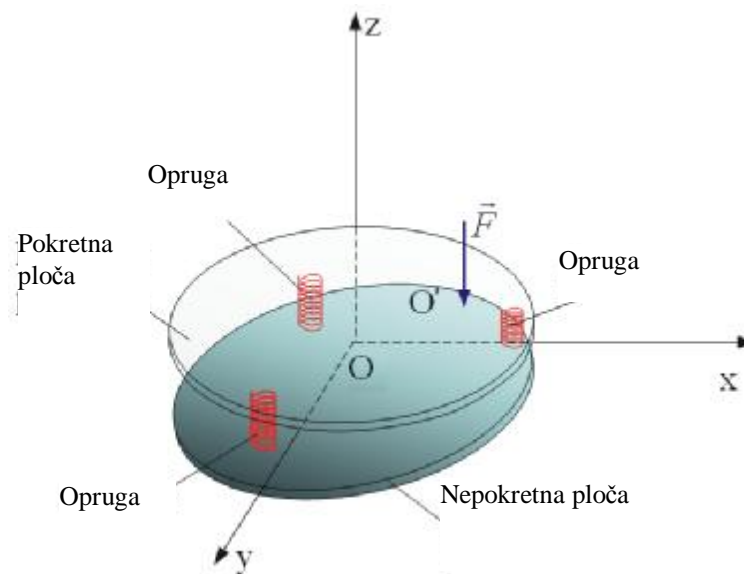
Slika 6.29. Cilindrični šestokomponentni senzor sile šake

Osim ovog senzora postoji još i modularni šestokomponentni senzor sile, koji je jednostavnije konstrukcije od prethodnog. Postoji još jedan način za izvođenje šestokomponentnog senzora. Kod ovog se senzora mjerne trake postavljaju na četiri međusobno jednaka konzolna nosača.

6.4.2.3. Induktivni šestokomponentni senzor sile

Ovaj senzor je jednostavne konstrukcije. Senzor se sastoji od dvije ploče, gdje je jedna ploča pričvršćena na posljednji segment robota a druga je ploča spojena sa hvataljkom. Između ploča se nalaze tri opruge. Dejstvom sile ploče se sabiju duž ose z. Sila i moment se određuju na osnovu međusobnog položaja ploča. S obzirom da je pomjeraj određen sa šest komponenti to je potrebno najmanje šest mjernih uređaja (senzora).

Kao mjerni elementi se najčešće koriste kapacitivni i induktivni senzori. Prikaz takvog jednog šestokomponentnog senzora dat je na slici 6.30.



Slika 6.30. Induktivni šestokomponentni senzor sile

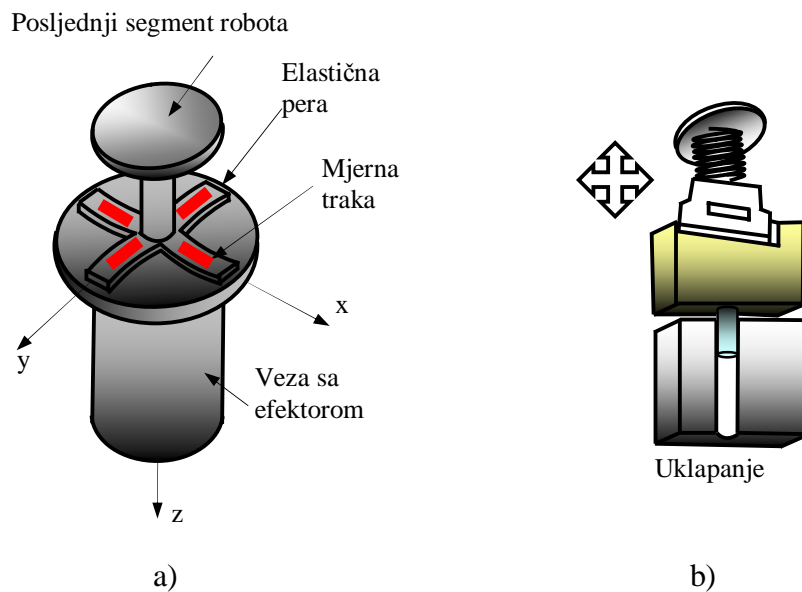
6.4.2.4. Senzor sile u zglobu šake

Senzori ovog tipa se ugrađuju u zglob šake robota. Senzor se sastoji od četiri unakrsna elastična pera koji su u tački ukrštanja vezani za posljednji članak robota.

Na svakom peru se nalazi po jedna mjerna traka, kako je prikazano na slici 6.31.

Primjena ovih senzora je najčešće kod montaže elemenata sa složenim uzajamnim položajem.

Većinom je to kod uklapanja objekata sa složenim tolerancijama kako je to prikazano na slici 6.31b).



Slika 6.31. Senzor sile u zglobu šake : a) izgled senzora, b) primjena senzora

6.4.3. Senzori blizine

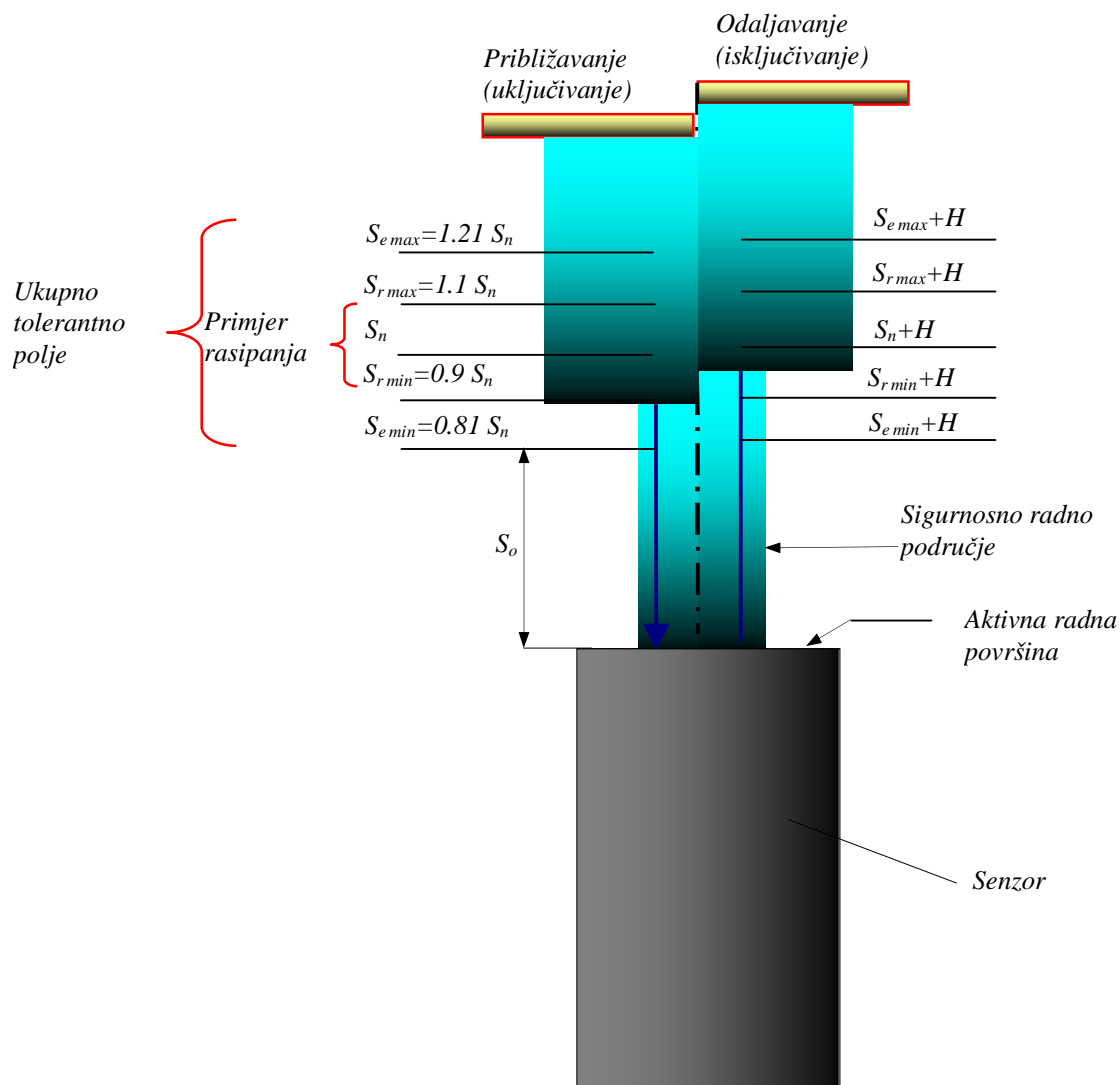
Karakteristika ovih senzora je da imaju izlazni signal koji se mijenja kada je blizina objekta veća ili manja od određene vrijednosti. Često se još zovu i relearnim sensorima odnosno prekidačima. Senzori blizine su jeftini, jednostavni i izdržljivi.

Osnovna primjena ovih senzora u robotici je kod brojanja komada i pri detekciji prisustva objekta i prepreka.

Kućišta, kablovi, primjena u eksplozivno opasnim sredinama propisani su evropskim standardima EN50008 - EN50044. Senzori blizine imaju relearnu statičku karakteristiku sa histerezisom. Za tehničku primjenu ovih senzora, slika 6.32 relevantni su sljedeći podaci:

Rastojanje uključivanja „S” predstavlja rastojanje objekta od aktivne površine senzora pri kojoj dolazi do uključivanja senzora.

Realno rastojanje uključivanja „Sr” predstavlja rastojanje objekta od aktivne površine senzora koje obuhvata proizvodne i konstrukcione tolerancije pri nominalnom naponu napajanja i radnoj temperaturi 20°C. Vrijednost mu se kreće u granicama $\pm 10\%$ od „Sn”, odnosno $0,9S_n < S_r < 1,1S_n$.



Slika 6.32. Mjerenje rastojanja uključivanja po normama EN 50010

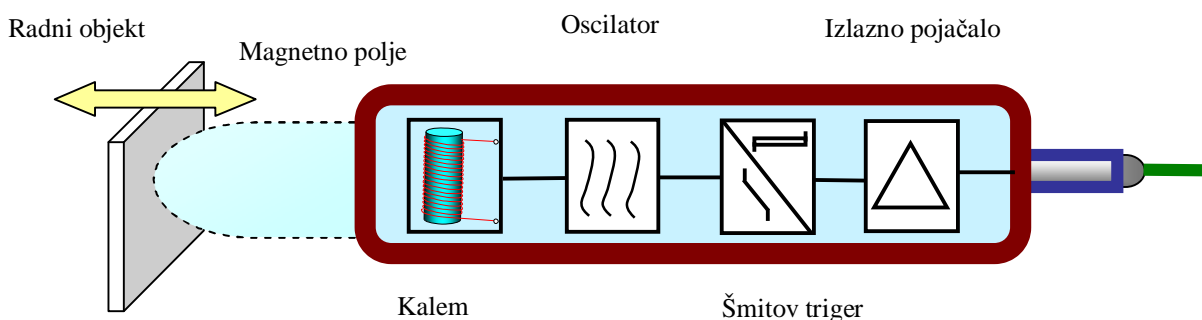
Nominalno rastojanje uključivanja „ S_n ” predstavlja rastojanje objekta od aktivne površine senzora pri kojoj dolazi do uključivanja senzora. Naravno tu se zanemaruju odstupanja određenih parametara kao što su: utjecaj temperature, nestabilnost napona napajanja i dr.

Efektivno rastojanje uključivanja „Se” je udaljenost od objekta do aktivne površine pri čemu se uzima u obzir i utjecaj temperature. Njegov iznos je $Se = (0,81 \div 1,21) Sn$.

Operativno rastojanje uključivanja „So” je rastojanje objekta od aktivne površine senzora koje obezbjeđuje siguran rad, a obično se kreće u granicama $0 < So < 0,8Sn$. U slučaju da imamo da je radni objekt veći od test objekta ova se rastojanja neznatno mijenjaju. U ovu grupu senzora spadaju: induktivni, kapacitivni, ultrazvučni, optički itd.

6.4.3.1. Induktivni senzori blizine

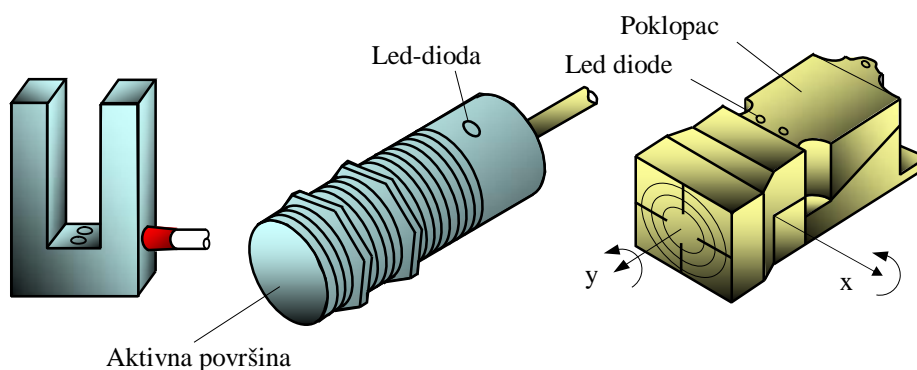
Princip rada ovih senzora se zasniva na zavisnosti induktivnosti kalema od promjene magnetne otpornosti. Približavanjem predmeta senzoru raste induktivnost, udaljavanjem predmeta dešava se suprotno. Blok šema jednog induktivnog senzora data je na slici 6.33.



Slika 6.33. Struktura induktivnog senzora blizine

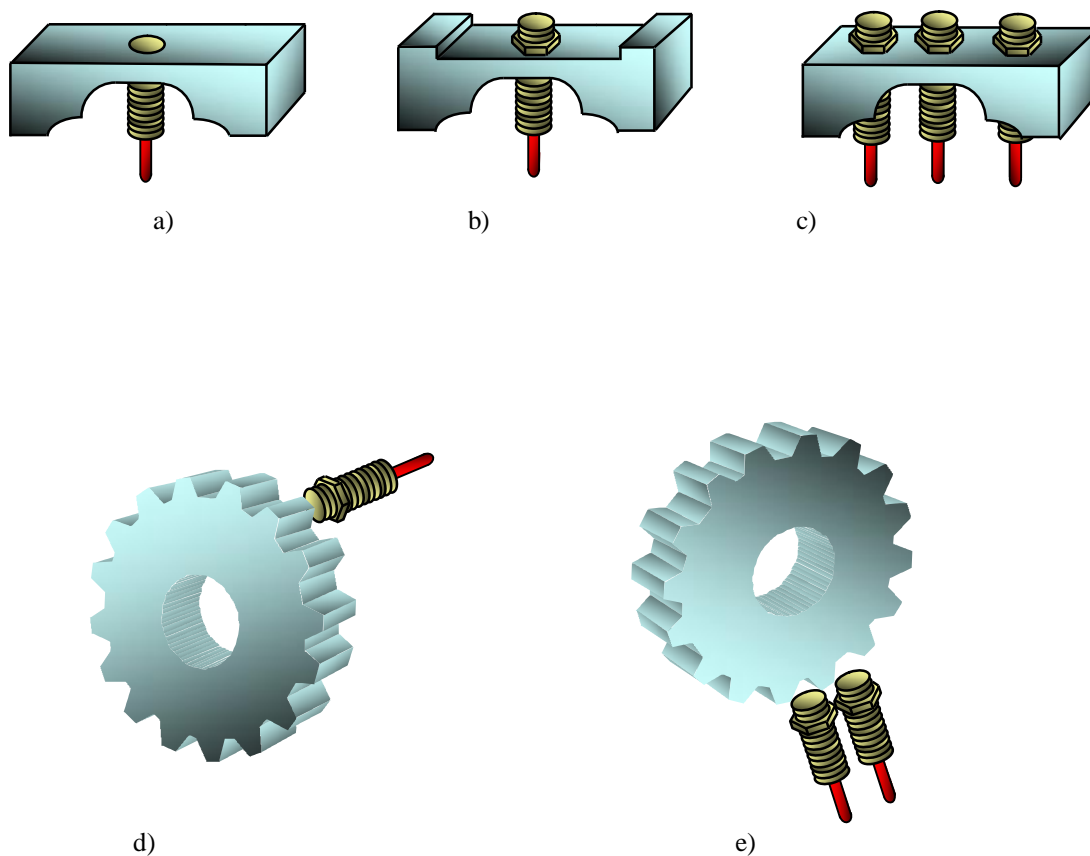
Priključenjem senzora na izvor napajanja električnom energijom dolazi do oscilacija na rezonantnoj frekvenciji. Ove oscilacije su uzrok stvaranja elektromagnetnog polja čiji je pravac prostiranja u smjeru ose senzora.

Izlazni se signal mijenja s promjenom udaljenosti predmeta. Induktivni senzori se prave kao: U-profil, cilindrični profil i prizmatični profil, kako je to prikazano na slici 6.34.



Slika 6.34. Konstruktivne izvedbe induktivnih senzora

Kućište ovih senzora se uglavnom pravi od nerđajućeg čelika ili polimera. Na samom kućištu se često ugrađuju LED-diode za vizualnu indikaciju stanja i ispravnost napajanja. Induktivni senzori se lako ugrađuju. Neki konstrukcioni detalji ugradnje inductivnih senzora dati su na slici 6.35.



Slika 6.35. Konstrukcioni detalji ugradnje inductivnih senzora: a) direktna ugradnja, b) ugradnja u udubljenju, c) ugradnja u nizu, d) detekcija ugaone brzine, e) detekcija ugaonog ubrzanja

Na slici 6.35a) imamo način ugradnje senzora zavisno od primjene. Da bi se izbjegao uticaj kućišta na inductivnost, senzor se može ugraditi i u udubljenju.

Na slici 6.35.(slika b i c) dati su primjeri ugradnje senzora za mjerenje ugaone brzine i smjera ugaone brzine.

Senzori se mogu postaviti radijalno ili aksijalno u odnosu na disk. Kad mjerimo ugaonu brzinu koristimo slučaj pod b) a smjer ugaone brzine pod c).

6.4.3.2. Kapacitivni senzori blizine

Princip rada ovih senzora sličan je principu rada induktivnih senzora. Rad senzora je miran i beskontaktno. Spadaju u grupu senzora za određivanje blizine objekta, a mogu poslužiti i za mjerenje zglobne brzine.

Osnovni element senzora je kondenzator koji se priključuje na oscilator ili pojačivač.

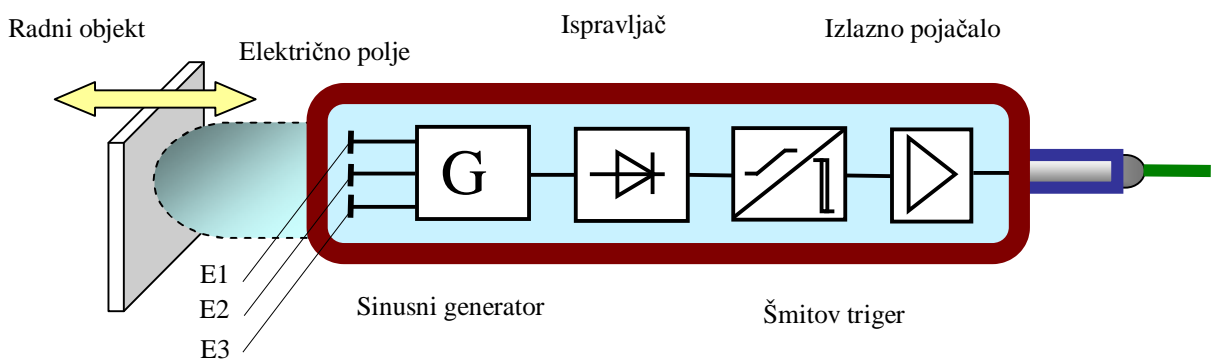
Kapacitivnost kondenzatora se može definisati jednačinom

$$C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d}$$

(6.9)

Jednačina pokazuje da kapacitivnost ovisi od dielektrične konstante ϵ_r između elektroda, površina elektroda i njihovih rastojanja.

Konstrukcija jednog ovakvog senzora data je na slici 6.36.



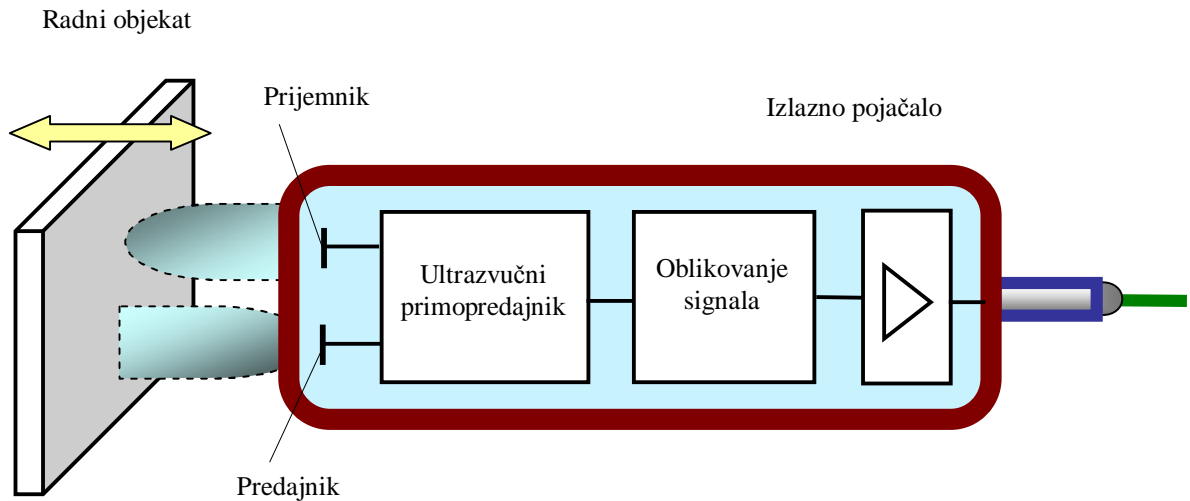
Slika 6.36. Struktura kapacitivnog senzora

Pojavom objekta između elektroda dolazi do stvaranja naizmjeničnog napona. Dobiveni naizmjenični napon se ispravlja i poredi sa naponom praga Šmit - ovog trigera koji je najčešće podešen na ekvivalentnom preklopnom rastojanju. Do porasta rastojanja uključivanja doći će zbog prisustva vlage i prašine, kao i usljed porasta temperature.

Obično se tačno očitavanje vrijednosti priključivanja određuje uz tačno definirane uslove. Kod ovih se senzora dielektrična konstanta kreće blizu jedinice. Zbog toga nisu pogodni za detekciju predmeta od prozirnih materijala.

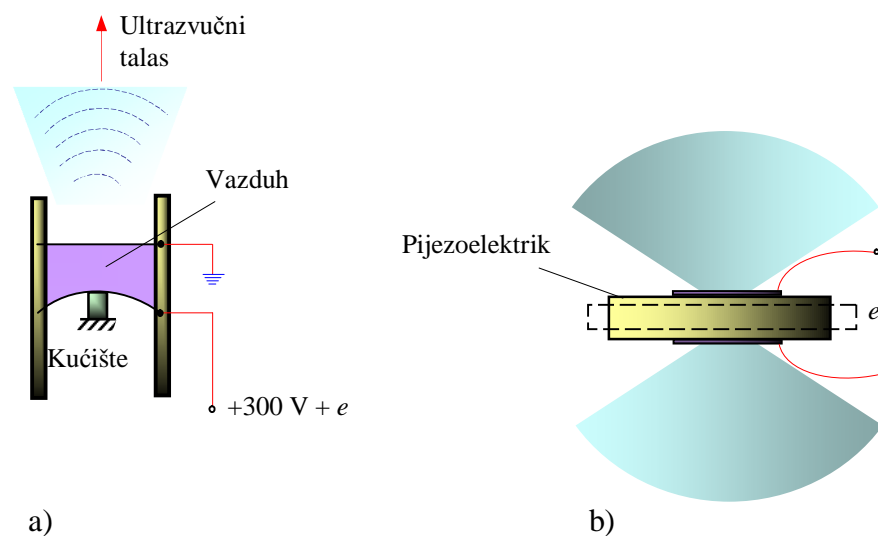
6.4.3.3. Ultrazvučni senzori blizine

Osnovni elementi ultrazvučnog senzora blizine su: ultrazvučni primopredajnik, uređaj za formiranje izlaznog signala i pojačivač, kako je to prikazano na slici 6.37.



Slika 6.37. Struktura ultrazvučnog senzora

Ovi senzori se koriste kao senzori blizine, a mogu poslužiti i za određivanje zglobne brzine. Mogu biti izvedeni kao pijezelektrični, a obično se prave kao elektrostatički. Radna frekvencija elektrostatičkih senzora je 250kHz. Izgrađeni su od dvije metalne elektrode priključene na jednosmjerni prednapon (300V), tako da se međusobno privlače (slika 6.38.a).



Slika 6.38. Ultrazvučni senzori : a) elektrostatički, b) pijezelektrični

Jedna elektroda je fiksirana, dok druga koja je pričvršćena po obodu počinje vibrirati u skladu sa silom stvarajući ultrazvučne talase.

Pijezoelektrični primopredajnici se prave od pijezoelektričnih materijala. Priključenjem pijezoelektrične membrane na naizmjenični napon, ona počne da osciluje i djeluje kao generator ultrazvuka (slika 6.38.b).

Pri gradnji ovih senzora javlja se više problema (nejednaka brzina prostiranja ultrazvuka u različitim medijima, zavisnost brzine od temperature i pritiska vazduha, slabljenje intenziteta zbog radijalnog širenja i apsorpcije, djelovanje šuma i dr.)

Primjeri primjene ovih senzora su različiti. Jedan od primjera dat je na slici 6.39.



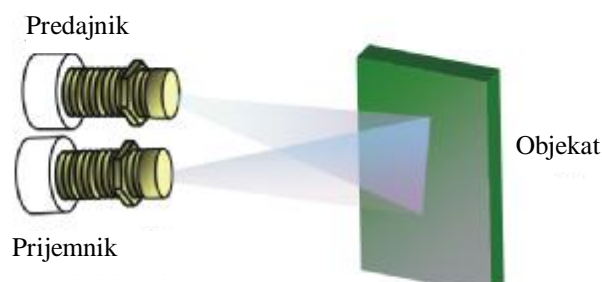
Slika 6.39. Detekcija ulaza/izlaza

6.4.3.4. Optički senzori blizine

Ovi senzori se sastoje od optičkog para-predajnika i prijemnika. Kao predajnici većinom se koriste LED-diode i laserske diode, dok se kao prijemnici koriste fototranzistori, fotodiode i fotootpornici. Najčešća kombinacija je LED-dioda i fototranzistor.

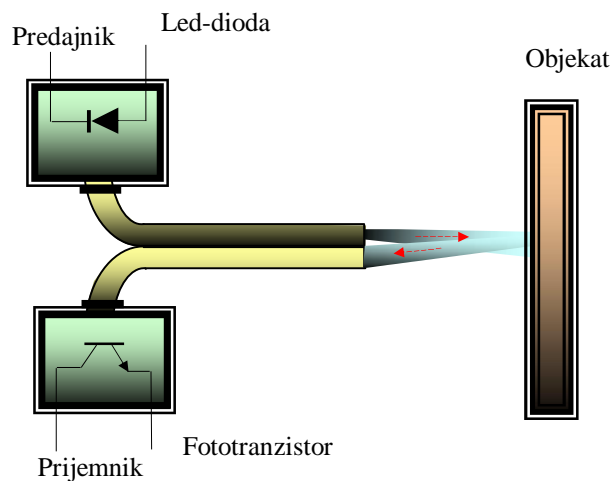
Optički par radi usaglašeno u određenom području optičkog spektra. Obično je optički signal u području vidljive svjetlosti, u području kratkotalasne infracrvene svjetlosti ili u području srednjetalasne infracrvene svjetlosti.

Optički senzori koji imaju refleksiju na objektu tačno prepoznaju objekt na određenoj udaljenosti, koja je ovisna o intenzitetu emitovane svjetlosti, položaja predmeta u odnosu na prijemnik i predajnik, slika 6.40.



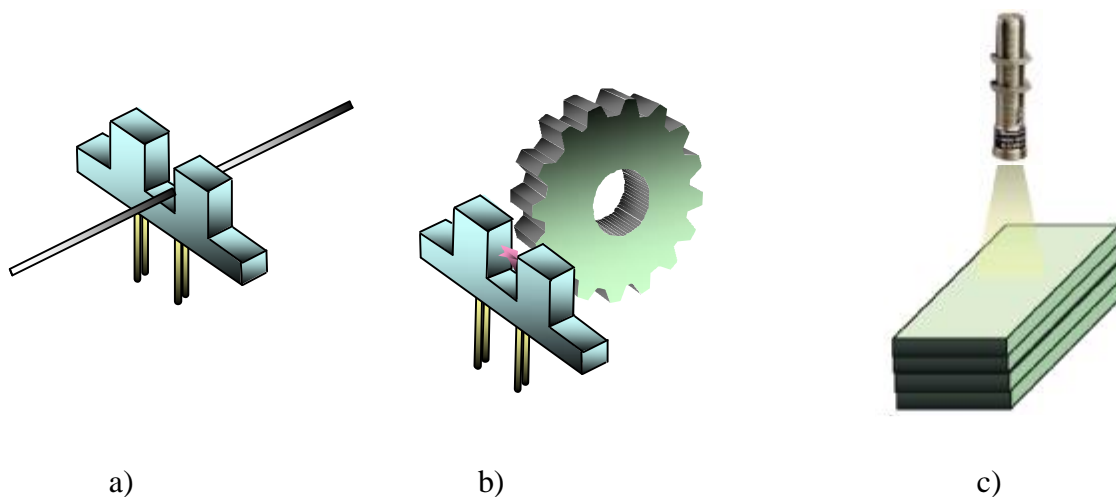
Slika 6.40. Optički senzor kod prepoznavanja predmeta

Ovi se senzori uglavnom izgrađuju u kućištima od plastike. Ako se radi o manje dostupnim mjestima, optički se zrak može dovesti pomoću optičkih vlakana i ogledala. Na slici 6.41. je prikazan jedan optički senzor s produžecima od optičkih vlakana.



Slika 6.41. Optički senzor sa produžecima od optičkih vlakana

Dovodno vlakno je povezano sa LED-diodom, a odvodno sa fototranzistorom. Zbog svojih malih dimenzija mogu se ugrađivati skoro na svakom mjestu. Neki od primjera ugradnje ovih senzora dati su na slici 6.42.



Slika 6.42. Primjeri ugradnje optičkih senzora: a) detekcija žice, b) detekcija broja obrtaja zupčanika, c) detekcija visine

6.4.4. Senzori vizije

Vještačka vizija ima za cilj povezivanje računara, elektronike i robotike, a sve to da bi se donekle postigla čovjekova vizualna sposobnost. Oponašanje čovjekovih triju komponenti (oka, optičkog nerva i moždanih funkcija) u pojedinim aspektima je bolje od uzora, a u ponekim i slabije. No uvijek kada su u pitanju brzina, mogućnost rada u nekim nepogodnim sredinama prednost se daje sistemima vještačke vizije.

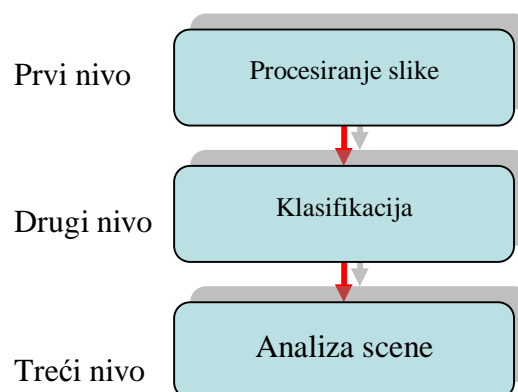
Razvijanjem vještačkog čula vida, robot se razvija u pogledu samostalnosti u izvršavanju postavljenih zadataka. Kompjuterska tehnika nam daje 2D sliku 3D elemenata.

Postoje tzv. polarizacijske naočale pomoću kojih je moguće dobiti prividnu dubinu. Karakteristično za te naočale je da posjeduju polarizacijske filtere koji propuštaju zelenu i crvenu svjetlost. Računari pomoću kojih se želi vidjeti trodimenzionalna slika moraju posjedovati dodatni hardverski dio sa sofisticiranim grafičkim sposobnostima.

Osnovna tri elementa ili nivoa senzora vizije su:

- procesiranje slike,
- klasifikacija i
- analiza scene.

Osnovna tri nivoa senzora vizije prikazani su na slici 6.43.



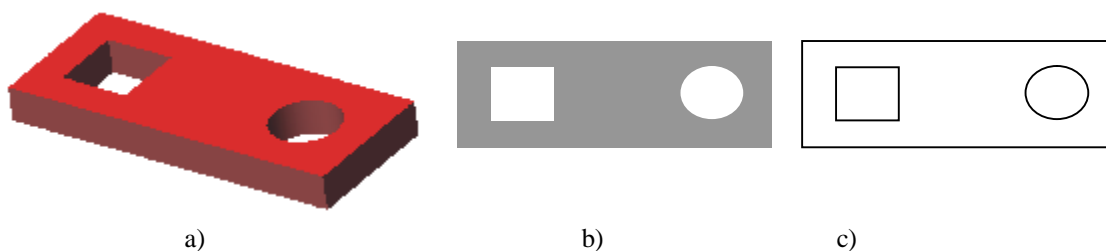
Slika 6.43. Osnovna tri nivoa senzora vizije

Prvi nivo nam omogućuje podešavanje slike odnosno dobijanje slike i njene poboljšane verzije.

Jedna od najvažnijih etapa prvog nivoa je filtracija šuma. Pojava šumova dovodi do problema osvjetljenosti nekih detalja. Npr. ivica objekta postaje tamnija ili svjetlija nego što bi trebala biti. Za slučaj kada imamo da je slika tamnija od željene vršimo podešavanje sjajnosti i kontrasta slike. Da bi se to postiglo vrši se oduzimanje ili dodavanje sjajnosti od svih piksela. Pikel je element slike dobijen pomoću jednog optoelektronskog senzora.

Drugi nivo predstavlja sposobnost prepoznavanja likova na sceni. Iz prethodnog nivoa smo dobili 2D sliku scene sa izvršenim korekcijama zbog poboljšanja kvaliteta slike. Prvi korak drugog nivoa je dijeljenje slike na elementarne ivice i njihovo spajanje u linije i konture objekta.

Da bi došlo do smanjenja obrade velikog broja informacija, u rasteru slike se preko A/D-pretvarača propušta niz gradacija sjajnosti slike nekog objekta. To je tzv. siva slika koja prikazuje siluetu objekta (slika 6.44.). Kontura (ivica) je još jednostavnija zbog binarne gradacije slike tj. radi se o dvije gradacije sjajnosti slike (crna/bijela – 0/1).



Slika 6.44. Slika predmeta (a) sa siluetom (b) i konturom (c)

Sam prijelaz siluete na konturu predstavlja derivaciju pomoću diferencijalnih operatora.

Ekstrakcija i klasifikacija se odnose na identifikaciju istovrsnih karakteristika različitih objekata radi njihovog poređenja i prepoznavanja.

Treći nivo je analiza scene. Analiza scene se odvija kroz interpretaciju i aktuaciju. Vizualni sistemi imaju sposobnost znanja o klasi objekta i opremljeni su bazama podataka. Rezultati interpretacije usklađuju se kroz interakciju između robota i scene.

Neki od problema rješavanja su:

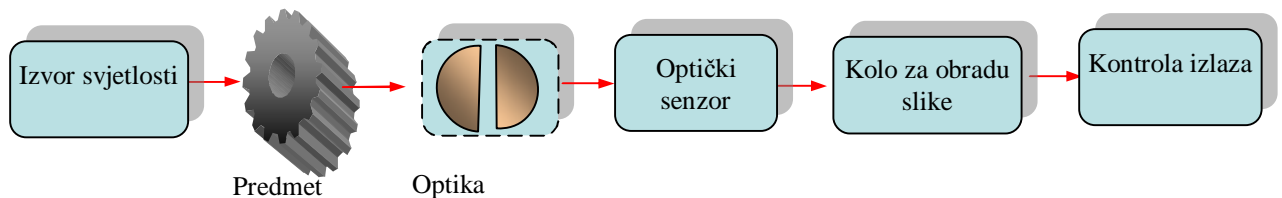
- analiza međusobnih objekata na sceni,
- grupiranje pojedinih oblasti radi dobivanja konture,
- traženje linija i kontura.

6.4.4.1. Struktura senzora vizije

Senzori vizije su se prvo razvijali kao optički senzori blizine, da bi se danas koristili optički nizovi i 2D-matrice.

Vizualni senzor je ustvari optički senzor koji optičko zračenje pretvara u sliku. Današnji senzori vizije su opremljeni kamerama kao fundamentalnim sensorima, a nastojanja su da viziju dobijemo primjenom lasera i optičkih vlakana.

Komponente jednog senzora vizije su date na slici 6.45. U zavisnosti od cilja vizije se biraju parametri komponenti senzora.



Slika 6.45. Osnovne komponente senzora vizije

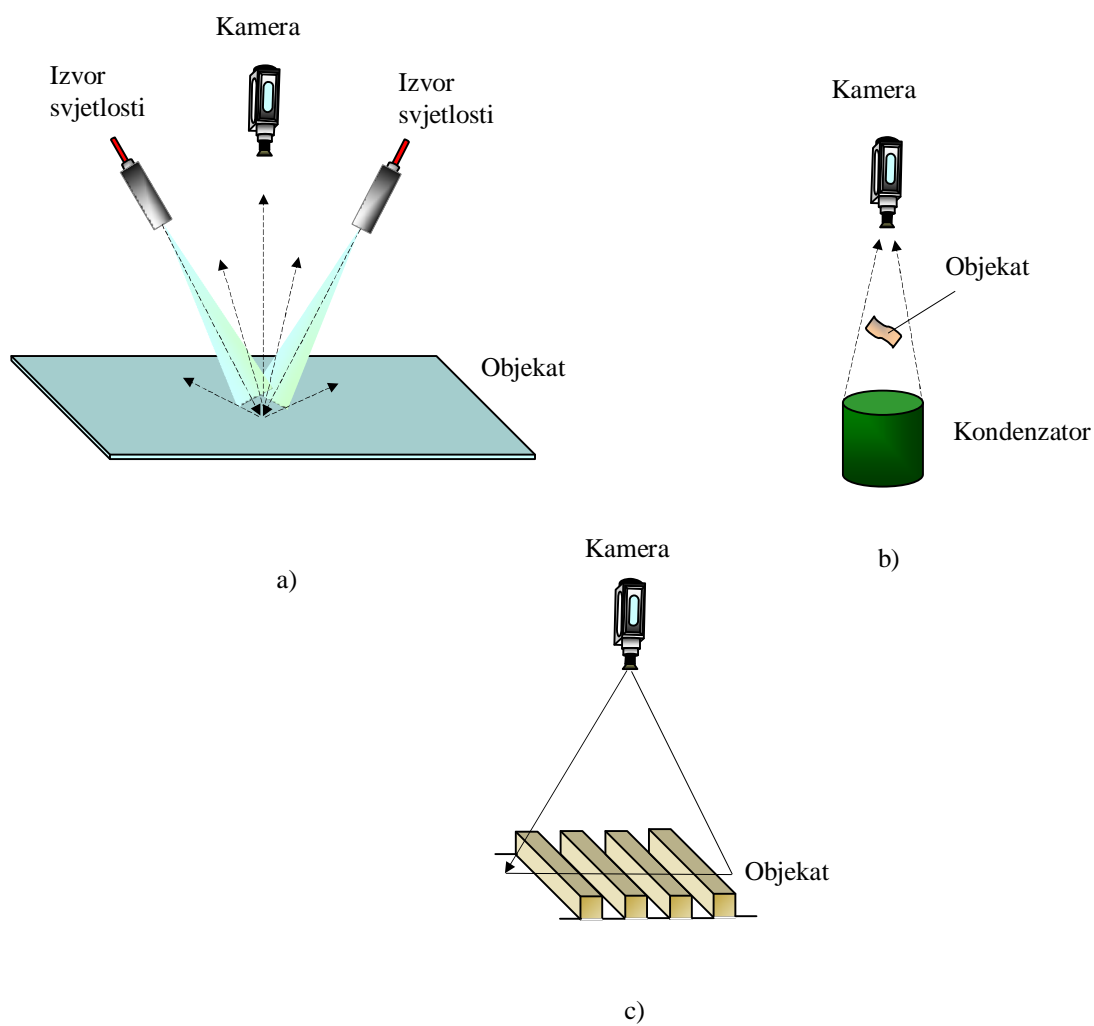
Tu se mogu izdvojiti komponente:

- upravljačka jedinica, kojom se vrši koordinacija rada sistema i ostvaruje veza s displejem
- osvjetljenje
- obrađivači signala slike (A/D-pretvarači, mikroprocesor) i softver
- optički senzor s dodatnim uređajima (U/I konvertor, pojačivač, mehanizam za hlađenje)
- optički elementi (sočivo, prizma, ogledalo)

Osnovni elementi su poziciono osjetljive foto-diode i poluprovodnički detektori.

Jedan od problema kod senzora vizije je način osvjetljenja predmeta u radnom prostoru. Da bi se izvršila identifikacija objekta potreban je dobar kontrast tj. visok odnos signal/šum.

Neki od načina osvjetljenja dati su na slici 6.46.



Slika 6.46. Način osvjetljenja: a) direktna metoda
b) pomoću kondenzatora
c) pomoću formiranja sjenki

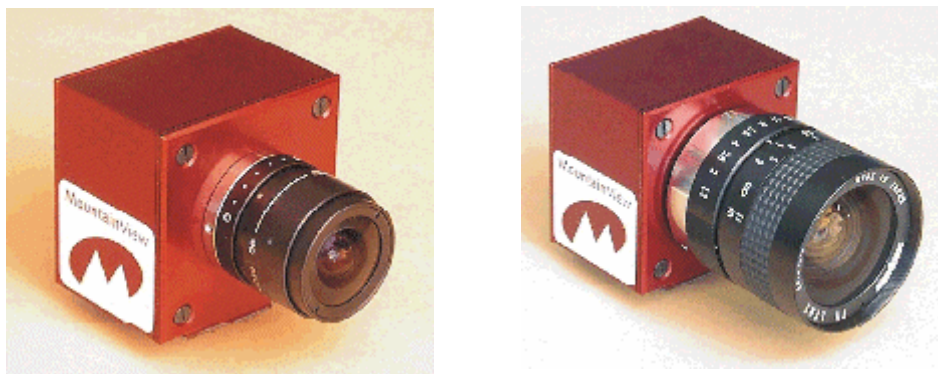
6.4.4.2. CCD – poluprovodničke kamere

Postoje različiti tipovi kamere. Najstarija je svakako TV kamera koja nije pouzdana zbog lomljivosti, kratkog vijeka trajanja i nelinearnosti napona. Nadalje tu imamo vidikon kamere. Vidikon kamera je kamera na bazi vakumske cijevi sa senzorskom elektrodom od Sb_2S_3 . Iako se čine odgovarajuća poboljšanja (gusto pakovanje fotodioda), sve se manje koriste zbog nedostataka. Neki nedostaci su: veće dimenzije, osjetljivost na vibracije i manja pouzdanost.

Danas se najviše primjenjuju poluprovodničke CCD-kamere.

Počeci ovih kamera datiraju još početkom 60-tih godina. Mjesta ugradnje ovih kamera su većinom u šaci robotske ruke. Njihov princip se zasniva na konverziji fotona u naelektrisanje. Ta se konverzija može opisati ili pomoću fotodiode ili pomoću MOS kondenzatora.

Razlučivanje kamere je 512×512 . Razmaci između elemenata su $30\mu m$. Primjer kamera ovakvog tipa su dati na slici 6.47.



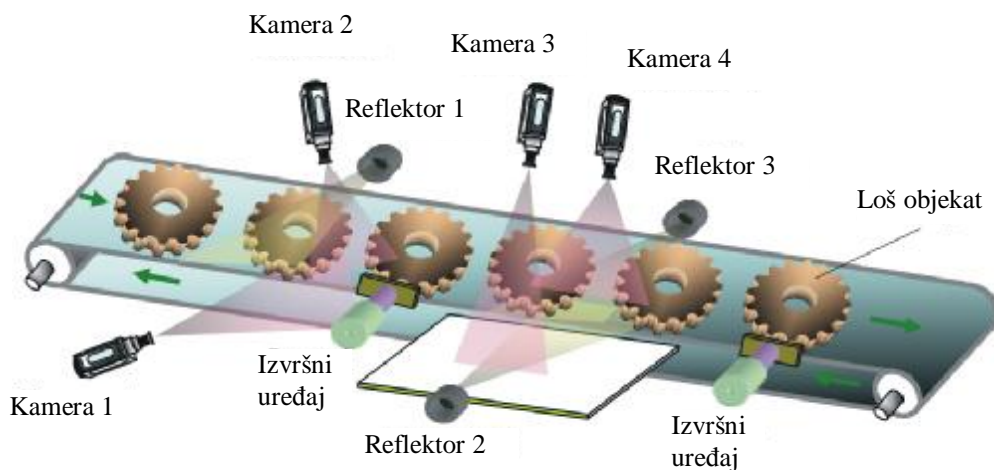
Slika 6.47. CCD kamere izvedene u obliku niza MOS tranzistora

6.4.4.3. Primjena senzora vizije u robotici

Vještačka vizija je prvo našla primjenu u sistemima prepoznavanja znakova, biološkog materijala i u prepoznavanju različitih objekata vojne namjene.

Daljem razvoju vještačke vizije svakako su doprinijeli razvoj računara i robotike. Svoju primjenu ovi senzori nalaze u kontroli kvaliteta proizvoda. Kad kažemo kontrola kvaliteta, tu se misli na kontrolu dimenzija (oblika) predmeta. To se posebno odražava u automobilskoj, tekstilnoj, prehrambenoj i metalsko-prerađivačkoj industriji.

Proizvodi koji odstupaju od tolerancija skidaju se s trake. Da bi se izbjegli određeni problemi, bilo da se radi o nedostatku nekog dijela, stavljaju se dvije kamere pod uglom 90° ili 180° slika 6.48.



Slika 6.48. Kontrola dimenzija objekta na traci

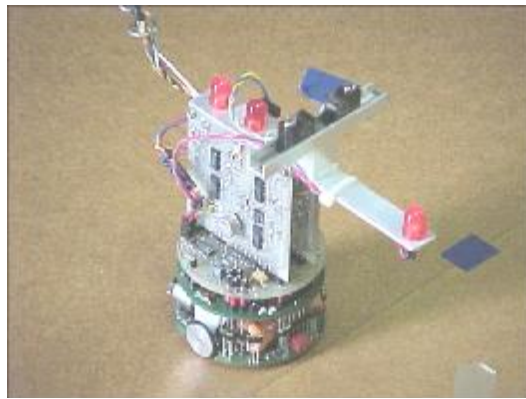
Kontrola dimenzija predmeta se vrši kamerama 1 i 2. Kad imamo slučaj da dimenzije odstupaju od referentnih, signalizira se izvršnom uređaju koji je najčešće solenoid, pa se onda predmet udaljava sa trake. Kamerama 3 i 4 se vrši kontrola površinskih oštećenja i to na taj način da se dobijena slika upoređuje sa referentnom.

Svako snimanje je snabdjeveno sa osvjetljenjima. Osvjetljenje ukoliko se priključi na pokretne dijelove robota, može dovesti do oštećenja performace robota. Jedan od problema je i kretanje robota, gdje može doći do oštećenja osvjetilnih uređaja ili do prikrivanja nekih dijelova objekta. Zbog tih razloga je najbolje imati što više uređaja za osvjetljavanje kako bi imali što bolju kontrolu.

Ovo je samo jedan primjer primjene senzora vizije. Senzori vizije imaju svoju primjenu i kod kontrole različitih otvora, identifikaciji predmeta itd.

Ovi senzori su našli primjenu i kod mobilnih robota. Mobilni se roboti mogu kretati po određenim površinama u prostoru. Kakvo je to kretanje zavisi od načina vođenja mobilnog robota. To vođenje može biti po unaprijed zadanom programu i pomoću senzora.

Naravno, mobilni robot pri kretanju mora posjedovati informacije o okolini u kojoj se kreće slika 6.49.



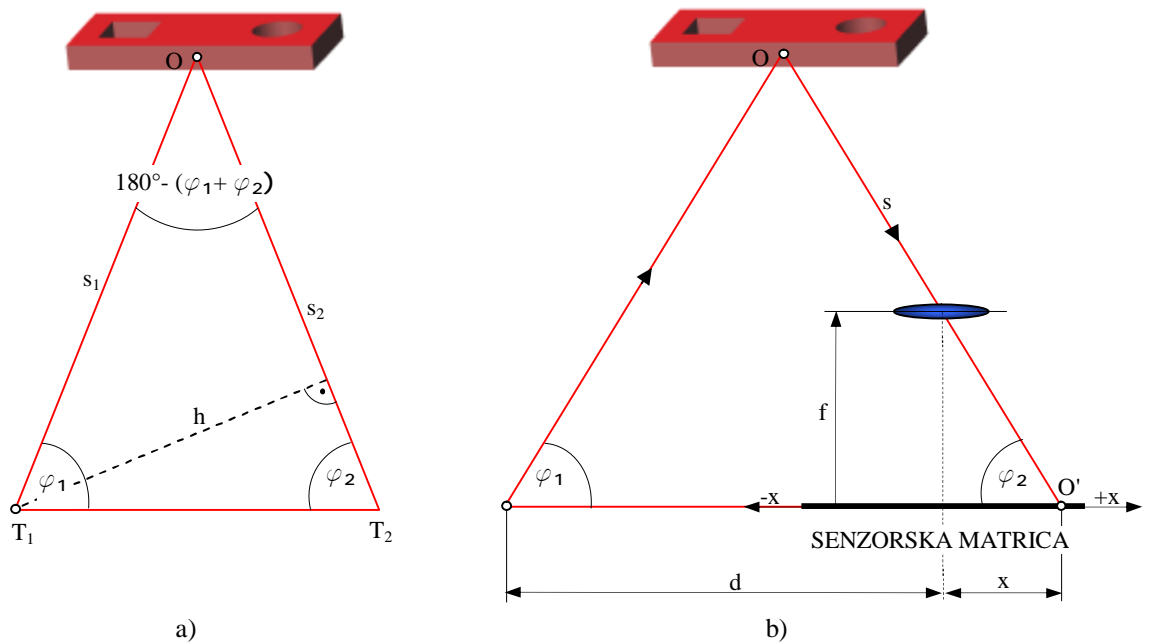
Kuda ću?
Gdje se nalazim?
Kako ću proći?

Slika 6.49. Senzori vizije kod mobilnog robota

6.4.4.4. 3D – senzori vizije

Za trodimenzionalnu viziju potrebno je izmjeriti udaljenost između senzora i svake tačke scene. Za ostvarenje trodimenzionalne vizije postoji nekoliko različitih metoda. Jedna od metoda je tzv. triangulaciona. Triangulacija predstavlja mjerenje rastojanja na osnovu tri tačke koje čine vrhove trougla. Triangulacija može biti pasivna i aktivna što zavisi od toga dali se kamera kreće ili ne.

Na slici 6.50. je prikazana triangulacija.



Slika 6.50. Triangulacija: a) pasivna, b) aktivna

Tačke T_1 i T_2 su fiksne i poznato je rastojanje između njih. Pomoćna se veličina h može izračunati na dva načina:

$$h = s_1 \cdot \sin[180^\circ - (j_1 + j_2)] \quad (6.13)$$

$$h = d \cdot \sin j_2$$

(6.14)

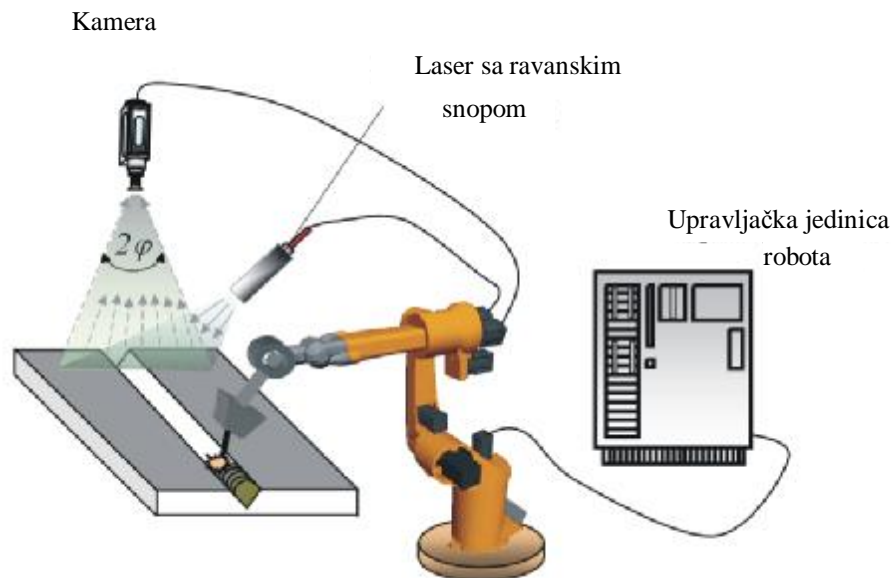
Izjednačavanjem desnih strana dobijemo da je:

$$s_1 = \frac{d \cdot \sin j_2}{\sin[180^\circ - (j_1 + j_2)]} \quad (6.15)$$

Slično možemo dobiti i vrijednost udaljenosti od druge triangulacione tačke:

$$s_2 = \frac{d \cdot \sin j_1}{\sin[180^\circ - (j_1 + j_2)]} \quad (6.16)$$

Tipičan primjer triangulacije i strukturnog svjetla je kod automatskog zavarivanja (slika 6.51.). Na osnovu programa upravljačka jedinica dolazi do podataka potrebnih za servovođenje robota, kao i za proračun utroška materijala potrebnog za zavarivanje.

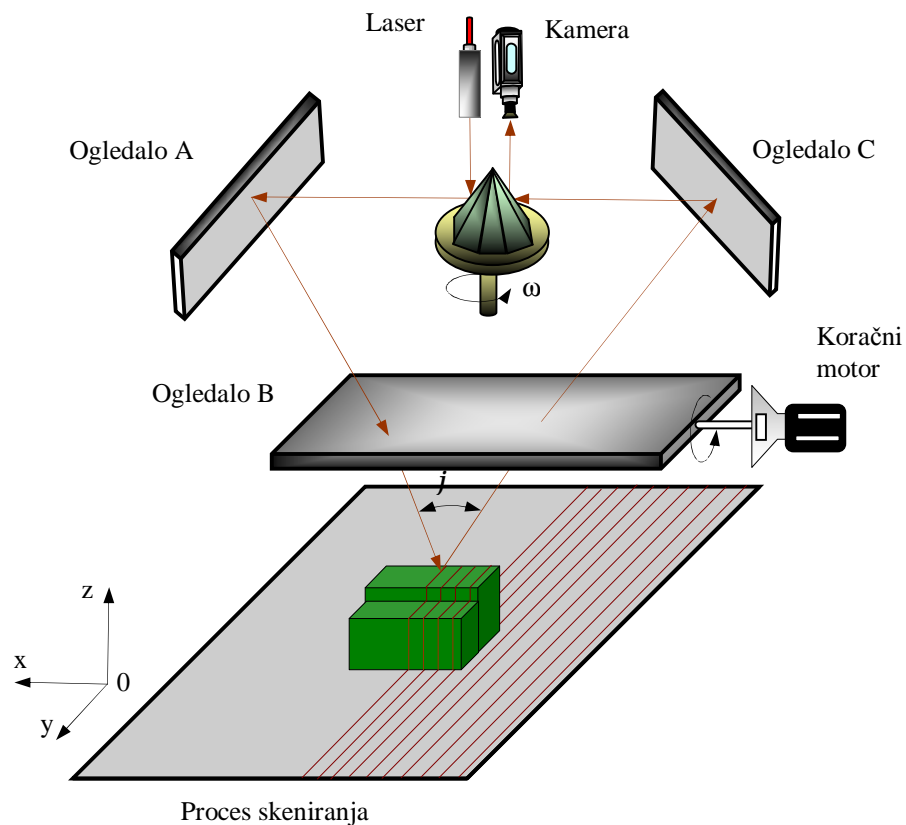


Slika 6.51. Automatsko zavarivanje robotom

Uspostavlja se korespondencija između slike na senzoru i dimenzija šava. Sve slike šava se memorišu pomoću odgovarajućeg podprograma. Za veće dimenzije šava potrebno je češće uzorkovanje i procesiranje. Kameru i laser nosi manipulator.

Zbog kontinualnosti zavora najčešće se koristi zavarivanje neprekidnom žicom, naročito u automobilskoj industriji. Laserski daljinomjeri se najčešće koriste kod detekcije trodimenzionalnih objekata. U ovu grupu se uvrštavaju kombinacije lasera i kamere.

Princip skeniranja pomoću laserskog zraka se svodi na određivanje udaljenosti između lasera i objekta. Danas se najviše primjenjuju sistemi sa autosinhronizacijom koji sadrže piramidalna ogledala, gdje jedna strana služi za detekciju lasera a druga za njegovo projektovanje (slika 6.52.).



Slika 6.52. Trodimenzionalni senzor sa autosinhronizacijskim skeniranjem objekta

Kao što vidimo sa slike, tu imamo piramidalno ogledalo na koje pada laserski zrak. Ogledalo se rotira konstantnom ugaonom brzinom w . Sa piramidalnog ogledala zrak se reflektuje na fiksno ogledalo "A", a potom na rotirajuće ogledalo "B". Na kraju se zrak preko fiksnog ogledala "C" reflektira do kamere kao senzora. Pomoću piramidalnog ogledala se vrši skeniranje duž ose x, a uzduž ose y skeniranje se postiže rotacijom ogledala "B". Rotacija ogledala "B" se postiže pomoću koračnog motora. Samim tim dobijemo sliku sastavljenu iz uzdužnih i poprečnih linija. Na taj način imamo skeniranu sliku koja predstavlja reljefnu sliku scene. Povećanje rezolucije skenirane slike se postiže smanjenjem ugaonog koraka rotacije ogledala "B".

Skeniranje je danas čest slučaj sensoriranja 3D objekata. Posebno skeneri novije konstrukcije primjenjuju kod detekcije 3D objekata. Ovi nam senzori omogućuju kontrolu kvaliteta i dimenzija zadanog predmeta. Osim kontrole kvaliteta i dimenzija, nalaze uveliko primjenu i u drugim situacijama. To se odnosi prije svega na orijentaciju, nailaženje na prepreke kao i upoznavanje okoliša. Danas se za skeniranje koriste laserski i ultrazvučni skeneri. Primjenom senzora ovakve izvedbe nastoji se dobiti što bolja prostorna slika, odnosno ovakvom izvedbom senzora dobijamo tzv. "tehničko oko".

LITERATURA:

- [1] Binner, H. F.: *Prozeßorientierte Arbeitsvorbereitung*, Carl Hanser Verlag München Wien, Deutschland,
- [2] Fachhochschule A.: *Hochschul – Magazin*, Hochschule für Technik und Wirtschaft. Alen, Deutschland,
- [3] Müller, M.: *Roboter mit Tastsinn*, Rogowski – Institut für Elektrotechnik der RTH Aachen, 1994.
- [4] Popović, Mladen.: *Senzori u robotici*, Viša elektrotehnička škola, Beograd, 1986
- [5] Potkonjak, V.: *Robotika*, Univerzitet u Beogradu, 1995
- [6] Waernecek, H. V.; Schraft, R. D.: *Industrierobot*, Handbuch für Industrie und Wissenschaft. Springer – Verlag, Berlin, Deutschland, 1990.
- [7] Spektrum der Wissenschaft. Dossier: *Roboter erobern den Alltag*, Scientific American-Deutsche Ausgabe, 1998.
- [8] Beginski, B.: *Motion Planning for Manipulators*, Technische Universität München, Deutschland, 1995.
- [9] Dieter, W. W.: *Roboter systeme 1- Technische Grundlagen*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Deutschland.
- [10] Pugh, A.: *Robot Sensor*, Springer-Verlag, Berlin, Deutschland, 1986.
- [11] Šurina, T.: *Industrijski roboti*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.

Pogoni robota

7

Vlatko Doleček, Mašinski fakultet Sarajevo

Samir Vojić, Tehnički fakultet Bihać

7.1. Uvod

Motori koji daju kretanje u zglobovima robota nazivaju se pogoni ili aktuatori. Postoje tri glavna tipa aktuatora koji se koriste, a to su:

- pneumatski,
- hidraulični i
- električni.

Pneumatski pogon koristi se kod jednostavnijih manipulatora koji služe za opsluživanje mašina tj. za obavljanje prostijih ponavljajućih operacija ne uzimajući u obzir trajektoriju između početne i krajnje tačke. Zglobove robota pokreću cilindri na bazi komprimiranog zraka. Ovaj pogon omogućuje brz i pouzdan rad uređaja ali teško ostvaruje kretanje po zadanom zakonu.

Prvi robot Unimate imao je hidraulični pogon i u toj fazi razvoja robotike dominirao je ovaj oblik pogona. Hidraulični pogon omogućuje uspostavljanje veće tačnosti upravljanja zglobnom strukturom zahvaljujući servoventilima (razvodnicima) koji omogućavaju uspostavljanje proporcionalnosti između protoka ulja i upravljačke strukture.

Danas se zbog svojih prednosti nad ostalim pogonima najčešće koriste električni pogoni.

Hidraulični pogoni se još uvijek koriste kad su u pitanju nosivosti veće od 100kg. Za područje nosivosti 1 – 100kg koriste se električni pogoni, dok se za manje mase 0,2 - 15kg koriste pneumatski pogoni.

Poređenje pogonskih sistema s obzirom na tačnost pozicioniranja, nosivost i brzinu dato je u Tabeli 7.1.

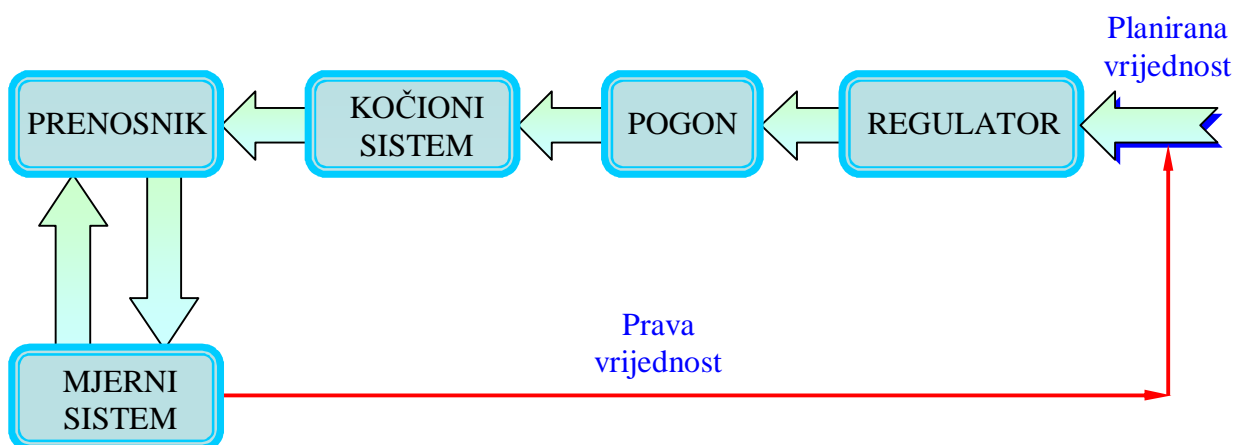
Tabela 7.1 Poređenje pogonskih sistema

VRSTA POGONA	NOSIVOST (kg)	TAČNOST POZICIONIRANJA (mm)	BRZINA (m/s)
PNEUMATSKI	0,2 – 15	$\pm 0,1 - 1,0$	0,3 – 1,0
HIDRAULIČNI	40 – 500	$\pm 0,1 - 2,0$	0,75 – 5,0
ELEKTRIČNI	1 - 100	$\pm 0,02 - 1$	0,5 - 10

Pogoni robota imaju zadatak da postignu zadanu putanju, te pozicioniraju i orijentiraju završni uređaj. Najvažniji zahtjevi koje moraju zadovoljavati pogoni su:

- mala težina i zapremina motora,
- veći obrtni momenti,
- veće područje ugaonog zakretanja,
- veća tačnost pozicioniranja,
- velika pouzdanost itd.

Šematski prikaz jednog pogonskog sistema dat je na slici 7.1.



Slika 7.1. Šematski prikaz pogonskog sistema

7.2. Pneumatski pogoni

Pneumatski pogoni koriste za pogon potencijalnu energiju sadržanu u fluidu (zrak). Pneumatika je pogodna za manje snage, jer kako je poznato zrak je teško komprimirati i postoji opasnost da dođe do eksplozije, pa bi iz tog razloga za postizanje većih snaga bili potrebni veliki promjeri cilindra.

Ovakav tip pogona ima svoje prednosti, ali i nedostatke.

Prednosti pneumatskog pogona su:

- relativno jeftin,
- jednostavna gradnja,
- brzo vrijeme reakcije,
- mogu ostvariti pravolinijska i obrtna kretanja,
- otporni su na preopterećenje, zapaljivost, visoke temperature, zračenje i elektromagnetne smetnje.

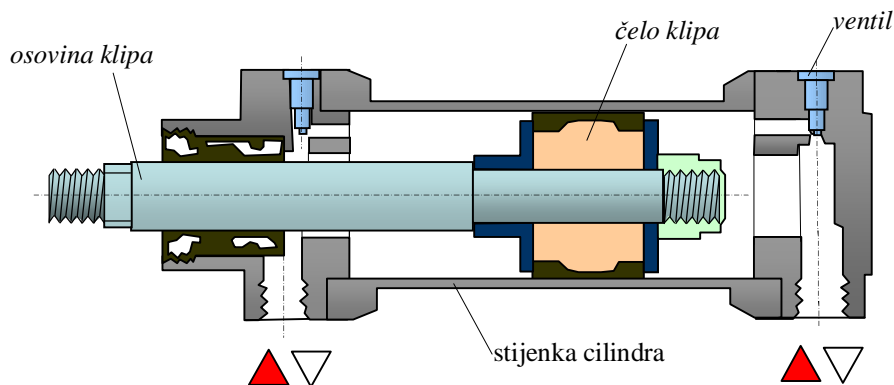
Nedostaci pneumatskog pogona su:

- buka pri radu,
- nekontrolisana brzina kretanja,
- pogon od tačke do tačke,
- loše pozicioniranje,
- potreba za sušenjem, čišćenjem i podmazivanjem,
- manja sposobnost nošenja velikih tereta,
- kraći radni vijek.

Za zaustavljanje robota i definisanje njegovog kretanja koriste se mehanički graničnici.

Pneumatski sistem se sastoji od slijedećih komponenata:

- klip i
- cilindar.

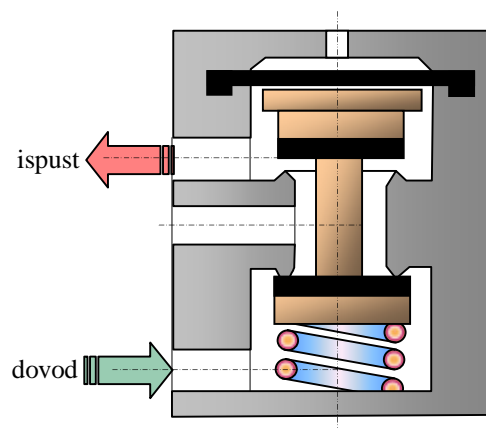


Slika 7.2. Pneumatski cilindar



Slika 7.3. Izvedbe pneumatskog aktuatora

Slika 7.2 prikazuje *linearni klip*. To je klip koji se pokreće od jedne granice svog radnog hoda do druge ovisno o smjeru pogonskog zraka. Podešavanje toka zraka omogućuje kočenje osovine klipa na granici. Postoje i *obrtne klipovi*, ali to su u suštini linearni klipovi kod kojih klipna osovina sadrži ozublenu polugu koja pokreće zupčanik (poznato kao *sistem zupčaste poluge i zupčanika*).



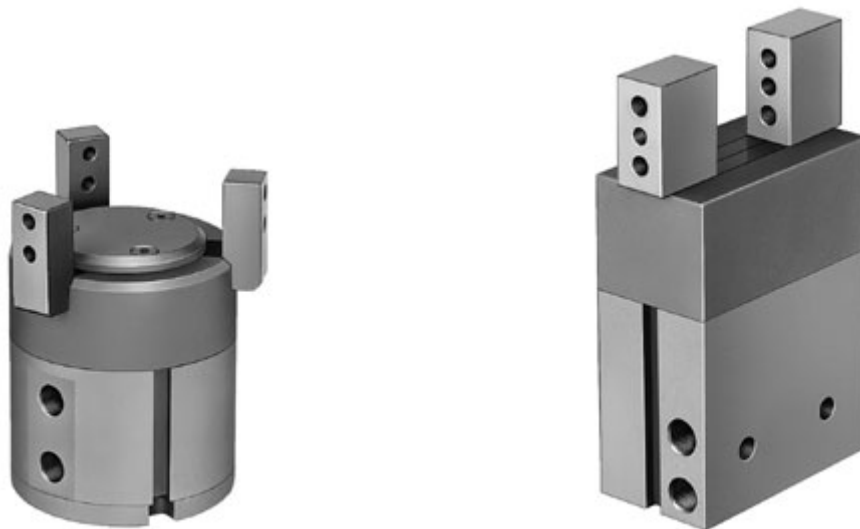
Slika 7.4. Pneumatski ventil

Postoji nekoliko tipova razvodnika. Najčešće se koriste razvodnici s ventilima (slika 7.4). Kod razvodnika s ventilima, ventil se pokreće membranom koja se izlaže djelovanju regulacionog signala, a u prvobitni položaj se vraća pomoću opruge.



Slika 7.5. Pneumatski razvodnici

Primjena pneumatskih pogona je veoma široka tamo gdje se ne traže visoke sile zbog njihove jednostavne konstrukcije, prostog održavanja i niske cijene. Primjenu pneumatike imamo i kod hvataljki robota, a neki primjeri su dati na slijedećoj slici.



Slika 7.6. Pneumatske hvataljke

7.3. Hidraulični pogoni

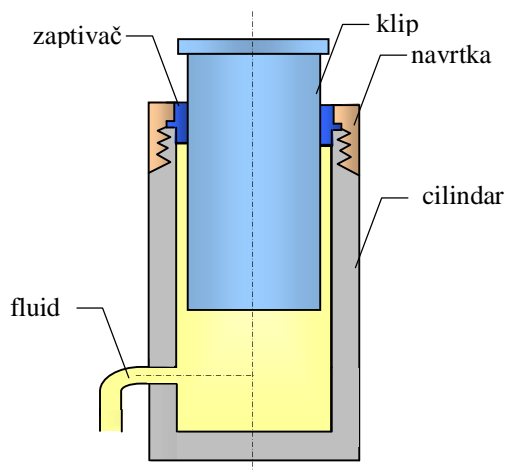
Kao što je već u uvodu rečeno ovi pogoni rade na bazi komprimiranog ulja. Hidrauličnim pogonom moguće je ostvariti visoke pritiske u cilindru, a time i velike sile u zglobovima robota. Ovaj pogon ima ograničenu maksimalnu brzinu klipa u cilindru pa je iz tog razloga ograničena i brzina robota.

Kao kod pneumatskih sistema, hidraulično regulirani sistemi se sastoje od izvora energije (pumpe), hidrauličnih vodova, razvodnika i samog aktuatora (tj. linearnog ili obrtnog klipa u robotima). Glavna razlika je u činjenici da razvodnik može biti proporcionalno reguliran i na taj način omogućava konvencionalnu upotrebu hidrauličkih servo-sistema, dok kod pneumatskih sistema razvodnik radi na principu “uključeno-isključeno”.

7.3.1. Linerani cilindri

Postoje tri tipa linearnih cilindara:

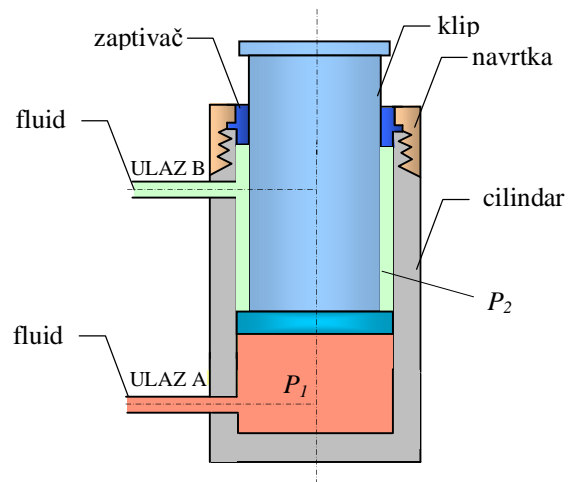
- klip jednostrukog djelovanja,
- klip dvostrukog djelovanja i
- diferencijalni klip.



Slika 7.7. Hidraulični cilindar jednostrukog djelovanja

Kod cilindra jednostrukog djelovanja (slika 7.7), razvijena sila je jednosmjerna. Povratni uređaj (npr. opruga) osigurava povrat osovine klipa u početni položaj.

Klip dvostrukog djelovanja ima dvije komore u kojima se pritisak p_1 i p_2 može naizmjenično određivati (slika 7.8). Treba obratiti pažnju da prisustvo klipne osovine samo u jednoj komori znači da je klip asimetričan u odnosu na pritisak koji je potreban da se dobije isto kretanje nadesno i nalijevo.

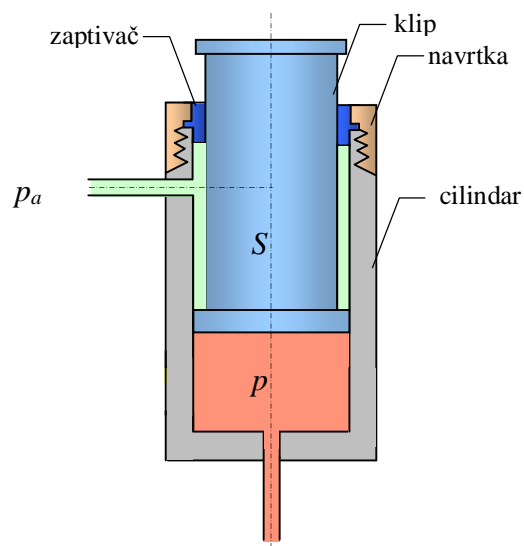


Slika 7.8. Hidraulični cilindar dvostrukog djelovanja

Za dugi hod klipa koristi se diferencijalni klip (slika 7.9). Poprečni presjek s osovine klipa jednak je polovini površine tijela klipa S , odnosno $S = 2s$.

Razvijena sila je:

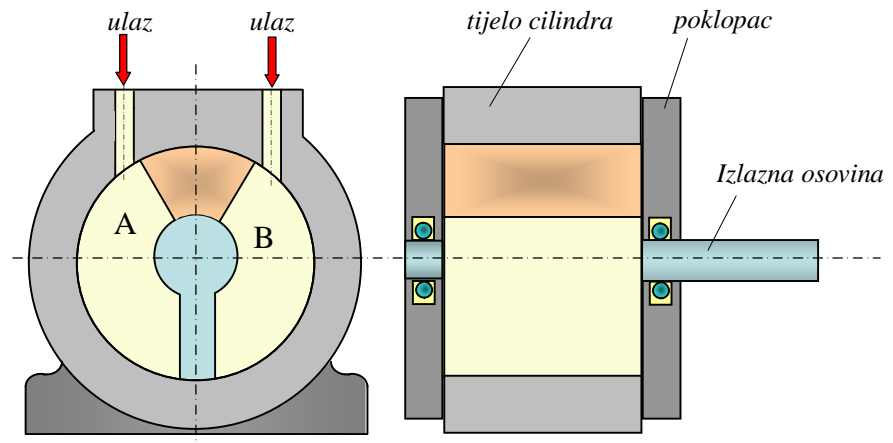
$$F = s(2p - p_a) \quad (7.1)$$



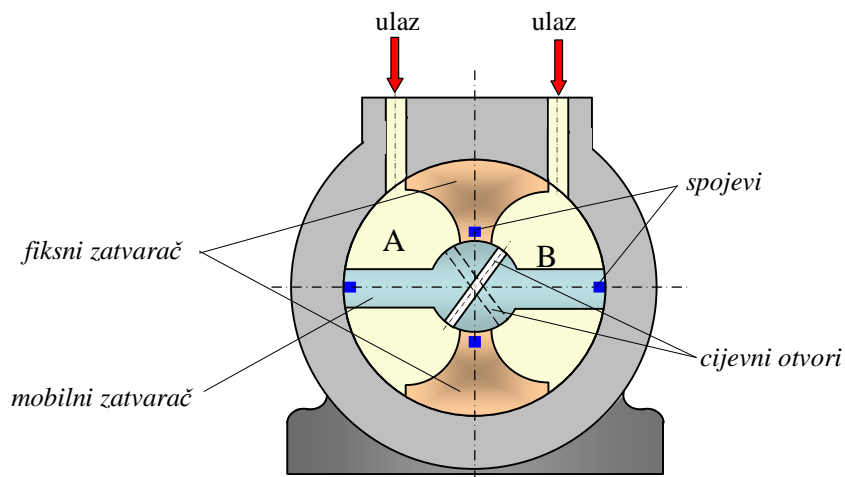
Slika 7.9. Hidraulični diferencijalni cilindar

7.3.2. Obrtni (zakretni) motori

Kao što je slučaj sa pneumatskim klipovima, moguće je na mehanički način transformirati linearno kretanje hidrauličkog klipa u obrtno kretanje. Postoji, međutim tip klipa koji je napravljen da rotira. To je *obrotni klip* (slika 7.10).



Slika 7.10. Hidraulični obrtni motor



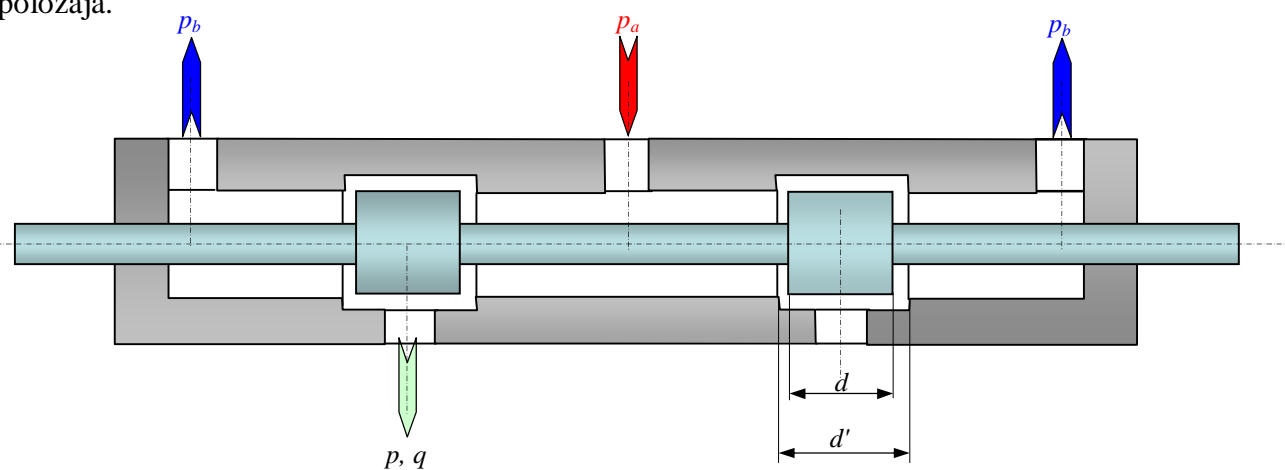
Slika 7.11. Poprečni presjek hidrauličnog obrtnog motora

Najjednostavnija verzija sastoji se od cilindra s fiksnim zatvaračem. Unutar njega obrće se mobilni zatvarač koja čini cjelinu s izlaznom osovinom. Hod klipa je ograničen dimenzijama zatvarača na oko 330 stepeni.

Pored obrtnog motora (pumpe) postoje još aksijalnoklipni, radijalnoklipni i zupčasti hidraulični motori (pumpe). Pošto se hidrauličke pumpe ne koriste često kao motori za robote, nećemo ih dalje opisivati.

7.3.3. Razvodnici

Razvodnici su ustvari ventili koji prespajaju vodove između izvora napajanja i radnih jedinica. Tip razvodnika definiran je brojem priključnih mjesta i brojem radnih položaja.



Slika 7.12. Hidraulični razvodnik

Tipičan primjer razvodnika prikazan je na slici 7.12. Uloga ovog razvodnika je da se mjeri protok q koji ulazi u komoru s poznatim pritiskom $[(p_a + p_b)/2]$. Kao što je prikazano na slici 7.12. klipovi dužine d podešavaju se otvor dužine d' , a mogu se pojaviti tri različite situacije: $d = d'$ (razvodnik bez isticanja ili povraćaja), $d > d'$ (razvodnik s povraćajem) i $d < d'$ (razvodnik s isticanjem).



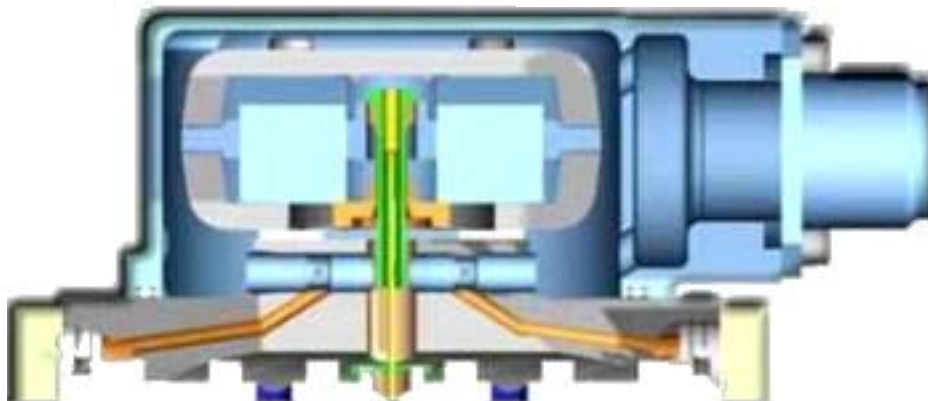
Slika 7.13. Hidraulični razvodnici

7.3.4. Servo ventili

Servo ventil je uređaj koji pokreće klip razvodnika tako što otkriva odjeljke, prilagođavajući brzinu protoka proporcionalno električnom regulacionom signalu. Ovo je od bitne važnosti za hidrauličku servo-regulaciju. Hidraulički servo ventil je složen uređaj kojeg karakterizira mnogo parametara.

Najvažniji parametri su:

1. povećanje protoka ili odnos između protoka kroz ventil i regulacione struje bez ikakvog opterećenja (kratkospojni operativni otvori);
2. povećanje pritiska ili odnos između razlike pritiska i regulacione struje kad su otvori zatvoreni;
3. krivulje (karakteristike) protok-pritisk ili odnos između protoka i razlike pritiska kad je struja konstantna.



Slika 7.14. Hidraulični servo ventil



Slika 7.15. Servo ventil

7.3.5. Servoregulirani hidraulički sistemi

Uzmimo sistem sastavljen od servo ventila kojeg regulira struja I , koji pokreće razvodnik pomoću U , i na taj način proizvodi kretanje x linearnog klipa. Uzimajući u obzir geometrijske kompleksnosti i nedostatke, te dinamičke osobine fluida, niti jedna komponenta nema jednostavan, linearan model. U praksi, potrebno je izračunati približne vrijednosti, na primjer, izražavajući odnos između struje I koja se koristi za reguliranje servo ventila i kretanja U razvodnika u obliku funkcije drugog reda:

$$T_1(p) = \frac{U(p)}{I(p)} = \frac{K_1}{1 + 2x_1 \cdot \frac{p}{w_1} + \frac{p^2}{w_1^2}} \quad (7.2)$$

gdje je:

x_1 - efekat prigušenja (kočenja), čija vrijednost je približno 1

w_1 - ugaona brzina.

Na isti način, odnos između kretanja klipa x i kretanja razvodnika može se predstaviti kao funkcija:

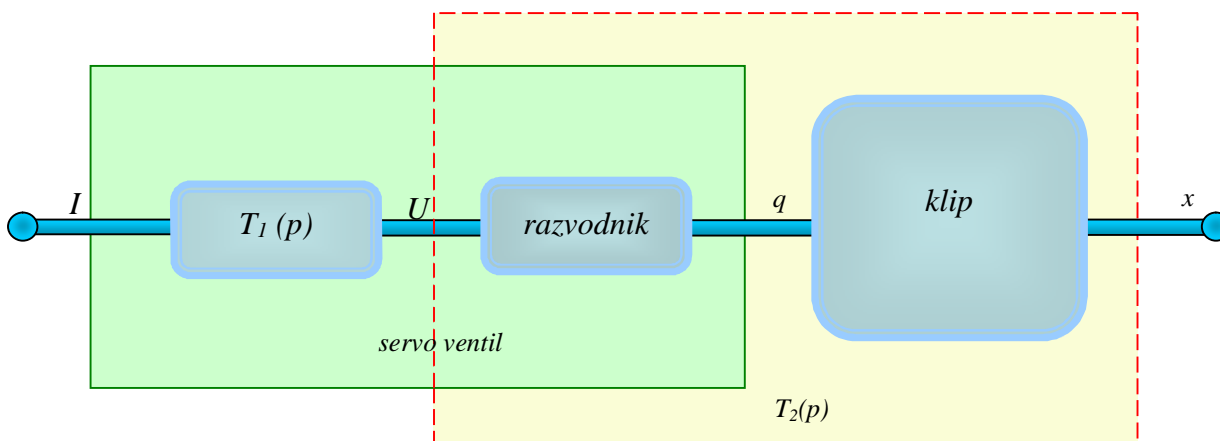
$$T_2(p) = \frac{x(p)}{U(p)} = \frac{K_2}{p(1 + 2x_2 \cdot \frac{p}{w_2} + \frac{p^2}{w_2^2})} \quad (7.3)$$

pri čemu je $w_2 < w_1$.

Ukupna funkcija će biti:

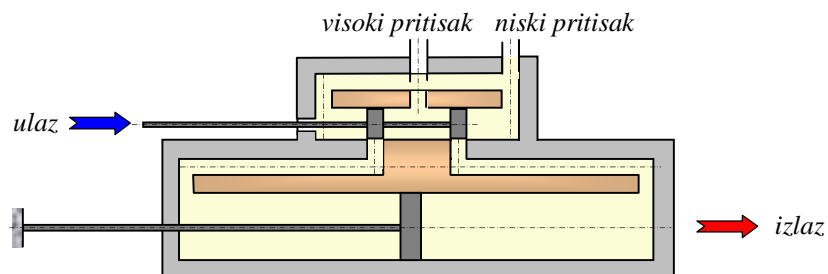
$$T(p) = \frac{x(p)}{I(p)} = T_1(p)T_2(p) \quad (7.4)$$

Ovo je standardni sistem koji funkcionira kao otvoreni ciklus. Na slici 7.15 dat je prikaz ovog sistema.



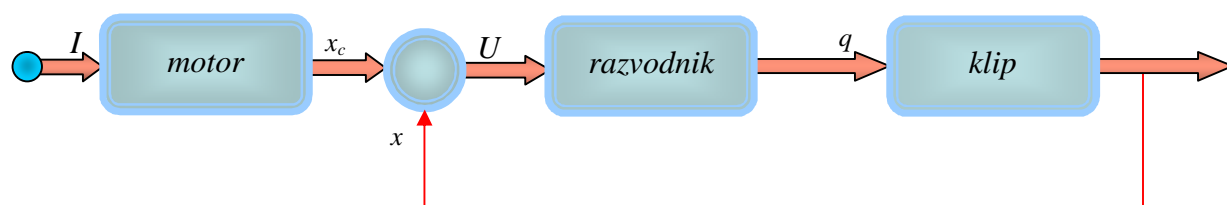
Slika 7.16. Servo regulirani hidraulični sistem

Servo regulacija se može vršiti mehanički, povezivanjem klipa s razvodnikom postavljenim tako da pristupni otvori u komore klipa ovise o položaju kalema proporcionalno položaju opterećenja (slika 7.17).



Slika 7.17. Mehanički servo regulacioni sistem

Dodavanjem električnog motornog pogona stvara se *elektro-hidraulički sistem s pozicionom servo regulacijom* (slika 7.18).



Slika 7.18. Elektro-hidraulički sistem sa servo regulacijom



Slika 7.19. Različite izvedbe hidrauličnih pogona

7.4. Električni pogoni

Električni pogon robota prvi put je uvela švedska firma ASEA 1974. godine. Od tada se elektromotori sve češće koriste kao pogoni robota. Prednost korištenja elektromotora je sveopća prisutnost električne energije, jednostavnost priključaka, upravljanje koje je lagano, tačno i pouzdano. Ovdje nema problema, kao kod hidraulika, sa isticanjem ulja i zagađivanjem, a i šum koji proizvode ovi motori je mali.

Nedostatak ovih motora je nepovoljan odnos snage i težine. Kod elektromotora obavezna je primjena određenih magnetskih materijal koji povećavaju težinu motora. Jedan od problema je pregrijavanje motora koje nastaje uslijed visoke gustoće struje i magnetnog toka. Elektromotori su opasni za rad u eksplozivnim sredinama.

Može se koristiti bilo koji tip motora, ali danas se u robotima koriste slijedeći tipovi motora:

- istosmjerni motori,
- izmjenični motori i
- koračni motori.

7.4.1. Elektromotori istosmjerne struje (DC motori)

Zadnjih godina upravo su istosmjerni motri zauzeli vodeću ulogu u automatizaciji i regulaciji jer imaju pogodne mogućnosti brze i fine regulacije brzine vrtnje.

Istosmjerni motor, ima tri osnovna dijela :

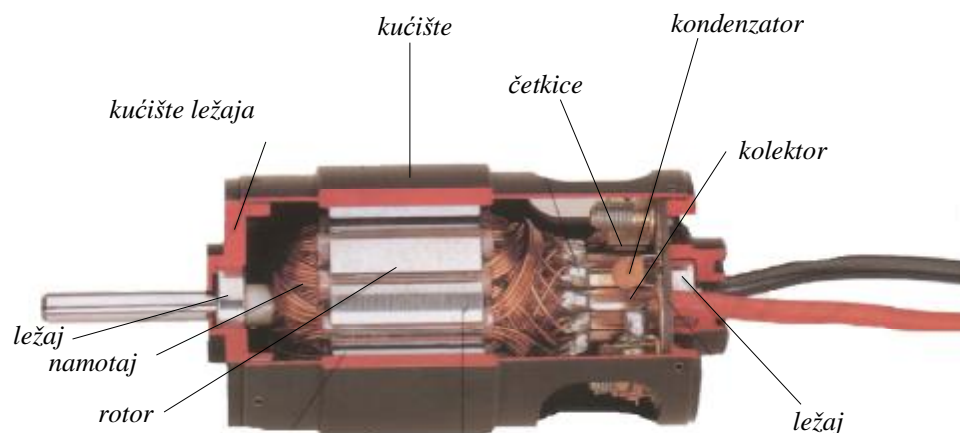
1. stator,
2. rotor,
3. kolektor.

Stator je izveden kao šuplji valjak od lijevanog željeza. Na unutarnjoj strani statorskog jarma nalaze se magnetski polovi s uzbudnim namotom, a sa strane statora nalaze se štitovi s ležajevima za osovinu. Magnetske silnice izlaze iz sjevernog N - pola, prolaze preko rotora, ulaze u južni S - pol i vraćaju se na sjeverni N - pol. Stator je izrađen od punog masivnog komada jer je izvrnut magnetskom polju istosmjerne struje te nemamo gubitke vrtložnih struja i gubitke petlje histereze.

Rotor je izrađen od dinamo limova i učvršćen na osovinu. U utorima nalazi se armaturni namot čiji su krajevi spojeni na lamele kolektora.

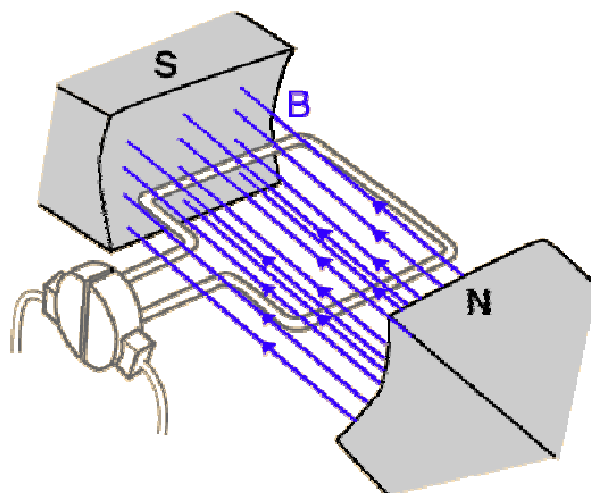
Kolektor je smješten uz sam rotor na osovinu motora, a sastoji se od bakrenih lamela koje su međusobno izolirane i izolirane su i od osovine, a po njima klize četkice.

Četkice su načinjene od mekšeg materijala nego što je kolektor kao što su : tvrdi ugljen, grafitni ugljen, metalni ugljen itd. One moraju čitavom svojom površinom ležati na kolektoru određenim pritiskom i ne smiju biti veće širine od 2-3 lamele.



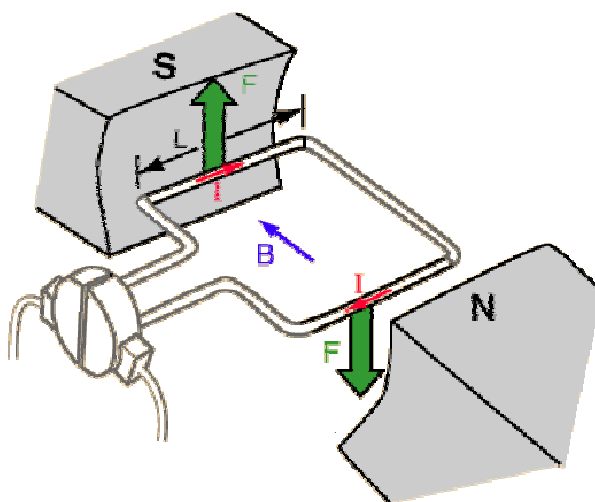
7.20. Prikaz konstrukcije istosmjernog motora

Princip rada jednosmjernog motora može se objasniti rotacijom svitka armature čiji su krajevi spojeni na komutator. Pri tom je stator izveden sa dva pola, koja stvaraju magnetni tok (slika 7.21).

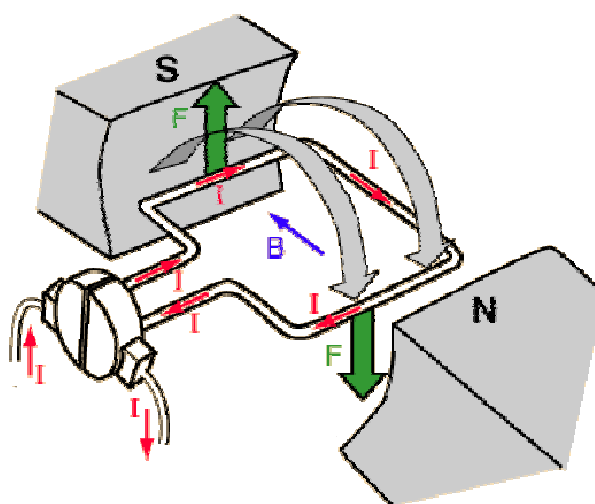


Slika 7.21. Magnetni tok

Proticanjem struje (i) kroz svitak armaturnog namota koji se nalazi u magnetnom polju statora stvara se tzv. Lorenzova sila. Ove sile, na dijametralno suprotnim stranama rotora, čine obrtni moment koji zakreće rotor (slika 7.23).



7.22. Sile na namotu



7.23. Moment

Prolaskom svitka armature kroz neutralnu zonu njegovi provodnici ulaze u magnetno polje suprotnog znaka. Međutim, istovremeno pod četkicama dolazi do izmjene lamela komutatora što uzrokuje promjenu smjera struje kroz svitak armature, tako da se ne mijenja znak obrtnog momenta. Zahvaljujući komutatoru rotor motora se okreće kontinuirano u jednom smjeru.

Kad se kao induktori koriste stalni magneti, idealno je kombinirati lakoću, visok nivo indukcije i stabilnost indukcije s varijacijama temperature. Još uvijek ne postoji idealan magnetski materijal, ali tri tipa stalnih magneta koji su trenutno u upotrebi su:

1. *alniki magneti* (tj. legura koja sadrži različite količine željeza, aluminija, kobalta, nikla i bakra; indukcija je reda 1 Tesla);

2. *feritni magneti* (tj. jedinjenja od željeznog praha i barijum ili stroncijum oksida; indukcija je reda 0,5 Tesla);
3. *rijetki zemaljski i kobaltni magneti* (npr. samarijum-kobalt). Ovi daju najbolje rezultate, ali su skupi.

Motori jednosmjerne struje koji se koriste u robotici obično imaju stalne magnete u induktoru. Postoje tri glavna tipa:

1. *standardni motori* kod kojih je kotva magneta namotana na magnetni materijal (slika 7.18),
2. *zvonasti motori* kod kojih su provodnici kotve magneta pričvršćeni na izolirani cilindar
3. *disk motori* kod kojih su provodnici kotve magneta pričvršćeni ili namotani na izolirani disk.

Kod pločastog (disk) motora struja teče kroz radialno postavljene vodove u tankom disku. Statorsko magnetno polje usmjereno je aksijalno, a formiraju ga permanentni magneti na obje strane rotorskog diska. Mala inercija rotora čini primjenu disk motora korisnim naročito u slučajevima kada je neophodno postići veliko ubrzanje i dobro pozicioniranje.

Karakteristika zvonastih motora je veliki obrtni moment u području malih brzina. Iz tog razloga su pogodni za direktni pogon.

Da bi se izbjegla pojava iskre, koju stvaraju motori sa četkicama, u posljednje vrijeme se koriste bezkolektorski motori (BDC) koji su bez četkica. Kod ovih motora uloge statora i rotora su zamijenjene. Na rotoru su postavljeni stalni magneti, a na statoru namotaji kroz koje protiče struja. Pošto ne postoji komutator, izmjena struje se osigurava posebnim elektronskim sklopom, koji se naziva elektronski komutator.

Bez kolektorski motori u odnosu na klasične motore sa permanentnim magnetima imaju veću pouzdanost, veći stepen korisnog djelovanja, manju težinu i gabarite pri istoj snazi, minimalno održavanje, odlična termička zaštita i veći raspon regulacije broja okretaja.

7.4.2. Elektromotori izmjenične struje (AC motori)

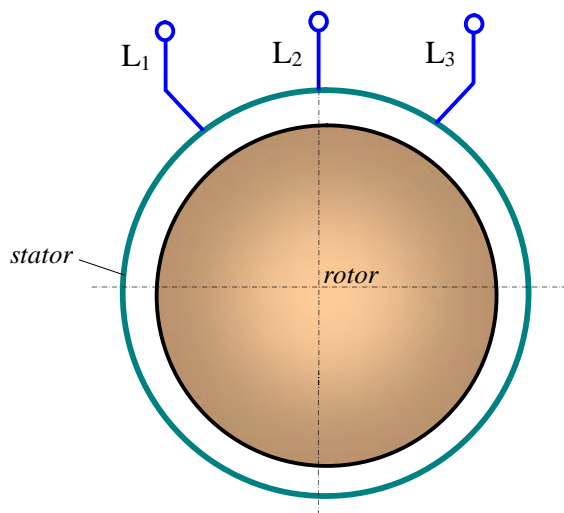
Postoje dvije vrste elektromotora izmjenične struje:

- asinhroni i
- sinkroni.

Ovi motori imaju dobre pogonske karakteristike, ali su se zbog teže regulacije broja obrtaja manje upotrebljavali u robotici. Razvoj elektronike u posljednje vrijeme omogućio je razvoj novih servomotora za izmjeničnu struju koji imaju dobru regulaciju broja obrtaja.

Asinhroni motori se pretežno upotrebljavaju kao motor, a jako rijetko kao generator. Asinhroni motor dobio je svoje ime zbog toga, što brzina rotacionog magnetskog toka i brzina rotora nije ista, kao što je slučaj kod sinkronih motora. Asinhroni motor se izrađuje u serijskoj proizvodnji kao jednofazni ili trofazni, vrlo je jednostavan za proizvodnju i održavanje i relativno niske proizvodne cijene. Rad asinhronog motora temelji se na rotirajućem magnetskom toku.

Konstrukcija asinhronog motora, što se tiče statora, potpuno je jednaka sinhronom stroju, dok je razlika u rotoru.



Slika 7.24. Asinhroni motor

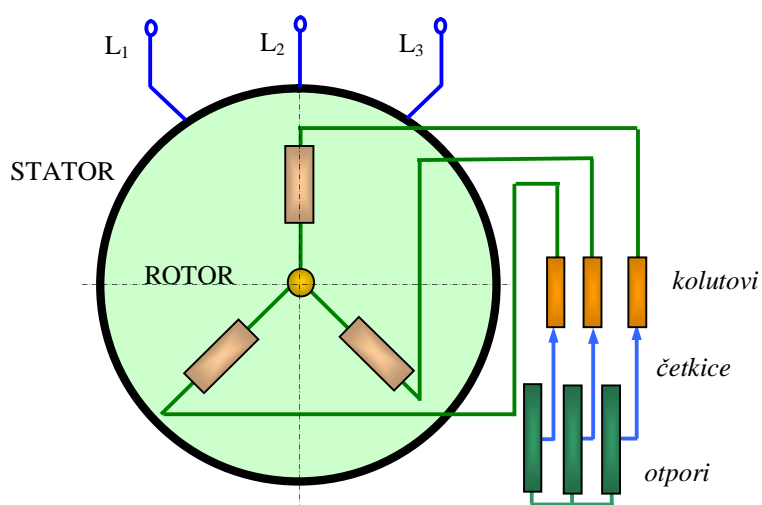
Stator je napravljen u obliku šupljeg valjka od dinamo limova, a uzduž valjka na unutrašnjoj strani nalaze se utori u koje se stavlja trofazni namot. Kućište motora služi kao nosač i zaštita limova i namota, a izrađuje se od lijevanog željeza, čelika silumina itd. U sredini nalaze se ležajni štitovi u obliku poklopca gdje su smješteni ležajevi za osovinu na kojoj se nalazi rotor.

Rotor je sastavljen slično kao i stator, a sastoji se od osovine i rotorskog paketa. Rotorski paket je izveden u obliku valjka od dinamo limova, a u uzdužnom smjeru na vanjskoj strani valjka nalaze se utori za smještaj rotorskog namota. Ako je rotorski namot izveden od štapova bakra, mjedi, bronce ili aluminija, koji su s obje strane prstenima kratko spojeni i liči na kavez, tada je to **kavezni asinhroni motor**. Ili, ako je rotorski namot izveden kao statorski tj. od svitka koji su spojeni na tri koluta po kojima klize četkice koje služe za spajanje na rotorske otpornike, tada je to **klizno kolutni asinhroni motor**.

Priključivanjem statorskog **primarnog** namota na izmjeničnu trofaznu mrežu poteče trofaznim namotom trofazna izmjenična struja, koja stvara rotirajuće magnetsko polje koje rotira brzinom n_s i zatvara se kroz stator i rotorski **sekundarni** namot. Presijecanjem vođica statorskog i rotorskog namota stvara se inducirana EMS **E1** koja drži ravnotežu priključenom naponu mreže, a inducirana EMS **E2** u namotu rotora protjerat će struju **I₂**. Ova struja stvara oko vođica magnetsko polje koja s rotacionim magnetskim poljem daje rezultirajuće polje, a to stvara mehaničke sile koje na osovini stvaraju moment vrtnje.

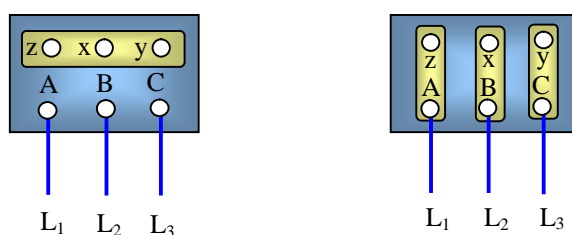
Smjer vrtnje rotacionog magnetskog polja i smjer kretanja rotora su istovjetni. Želimo li promijeniti smjer okretanja rotora, trebamo promijeniti smjer okretanja rotacionog magnetskog toka zamjenom dviju faza.

Brzina rotora n uvijek je manja od sinkrone brzine n_s , kojom se okreće rotaciono magnetsko polje i ovisna je o teretu na motoru. Rotor ne može nikada postići sinkronu brzinu vrtnje, a kad bi rotor postigao sinkronu brzinu, ne bi više bilo razlike brzina između rotacionog magnetskog toka i rotora i ne bi postojalo presijecanje namota rotora magnetskim silnicama. Zbog toga se ne bi u rotorskom namotu inducirala EMS i ne bi bilo djelovanja mehaničkih sila na vodič, te ne može se stvoriti moment za rotaciju. Rotor se uvijek okreće **asinhrono**, po čemu je ovaj motor i dobio svoje ime.



Slika 7.25. Klizno kolutni asinhroni motor

Trofazni se namot spaja u spoj zvijezda ili trokut na priključnoj kutiji kao na slici 7.26.



Slika 7.26. Spoj namota



Slika 7.27. Motor izmjenične struje

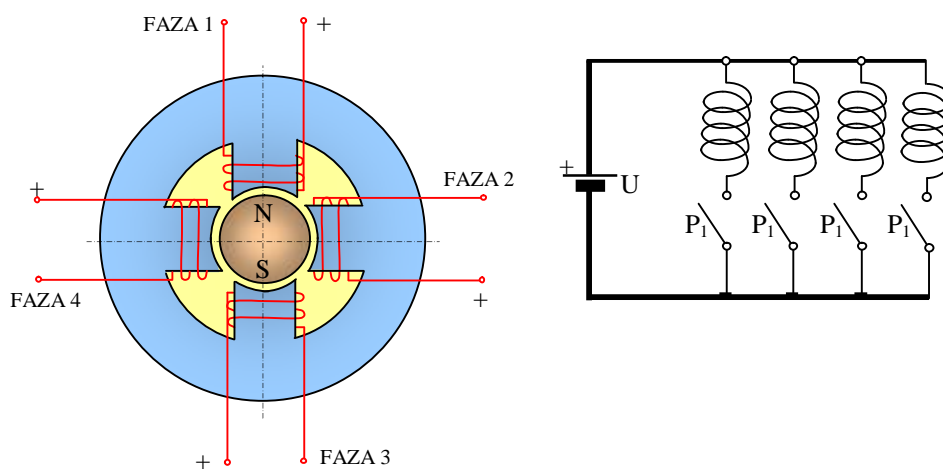
S obzirom da se sinhroni motori više koriste kao generatori nego kao motori nećemo ih posebno opisivati.

7.4.3. Koračni motori

Koračni motor je posebna vrsta motora kojom računar lako upravlja. Veoma je sličan sinhronom motoru.

Može biti sa rotorom:

- od stalnog magneta,
- od mekog gvožđa, ili
- sa namotajima i četkicama.



Slika 7.28. Poprečni presjek četverofaznog koračnog motora sa šemom upravljanja

Prema broju faza može biti: dvofazni, trofazni, četvorofazni, ili petofazni. Broj koraka na punom krugu zavisi od konstrukcije, a kreće se od 10 do 500 koraka. Prave se za snage od nekoliko W do nekoliko kW.

Koračni motori imaju veliku prednost nad drugim vrstama u procesima koji se kontrolišu uz pomoć računara. Posjeduju visoku tačnost pozicioniranja pa su nezamjenjivi u primjenama u kojima je tačnost od velikoj značaja.

Obrtanje koračnog motora sastoji se iz velikog broja koraka. Koliko koraka ima u jednom punom okretu rotora zavisi od konstrukcije motora.

Važne osobine koračnih motora su:

- tačnost pozicioniranja, bez povratne sprege, korištenjem potrebnog broja upravljačkih impulsa,
- veliki obrtni moment pri malim ugaonim brzinama, pa i kod pojedinačnih koraka,
- veliki moment držanja u pobuđenom stanju

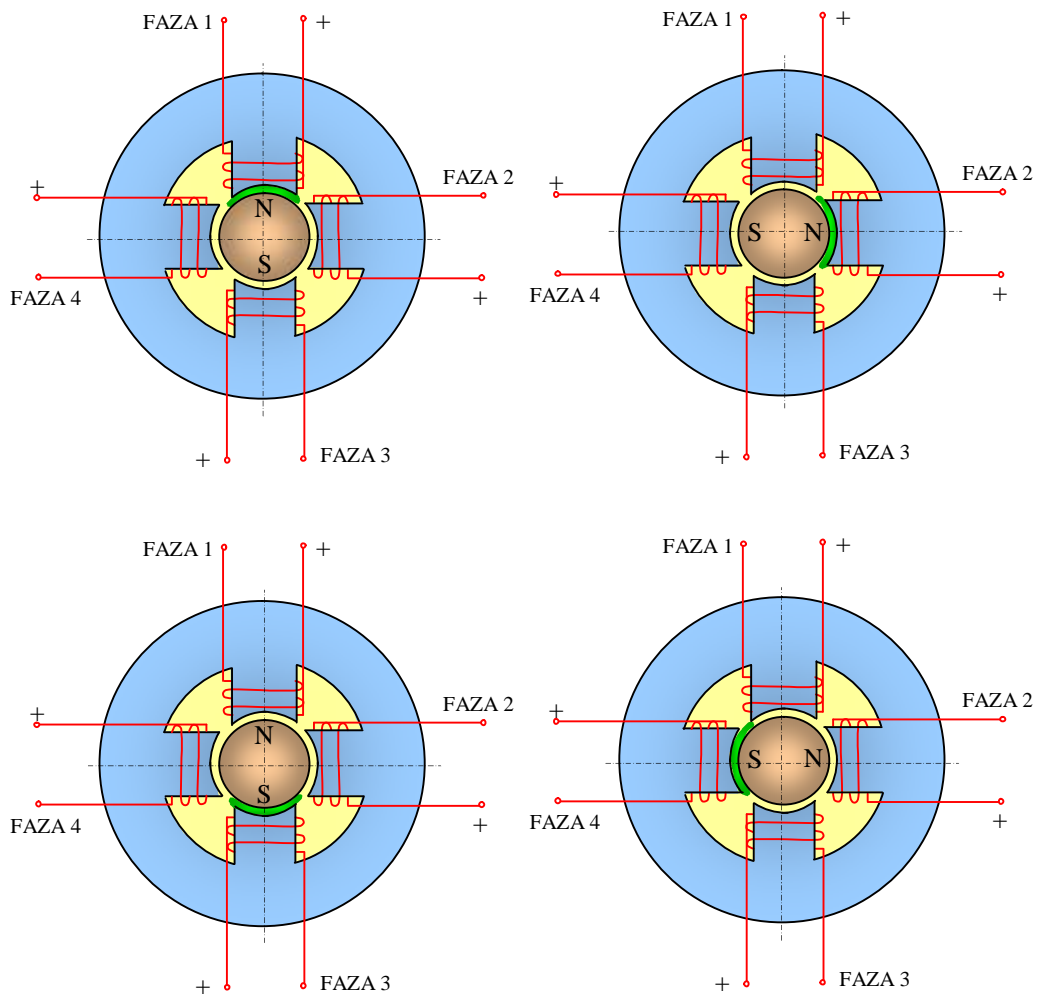
Princip rada koračnog motora bit će objašnjen na primjeru četvorofaznog motora koji je prikazan na slici 7.25.

Rotor motora napravljen je od stalnog magneta cilindričnog oblika, dok stator ima četiri pola oko kojih se nalaze namotaji. Elektromagnetni moment nastaje uzajamnim djelovanjem magnetnih polja statora i rotora. Uključenjem prekidača P_1 , S pol rotora postavlja se ispod namotaja faze 1 (slika 7.26). Ako se isključi P_1 , a uključi P_2 rotor se okrene tako da mu S pol bude ispod namotaja faze 2. Znači, rotor je napravio ugaoni okretaj od $\frac{P}{2}$.

Na isti način sukcesivnim uključivanjem P_1 , P_2 , P_3 i P_4 pravi se pomjeranje od 2π . Suprotnim redoslijedom aktiviranja prekidača mijenja se smjer obrtanja motora. Ovakav način koračanja, kod kojeg je u jednom trenutku aktivan samo jedan prekidač, zove se koračanje punim korakom.

Može se upravljati i polukorakom. U tom slučaju, nakon popude faze 1 i postavljanja S pola rotora ispod aktivne faze, uključi se i P_2 (zajedno sa P_1). Tada rotor napravi ugaono pomjeranje od $\frac{P}{4}$. Da bi se postigao puni krug, prekidače treba aktivirati slijedećim redoslijedom: $P_1 - P_1P_2 - P_2 - P_2P_3 - P_3 - P_3P_4 - P_4 - P_4P_1 - P_1$.

Prednost upravljanja polukorakom je duplo veća rezolucija koračanja, odnosno preciznost pozicioniranja rotora.



Slika 7.29. Koračanje četverofaznog motora sa stalnim magnetom pri pobudi faza redoslijedom 1 – 2 – 3 – 4



Slika 7.30. Koračni motori

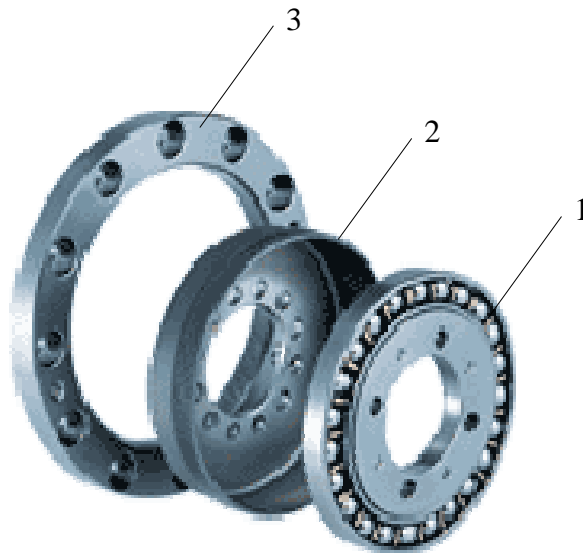
7.5. Harmonični pogon

Harmonični pogon je vrsta zupčastog prenosa koji je u konstrukciji robota uvijek neposredno vezan s elektromotorom. Obzirom da elektromotori imaju veliku ugaonu brzinu, a mehanički su zakreti zgloba u odnosu na njih polagani, potrebno je znatno smanjiti ugaonu brzinu. Ako se primjenjuju klasični zupčasti prenosi, kod kojih je ograničen gornji prenosni omjer, za efikasnu redukciju treba ugraditi nekoliko stepeni zupčastog prenosa.

Stoga su za ove potrebe razvijeni specijalni prenosnici od kojih je najznačajniji harmonični sistem (Kafrissen i Stephons 1984), koji je patentiran od američke firme Harmonic-Drive-Division. Zbog male težine, velikog prenosnog omjera i smanjene labavosti, harmonički pogon istiskuje druge vrste zupčastih prenosa u robotima.

Harmonični pogon se sastoji iz tri dijela (slika 7.31):

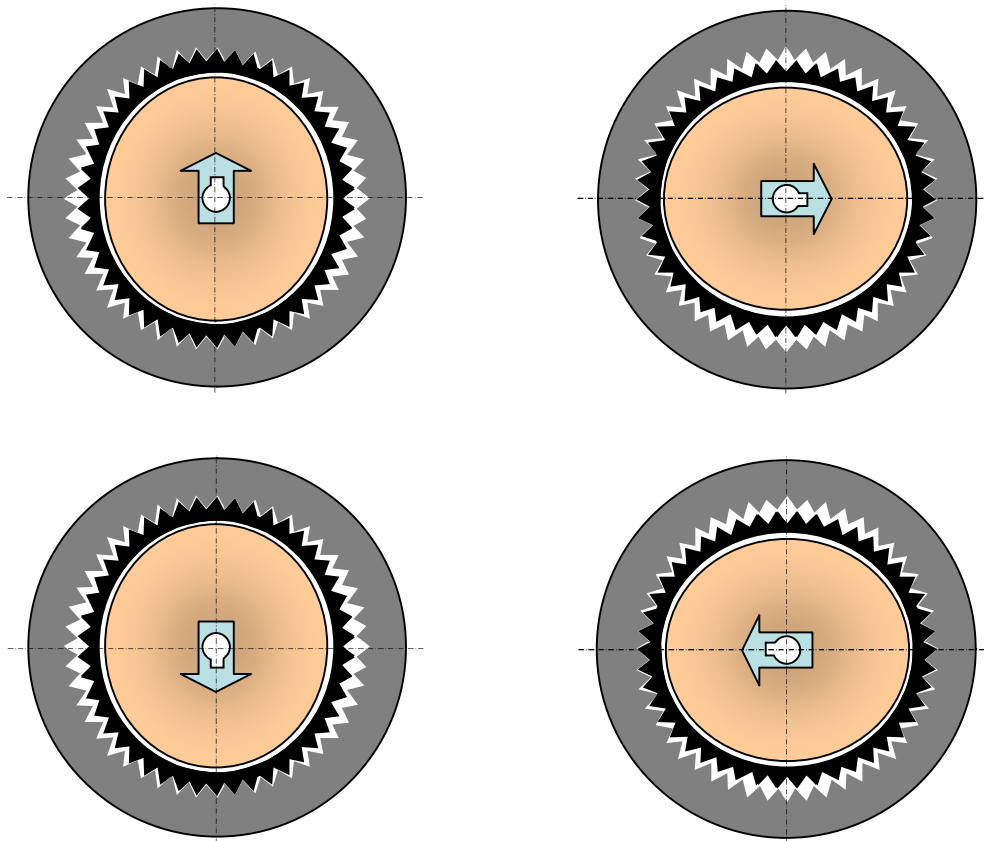
- 1 – generator talasa,
- 2 – elastični prsten i
- 3 – kućište.



Slika 7.31 Elementi harmoničnog pogona

Generator talasa je valjak eliptičnog oblika s kugličnim ležajem na obodu. Na njega je priključeno ulazno vratilo pogonskog motora. Kružno kućište ima s unutrašnje strane nazubljenje s brojem zubaca z_k i pričvršćeno je na kostur robota. Između generatora talasa i kućišta smješten je elastični prsten u obliku lonca izrađenog od tankog elastičnog lima, na koji je pričvršćeno izlazno vratilo. Po vanjskom obodu elastičnog prstena utisnut je broj zubaca z_f , koji je obično za dva zupca manji od broja zubaca kućišta.

Na slijedećoj slici prikazano je okretanje generatora talasa u smjeru okretanja kazaljke na satu sa četiri položaja.



Slika 7.32 Princip rada harmoničnog pogona

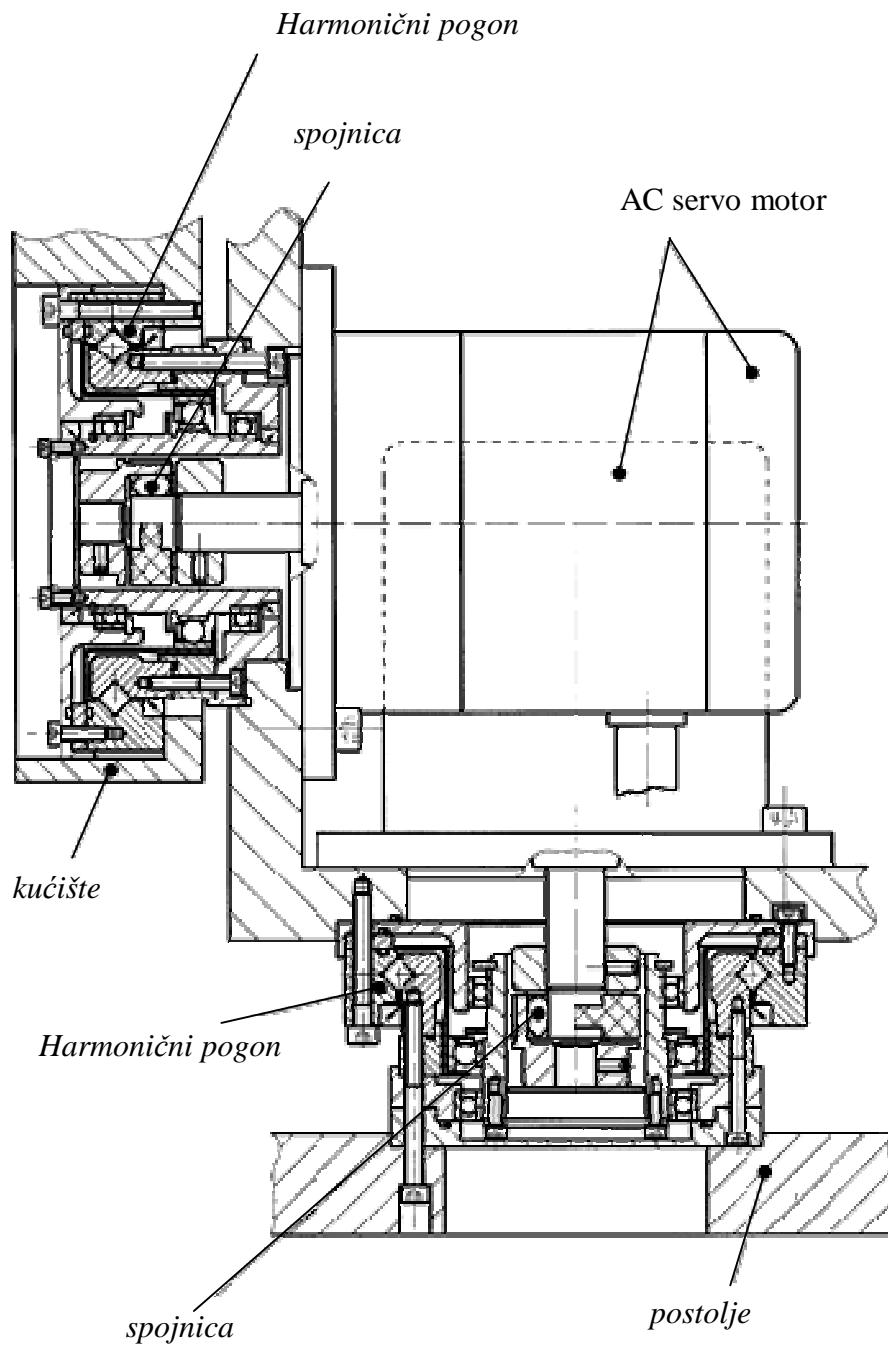
Ako se vratilo okrene za puni krug, utiskujući pri tome zube prstena u međuzublje kućišta, prsten će se pomjeriti za dva zuba unazad.

Prenosni omjer harmoničnog pogona je:

$$i = \frac{z_f}{-z_k + z_f} \quad (7.5)$$



Slika 7.33. Tehničke izvedbe harmoničnog pogona



Slika 7.34. Prikaz primjene harmoničnog pogona

L I T E R A T U R A:

- [1] Coiffet, P.; Chirouze, M.: *An Introduction to Robot Technology*, Hermes Publishing, France, 1983
- [2] Denavit, J.; Hartenberg, R.S.: *Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices*, ASMEJ of Applied Mechanics, 1955.
- [3] Dieter W. Wloka: *Roboter systeme I-Technische Grundlagen*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992.
- [4] Husty, M.; Karger, A.; Sachs, H. & Steinhilper, W.: *Kinematik und Robotik*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.
- [5] Kovačić, Z.; Laci, V.; Bogdan, S.: *Osnove robotike*, FER, Zagreb, 1999.
- [6] Kreuzer, E.J.; Lugtenburg, J.-B.; Meißner, H.-G. & Trckenbrodt, A.: *Industrie roboter-Technik, Berechnung und anwendungsorientierte Auslegung*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994.
- [7] Paul, R. P.: *Robot Manipulators. Mathematics, Programming and Control*, Conference on Robots and Automation. Philadelphia, 1981.
- [8] Ranky, P.G. & Ho, C. Y. : *Robotmodeling*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985.
- [9] Šurina, T. ; Crneković, D.: *Industrijski roboti*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.
- [10] Binner, H.F.; *Prozessorientirte Arbeitsverbereitung*, Carl Hanser Verlag Muenchen Wien, 1999.
- [11] Vukobratović, M.; Stokić, D.; Krišćanski, N.; Krišćanski, M.; Hristić, D.; Karan, B.; Vujić, D.; Đurović, M.: *Uvod u Robotiku*, Institut "Mihajlo Pupin", Beograd, 1986.
- [12] Wolka, D.W.: *Roboter sisteme*, Technische Universität des Saarlandes im Stadtwald, 1992.

Upravljanje robotima



Maida Čohodar, Mašinski fakultet Sarajevo

Da bi robotski sistem, opremljen sensorima i pokretačkim jedinicama, mogao ostvariti željeno kretanje sa krajnjim ciljem izvršenja postavljenog zadatka, potrebno je upravljačko djelovanje. Jedno od temeljnih svojstava robota, s obzirom da savremeno tržište zahtjeva brze odzive proizvođača i raznolikost proizvoda, jeste fleksibilnost, odnosno mogućnost brze prilagodbe novim zadacima. Ovo svojstvo robota je omogućeno, u prvom redu, zahvaljujući upravljanju kompjuterom čiji se program relativno lako mijenja. Jedna od funkcija upravljačkog sistema jeste da omogući uspješnu primjenu robota na različitim zadacima.

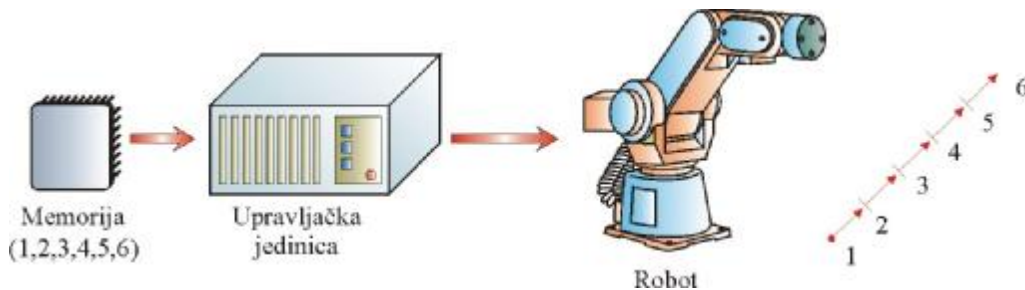
Postoji mnoštvo upravljačkih strategija koje se primjenjuju ovisno o stepenu složenosti zadatka koje robot obavlja. Sa aspekta kompleksnosti upravljačkih tehnika, u robotici se razmatraju dva pristupa upravljanju i to:

- slobodno kretanje robota u operacijskom prostoru i
- kretanje robota u operacijskom prostoru uz postavljena ograničenja.

U prvom slučaju se definira kretanje prihvatnice. Izvođenjem planiranog kretanja robot će izvršiti i planirani zadatak, dok se u drugom slučaju, osim definiranja kretanja koje robot izvodi, postavljaju zahtjevi o iznosu kontaktne sile kojom prihvatnica djeluje na okolinu. Drugim riječima, nastoji se upravljati interakcijom između robota i okoline (engl. hibrid control). Jasno je da je upravljanje u drugom slučaju mnogo kompleksnije i prelazi okvire ove knjige. Čitalac se o hibridnom upravljanju može upoznati u [1,7,8,18].

Ulogu upravljačke jedinice robotskog sistema vrši kompjuter. Kompjuter je "mozak" robotskog sistema. On omogućuje da robot – spoj mehaničkog, energetskog i senzorskog sistema svrsishodno djeluje. Zadatak upravljačke jedinice, u najjednostavnijem slučaju kada je potrebno pozicionirati prihvatnicu u određenu tačku manipulacijskog prostora, sastoji se u izračunavanju komponenti vektora unutarnjih (upravljanih) koordinata, odnosno rješavanju inverzne kinematike i generiranju upravljačkih signala koji djeluju na aktuatorne zglobova radi izvođenja željenog kretanja. Kretanjima u pojedinim zglobovima za iznose izračunatih koordinata prihvatnica će dosegnuti željenu tačku manipulacijskog prostora.

Problem upravljanja znatno je složeniji ukoliko robot treba da slijedi planiranu trajektoriju. Trajektorija može biti definirana i u prostoru unutarnjih i u prostoru vanjskih koordinata, pri čemu je definiranje u prostoru vanjskih koordinata znatno složenije, jer zahtijeva izračunavanje inverzne kinematike.



Slika 8.1. *Off – line upravljanje robotom*

Ukoliko se sva potrebna izračunavanja obave prije nego li robot pristupi kretanju, robot radi u *off-lineu*. U upravljačkoj jedinici robotskog sistema pohranjuje se trajektorija prihvatnice definirana nizom tačaka koje se na njoj nalaze, odnosno iznosima upravljanih koordinata za određene tačke trajektorije. Pri izvođenju robotskog programa i kretanju robota nisu moguća nikakva izračunavanja. Upravo zbog toga, roboti sa ovakvim načinom rada ne mogu reagovati na promjenu u okolini – za takvo što potrebni su senzori.

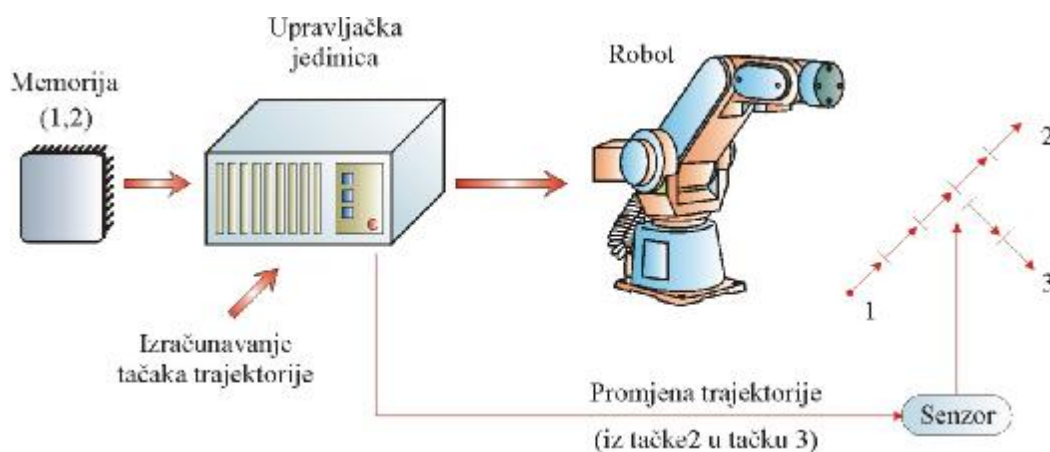
Rad u *off-lineu* ne zahtjeva složenu sensoriku kod robota. Roboti su sa "ograničenom inteligencijom". Kako su sva izračunavanja obavljena i unijeta u upravljački algoritam, robot ne može djelovati ni na kakvu promjenu u okolini, već će nastaviti sa realizacijom unesenog upravljačkog algoritma kao da se promjena nije ni desila. Od robota se ne zahtijeva bilo kakva komunikacija sa okolinom. *Off-line* programsko upravljanje ne podrazumijeva brze kompleksne računare, pa su roboti sa ovakvim načinom rada manje skupi od onih sa radom u realnom vremenu. Na sl. 8.1. prikazan je *off-line* način rada robota kod kojeg se prihvatnica kreće po pravoj liniji, definiranoj tačkama 1-6. Trajektorija je unaprijed određena tačkama od 1 do 6, prihvatnica se kreće od tačke 1 do 2, zatim od 2 do 3, itd., pa sve do tačke 6, formirajući željenu trajektoriju.

Međutim, ukoliko se sva potrebna izračunavanja obavljaju u toku rada robota, za robot se kaže da radi u realnom vremenu ili u *on-lineu*. Tokom djelovanja robota, njegova

upravljačka jedinica mora, za nastavak kretanja, izračunavati upravljane koordinate slijedeće tačke duž željene trajektorije. Informacije dobijene od senzora o promjenama nastalim u okruženju moraju se obraditi tokom kretanja robota u realnom vremenu.

Na sl. 8.2. pokazan je *on-line* način rada robota, gdje je kretanje u predviđenu tačku 2, zamijenjeno kretanjem u tačku 3. Upravljačka jedinica čita iz memorije koordinate tačaka 1 i 2, zatim izračunava koordinate potrebnih međutačaka koje formiraju pravolinijsku trajektoriju. Ukoliko, međutim, upravljačka jedinica primi sa senzora instrukciju o promjeni ciljne tačke 2 u tačku 3, ona može izvršiti izračunavanje koordinata novih međutačaka, kako bi prihvatnica nastavila kretanje po pravolinijskoj trajektoriji u novu ciljnu tačku 3.

Rad robota u *on-lineu*, sa tehničke strane je mnogo zahtjevniji, podrazumijeva vrlo brzu, sofisticiranu upravljačku jedinicu, jer pretpostavlja da se sva izračunavanja obavljaju tokom rada robota, tako da robot u svakom trenutku raspolaže sa potrebnim informacijama za izvođenje planiranog zadatka, npr. raspolaže sa iznosima upravljanih koordinata, kako bi se prihvatnica locirala u željenu tačku manipulacijskog prostora.



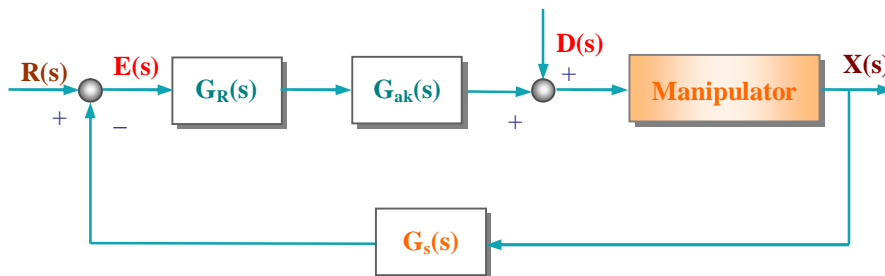
Slika 8.2. On – line upravljanje robotom

Ukoliko ma koja informacija nije na raspolaganju robotu u pravom trenutku, funkcioniranje robota biće dovedeno u pitanje, što može izazvati ozbiljne posljedice. Međutim i pored potrebe za složenijom upravljačkom jedinicom i složenijim upravljačkim algoritmom rad robota u realnom vremenu ima prednosti koje se posebno ogledaju u znatno većoj fleksibilnosti, odnosno sposobnosti robota da mijenja trajektoriju tokom izvođenja radnog zadatka. Ovo posebno dolazi do izražaja pri radu u neorganiziranim sredinama, kada robot na osnovu informacija prikupljenih sa senzora ima mogućnost donošenja logičkih odluka.

8.1. Osnovni koncepti upravljanja

Jedan ili više međusobno spojenih uređaja koji zajedno funkcioniraju omogućujući pri tome da se izlaz sistema održi konstantnim ili mijenja po utvrđenoj zakonitosti naziva se upravljačkim sistemom. Upravljački sistemi su vrlo važan dio robota.

Na sl. 8.3. data je opća blok shema upravljačkog sistema. Prenosnim su funkcijama prikazani matematički modeli svakog bloka, pa su $G_R(s)$, $G_{ak}(s)$, $G_s(s)$ prenosne funkcije regulatora, aktuatora i senzora, $R(s)$ je referentni ulaz, $X(s)$ upravljani izlaz, $U(s)$ upravljački ulaz, $E(s)$ je greška, a $D(s)$ je poremećaj.



Slika 8.3. Opšta blok shema upravljačkog sistema robota

Za nesinusoidalni* ulaz i stabilan sistem greška ustaljenog stanja, primjenom teoreme konačne vrijednosti, data je sa:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s). \quad (8.1)$$

Greška regulacijskog sistema se definira razlikom između referentnog ulaznog i ostvarenog izlaznog signala, koji se negativnom povratnom spregom vraća na ulaz:

$$E(s) = R(s) - X(s). \quad (8.2)$$

Za linearne sisteme, kod kojih kao ulazni signal osim referentnog djeluje i poremećaj, greška je data sa:

$$E(s) = R(s) - \left[\frac{X(s)}{R(s)} \Big|_{D(s)=0} R(s) + \frac{X(s)}{D(s)} \Big|_{R(s)=0} D(s) \right]. \quad (8.3)$$

Ukoliko je poremećajni signal jednak nuli, greška će biti data sa:

$$E_1(s) = R(s) - X(s) = \left[1 - \frac{X(s)}{R(s)} \Big|_{D(s)=0} \right] \cdot R(s), \quad (8.4)$$

a pri nultom referentnom signalu sa:

* Za sinusoidalni ulaz ustaljeno stanje sistema je opisano vremenskom funkcijom, pa se ne može primijeniti teorem konačne vrijednosti.

$$E_2(s) = R(s) - X(s) = - \left. \frac{X(s)}{D(s)} \right|_{R(s)=0} \cdot D(s). \quad (8.5)$$

Koristeći se načelom superpozicije, kada kao ulazi na sistem djeluju i referentni i poremećajni signali, ukupna greška biće, na temelju jednažbi (8.4) i (8.5), data sa:

$$E(s) = E_1(s) + E_2(s) = \left[1 - \left. \frac{X(s)}{R(s)} \right|_{D(s)=0} \right] \cdot R(s) - \left. \frac{X(s)}{D(s)} \right|_{R(s)=0} \cdot D(s), \quad (8.6)$$

pa se dobija isti izraz za $E(s)$ kao što je dato jednažbom (8.3).

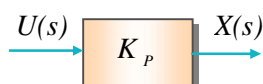
8.1.1. Tipovi regulatora

Najčešće upotrebljavani tipovi regulatora u upravljačkim strukturama se, prema načinu djelovanja, dijele na:

- proporcionalne (P),
- derivacijske (D),
- integralne (I),
- proporcionalno – derivacijske (PD),
- proporcionalno – integralne (PI) i
- proporcionalno – integralno – derivacijske (PID) regulatore.

Kao što se iz naziva vidi, kod proporcionalnih regulatora izlazna funkcija je proporcionalna ulaznoj:

$$x(t) = K_p \cdot u(t).$$



Slika 8.4. Proporcionalni regulator

Izvođenjem Laplaceovih transformacija (uz nulte početne uvjete) gornja jednažba postaje:

$$X(s) = K_p \cdot U(s),$$

pa je prenosna funkcija regulatora (sl. 8.4.):

$$G_R = \frac{X(s)}{U(s)} = K_p = K, \quad (8.7)$$

gdje je $K_p=K$ konstanta proporcionalnosti.

Proporcionalnim regulatorom pojačava se signal u upravljačkoj strukturi, što može doprinijeti smanjivanju greške ustaljenog stanja. S druge strane, međutim, povećavanje faktora pojačanja K može dovesti do pojave nestabilnosti sistema. Ako je sistem nestabilan potrebno je odabrati drugi tip regulatora.

Derivacijskim se regulatorom obezbeđuje stabilnost, jer uvodi prigušenje u sistem. Iz naziva regulatora slijedi da je izlazna funkcija jednaka derivaciji ulazne:

$$x(t) = K_D \cdot \dot{u}(t),$$

odakle, primjenjujući Laplaceovu transformaciju (za nulte početne uvjete) slijedi prenosna funkcija sistema, prikazanog na sl. 8.5:

$$G_R = K_D \cdot s. \quad (8.8)$$



Slika 8.5. Derivacijski regulator

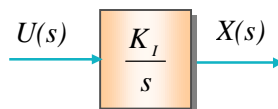
Kod integralnog regulatora izlazna je funkcija proporcionalna integralu ulazne, odnosno:

$$x(t) = K_I \cdot \int_0^t u(t) dt,$$

pa je prenosna funkcija sistema, prikazanog na sl. 8.6. data sa:

$$G(s) = \frac{K_I}{s}. \quad (8.9)$$

Integralnim se djelovanjem smanjuje ustaljena greška, ali doprinosi nestabilnosti sistema.



Slika 8.6. Integralni regulator

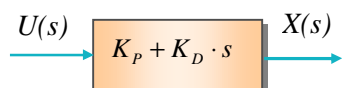
PD regulatori nastali su spajanjem proporcionalnog i derivacijskog djelovanja. Odnos između izlazne i ulazne funkcije sistema dat je sa:

$$x(t) = K_p \cdot u(t) + K_D \cdot \dot{u}(t),$$

Prenosna funkcija sistema (sl. 8.7.) je:

$$G_R = K_p + K_D \cdot s . \quad (8.10)$$

Uloga proporcionalnog djelovanja kod PD regulatora je da smanji ustaljenu grešku, a uvođenjem prigušenja derivacijskim djelovanjem nastoji se postići stabilnost sistema.



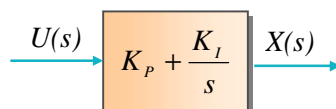
Slika 8.7. PD regulator

Kombiniranjem proporcionalnog i integralnog djelovanja dobija se PI regulator, (sl. 8.8.), kod kojeg je veza između izlazne i ulazne funkcije definirana sa:

$$x(t) = K_p \cdot u(t) + K_I \cdot \int_0^t u(t) dt ,$$

a prenosna funkcija regulatora je:

$$G_R(s) = K_p + \frac{K_I}{s} = K \cdot \frac{1 + s \cdot T}{s} \quad (8.11)$$



Slika 8.8. PI regulator

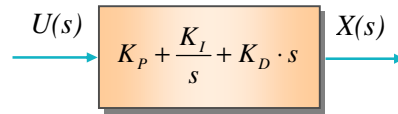
Kod PID regulatora, dobijenog kombiniranjem proporcionalnog, integralnog i derivacijskog djelovanja (sl. 8.9.), veza između izlazne i ulazne funkcije data je sa:

$$x(t) = K_p \cdot u(t) + K_I \cdot \int_0^t u(t) dt + K_D \cdot \dot{u}(t) ,$$

pa je njegova prenosna funkcija data sa:

$$G_R(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s . \quad (8.12)$$

Postupak projektovanja upravljačkih struktura podrazumijeva odabir odgovarajućeg regulatora, kao i njegovih parametara. Za odabir suboptimalnih parametara kod PID regulatora najčešće se koristi Ziegler-Nicholsova metoda.

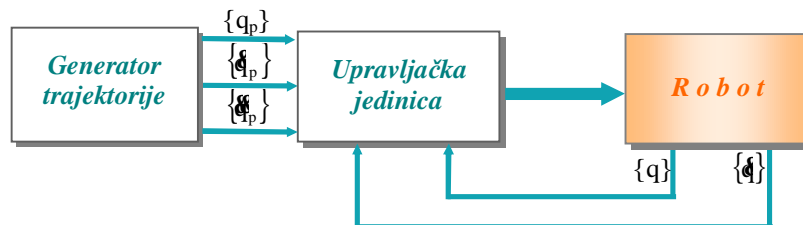


Slika 8.9. PID regulator

8.1.2. Linearni sistemi drugog reda

Primjena linearnih upravljačkih tehnika moguća je samo kada je sistem matematički modeliran linearnim diferencijalnim jednadžbama. U slučaju upravljanja robotom, ovakve metode mogu biti samo aproksimativne, jer je robot opisan izrazito nelinearnim diferencijalnim jednadžbama i mogu dati osnovu i uvod u nelinearnu analizu. Osnovni razlozi zbog kojih se nelinearni model nastoji linearizirati je što su linearne upravljačke strukture mnogo jednostavnije od nelinearnih (linearni matematički model je znatno jednostavniji od nelinearnog) i što danas postoji mnoštvo razvijenih metoda analize linearnih sistema (Bodeov, Nyqusteov, Routh-Hurwitzov kriterij stabiliteta, metoda lokusa korijena, Nicholsovi dijagrami i sl.).

Na sl. 8.10. prikazana je opšta blok shema upravljanja robotom kod kojeg su zatvorene petlje po poziciji i brzini upravljanih koordinata $\{q\}$ i $\{\dot{q}\}$ (za robot sa n stepeni slobode ovo su n – dimenzioni vektori). Izmjerene vrijednosti od $\{q\}$ i $\{\dot{q}\}$ se upoređuju sa potrebnim, planiranim vrijednostima $\{q_p\}$ i $\{\dot{q}_p\}$. Razlike između planiranih i ostvarenih vrijednosti nazivaju se greškama ili regulacijskim odstupanjima. Pri projektovanju zatvorenih upravljačkih struktura nužno mora biti ostvarena stabilnost sistema. U navedenom slučaju uvjet stabiliteta može biti prikazan kroz zahtjev da greška ostaje mala pri ostvarivanju različitih trajektorija i kada na sistem djeluju različiti poremećaji. Nepravilno projektovanje upravljačkih struktura može rezultirati nestabilnošću sistema što dovodi do prekomjernog rasta greške umjesto njenog umanjivanja.



Slika 8.10. Blok shema upravljanja robotom

Linearni, vremenski invarijantni dinamički sistemi sa dva neovisna spremnika energije, opisani su linearnim diferencijalnim jednadžbama drugog reda sa konstantnim koeficijentima čija je standardna forma data sa:

$$\ddot{x} + 2z\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (8.13)$$

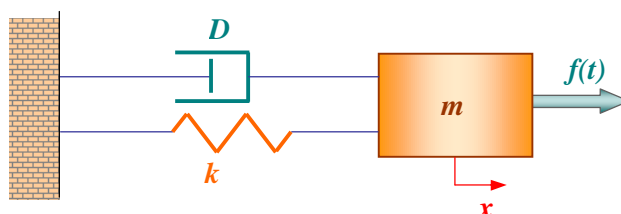
gdje je z faktor prigušenja, a ω_n je neprigušena prirodna frekvencija. Prigušena prirodna frekvencija data je sa:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - z^2}.$$

Primjer sistema drugog reda dat je na sl. 8.11. Uz pretpostavke da je masa tijela m skoncentrisana u jednoj tački, da je opruga konstantne krutosti, te da je sila prigušenja proporcionalna brzini uz konstantan koeficijent prigušenja, sistem “masa – prigušnica – opruga” opisan je jednačbom:

$$m\ddot{x} + D\dot{x} + kx = f(t). \quad (8.14)$$

Upoređujući jednačbe (8.13) i (8.14) dobijaju se izrazi za faktor prigušenja i neprigušenu prirodnu frekvenciju:



Slika 8.11. MDK sistem drugog reda

$$z = \frac{D}{2\sqrt{mk}}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (8.15)$$

Ponašanje sistema u slučaju da je $f(t) = 0$ naziva se slobodnim odzivom. To je rješenje homogenog dijela diferencijalne jednačbe (8.14), odnosno dio ukupnog rješenja koji teži nuli kada vrijeme t teži u beskonačnost. Ponekad se još naziva prelaznim rješenjem, što je tačno ako je sistem stabilan, a ovisi isključivo o parametrima sistema. Za njegovo iznalaženje potrebno je naći rješenje karakteristične jednačbe sistema:

$$mI^2 + DI + k = 0 \quad (8.16)$$

Korijeni karakteristične jednačbe su:

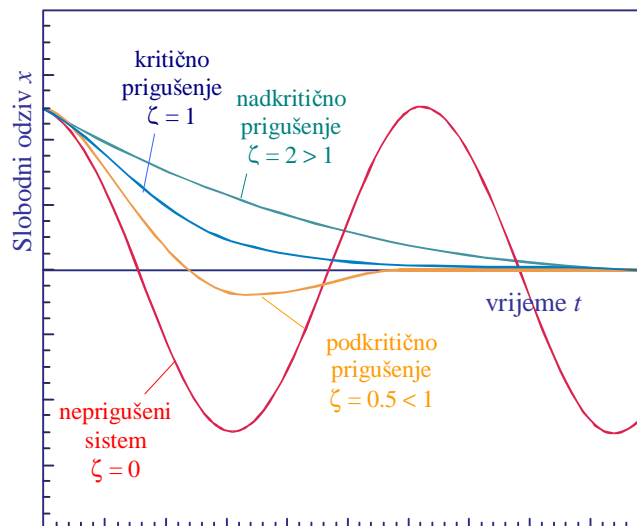
$$I_{1,2} = -\frac{D}{2m} \pm \frac{\sqrt{D^2 - 4mk}}{2m} = -z\omega_n \pm \omega_n \sqrt{z^2 - 1} \quad (8.17)$$

Posebno rješenje nehomogenog dijela diferencijalne jednačbe (8.14) je partikularni integral, koji identički zadovoljava jednačbu (8.14). To je dio ukupnog rješenja koji ne teži nuli kada vrijeme t teži u beskonačnost. Ovisi i o pobudnoj funkciji i o parametrima sistema. Opisuje ustaljeno ili stacionarno stanje, pa se ponekad naziva i

stacionarnim rješenjem, što je tačno ako na stabilan sistem djeluje konstantna ili harmonična pobudna funkcija.

Za sistem se kaže da je *nadkritično prigušen* (engl. overdamping) ako je $\zeta > 1$, *kritično prigušen* (engl. critically damping) za $\zeta = 1$, *podkritično prigušen* (engl. underdamping) za $0 < \zeta < 1$ i *nepriugušen* (engl. undamping) za $\zeta = 0$, što je prikazano na sl. 8.12.

Kod servosistema koji upravljaju zglobov robota dozvoljeno je kritično ili nadkritično prigušenje, dok podkritično prigušenje ne smije biti ostvareno. U protivnom, javio bi se “preskok” preko planirane pozicije zgloba, što može dovesti do sudaranja robota sa preprekama koje se nalaze u njegovoj blizini, a dovodi i do oscilovanja sistema. Upravo zbog toga, pojačanje servosistema treba odabrati tako da sistem bude nadkritično ($\zeta > 1$) ili kritično ($\zeta = 1$) prigušen. Kako je kod kritičnog prigušenja odziv servosistema znatno brži nego kod nadkritično prigušenih sistema to pri projektovanju upravljačkih struktura parametre regulatora treba odabrati tako da se postigne kritično prigušenje servosistema.



Slika 8.12. Slobodni odziv sistema drugog reda

8.1.3. *Nelinearni sistemi*

Korištenje linearnih upravljačkih tehnika kod robota moguće je uz slijedeće pretpostavke:

1. interakcije među zglobovima se zanemaruju, odnosno svaki zglob se promatra neovisno o drugom i
2. inercija svakog zgloba osnaženog motorom smatra se konstantnom.

Uz navedene pretpostavke svaki zglob se promatra neovisno o drugom, a inercija se smatra konstantnom. Međutim, implementacijom takvih sistema, s obzirom na učinjene pretpostavke, kod robota se može pojaviti nedovoljno prigušeno kretanje, kao i brojne druge poteškoće. To nameće potrebu prikazivanja robota nelinearnim modelom, kakav on i jeste, te primjene mnogo kompleksnijih upravljačkih algoritama.

Kod rješavanja nekih nelinearnih modela koristi se pristup linearizacije nelinearnog modela u okolini radne tačke. Međutim, ovakav pristup u robotici je neprihvatljiv jer se manipulator kreće u manipulacijskom prostoru, pa linearizirani model nije prihvatljiv u odvojenim tačkama manipulacijskog prostora. Drugi pristup podrazumijeva pomjeranje radne tačke u kojoj je izvršena linearizacija, što rezultira linearnim, ali vremenski varijabilnim modelom. Iako ova kvazi-linearizacija sistema daje korisne informacije u nekim analizama, pri sintezi upravljačkih zakona drugim pristupima se daje prednost.

8.1.4. *Lyapunova metoda ispitivanja stabilnosti nelinearnih sistema*

Direktna ili druga Lyapunova metoda omogućuje analizu stabilnosti sistema prikazanog diferencijalnom jednačbom i bez njenog rješavanja. Metoda je primjenjiva kod ispitivanja i linearnih i nelinearnih sistema. Lyapunova metoda se koristi kod ispitivanja stabilnosti sistema, ali ne daje informaciju o prelaznom stanju niti o performansama sistema. Ova, energetska temeljena metoda ne omogućuje donošenje zaključka da li je sistem nedovoljno ili prekomjerno prigušen ili kakva su svojstva sistema u pogledu otklanjanja poremećaja.

Lyapunova metoda je jedna od nekoliko tehnika koje mogu biti direktno primjenjene na linearne sisteme za istraživanje njihove stabilnosti. Otuda i naziv direktna metoda.

Neka je sistem opisan diferencijalnom jednačbom:

$$\{\dot{X}\} = f(\{X\}) \quad (8.18)$$

gdje je $\{X\}$ ($n \times 1$) dimenzioni vektor, a izraz na desnoj strani jednačbe $f(\{X\})$ može biti i nelinearna funkcija. Diferencijalne jednačbe višeg reda mogu biti prikazane setom diferencijalnih jednačbi prvog reda (8.18).

Metoda je zapravo poopštenje energetskog pristupa klasične mehanike i polazi od pretpostavke da se ukupna energija mehaničkog, nekonzervativnog sistema (suma kinetičke i potencijalne energije) smanjuje s vremenom i teži ka nuli. Radi ispitivanja

stabilnosti Lyapunov je uveo energetska funkciju V koja je analogna, ali ne i jednaka pohranjenoj energiji u sistemu.

Funkcija V je pozitivno definitna, odnosno negativno definitna u nekom području oko ishodišta ako je u svim tačkama tog područja kontinuirana i veća od nule, odnosno manja od nule, a ima vrijednost nula samo u ishodištu.

Funkcija V je pozitivno poludefinitna, odnosno negativno poludefinitna u nekom području oko ishodišta ako je u svim tačkama tog područja kontinuirana i veća ili jednaka nuli, odnosno manja ili jednaka nuli, a ima vrijednost nula samo u ishodištu.

Funkcija V je nedefinitna ako u području oko ishodišta ima i negativan i pozitivan predznak.

Stabilnost sistema (8.18) određuje se sa tri Lyapunove teoreme:

1. ako postoji energetska funkcija V koja je pozitivno definitna, a da je njena prva derivacija \dot{V} negativno semidefinitna za sistem se kaže da je stabilan;
2. ako postoji energetska funkcija V koja je pozitivno definitna, a da je njena prva derivacija \dot{V} negativno definitna za sistem se kaže da je asimptotski stabilan;
3. ako energetska funkcija V i njena prva derivacija \dot{V} imaju isti predznak sistem je nestabilan.

Za nedefinitnu funkciju \dot{V} , ne može se donijeti zaključak o stabilnosti sistema, pa se mora pokušati sa novom Lyapunovom funkcijom. Upravo je jedan od nedostataka ove metode poteškoća u pronalaženju Lyapunove funkcije.

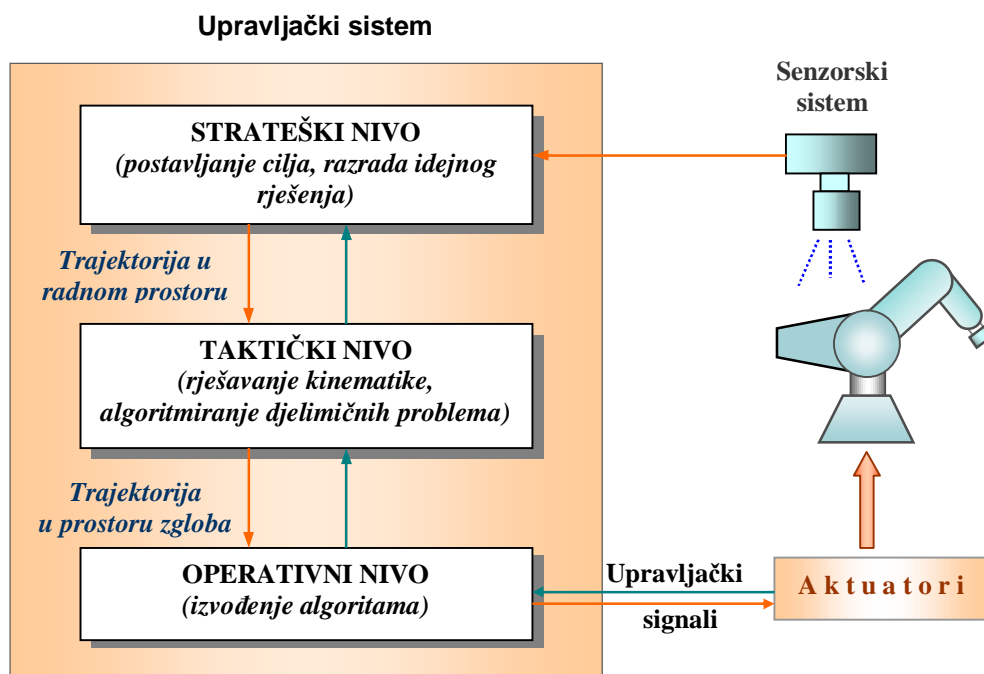
Za sistem opisan sa (8.18) kaže se autonoman jer funkcija f nije eksplicitna funkcija vremena. S druge strane, ako je vrijeme argument nelinearne funkcije sistem je neautonoman. Lyapunova metoda primjeniva je i na autonomne i neautonomne sisteme.

8.2. Hijerarhijsko upravljanje robotima

Zadaci koje obavlja robot vrlo su složeni. Korisniku je nekada potrebno mnogo vremena za definiranje trajektorije prihvatnice, vodeći računa da u radu robota ne dođe do sudaranja sa predmetima iz okoline, posebno kada je robot sastavni dio nekog sistema npr. fleksibilnih proizvodnih ćelija gdje sa numerički upravljanim mašinama treba izvršiti planirani zadatak. U takvim složenim sistemima koriste se roboti sa automatskim planiranjem trajektorije, gdje čovjek trajektoriju definira globalno, a upravljačka jedinica automatski planira ostale pokrete robota. Ovo je vrlo važno sa aspekta uključivanja robota u fleksibilne tehnološke sisteme, što je jedan od primarnih zahtjeva u robotici.

Kako bi se pojednostavila realizacija upravljačkog sistema, nužno je hijerarhijsko upravljanje robotom, shematski prikazano na sl. 8.13. Upravljanje se najčešće realizira preko tri nivoa i to:

- strateškog,
- taktičkog i
- operativnog nivoa.



Slika 8.13. Hijerarhijski nivoi upravljanja robotom

Navedeni se nivoi razlikuju i u hardverskom i softverskom smislu. Svaki viši nivo pretpostavlja šire aspekte ponašanja robotskog sistema u odnosu na niži nivo i kontrolira funkcionalne parametre sistema koji se sporije mijenjaju.

Na najvišem, a ujedno i najkompleksnijem nivou upravljanja robotom – strateškom nivou planira se trajektorija robota i svaki njegov pokret. Drugim riječima, postavlja se cilj, projektuje idejno rješenje i vrši njegovo razrađivanje. Na ovom nivou ostvaruje se komunikacija između operatera i robota preko utvrđenog protokola definiranog programskim jezikom. Operater utvrđuje zadatke koje robot treba ostvariti, dok strateški model definira potrebnu trajektoriju prihvatnice za izvođenje datog zadatka.

Funkcija strateškog modela ovisi o stepenu uređenosti okoline u kojoj djeluje robot. Kod visoko organiziranih sredina funkcija strateškog modela je da planira trajektoriju prihvatnice bez dodatnih informacija sa senzora. Međutim, kod neorganiziranih okolina, odnosno, ukoliko raspored mašina i predmeta nije unaprijed definiran ili se mijenja, strateški model planira trajektoriju u realnom vremenu. Robotski sistem mora biti opremljen sensorima, tako da pri planiranju trajektorije u realnom vremenu strateški model obrađuje informacije sa senzora, što vrlo često može biti problem. Naime, obrada informacija sa senzora uglavnom je složen zadatak što nekada dovodi do kašnjenja potrebnih informacija. Strateški se model može koristiti informacijama iz baze podataka, a u novije vrijeme problem brzine obrade podataka nastoji se riješiti

primjenom neuronskih mreža. Bez obzira na stepen uređenosti okoline, na strateškom nivou upravljanja robotom definira se trajektorija u eksternim koordinatama. Informacije sa strateškog nivoa prosljeđuju se nižem nivou upravljanja, odnosno taktičkom modelu.

Informacije dobijene od strateškog modela omogućuju da se na taktičkom nivou riješi inverzna kinematika. Trajektorija koju treba da slijedi prihvatnica robota se iz prostora vanjskih koordinata preračunava u prostor unutarnjih, upravljanih koordinata. Po potrebi se vrši sinteza kinematike kretanja. Na taktičkom nivou dobijaju se trajektorije svakog zgloba robota čijim će se izvođenjem omogućiti da robot obavi planirani zadatak. Nivo može biti realiziran i u *on-lineu* i u *off-lineu*, ovisno o postavljenom zadatku. Rezultati sa taktičkog nivoa prosljeđuju se operativnom modelu.

Funkcija operativnog modela je da realizira trajektorije u upravljanim koordinatama na temelju dobijenih podataka (položaj, brzina i ubrzanje zglobova manipulatora) sa taktičkog nivoa. Na temelju informacija o unutarnjem stanju dobijenih od internih senzora i prosljeđenih zahtjeva sa taktičkog modela generiraju se upravljački signali za realiziranje trajektorija zglobova što će omogućiti da prihvatnica robota izvodi postavljeni radni zadatak. Ukoliko se pojavi poremećaj u okolini pri kretanju robota, operativni model mora biti sposoban da ga ukloni. Osnovni problem koji se pri tome može pojaviti jeste nemogućnost izvođenja kretanja kao posljedica kašnjenja informacija sa strateškog ka taktičkom, odnosno sa taktičkog ka operativnom modelu.

S obzirom na kompleksnost zadataka koji se postavljaju pred robote, njihov upravljački sistem treba imati vrlo razvijen i sofisticiran strateški model. Međutim, danas još uvijek veliki broj robota radi u vrlo organiziranim sredinama, gdje je raspored predmeta unaprijed predvidiv, što omogućuje rad robota samo sa taktičkim i operativnim nivoima upravljanja. Ukoliko operater direktno zadaje koordinate zglobova, što se sve više potiskuje iz upotrebe, jer je za korisnika - operatera prirodno definiranje zadatka u prostoru vanjskih koordinata, roboti imaju samo operativni model upravljanja. Kod ovakvih robota funkciju strateškog modela preuzima čovjek preko programskih jezika ili privjesaka za učenje.

8.3. Problem upravljanja

Uopšteno govoreći, problem upravljanja kod manipulatora svodi se na određivanje vremenske promjene generaliziranih sila (sila i momenata) koje moraju postići aktuatori kako bi se zadovoljili uvjeti prelaznog i stacionarnog stanja, odnosno izvršio dati zadatak. Postoji više razvijenih tehnika za upravljanje robotima.

Na odabir adekvatne upravljačke strategije utiču mnogi faktori, a najznačajniji su:

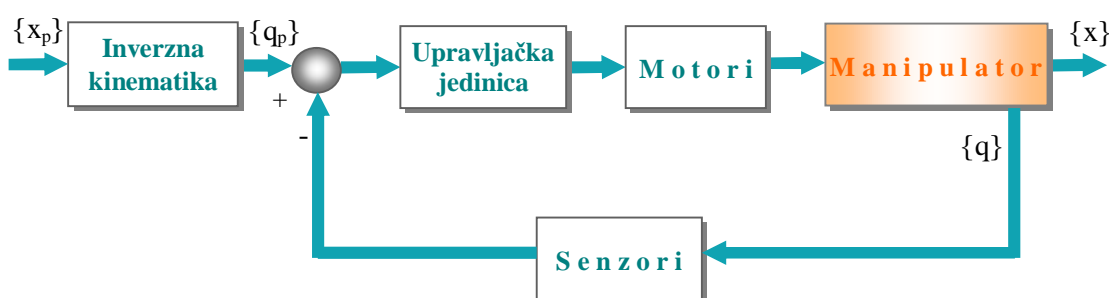
- *radni zadatak kojeg robot treba obaviti*

Ukoliko je potrebno da prihvatnica robota kontinuirano slijedi trajektoriju u radnom prostoru, upravljački sistem će se bitno razlikovati od onog kod robota koji djeluje na principu "tačka po tačka".

- *kinematička struktura robotskog sistema*
Upravljački sistem kod kartezijanske strukture bitno je drugačiji nego kod sfernog manipulatora.
- *tip upotrijebljenih aktuatora za osnaživanje pojedinih zglobova robota*
Primjena električnih motora sa visokim redukcionim faktorima za pokretanje zglobova robota, te prisustvo zupčanika, omogućuju linearizaciju dinamičkog sistema, odnosno dekuplovanje zglobova u pogledu redukcije nelinearnih efekata. Međutim, s druge strane, prisustvo trenja u zglobovima, elastičnosti i mrtve zone, mogu umanjiti performanse sistema i dovesti do Coriolisovih sila, konfiguracijski ovisnih inercijalnih efekata i sl. Direktno osnaživanje robota bez prenosnika eliminira elastičnost, mrtvu zonu i trenje, ali nelinearnost, te sprezanje među zglobovima postaju relevantni. Iz iznesenog, može se zaključiti da odabir upravljačke strategije utiče na performanse robotskog sistema i da se odabirom odgovarajuće upravljačke strategije mogu postići visoke performanse robotskih sistema.

Imajući u vidu da se radni zadatak robota može definirati i u prostoru upravljanih i u prostoru vanjskih koordinata, jasno se nameću dva tipa upravljačkih strategija i to:

- upravljanje u prostoru zglobova (engl. joint space control) i
- upravljanje u radnom prostoru (engl. operational space control).

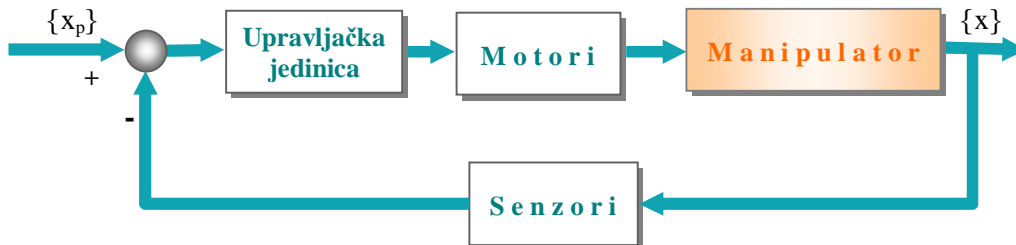


Slika 8.14. Upravljanje u prostoru zglobova

Kod upravljanja u prostoru zglobova, shematski prikazanog na sl. 8.14, potrebno je, na temelju inverznog kinematičkog modela, prevesti kretanje iz radnog u prostor zglobova. Povratna petlja je zatvorena preko vektora upravljanih koordinata, tako da varijable u prostoru zglobova utiču na varijable u prostoru zadatka preko direktne staze bez povratne sprege što je nedostatak ove upravljačke strukture. Na taj način se, kod ovakve upravljačke sheme, sve netačnosti strukture, kao što su tolerancija konstrukcije, mrtva zona kod zupčanika, trenje, kao i drugi faktori nesigurnosti konstrukcije, prenose direktno na varijabe u operacijskom prostoru.

Upravljanje u radnom prostoru, prikazano blok dijagramom na sl. 8.15. zahtijeva izvođenje aritmetički kompleksnijih operacija nego kod prethodne upravljačke sheme. Naime, radi se o globalnom pristupu upravljanju koji nameće veliku kompleksnost algoritama upravljanja. Ovdje je inverzna kinematika ugrađena u povratnu spregu. U odnosu na upravljanje u prostoru zglobova ovakav pristup upravljanju ima prednost,

koja se ogleda u mogućnosti praćenja varijabli operacijskog prostora, jer je povratna petlja zatvorena preko vektora vanjskih koordinata. Međutim, ovo je samo potencijalna prednost i zavisi od načina mjerenja varijabli operacijskog prostora. Naime, nekada se ove varijable ne mogu mjeriti direktno, već se pristupa mjerenju zglobnih varijabli, pa



Slika 8.15. Upravljanje u prostoru zadatka

se na temelju direktnog kinematičkog modela izračunavaju eksterne varijable.

8.3.1. Nemodelirana fleksibilnost

Jedna od napravljenih aproksimacija kod izvedenih upravljačkih struktura jeste zanemarivanje fleksibilnosti zupčastih prenosnika, ležajeva, osovina i članaka robota. Ovi elementi su ograničene krutosti i, ukoliko se pri modeliranju uzme u obzir njihova fleksibilnost to će doprinijeti povećavanju reda sistema.

Osnovni razlog zanemarivanja fleksibilnosti pri modeliranju dinamike robotskog sistema jeste taj, da ako je sistem zadovoljavajuće krutosti, prirodne frekvencije nemodelirane rezonancije su vrlo visoke i mogu biti zanemarene u usporedbi sa uticajem dominantnih polova drugog reda.

Zanemarivanjem fleksibilnosti dinamički model robota se znatno pojednostavljuje, ali se mora voditi računa o pobuđenim frekvencijama. Kako i struktura ima svoju frekvenciju (strukturna frekvencija) pri kojoj nastaje njeno rezonantno oscilovanje, to se ne smije dozvoliti da prirodna frekvencija bude jednaka strukturnoj. U protivnom, nastupilo bi rezonantno oscilovanje cjelokupne strukture. Naime, ako je najniža strukturna frekvencija w_{res} , tada se prirodna frekvencija zatvorene petlje mora ograničiti na [3]:

$$w_n \leq \frac{1}{2} w_{res} . \quad (8.19)$$

Ovo je moguće odabirom parametara regulatora, jer se sa povećavanjem faktora pojačanja smanjuju vrijeme odziva sistema i greška ustaljenog stanja, a s druge strane iznos faktora pojačanja određen je nemodeliranom strukturnom rezonancijom. Servosistemi trebaju uvijek biti kritično ili nadkritično prigušeni. Najčešće industrijski roboti imaju nemodeliranu strukturnu rezonanciju u iznosu od 5 Hz do 25 Hz [3]. Uz ispunjen uvjet (8.19), strukturna frekvencija ne može uzrokovati neželjeno oscilovanje.

Ukoliko strukturna fleksibilnost sistema može biti ustanovljena moguća je približna analiza rezultirajućih vibracija aproksimacijom robotskih članaka jednostavnim sistemom “masa-opruga“ gdje je prirodna frekvencija data jednadžbom (8.15):

$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

gdje su k krutost fleksibilnog članka, a m njegova ekvivalentna masa.

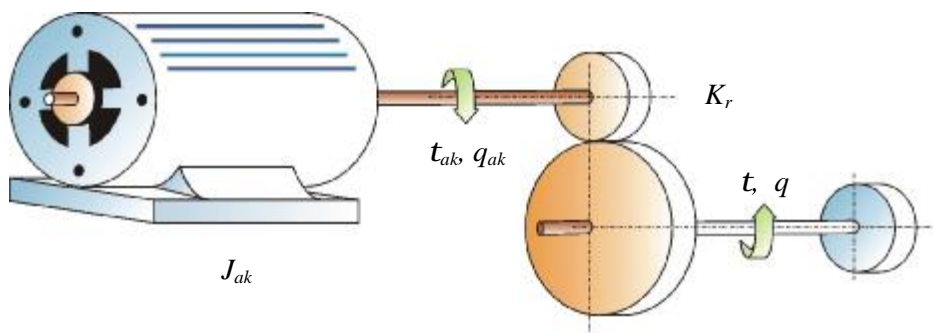
Uključivanje strukturne fleksibilnosti sistema u upravljački zakon potrebno je želi li se dostići zatvorena petlja propusnosti veće od vrijednosti date izrazom (8.19). Rezultirajući model sistema biće višeg reda, a upravljačke tehnike takvih sistema mnogo sofisticiranije i predmetom su brojnih istraživanja [1,2,7,11,13,14,17].

8.4. Upravljanje u prostoru zglobova

Dinamički model robota, zanemari li se djelovanje vanjskih sila na prihvatnicu, kao i viskozno trenje, dat je jednadžbom:

$$[A(q)] \cdot \{\ddot{q}\} + \{B(q, \dot{q})\} + \{C(q)\} = \{\tau\}, \quad (8.20)$$

gdje je $[A(q)]$ masena matrica dimenzije $(n \times n)$, $\{B(q, \dot{q})\}$ je $(n \times 1)$ dimenzioni vektor Coriolisovih i centrifugalnih djelovanja, $\{C(q)\}$ je $(n \times 1)$ dimenzioni vektor gravitacijskog djelovanja.



Slika 8.16. Mehanički model dc motora spojenog preko prenosnika kretanja za osu zgloba

Problem upravljanja robotom svodi se na određivanje vremenske promjene generaliziranih sila – momenta za revolutni i sile za translacijski zglob koji će zadovoljiti postavljene uvjete za prelazno i stacionarno stanje, odnosno koji će omogućiti da ostvarena kinematika upravljanih koordinata bude jednaka planiranoj:

$$\{q(t)\} = \{q_p\} \quad (8.21)$$

$\{q_p(t)\}$ je $(n \times 1)$ vektor upravljanih koordinata kojeg je potrebno realizirati.

Izlazne osovine motora se, najčešće, posredstvom prenosnika kretanja povezuju za ose zglobova koje osnažuju (sl. 8.16.). Ako se sa $\{q_{ak}\}$ označi pozicijski vektor izlaznih osovina motora, uz pretpostavku da u prenosnicima nema mrtve zone i uz zanemarivanje elastičnosti, vrijedi jednadžba:

$$[K_r] \cdot \{q\} = \{q_{ak}\}, \quad (8.22)$$

gdje je $[K_r]$ ($n \times n$) dimenziona matrica redukcionih koeficijenata prenosnika kretanja. Najčešće je to dijagonalna matrica (uz pretpostavku da nema induciranih kretanja) čiji su elementi mnogo veći od jedan. Redukcionim se koeficijentima postiže smanjenje brzine uz povećavanje momenta na izlaznoj osovini prenosnika. Na taj način, koristeći se matricom redukcionih koeficijenata, vektor momenata kojeg na izlaznim osovinama razvijaju motori može biti prikazan jednadžbom:

$$\{\tau_{ak}\} = [K_r]^{-1} \cdot \{\tau\}. \quad (8.23)$$

Kako se dijagonalni elementi matrice inercije $[A(q)]$ sastoje iz konstantnih i konfiguracijski zavisnih izraza (trigonometrijske funkcije zglobnih varijabli za revolutne zglobove) to se matrica inercije može prikazati sumom dviju matrica:

$$[A(q)] = [\bar{A}] + [\Delta A(q)] \quad (8.24)$$

gdje je $[\bar{A}]$ dijagonalna matrica čiji su konstantni elementi rezultirajuće srednje vrijednosti inercije svakog zgloba. Uvodeći izraze (8.22) - (8.24) u (8.20) dobija se:

$$\{\tau_{ak}\} = [K_r]^{-1} \cdot [\bar{A}] \cdot [K_r]^{-1} \cdot \{\ddot{q}_{ak}\} + \{d\} \quad (8.25)$$

gdje je:

$$\{d\} = [K_r]^{-1} \cdot [\Delta A(q)] \cdot [K_r]^{-1} \cdot \{\ddot{q}_{ak}\} + [K_r]^{-1} \cdot \{B(q, \dot{q})\} + [K_r]^{-1} \cdot \{C(q)\} \quad (8.26)$$

doprinos momentu koji je ovisan o konfiguraciji robotskog sistema.

Blok shema manipulatora osnaženog motorima prikazana je na sl. 8.17. Sa blok sheme je uočljivo postojanje dva podsistema. Kod jednog podsistema $\{\tau_{ak}\}$ je vektor ulaza, a $\{q_{ak}\}$ izlazni vektor. Svaka komponenta vektora $\{\tau_{ak}\}$ utiče samo na odgovarajuću komponentu vektora $\{q_{ak}\}$ preko direktne staze, pa se radi o linearnom podsistemu. Drugi podsistem obuhvata sve nelinearnosti i spregnute izraze dinamike manipulatora, pa se radi o nelinearnom dijelu, kod kojeg su $\{q_{ak}\}$, $\{\dot{q}_{ak}\}$ i $\{\ddot{q}_{ak}\}$ vektori ulaza, a $\{d\}$ je vektor izlaza.

Blok shema 8.17. može poslužiti kao osnova za izvođenje nekoliko upravljačkih strategija. Kako bi robot ostvario zadano kretanje potrebno je da se svaka upravljana koordinata mijenja po zakonitosti određenoj sintezom kinematike kretanja, pa se od svakog stepena slobode kretanja treba formirati servosistem radi slijeđenja vodeće veličine. Odabir upravljačke strukture ovisi o brzini kojom robot djeluje. U slučaju

visokih redukcionih faktora i/ili ograničenja postavljenih radi postizanja željenih brzina i ubrzanja, moguće je izraz $\{d\}$ smatrati poremećajem koji djeluje na servosistem pojedinog zgloba. Svaki zglob može se promatrati odvojeno od drugog sa brzinski upravljanim aktuatorom, što omogućuje primjenu *decentralizirane upravljačke strukture*. Kako su sve nelinearnosti obuhvaćene poremećajem to je zadatak upravljačke jedinice da otklanja djelovanje velikih poremećaja i omogući praćenje trajektorije.

U slučaju kada robot djeluje velikim brzinama nije potreban reduktor, pa se osovinom motora direktno povezuje sa osovinom zgloba. Nelinearni spregnuti izrazi znatno utiču na performanse sistema, pa promatranje izraza $\{d\}$ kao poremećaja može dovesti do velikih odstupanja pri praćenju trajektorije. Ovo nameće nužnost primjene *centralizirane upravljačke sheme* koja se temelji na detaljnom poznavanju dinamike manipulatora sa momentno upravljanim aktuatorom i kompenziranju nelinearnosti.

Sušтина svih upravljačkih tehnika je da prate grešku između postignute i željene trajektorije, bez obzira da li se to odvija u povratnoj petlji ili direktnoj stazi, jer dinamički model robota, ma koliko bio kompleksan, ipak ne odgovara realnoj dinamici. Ovo je posljedica, uglavnom neuključivanja svih efekata u dinamički model, kao što su Coulombovo trenje, labavost prenosnika, tolerancija dimenzija, kao i nedovoljno tačne pretpostavke, npr. potpuno kruti članci manipulatora i dr.

8.5. Tehnika neovisnog upravljanja zglobovima

Kod velikog broja robota ostvareno je neovisno upravljanje za svaku unutarnju koordinatu posebno, tako da robot ima onoliko regulatora koliko i zglobova. Funkciju regulatora obavlja kompjuter. Svakim zglobom upravlja se neovisno o drugim zglobovima, sa jednom ulaznom i jednom izlaznom varijablom, pa se radi o upravljanju tipa “jedan ulaz – jedan izlaz“ (engl. single-input / single-output system – SISO). Utjecaji efekata pojedinih zglobova na druge zglobove prikazuju se kroz poremećajne ulaze.

Upravljanje tipa SISO može se dobiti iz upravljačke strukture prikazane blok shemom na sl. 8.17. Nelinearni dio, dat jednađbom (8.26), koji opisuje interakciju datog sa drugim zglobovima biće prikazan poremećajem u SISO upravljačkoj shemi.

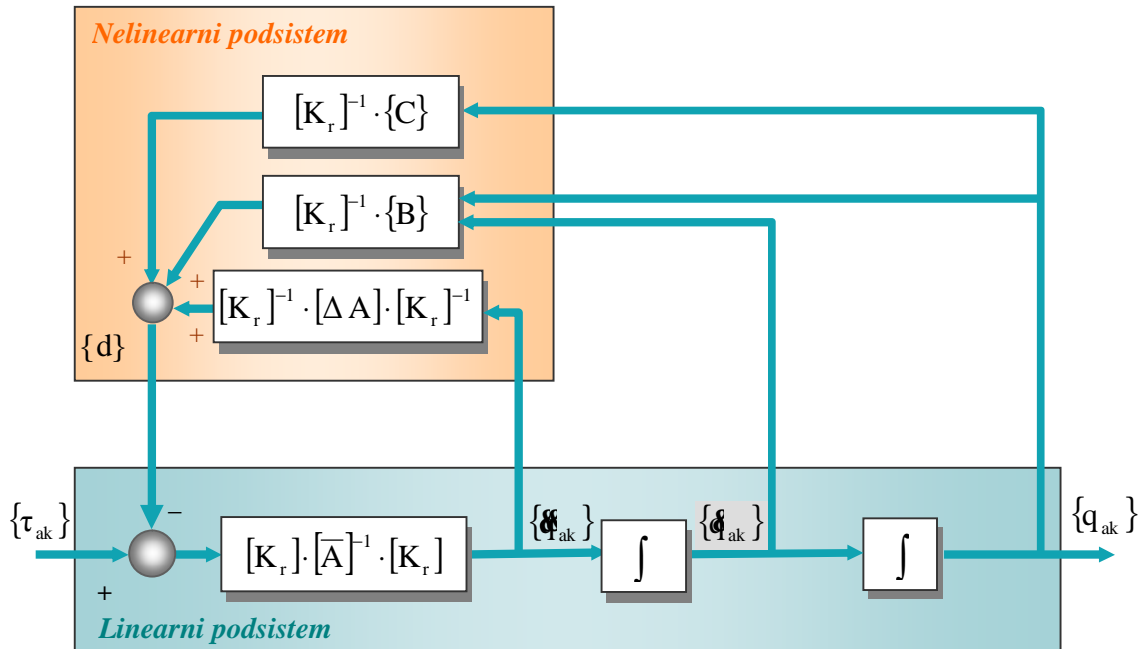
Aktuatori koji pokreću zglobove robota mogu biti elektromotori, hidraulički ili pneumatski motori. Kako su kod robota sa zatvorenim regulacijskim petljama 80% prisutni istosmjerni elektomotori, to će, bez gubitka na generalnosti u pristupu, biti prikazana njihova primjena. Dinamički modeli aktuatora primijenjenih u robotici navedeni su u [6].

Električni i mehanički dio istosmjernog servomotora za osnaživanje i -te upravljane koordinate robota opisani su jednađbama:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a \cdot i_a + k_u \cdot \dot{\theta}_{ak} = u_a, \quad (8.27)$$

$$J_{ak} \cdot \ddot{\varphi}_{ak} + D_{ak} \cdot \dot{\varphi}_{ak} + t_{ak} = k_m \cdot i_a, \quad (8.28)$$

gdje su L_a induktivnost armaturnog namota motora, R_a armaturni otpor, k_u i k_m su naponska i momentna konstanta motora, u_a i i_a su napon i struja armature, J_{ak} moment



Slika 8.17. Blok shema upravljanja manipulatora sa motorima

inercije motora, a D_{ak} je koeficijent viskoznog trenja motora.

Induktivnost motora L_a može biti zanemarena kada je prirodna frekvencija upravljačkog sistema sa zatvorenom petljom znatno manja u odnosu na prekidnu frekvenciju upotrijebljenog niskopropusnog filtera.

Uz zanemarivanje induktivnosti armaturnog namota L_a iz (8.27) i (8.28) slijedi:

$$J_{ak} \cdot \ddot{\varphi}_{ak} + \left(D_{ak} + \frac{k_m \cdot k_u}{R_a} \right) \cdot \dot{\varphi}_{ak} + t_{ak} = \frac{k_m}{R_a} \cdot u_a. \quad (8.29)$$

Kako je:

$$D_{ak} \ll \frac{k_m k_u}{R_a},$$

to viskozni koeficijent trenja u mehaničkom dijelu može biti zanemaren u odnosu na električni koeficijent trenja, pa jednačba (8.29) može biti napisana kao:

$$R_a J_{ak} \cdot \ddot{\varphi}_{ak} + k_m k_u \cdot \dot{\varphi}_{ak} + R_a \cdot t_{ak} = k_m \cdot u_a. \quad (8.30)$$

Uvodeći izraz za moment t_{ak} kojeg razvija istosmjerni servomotor na izlaznoj osovini za osnaživanje i -tog zgloba motora dat jednadžbom (8.25) u (8.30) i uvođenjem efektivne inercije svedene na osu motora (J) dobija se jednadžba dinamičke ravnoteže momenata koji djeluju na osu motora:

$$R_a J \cdot \ddot{\varphi}_{ak} + k_m k_u \cdot \dot{\varphi}_{ak} + R_a \cdot d = k_m \cdot u_a \quad (8.31)$$

Kod robota sa velikim redukcionim faktorima ($K_r \gg 1$) inercija aktuatora predstavlja dominantan dio u ukupnoj efektivnoj inerciji, pa se nekada dopušta uvođenje pretpostavke da je inercija konstantna. Varijacija inercije znatno je manja kod robota sa visokim redukcionim faktorima, nego kod robota sa direktnim osnaživanjem zglobova bez prenosioca ($K_r = 1$). Kako bi se spriječilo da kretanje robota bude u nekim momentima nedovoljno prigušeno, za efektivnu inerciju uzima se maksimalna vrijednost što će rezultirati da je sistem uvijek kritično i nadkritično prigušen.

Primjenom Laplaceove transformacije na jednadžbu (8.31) dobija se prenosna funkcija aktuatora za osnaživanje i -tog zgloba.:

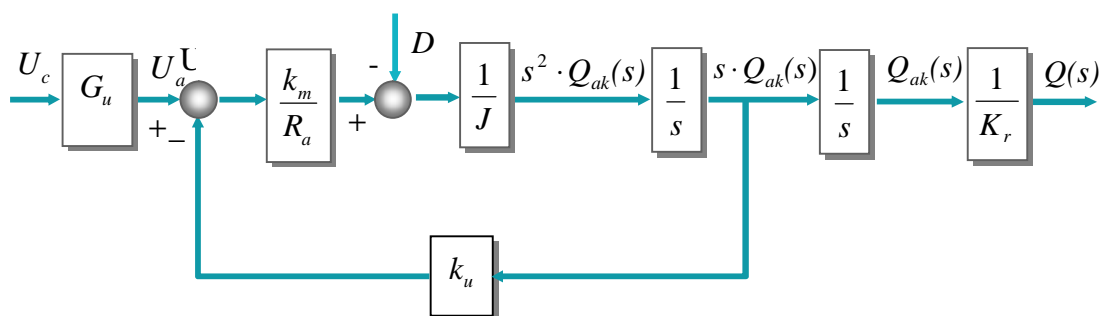
$$G_{ak} = \frac{Q_{ak}(s)}{U_a(s)} = \frac{k_m}{s \cdot (k_m \cdot k_u + R_a \cdot J \cdot s)} \quad (8.32)$$

Ovu jednadžbu moguće je, uvođenjem vremenske konstante aktuatora:

$$T_{ak} = \frac{R_a \cdot J}{k_m \cdot k_u},$$

napisati u obliku:

$$G_{ak} = \frac{1/k_u}{s \cdot (1 + s \cdot T_{ak})}.$$



Slika 8.18. Blok shema upravljanja osnaženim zglobom

Iz prenosne funkcije nereguliranog istosmjernog elektromotora vidi se da se on ponaša kao proporcionalni član sa kašnjenjem prvog reda. Ovoj prenosnoj funkciji odgovara

blok shema upravljanja i -tim zglobov koja je prikazana na sl. 8.18. Sa slike se vidi da je za postizanje potrebnog iznosa napona armature u_a upotrijebljeno naponsko pojačalo.

Njegova prenosna funkcija data je sa:

$$\frac{U_a}{U_c} = \frac{G_u}{1 + s \cdot T_u}, \quad (8.33)$$

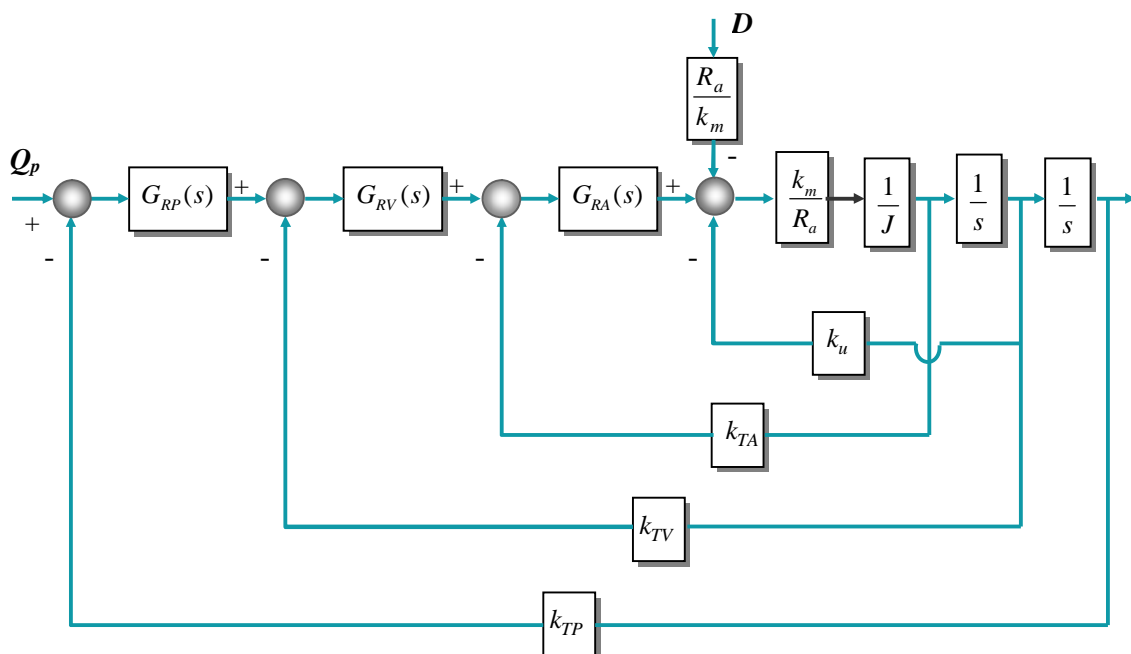
gdje je G_u naponsko pojačanje, a T_u vremenska konstanta koja, s obzirom da je znatno manja u odnosu na druge vremenske konstante sistema, može biti zanemarena.

8.5.1. Upravljanje sa povratnom spregom

Kako bi se omogućilo otklanjanje djelovanja poremećaja d na izlaznu varijablu q , a imajući u vidu svojstva regulatora, nameće se potreba primjene proporcionalno-integralnog (PI) upravljačkog djelovanja u direktnoj stazi.

Primjenom PI regulatora se postiže slijedeće:

- velikim faktorom pojačanja prije tačke djelovanja poremećaja otklanja se njegov uticaj i
- primjenom integralnog djelovanja poništavaju se efekti djelovanja gravitacijske komponente na izlaz u ustaljenom stanju.

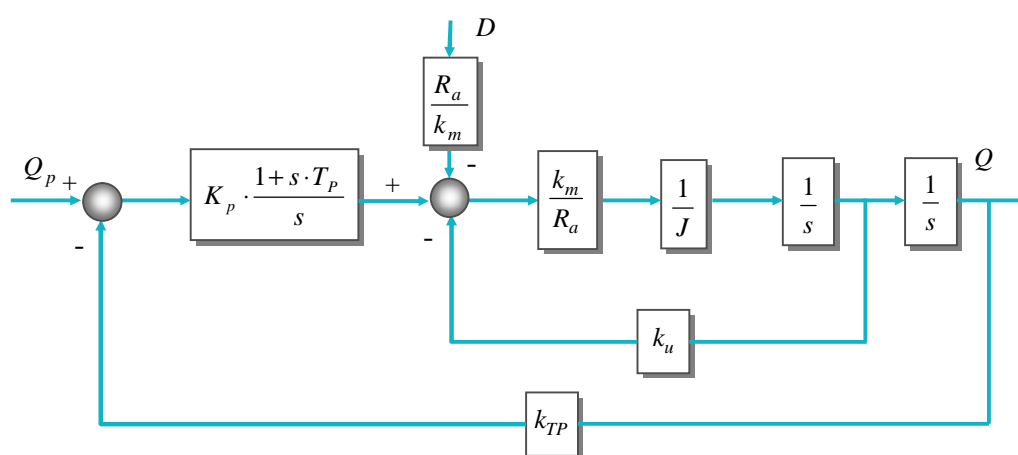


Slika 8.19. Opšte rješenje upravljanja sa zatvorenim petljama po poziciji, brzini i ubrzanju

Prenosna funkcija PI regulatora data je sa (8.11):

$$G_R(s) = K_R \cdot \frac{1 + s \cdot T_R}{s}$$

Pri djelovanju konstantnih poremećaja na sistem greška postaje nula, a postojanje realne nule prenosne funkcije $s = -1/T_R$ ukazuje na stabilizaciju procesa. Na sl. 8.19. prikazano je opšte rješenje upravljanja sa zatvorenim petljama po poziciji, brzini i ubrzanju upravljane koordinate, gdje su $G_{RP}(s)$, $G_{RV}(s)$ i $G_{RA}(s)$ prenosne funkcije PI regulatora za poziciju, brzinu i ubrzanje, dok su k_{TP} , k_{TV} i k_{TA} pojačanja, odnosno konstante transdjusera pozicije, brzine i ubrzanja u i -tom zglobu. Momentni poremećaj D je pomoću faktora R_a/k_m preveden u naponski oblik. Iz blok sheme neovisnog upravljanja i -tim zglobom, sl. 8.19, moguće je razviti upravljačke strukture koje se razlikuju po broju aktivnih povratnih petlji.



Slika 8.20. Neovisno upravljanje jednim zglobom sa zatvorenom povratnom petljom po poziciji

Potrebno je izvršiti sintezu upravljanja zglobom i aktuatorom kako bi se, na temelju definirane pozicije zgloba q_p , zglob na određeni način doveo u ovu poziciju. Upravljanje se, s ciljem ispunjavanja navedenog zadatka, najčešće realizira upravljačkom strukturom (sl. 8.20.), koja prikazuje blok shemu za neovisno upravljanje i -tim zglobom sa zatvorenom petljom preko pozicije i -te upravljane koordinate. Upravljačko je djelovanje, u ovom slučaju, dato sa:

$$G_{RP}(s) = K_P \cdot \frac{1 + s \cdot T_P}{s}, \quad G_{RV}(s) = 1, \quad G_{RA}(s) = 1,$$

$$K_{TV} = K_{TA} = 0.$$

Informacija o poziciji zgloba q se, uz pojačanje faktorom k_{TP} , vraća povratnom spregom i upoređuje sa referentnom vrijednošću q_p . Razlika između željene i stvarne pozicije se, preko PI regulatora, dovodi kao ulazni naponski signal na aktuator. Ukoliko je ostvarena pozicija q manja od potrebne q_p stvorice se pozitivni naponski signal koji

pokreće motor do doseganja željenog položaja. U suprotnom, stvara se negativni naponski signal koji vraća zglob u željeni položaj.

Prenosna funkcija u direktnoj stazi data je sa

$$G_{DS} = \frac{K_p \cdot (1 + s \cdot T_p)}{s^2 \cdot k_u \cdot (1 + s \cdot T_{ak})},$$

a u povratnoj grani sa:

$$G_{PP} = k_{TP}.$$

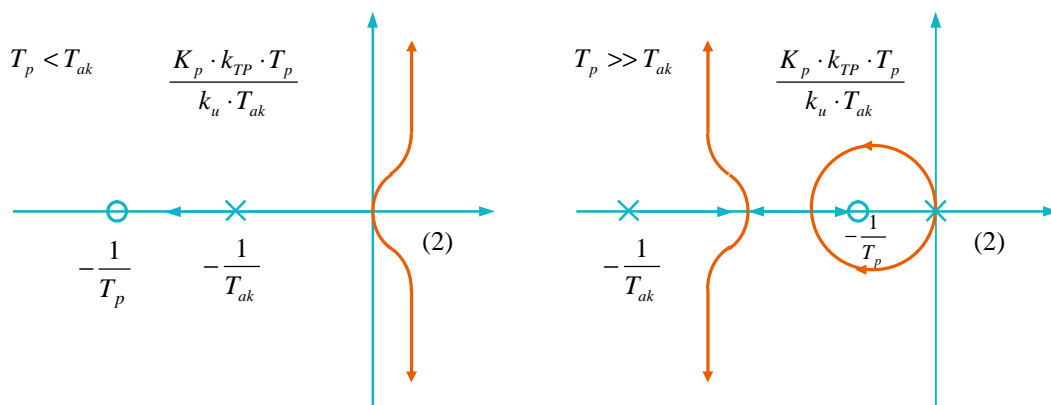
Ukupna prenosna funkcija regulacijskog kruga sa sl. 8.20. data je jednadžbom:

$$\frac{Q}{Q_p}(s) = \frac{\frac{1}{k_{TP}}}{1 + \frac{s^2 \cdot (1 + T_{ak} \cdot s)}{\frac{1}{k_u} \cdot k_{TP} \cdot K_p \cdot (1 + s \cdot T_p)}}. \quad (8.34)$$

Odabir parametara PI regulatora vrši se uz uvjet postizanja stabilnosti sistema. Na temelju pojačanja pozicijske petlje koje je dato sa:

$$\frac{K_p \cdot k_{TP} \cdot T_p}{T_{ak} \cdot k_u},$$

moгуće je izvršiti analizu regulacijskog kruga primjenom metode lokusa korijena. Ako je $T_p < T_{ak}$ sistem je nestabilan (sl. 8.21.), što znači da je neophodno obezbijediti da uvijek T_p bude veće od T_{ak} . Uobičajeno je $T_p \gg T_{ak}$, a realni dio dominantnih polova ne može biti manji od $-1/2T_{ak}$ [8].



Slika 8.21. Lokus korijena za upravljačke sisteme sa pozicijskom povratnom petljom

Iz prenosne funkcije koja definira odnos Laplaceove transformacije izlazne varijable i poremećaja koja je data sa:

$$\frac{Q}{D}(s) = \frac{s \cdot R_a}{k_m \cdot k_{TP} \cdot K_P \cdot (1 + s \cdot T_P)} \cdot \frac{1}{1 + s^2 \frac{k_u (1 + s \cdot T_{ak})}{k_{TP} \cdot K_P \cdot (1 + s \cdot T_P)}}, \quad (8.35)$$

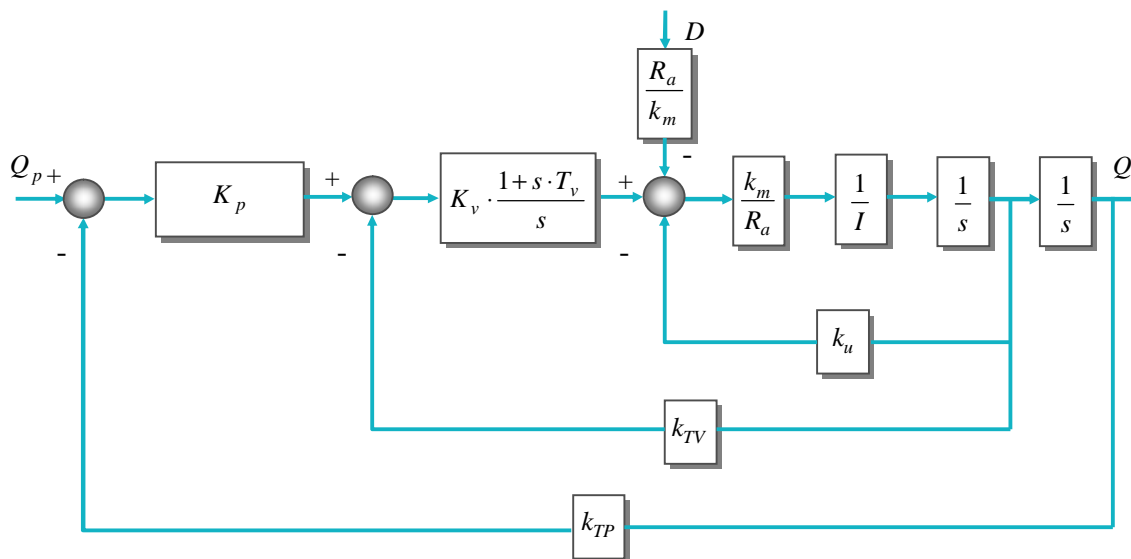
vidi se da se sa povećavanjem faktora pojačanja PI regulatora K_P umanjuju efekti djelovanja poremećaja tokom prelaznog perioda.

Također se iz ove prenosne funkcije može uočiti da je $K_P k_{TP}$ zapravo faktor redukcije amplitude poremećaja, pa se:

$$x_R = K_P k_{TP} \quad (8.36)$$

naziva faktorom otklanjanja poremećaja, koji se može podesiti faktorom pojačanja PI regulatora K_P . Međutim, ne preporučuje se pretjerano povećavanje ovog faktora, jer mali faktori prigušenja mogu rezultirati oscilacijama izlaza.

Za smanjivanje pozicijske greške i postizanje bolje kvalitete praćenja trajektorije uvodi se povratna sprega po brzini. Informacije sa senzora brzine, uz pojačanje faktorom k_{TV} , dovode se na ulaz aktuatora sa ciljem prigušenja naglih promjena u kretanju aktuatora što ih uzrokuje pozicijska povratna sprega.



Slika 8.22. Upravljačka struktura sa zatvorenim petljama preko pozicije i brzine upravljane koordinate

Upravljačko djelovanje kod struktura sa zatvorenim petljama preko pozicije i brzine i -te upravljane koordinate, prikazane na sl. 8.22, definirano je sa:

$$G_{RP}(s) = K_P, \quad G_{RV} = K_V \cdot \frac{1 + s \cdot T_V}{s}, \quad G_{RA}(s) = 1,$$

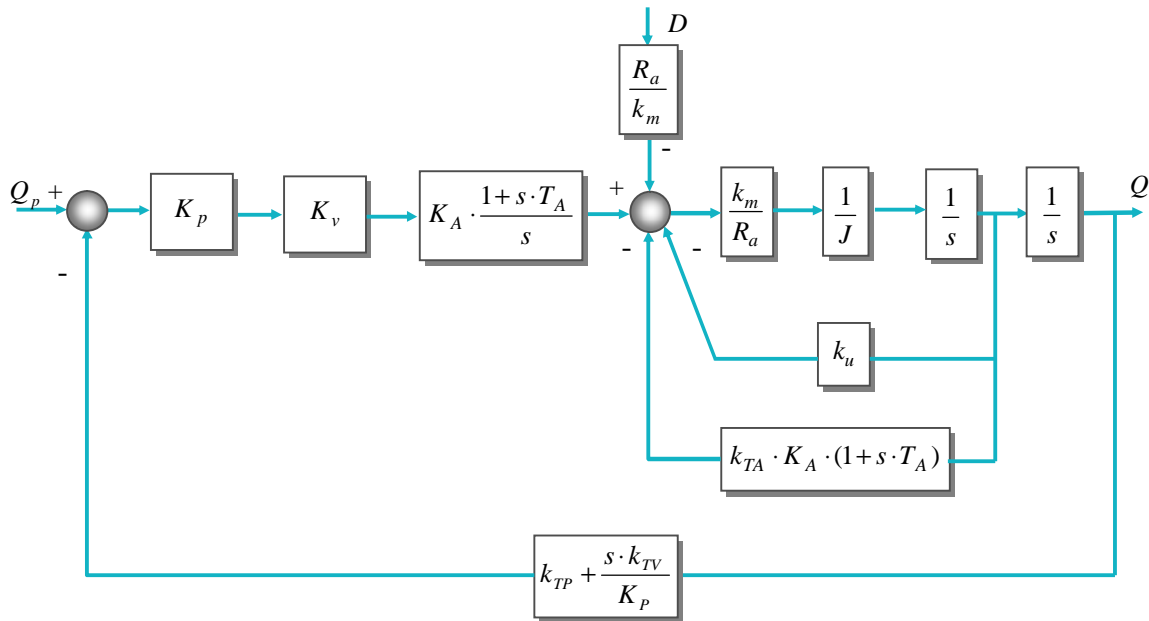
$$k_{TA} = 0.$$

Prenosna funkcija direktne staze je:

$$G_{DS} = \frac{\frac{1}{k_u} \cdot K_P \cdot K_V \cdot (1 + s \cdot T_V)}{s^2 (1 + T_{ak} \cdot s)},$$

a povratne petlje:

$$G_{PP} = k_{TP} + s \cdot \frac{k_{TV}}{K_P}.$$



Slika 8.23. Upravljačka struktura sa zatvorenim petljama preko pozicije, brzine i ubrzanja upravljane koordinate

Ukupna prenosna funkcija regulacijske strukture sa sl. 8.22, data je sa:

$$G(s) = \frac{1}{k_{TP}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{s \cdot k_{TV}}{K_P \cdot k_{TP}} + \frac{s^2 \cdot k_u}{K_P \cdot k_{TP} \cdot K_V}}. \quad (8.37)$$

Kod upravljačke strukture sa povratnim petljama zatvorenim preko pozicije, brzine i ubrzanja i -tog zgloba, prikazane na sl. 8.23, upravljačko djelovanje definirano je sa:

$$G_{RP} = K_P, \quad G_{RV}(s) = K_V, \quad G_{RA}(s) = K_A \cdot \frac{1 + s \cdot T_A}{s}.$$

dok je ukupna prenosna funkcija data sa:

$$G(s) = \frac{\frac{1}{k_{TP}}}{1 + s \cdot \frac{k_{TV}}{K_P \cdot k_{TP}} + s^2 \cdot \frac{(k_u + K_A \cdot k_{TA})}{K_P \cdot k_{TP} \cdot K_V \cdot K_A}}. \quad (8.38)$$

Analiza regulacijskih krugova prikazanih na sl. 8.22. i 8.23. primjenom metode lokusa korijena urađena je u [8].

U navedenim razmatranjima uticaj gravitacijskog djelovanja ispoljavao se kroz poremećaj d . Kompenzacija ovog djelovanja može biti urađena mehanički ili programski. Mehaničko kompenziranje podrazumijeva uvođenje dodatnih elemenata na konstrukciju, kao što su utezi, opruge i sl, vodeći računa da djelovanje robota ne bude dovedeno u pitanje. Kompenzacija neće biti tačna u svim položajima, međutim, jednostavna je i ne zahtijeva trošenje energije kada je robot u stanju mirovanja. S druge strane, programski način kompenziranja sastoji se u izračunavanju napona kompenzacije za svaki položaj, tako da je, za razliku od mehaničkog, kompenzacija tačna, ali zahtijeva trošenje energije kada je robot u stacionarnom stanju. Greška koja nastaje pri pozicioniranju zgloba u stacionarnom stanju usljed spoljašnjeg (gravitacijskog) djelovanja naziva se statičkom greškom.

Pri izboru pojačanja regulatora potrebno je voditi računa i o šumovima koje nose električni signali. Naime, informacije sa transdjusera pozicije i brzine uvijek imaju šumove, koji su uobičajeno za red veličine manji od korisnih signala. Šumovi se, u povratnim spregama, sa faktorima pojačanja k_{TP} i k_{TV} također pojačavaju, pa se pri izboru pojačanja k_{TP} i k_{TV} mora voditi računa da ne budu previsoki. S druge strane, iznos pozicionog pojačanja k_{TP} ograničava i strukturna frekvencija.

U navedenim primjerima upravljačkih struktura nije eksplicitno razmatrano mjerenje varijabli povratnih petlji. U industrijskoj praksi relativno je jednostavno mjerenje pozicije i brzine, dok se direktno mjerenje ubrzanja ne izvodi ili je ono vrlo skupo.

Navedena razmatranja izvršena su na temelju idealnog dinamičkog modela uz slijedeće pretpostavke:

1. induktivnost motora je zanemarena;
2. strukturne su fleksibilnosti zanemarene, pa je najmanja strukturna rezonanca w_{res} upotrijebljena za podešavanje servopojačanja;
3. u modelu je zadržan samo konstantni dio inercije, dok je konfiguracijski ovisan dio ugrađen u poremećajni signal d .

Pri simultanom kretanju zglobova robota dolazi do dinamičkog spreznja među zglobovima, što utiče na ponašanje servosistema, odnosno tačnost pozicioniranja i praćenja trajektorije.

Moment inercije mehanizma oko promatranog zgloba se pri kretanju mehanizma mijenja. U velikom broju slučajeva odabir pojačanja servosistema se vrši na temelju maksimalnog iznosa momenta inercije. To osigurava nadkritično prigušenje servosistema koji upravlja zglobom.

Međutim, ukoliko se moment inercije izrazito mijenja, faktor prigušenja biće znatno veći od jedan ($\zeta \gg 1$), što dovodi do izazite nadprigušenosti servosistema. Ovo rezultira sporim pozicioniranjem. Zbog toga se nastoji postići kritično prigušenje servosistema. To je moguće ukoliko se faktor prigušenja servosistema održava približno konstantnim ($\zeta \approx 1$), a realizira se uvođenjem promjenjivog brzinskog pojačanja k_{TV} , tako da se za svaki položaj mehanizma računaju moment inercije i faktor prigušenja kako bi on bio približno jedan. Ovo, međutim, zahtijeva računanje momenta inercije u realnom vremenu, pa je samim tim i znatno složenije od slučaja kada se koristi konstantan faktor pojačanja brzine.

Ako je moment inercije motora znatno veći od momenta inercije manipulatora ponašanje servosistema biće ravnomjerno za sve položaje mehanizma i pri konstantnom brzinskom pojačanju. Odabirom velikog motora eliminira se uticaj promjenjivog momenta inercije manipulatora. Nedostatak ovog pristupa je nepotrebno opterećenje zglobova, veći utrošak energije i dr.

Ubrzanje u jednom zglobu izaziva moment u drugom preko unakrsnih momenata inercije. Ovo dolazi do izražaja ako se radi o velikim ubrzanjima i rezultira greškama u praćenju trajektorije. U tom slučaju neophodno je kompenziranje unakrsnih momenata inercije.

Centrifugalno i Coriolisovo djelovanje ispoljava se kroz spoljašnje opterećenje na servosisteme u zglobovima, a proporcionalno je brzinama kretanja u zglobovima. Izaziva greške pozicioniranja kod praćenja brzih trajektorija. Na početku i na kraju kretanja, kao i pri mirovanju njihovo djelovanje može se zanemariti, slično kao i kod uticaja unakrsnih momenata inercije.

8.6. Centralizirano upravljanje

U prethodnom odjeljku razmatrano je projektovanje upravljačkih struktura koje pojedinim zglobovima pristupaju neovisno. One su temeljene na pristupu “jedan ulaz / jedan izlaz“, kod kojeg se ne uzima u obzir interakcija i međusobna povezanost zglobova robota. Ovi utjecaji obuhvaćeni su kroz poremećajne ulaze koji djeluju pojedinačno na zglob. Međutim, problem upravljanja robotom je problem sa “više ulaza / više izlaza“ - MIMO (engl. multi-input / multi-output problem). Robot nije skup n neovisnih upravljačkih sistema, već je multivarijabilni sistem sa n ulaza (momenti motora) i n izlaza (pozicije zglobova) međusobno spregnutih izrazito nelinearnim izrazima.

Dinamički model manipulatora dat je jednadžbom (8.20):

$$[A(q)] \cdot \{\ddot{\mathbf{q}}\} + \{B(q, \dot{\mathbf{q}})\} + \{C(q)\} = \{\tau\}$$

Uzme li se u obzir trenje kao funkcija brzine upravljanih koordinata, dinamički model robota može se izraziti kao:

$$[A(q)] \cdot \{\ddot{\mathbf{q}}\} + \{B(q, \dot{\mathbf{q}})\} + [D_v] \cdot \{\dot{\mathbf{q}}\} + \{C(q)\} = \{\tau\}. \quad (8.39)$$

Jednadžbom (8.22) prikazana je veza između kinematike motora i kinematike upravljanih koordinata robota.

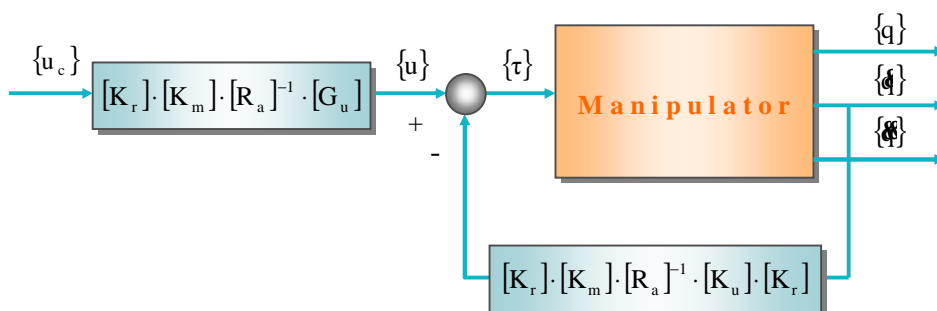
Na temelju dinamičkog modela istosmjernog motora datog jednadžbama (8.27) i (8.28) moguće je dinamički model n aktuatora koji osnažuju svih n upravljanih koordinata napisati u kompaktnoj matricnoj formi (uz zanemarivanje induktivnosti L_a):

$$[K_r]^{-1} \cdot \{\tau\} = [K_m] \cdot \{i_a\}, \quad (8.40)$$

$$\{u_a\} = [R_a] \cdot \{i_a\} + [K_u] \cdot \{\dot{\mathbf{q}}_{ak}\}, \quad (8.41)$$

$$\{u_a\} = [G_u] \cdot \{u_c\}, \quad (8.42)$$

gdje je $[K_m]$ ($n \times n$) dijagonalna matrica momentnih konstanti, $\{i_a\}$ i $\{u_a\}$ su n – dimenzioni vektori armaturne struje i napona n motora, $\{u_c\}$ je vektor upravljačkih napona n servomotora, $[R_a]$ je dijagonalna matrica otpora armaturnih namota n motora, $[K_u]$ je dijagonalna matrica naponskih konstanti n motora, a $[G_u]$ dijagonalna matrica pojačanja n pojačala.



Slika 8.24. Blok shema upravljanja robotom sa naponom kao vektorom upravljanja

Povezivanjem jednadžbi (8.39), (8.40), (8.41) i (8.42) dobija se ukupan dinamički model manipulatora i motora u matricnoj formi:

$$[A(q)] \cdot \{\ddot{\mathbf{q}}\} + \{B(q, \dot{\mathbf{q}})\} + [D] \cdot \{\dot{\mathbf{q}}\} + \{C(q)\} = \{u\}, \quad (8.43)$$

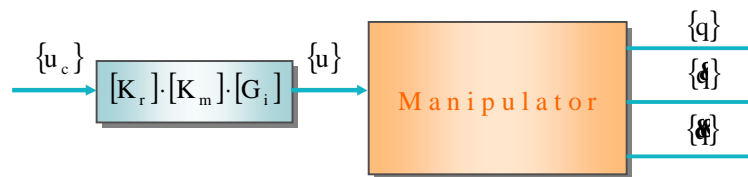
gdje je $[D]$ dijagonalna matrica koja uzima u obzir mehanička i električna prigušna djelovanja:

$$[D] = [D_v] + [K_r] \cdot [K_m] \cdot [R_a]^{-1} \cdot [K_u] \cdot [K_r], \quad (8.44)$$

a $\{u\}$ vektor upravljačkih ulaznih varijabli sistema, dat sa:

$$\{u\} = [K_r] \cdot [K_m] \cdot [R_a]^{-1} \cdot [G_u] \cdot \{u_c\}. \quad (8.45)$$

Dobijeni sistem, prikazan na sl. 8.24, naziva se naponski upravljanim motorom, jer je vektor upravljanja napon $\{u\}$. Iz jednadžbe (8.45) vidi se da na generiranje napona $\{u\}$



Slika 8.25. Blok shema upravljanja robotom sa momentom kao vektorom upravljanja

utiču matrice $[K_m]$, $[K_u]$ i $[R_a]$ motora.

Da bi se smanjio uticaj parametara datih navedenim matricama, umjesto napona kao vektora upravljačkih varijabli sistema odabira se moment. U tom slučaju se radi o momentno upravljanim motorima. Blok shema momentno upravljanih motora prikazana je na sl. 8.25. Jednadžba (8.41) postaje nepotrebna, dok se jednadžba (8.42) zamjenjuje sa:

$$\{i_a\} = [G_i] \cdot \{u_c\} \quad (8.46)$$

koja prikazuje srazmjernu ovisnost vektora struje armature, a ujedno i momenta kojeg razvija motor zbog direktne proporcionalnosti momenta i struje armature, o vektoru upravljačkih napona n servomotora.

Na taj način jednadžbe (8.41) i (8.42) postaju:

$$[D] = [D_v], \quad (8.47)$$

$$\{u\} = [K_r] \cdot [K_m] \cdot [G_i] \cdot \{u_c\} = \{\tau\}. \quad (8.48)$$

8.6.1. PD upravljanje sa gravitacijskom kompenzacijom

Osnova za projektovanje upravljačke strukture sa PD upravljanjem i gravitacijskom kompenzacijom poslužila je Lyapunova metoda. Osnovna ideja Lyapunove teorije jeste da utvrdi ponašanje sistema oko ravnotežnog položaja. Ispituje se da li će se sistem nakon djelovanja poremećaja vratiti u ravnotežni položaj. Ukoliko se sistem vrati u ravnotežni položaj radi se o stabilnom sistemu. U protivnom to je nastabilan sistem.

Ako za energetski utemeljenu funkciju dinamičkog sistema postoji ravnotežno stanje tako da je vremenska promjena date funkcije negativna u svim tačkama oko ravnotežnog stanja, a energija opada duž bilo koje systemske trajektorije i dostiže minimum u stanju ravnoteže, za dinamički sistem se kaže da je stabilan.

Zadatak projektovanja upravljačkog sistema robota jeste pronaći parametre regulatora koji će obezbijediti globalnu asimptotsku stabilnost ravnotežnog stanja manipulatora označenog vektorom $\{q_p\}$. Razlika između planirane i ostvarene kinematike upravljanih koordinata definira se vektorom greške:

$$\{e_q\} = \{q_p\} - \{q\}. \quad (8.49)$$

Neka je pozitivno definitna funkcija V definirana sa:

$$V(\{e_q\}) = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T \cdot [A(q)] \cdot \{\dot{q}\} + \frac{1}{2} \{e_q\}^T \cdot [K_p] \cdot \{e_q\}, \quad \forall \{\dot{q}\}, \{e_q\} \neq \{0\} \quad (8.50)$$

odabrana za Lyapunovu funkciju, gdje je $[K_p]$ ($n \times n$) pozitivno definitna matrica, tako da, sa energetskog aspekta, prvi izraz sa desne strane jednačbe (8.50) predstavlja kinetičku, a drugi potencijalnu energiju sistema.

Uz pretpostavku da je vektor $\{q_p\}$ konstantan, diferenciranjem jednačbe (8.50), dobija se:

$$\dot{V} = \{\dot{q}\}^T \cdot [A(q)] \cdot \{\dot{q}\} + \frac{1}{2} \cdot \{\dot{q}\}^T \cdot [\dot{A}(q)] \cdot \{\dot{q}\} - \{\dot{q}\}^T \cdot [K_p] \cdot \{e_q\}. \quad (8.51)$$

Ako se izraz za $[A(q)] \cdot \{\dot{q}\}$ iz jednačbe (8.43) uvede u jednačbu (8.51) dobije se:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \cdot \{\dot{q}\}^T \cdot \left[[\dot{A}(q)] \cdot \{\dot{q}\} - 2\{B(q, \dot{q})\} - \{\dot{q}\}^T \cdot [D] \cdot \{\dot{q}\} + \{\dot{q}\}^T \cdot \{\dot{u}\} - \{C(q)\} - [K_p] \cdot \{e_q\} \right] \quad (8.52)$$

Iz jednačbe (8.52) se vidi da je prvi izraz na desnoj strani jednačbe nula [8], dok je drugi negativno definitan.

Kao što je već ranije naglašeno eliminiranje gravitacijskog djelovanja povećanjem pozicionog pojačanja nije prihvatljivo zbog prisustva šumova i granične strukturne frekvencije, već je potrebno uvođenje dodatnog signala na ulazu aktuatora koji je srazmjeran gravitacijskom momentu. Upravljački će sistem, ovisno o vektoru upravljanih koordinata, računati vektor gravitacijskog djelovanja $\{C(q)\}$ i na ulazu aktuatora generirati dodatne signale koji stvaraju kompenzirajuće napone. Odabirom regulatora sa proporcionalnim djelovanjem i gravitacijskom kompenzacijom čije je upravljačko djelovanje dato sa:

$$\{u\} = \{C(q)\} + [K_p] \cdot \{e_q\}, \quad (8.53)$$

funkcija \dot{V} biće negativno poludefinitna, jer je:

$$\dot{\mathcal{V}} = 0, \quad \text{za} \quad \{\mathcal{q}\} = \{0\}, \quad \forall \{e_q\},$$

što prema prvoj Lyapunovoj teoremi znači da je sistem stabilan.

Isti rezultat biće postignut odabirom regulatora sa PD djelovanjem i gravitacijskom kompenzacijom:

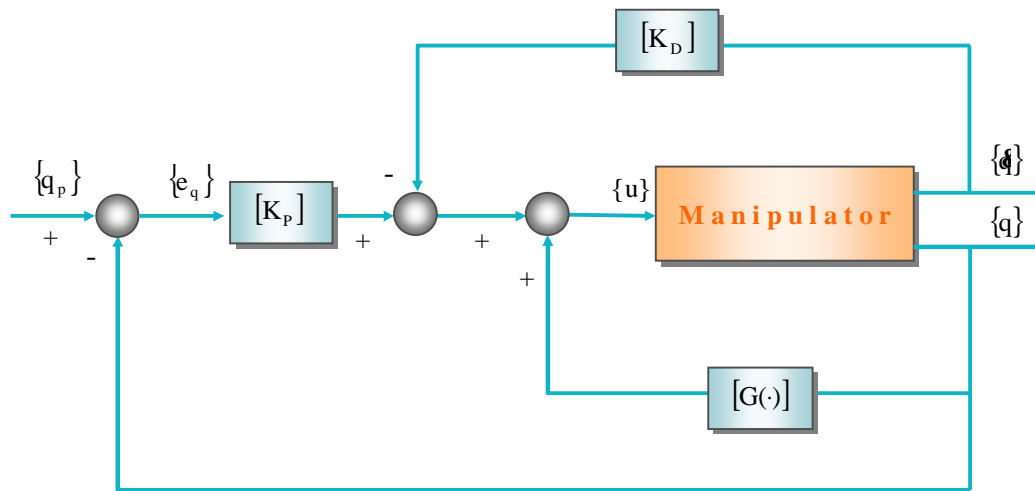
$$\{u\} = \{C(q)\} + [K_P] \cdot \{e_q\} - [K_D] \cdot \{\dot{\mathcal{q}}\}, \quad (8.54)$$

gdje je $[K_D]$ pozitivno definitna matrica.

Uvođenjem jednadžbe (8.54) u (8.52) dobija se:

$$\dot{\mathcal{V}} = -\{\dot{\mathcal{q}}\}^T \cdot ([D] + [K_D]) \cdot \{\dot{\mathcal{q}}\}. \quad (8.55)$$

Jednadžba (8.55) pokazuje da se dodavanjem derivacijskog člana uzrokuje porast apsolutnog iznosa funkcije $\dot{\mathcal{V}}$ duž trajektorije i da to pozitivno utiče na vrijeme odziva sistema. Uvođenje derivacijskog člana naročito dolazi do izražaja kada se radi o manipulatorima kod kojih se osnaživanje zglobova ostvaruje direktno bez reduktora kretanja, jer je mehaničko viskozno prigušenje praktično nula.



Slika 8.26. PD upravljanje sa gravitacijskom kompenzacijom u prostoru zgloba

Za pronalaženje ravnotežnog položaja potrebno je postaviti uvjet da su $\{\mathcal{q}\} \equiv \{0\}$ i $\dot{\mathcal{V}} \equiv 0$. Primjenjujući upravljanje (8.54) na dinamički model robota (8.43) dobija se:

$$[A(q)] \cdot \{\ddot{\mathcal{q}}\} + [B(q, \dot{\mathcal{q}})] \cdot \{\dot{\mathcal{q}}\} + [D] \cdot \{\dot{\mathcal{q}}\} + \{C(q)\} = \{C(q)\} + [K_P] \cdot \{e_q\} - [K_D] \cdot \{\dot{\mathcal{q}}\}.$$

U ravnotežnom položaju vrijedi:

$$\{\mathcal{q}\} \equiv \{0\} \text{ i } \{\ddot{\mathcal{q}}\} \equiv \{0\},$$

pa je:

$$[K_P] \cdot \{e_q\} = \{0\},$$

odnosno:

$$\{e_q\} = \{q_P\} - \{q\} \equiv \{0\},$$

Iz izvedenog se vidi da je bilo koje ravnotežno stanje manipulatora upravljanog PD regulatorom sa gravitacijskom kompenzacijom globalno asimptotski stabilno. Stabilnost sistema je obezbijeđena pri bilo kojem $[K_P]$ i $[K_D]$, sve dok su to pozitivno definitne matrice. Blok shema PD upravljanja sa gravitacijskom kompenzacijom prikazana je na sl. 8.26.

Primjena ovog upravljačkog zakona zahtijeva *on-line* izračunavanje vektora gravitacijskog djelovanja $\{C(q)\}$.

8.7. Upravljanje u operacijskom prostoru

Kod svih do sada navedenih upravljačkih shema željena trajektorija je zadana nizom upravljanih koordinata, bilo da se radi o poziciji, brzini i ubrzanju, pa su se i nastale greške pratile u prostoru zgloba. Upravljačke sheme u prostoru zgloba zadovoljavaju samo ako se robot slobodno kreće u prostoru bez postavljenih ograničenja. Međutim, kada je prihvatnica robota u kontaktu sa elastičnom okolinom, potrebno je vršiti upravljanje i po poziciji i po kontaktnim silama (hibridno upravljanje). S druge strane, sa stanovišta čovjeka-operatera, uobičajeno je da se pozicija i potpuna ili djelimična orijentacija prihvatnice robota u odnosu na neki referentni koordinatni sistem definiraju preko komponenti vektora vanjskih koordinata. U takvim se slučajevima upravljačke sheme projektuju u operacijskom prostoru.

Kod upravljačkih struktura u operacijskom prostoru potreban je inverzni kinematički model koji će omogućiti da se na temelju vanjskih koordinata izračunaju odgovarajuće zglobne varijable. U tom slučaju upravljačka struktura robota mora imati mogućnost da rješava inverznu kinematiku, kao i mogućnost numeričkog diferenciranja radi izračunavanja brzina i ubrzanja.

Upravljačke strukture u operacijskom prostoru znatno su kompleksnije od upravljanja u prostoru radnog zadatka u pogledu njihove numeričke implementacije, jer zahtijevaju složenija izračunavanja. Kod svih upravljačkih struktura uvedena je pretpostavka kontinuiranog rada regulatora u vremenu, odnosno smatra se da kompjuter (koji preuzima ulogu regulatora) obavlja sva izračunavanja potrebna za implementaciju upravljačkog zakona trenutno, tj. beskonačnom brzinom.

Međutim, sva izračunavanja se obavljaju za određeno vrijeme. Razmatranja o realnoj brzini rada kompjutera nameću pitanje koliko brz rad je i dovoljan, kako bi se pretpostavka vremenske kontinualnosti smatrala tačnom. Imajući u vidu veliki napredak

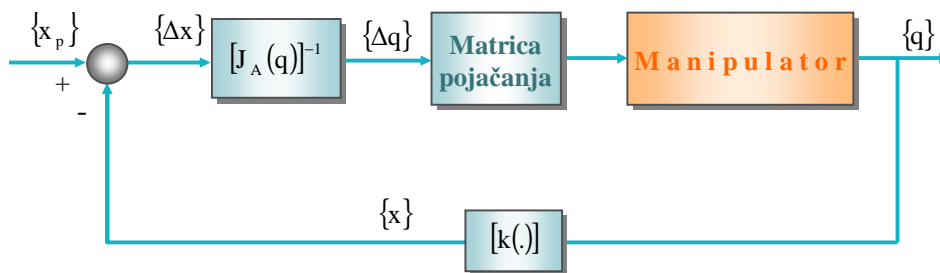
kod mikroprocesorskih sistema, složeni upravljački zakoni sa kompleksnim izračunavanjima dobijaju praktičan smisao.

Sve upravljačke strategije realizirane digitalnim regulatorom izvršavaju se sa određenim faktorom uzorkovanja (engl. sampling rate). To znači da digitalni senzori daju diskretne informacije u vremenu. Dobijene informacije regulator obrađuje, generira upravljačke signale i prosljeđuje ih ka aktuatorima.

Dobijanje informacija sa senzora kao i prosljeđivanje upravljačkih signala ka aktuatorima nisu obavljani kontinuirano u vremenu, već sa konačnim faktorom uzorkovanja. Za analizu uticaja kašnjenja, kao posljedice utrošenog vremena za neophodna izračunavanja, te konačnog faktora uzorkovanja, potrebno je koristiti alate iz područja digitalnog upravljanja, gdje derivacije po vremenu postaju razlike.

Razvijen je kompletan set alata da odgovori na pitanje stabilneta, kao i položaja polova tih sistema. Teorija digitalnog upravljanja predmetom je brojnih istraživanja. Ideje i metodi teorije diskretnog upravljanja često su složeni za primjenu kod nelinearnih sistema. Diskretni ekvivalent za složeni dinamički model često je nemoguć. Diskretni vremenski model je moguć ako se koriste serije rješenja za diferencijalne jednačbe ili se prave njihove aproksimacije. Analiza diskretnog upravljačkog modela robota je vrlo složena i ima zadatak da ustanovi uticaj tačnog faktora uzorkovanja na njegove performanse. Uopšteno govoreći, pretpostavka da sva izračunavanja mogu biti izvršena dovoljno brzo i da se može smatrati da sistem radi kontinuirano u vremenu je ispravna.

Upravljačke sheme u operacijskom prostoru temelje se na usporedbi ulaznih varijabli kojima je definirana željena trajektorija u operacijskom prostoru sa odgovarajućim izmjerenim izlaznim varijablama.

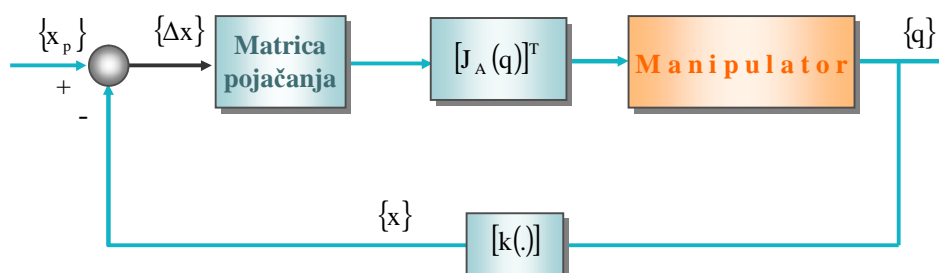


Slika 8.27. Blok shema upravljanja robotom temeljena na inverznom Jacobianu

Jedna od takvih upravljačkih strategija je upravljanje temeljeno na inverznom Jacobianu (engl. Jacobian inverse control), čija je shema prikazana na sl. 8.27. Sa sheme se vidi da se lokacija prihvatnice u operacijskom prostoru upoređuje sa željenom vrijednosti. Razlika između željene i ostvarene vrijednosti se preko inverznog Jacobiana transformira u odstupanje u zglobnim varijablama. Upravljački ulaz generaliziranih sila može biti izračunat na temelju ovih odstupanja pomoću matrice pojačanja, što rezultira redukcijom odstupanja u prostoru zgloba, odnosno u operacijskom prostoru. Ovakva upravljačka struktura zapravo omogućuje da krajnji sistem djeluje kao mehanički sistem

sa generaliziranom n -dimenzionom oprugom u prostoru zgloba, čija je konstantna krutost određena sa matricom pojačanja.

Konceputalno slična shema prikazana je na sl. 8.28. Ovdje se greška u operacijskom prostoru najprije pojača preko matrice pojačanja, a izlaz iz ovog bloka može biti potom razmatran kao elastična sila što je stvara generalizirana opruga čija je funkcija da poništi pozicijsku grešku u operacijskom prostoru. Ova sila potom može biti transformirana preko transponovanog Jacobiana u generaliziranu silu u prostoru zgloba. Zato se ova upravljačka shema naziva upravljanjem temeljenim na transponovanom Jacobianu.



Slika 8.28. Blok shema upravljanja robotom temeljena na transponovanom Jacobianu

8.7.1. PD upravljanje sa gravitacijskom kompenzacijom

Za planiranu lokaciju prihvatnice u operacijskom prostoru $\{x_p\}$ potrebno je projektovati upravljačku strukturu koja će omogućiti da greška definirana sa:

$$\{e_x\} = \{x_p\} - \{x\} \quad (8.56)$$

asimptotski teži nuli. Za Lyapunovu funkcije neka je odabrana slijedeća pozitivno definitna kvadratna forma:

$$V(\{e_x\}) = \frac{1}{2} \cdot \{\dot{q}\}^T \cdot [A(q)] \cdot \{\dot{q}\} + \frac{1}{2} \cdot \{e_x\}^T \cdot [K_p] \cdot \{e_x\} > 0, \quad \forall \{\dot{q}\}, \{e_x\} \neq \{0\} \quad (8.57)$$

gdje je $[K_p]$ simetrična pozitivno definitna matrica. Diferenciranjem jednačbe (8.57) po vremenu dobija se:

$$\dot{V} = \{\dot{q}\}^T \cdot [A(q)] \cdot \{\dot{q}\} + \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T \cdot [\dot{A}(q)] \cdot \{\dot{q}\} + \{\dot{e}_x\}^T \cdot [K_p] \cdot \{e_x\}. \quad (8.58)$$

Kako veza između brzina u operacijskom i prostoru zgloba može biti definirana preko analitičkog Jacobiana sa:

$$\{\dot{x}\} = [J_A(q)] \cdot \{\dot{q}\},$$

te kako je $\{\mathbf{x}_p\} = \{0\}$ to vrijedi:

$$\{\mathbf{e}_x\} = -[J_A(q)] \cdot \{\mathbf{q}\},$$

odnosno:

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{q}\}^T \cdot [A(q)] \cdot \{\mathbf{q}\} + \frac{1}{2} \{\mathbf{q}\}^T \cdot [A(q)] \cdot \{\mathbf{q}\} - \{\mathbf{q}\}^T \cdot [J_A]^T \cdot [K_P] \cdot \{\mathbf{e}_x\}. \quad (8.59)$$

Ako se izraz za $[A(q)] \cdot \{\mathbf{q}\}$ iz jednadžbe (8.43) uvede u jednadžbu (8.59) dobija se:

$$\mathcal{V} = -\{\mathbf{q}\}^T \cdot [D] \cdot \{\mathbf{q}\} + \{\mathbf{q}\}^T \cdot \{\mathbf{u}\} - \{C(q)\} - [J_A(q)]^T \cdot [K_P] \cdot \{\mathbf{e}_x\} + \frac{1}{2} \{\mathbf{q}\}^T \cdot [[A(q)]\{\mathbf{q}\} - B(q, \mathbf{q})]. \quad (8.60)$$

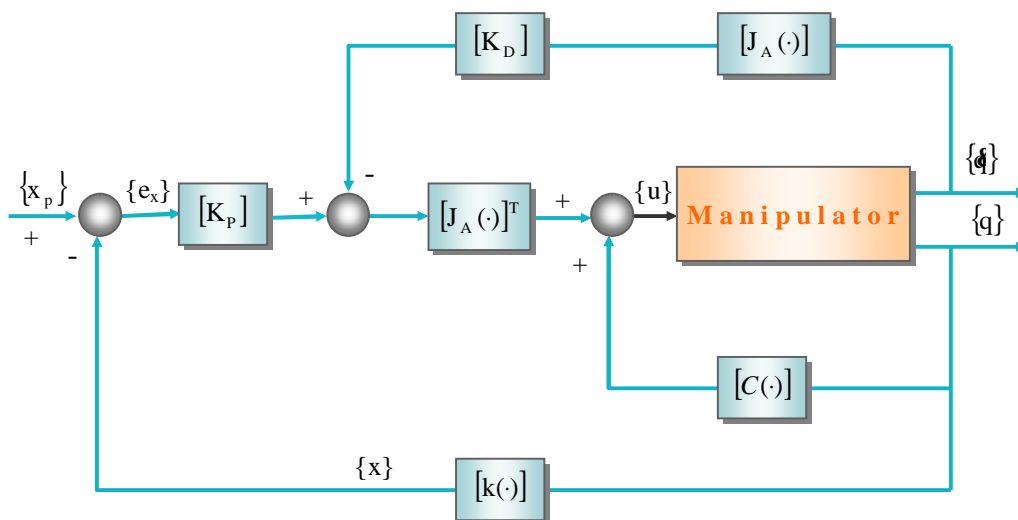
Posljednji član sa desne strane jednak je nuli [8]. Iz jednadžbe (8.60) slijedi logičan odabir upravljačkog zakona datog sa:

$$\{\mathbf{u}\} = \{C(q)\} + [J_A(q)]^T \cdot [K_P] \cdot \{\mathbf{e}_x\} - [J_A(q)]^T \cdot [K_D] \cdot [J_A(q)] \cdot \{\mathbf{q}\}. \quad (8.61)$$

Uvodeći ovu jednadžbu u (8.60) dobija se:

$$\mathcal{V} = -\{\mathbf{q}\}^T \cdot [D] \cdot \{\mathbf{q}\} + \{\mathbf{q}\}^T \cdot [J_A(q)]^T \cdot [K_D] \cdot [J_A(q)] \cdot \{\mathbf{q}\}. \quad (8.62)$$

Upravljačka struktura PD upravljanja sa gravitacijskom kompenzacijom prikazana je na sl. 8.29. Sa blok sheme se vidi da upravljački zakon definiran sa (8.61) izvršava nelinearnu kompenzaciju gravitacionih sila u prostoru zgloba i linearno PD djelovanje u operacijskom prostoru.



Slika 8.29. PD upravljanje sa gravitacijskom kompenzacijom u radnom prostoru

Iz jednadžbe (8.62) se vidi da za bilo koji sistem trajektorija, Lyapunova funkcija opada za $\{\dot{\mathbf{q}}\} \neq \{0\}$, a zatim sistem dostiže ravnotežni položaj. Primjenom upravljačkog zakona definiranog sa (8.61) na dinamički model robota (8.43) dobija se:

$$[A(q)] \cdot \{\dot{\mathbf{q}}\} + \{B(q, \dot{\mathbf{q}})\} + [D] \cdot \{\dot{\mathbf{q}}\} + \{C(q)\} = \{C(q)\} + [J_A(q)]^T \cdot [K_P] \cdot \{e_x\} - [J_A(q)]^T \cdot [K_D] \cdot [J_A(q)] \cdot \{\dot{\mathbf{q}}\}.$$

Kako su u ravnotežnom stanju brzina i ubrzanje upravljanih koordinata jednaki nuli, odnosno kako je $\{\dot{\mathbf{q}}\} \equiv \{0\}$ i $\{\ddot{\mathbf{q}}\} \equiv \{0\}$, to iz prethodne jednadžbe slijedi da je ravnotežno stanje definirano sa:

$$[J_A(q)]^T \cdot [K_P] \cdot \{e_x\} = \{0\}. \quad (8.63)$$

Ukoliko su $\{x\}$ i $\{\dot{x}\}$ mjereni direktno u operacijskom prostoru, a $[k(q)]$ i $[J_A(q)]$ označavaju funkcije upravljanih koordinata, potrebno je *on-line* mjerenje $\{q\}$ radi izračunavanja $[k(q)]$ i $[J_A(q)]$. Međutim, kod upravljačkih struktura sa indirektnim mjerenjem regulator mora rješavati direktni kinematički model.

Upravljačka struktura temeljena na inverznoj dinamici navedena je u [7,8].

LITERATURA:

- [1] Anderson, R.J.; Spong, M.W.: *Hybrid Impedance Control of Robotic Manipulators*, IEEE J. Robotics and Automation, vol.4, pp. 549-556, 1988.
- [2] Chen, L., Chalhoub, N.G.: *Modeling and Control of Transverse and Torsional Vibrations in a Spherical Robotic Manipulator: Theoretical and Experimental Results*, *Journal of Dynamic System, Measurement and Control*, (str.421-430), 1997.
- [3] Craig, J. J.: *Introduction to robotics, mechanics and control*, 2nd, USA, Addison – Wesley Publishing company, 1997.
- [4] Čohodar, M.; Kulenović, M.; Voloder, A.: *Kinematic Modelling of Robot Arm and Analysis its Singularity*, 12th DAAAM International symposium, Jena, Germany, 2001.
- [5] Čohodar, M.; Kulenović, M.: *The contribution to the development of nominal control of robot by software*, 11th DAAAM International symposium, Opatija, Croatia, 2000.
- [6] Kafriksen, E.; Stephans, M.: *Industrial robots and robotics*, RestonPublishing Company, Virginia, 1984.
- [7] Leatham-Jones, B.: *Elements of Industrial Robotics*, Pitman publishing, London, 1987.
- [8] Novaković, B.: *Metode vođenja tehničkih sistema, primjena u robotici, fleksibilnim sistemima i procesima*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.
- [9] Petrić, J.: *Upravljanje temeljeno na inverznom modelu dinamike*, doktorska teza, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 1994.
- [10] Sciavicco, L.; Siciliano, B.: *Modeling and control of robot manipulators*, University of Naples, Naples, Italy, McGraw-Hill Series in Electrical Engineering Series, 1996.
- [11] Shoham, M.: *A Textbook of robotics: II – Structure, Control and Operation*, Kogan Page Ltd, London, 1986.
- [12] Stryk, O.; Schlemmer, M.: *Optimal Control of the Industrial Robot Manutec r3*, Computational Optimal Control, International Series of Numerical Mathematics 115, (str.367-382), 1994.
- [13] Šurina, T.; Crneković, M.: *Industrijski roboti*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.
- [14] Thomas, S.; Bandyopadhyay, B.: *Position Control of Single Link Flexible Manipulator by Variable Structure Model Following Control*, *Journal of Dynamic System, Measurement and Control*, (str.330-335), 1997.
- [15] Vukobratović, M.; Stokić, D.; Kirčanski, N.: *Non-Adaptive and Adaptive Control of Manipulation Robots*, Springer – Verlag, Berlin, 1985.
- [16] Warnecke, H.J.; Schraft, R.D.: *Industrial Robots, Application Experience*, IFS Publicetions Ltd, Bedford, 1982.
- [17] Yim, W.; Singh, S.N.: *Nonlinear Inverse and Predictive End Point Trajectory Control of Flexible Macro-Micro Manipulators*, *Journal of Dynamic System, Measurement and Control*, (str.412-420), 1997.

Programiranje u robotici



Maida Čohodar, Mašinski fakultet Sarajevo

Imajući u vidu složenost zadataka koje robot obavlja (zavarivanje, farbanje, opsluživanje alatnih mašina, montaža dijelova u sklopove i sl.), te potrebu brzog prilagođavanja novim radnim zadacima, osnovni preduvjet uvođenja industrijskih robota u proizvodne sisteme jeste mogućnost reprogramiranja njegovog rada.

Kako bi izvršio potrebnu korisnu radnju robot mora biti programiran. Robotskim se programom najčešće definira trajektorija koju slijedi prihvatnica robota (engl. end-effector), kao i robotsko djelovanje kojim se omogućuje izvođenje kompletnog radnog ciklusa. Primjeri ovog djelovanja su otvaranje i zatvaranje prihvatnice, donošenje i izvođenje jednostavnih logičkih odluka, kao i komunikacija sa drugim komponentama u fleksibilnoj proizvodnoj ćeliji. Kod novijih generacija robota sve više se nastoji, umjesto programiranja kretanja, programirati radni zadatak kojeg robot treba obaviti.

9.1. Tipovi upravljanja

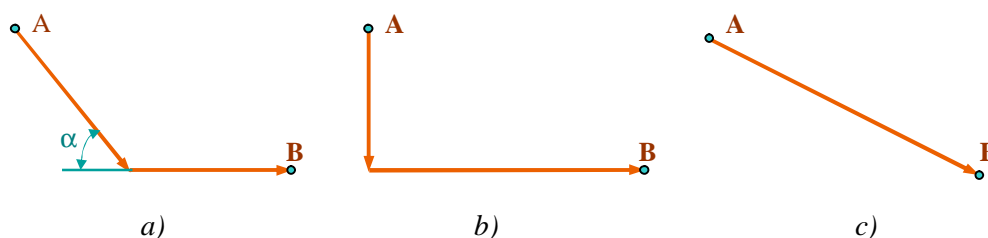
U ovisnosti o nivou sofisticiranosti upravljačke jedinice robotskog sistema, postoje dva tipa upravljanja i to:

- tačka po tačka – PTP (engl. point to point) i
- konturno ili upravljanje sa kontinuiranom putanjom – CP (engl. continuous path).

Navedeni načini upravljanja pojavljuju se i kod NC alatnih mašina.

9.1.1. Upravljanje “tačka po tačka” (PTP)

Kod robota tipa “tačka po tačka” trajektorija prihvatnice se definira nizom tačaka koje se nalaze na trajektoriji preko kinematike upravljanih ili vanjskih koordinata. Ukoliko se trajektorija definira preko vanjskih koordinata, upravljačka će jedinica, primjenom inverzne kinematike, izračunati odgovarajuće upravljane koordinate. Što je veći broj tačaka kojima se definira željena trajektorija, to će kretanje prihvatnice biti tačnije. S druge strane, veći broj tačaka znači i veći broj potrebnih izračunavanja, a njihov maksimalan broj određen je raspoloživom memorijom upravljačke jedinice. Između definiranih tačaka, ovisno o tipu robota, kretanje prihvatnice može biti realizirano na različite načine, kao što je prikazano na sl. 9.1.



Slika 9.1. Načini kretanja prihvatnice kod PTP programiranja

Na sl. 9.1. prikazan je primjer kretanja u ravni. U prvom prikazanom slučaju postoji simulatano kretanje u svim osama do postizanja ordinate tačke B, a potom se ostvaruje kretanje samo po jednoj koordinati do dosezanja tačke B. Upravljačka struktura je relativno jednostavna, a kod ovakvog načina upravljanja po osama* postoji opasnost dovođenja u koliziju sa kretanjima drugih komponenti, posebno ako je npr. robot sastavni dio fleksibilne proizvodne ćelije koju mogu činiti više NC alatnih mašina i robota.

U slučaju PTP upravljanja, sl. 9.1.b, kretanje se ostvaruje najprije po jednoj, pa zatim po drugoj koordinati. Ovo je najduži oblik kretanja, ali je upravljačka jedinica vrlo jednostavna.

Kod PTP upravljanja, prikazanom na sl. 9.1.c, prihvatnica će najbrže, jer se kreće po najkraćoj mogućoj putanji, iz tačke A doći u tačku B. Upravljačka jedinica je složenija nego u prethodna dva slučaja. Mora imati ugrađenu linearnu interpolaciju kojom se utvrđuje brzina kretanja po pojedinim osama tako da se prihvatnica uvijek kreće po pravoj liniji.

* Ovaj način PTP upravljanja najčešći je kod NC alatnih mašina.

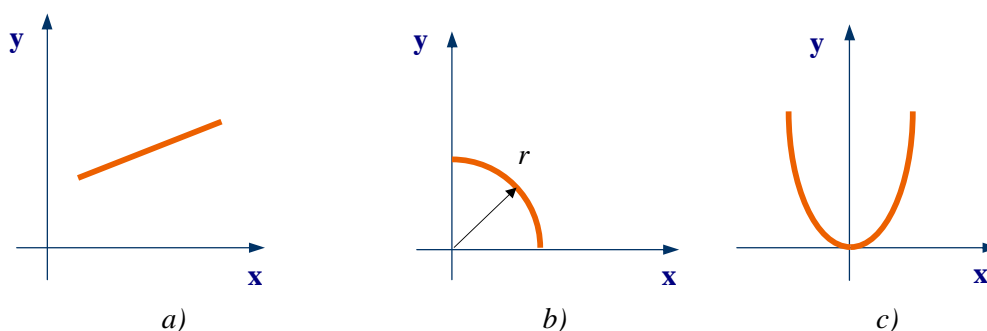
9.1.2. Upravljanje sa kontinuiranom putanjom (CP)

Upravljački sistemi CP tipa upravljaju simulatanim kretanjima pojedinih osa omogućujući da se prihvatnica kreće od jedne do druge tačke manipulacijskog prostora po utvrđenoj zakonitosti.

Metod na temelju kojeg upravljački sistemi robota, upravljanjem kretanjima osa pomjera prihvatnicu od jedne do druge programirane tačke naziva se interpolacijom.

Interpolator, na osnovu koordinata početne i krajnje tačke, računa određeni broj međutačaka kroz koje će se kretati prihvatnica. U ovisnosti da li međutačke definiraju pravac, dio kruga ili parabole postoje tri tipa interpolacije** i to:

- linearna,
- kružna i
- parabolična.



Slika 9.2. Tipovi interpolacije, a) linearna, b) kružna, c) parabolična

Najveći broj robota posjeduje linearnu i kružnu (sl. 9.2.a i b), dok je kod nekih prisutna i parabolična interpolacija.

Linearna interpolacija je najjednostavnija i ostvaruje se po linearnoj zakonitosti:

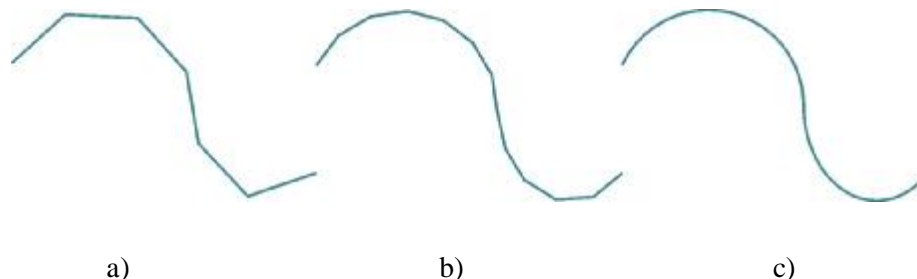
$$y = kx + n.$$

Na osnovu poznatih koordinata početne i krajnje tačke određenog segmenta trajektorije upravljačka jedinica računa koordinate međutačaka. Prolazeći kroz njih ostvaruje se pravolinijsko kretanje. Ukoliko je potrebno realizirati kretanje po krugu, kružnom luku ili nekoj krivolinijskom segmentu trajektorije, dijelovi trajektorije biće aproksimirani pravcima, tako da je krajnja tačka jednog pravolinijskog dijela ujedno prva tačka slijedećeg. Što je veći broj međutačaka, to će aproksimacija krivolinijske trajektorije biti tačnija, sl. 9.3.

Međutim, nedostatak ove interpolacije je potreba za izuzetno velikim brojem međutačaka, što uzrokuje i veliki broj programskih sekvenci.

** Kod NC alatnih mašina koriste senavedena tri načina interpolacije.

Kod kružne interpolacije kretanje između dvije definirane tačke trajektorije ostvaruje se po kružnom luku, koji se aproksimira malim linearnim segmentima visoke rezolucije.



Slika 9.3. Primjer linearne interpolacije: a) sa šest segmenata, b) sa dvanaest segmenata, c) trajektorija koju treba realizirati

Programom je potrebno definirati koordinate ciljne tačke i radijus kružnog luka. Za izračunavanje međutačaka koristi se jednačba kruga:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ovaj tip interpolacije primjenjuje se kod izvođenje kretanja i po pojedinim segmentima krivolinijske putanje, pri čemu se ti segmenti aproksimiraju kružnim lukovima.

Kod kretanja po slobodnoj krivulji najbolje je primijeniti parabolični interpolator, kod kojeg se pomjeranje odvija po paraboličnoj zakonitosti:

$$y = k \cdot x^2,$$

Primjenom ovog interpolatora kretanje između tri tačke koje ne leže na pravcu odvijace se po cijeloj ili dijelu parabole. Odnos broja međutačaka kod linearne i parabolične interpolacije za istu trajektoriju je 50:1 [7].

9.2. Tipovi programiranja

Postoji više načina programiranja rada robota, a ostvaruje se unosom programskih instrukcija u upravljačku jedinicu robotskog sistema. Važno je napomenuti da neki od načina programiranja zahtijevaju vrlo malo ili nikakvo znanje od korisnika što je bitno u industrijskoj praksi. U ovisnosti o načinu programiranja rada roboti se dijele na:

1. Robote sa graničnim prekidačima,
2. "Playback" robote,
3. Robote sa fazom učenja i off-line programiranjem
4. Robote sa strukturnim programiranjem i
5. Robote sa programiranjem zadatka.

9.2.1. Roboti sa graničnim prekidačima

Ovo su roboti prve generacije, sa upravljanjem tipa “tačka po tačka”. Kod njih se “programiranje” ostvaruje postavljanjem graničnika (električnih, pneumatskih prekidača i sl.) kojima se definira kretanje po pojedinima osama. Ne postoje servo sistemi, niti povratne petlje po poziciji i brzini. Senzorski sistem je izuzetno ograničen i sveden samo na nekoliko senzora unutrašnjeg stanja. Samim tim, roboti ovog tipa ne mogu donositi nikakve odluke. Odlikuju se izuzetnom nefleksibilnošću, jer prelazak na izvršavanje drugog zadatka zahtijeva fizičku intervenciju operatera u smislu postavljanja novih graničnika za definiranje novog željenog kretanja. Najčešće su roboti ovog tipa tzv. *pick and place* roboti i to su uglavnom pneumatske izvedbe.

9.2.2. “Playback” roboti

“Playback” roboti su opremljeni digitalnom upravljačkom jedinicom u čiju se memoriju snimaju robotski programi. Oni ostaju pohranjeni u memoriji dok se god program izvodi. Za robote ovog tipa svojstvena je faza učenja tokom koje robot pamti potrebna kretanja koje potom može potreban broj puta ponavljati, pa zato i naziv “playback” roboti. Za njih je svojstveno on-line programiranje. Faza učenja robota može se izvoditi:

- direktno i
- indirektno.

Kod direktnog učenja vješt operater - ekspert vodi prihvatnicu robota kroz manipulacijski prostor duž željene trajektorije, odnosno vrši radnje kao kada bi i sam robot obavljao dati zadatak. Robot, koji je u modu za učenje, vrši periodično pamćenje tačaka (određeno periodom uzorkovanja) duž željene trajektorije, te stanja prihvatnice (otvoreno / zatvoreno), kao i periodično generiranje programa. Podaci se pohranjuju u memoriju upravljačke jedinice i nakon što je završena faza učenje, robot se prebacuje u izvršni mod. Tada je robot u stanju da ponovi prethodno naučenu kretnju obavljajući pri tome i planirani zadatak. Brzina kojom se prihvatnica kreće tokom faze učenja ne mora biti jednaka brzini rada robota.

U slučaju da robot ima velike gabarite i da je operateru teško voditi njegovu prihvatnicu po željenoj trajektoriji, robot se oprema manjim, nadomjesnim robotom – pilotom, koji je iste strukture kao i veliki, a služi samo za izvođenje faze učenja. Operater, naime, vodi prihvatnicu manjeg robota kroz željene sekvence kretanja, svi podaci se periodično pohranjuju u zajedničku upravljačku jedinicu, tako da je pravi robot u stanju reprodukovati željeno kretanje.

Ovdje ne postoji gotovo nikakva, ili je u pitanju vrlo mala potreba za intervencijom senzora u realnom vremenu tokom faze učenja. Moguće je CP programiranje, pa se ovi roboti najčešće koriste za zavarivanje, farbanje i sl. Ne zahtijeva se od korisnika gotovo nikakvo znanje o robotima, niti kompleksno matematičko opisivanje trajektorije. Ovaj, stariji način “programiranja” robota ima niz nedostataka:

- Metod je neprimjeniv kada robot treba djelovati u okruženju opasnom po čovjeka.
- Brzina “programiranja“ ovisi o vještini, osjećanjima, brzini rada operatera.

- Zbog prisustva čovjeka nekada je nemoguće sinhronizirati kretanja svih komponenti u radnom prostoru (npr. kada je robot dio fleksibilne proizvodne ćelije).
- Pristup je neefikasan sa aspekta korištenja raspoložive memorije. Naime, iste sekvence kretanja nemoguće je ponavljati izvršavanjem već postojećeg dijela programa, već se moraju ponovo isprogramirati, što doprinosi stvaranju vrlo dugih programa.

Kod indirektnog izvođenja faze učenja koristi se privjesak za učenje sa komandnom palicom (engl. teach pendant). Naime, kod ove faze učenja robot se prebacuje u mod za učenje, a operater daljinskim upravljanjem vodi prihvatnicu duž potrebne trajektorije. Po dostizanju željene tačke, operater pomoću privjeska za učenje, snima podatke sa unutrašnjih senzora pozicije zglobova u memoriju upravljačke jedinice. Snimljenim koordinatama se pridružuje određeni naziv, najčešće broj, tako da je tačka definirana brojem u memoriji upravljačke jedinice robotskog sistema. Pomoću privjeska za učenje unose se i programske naredbe.

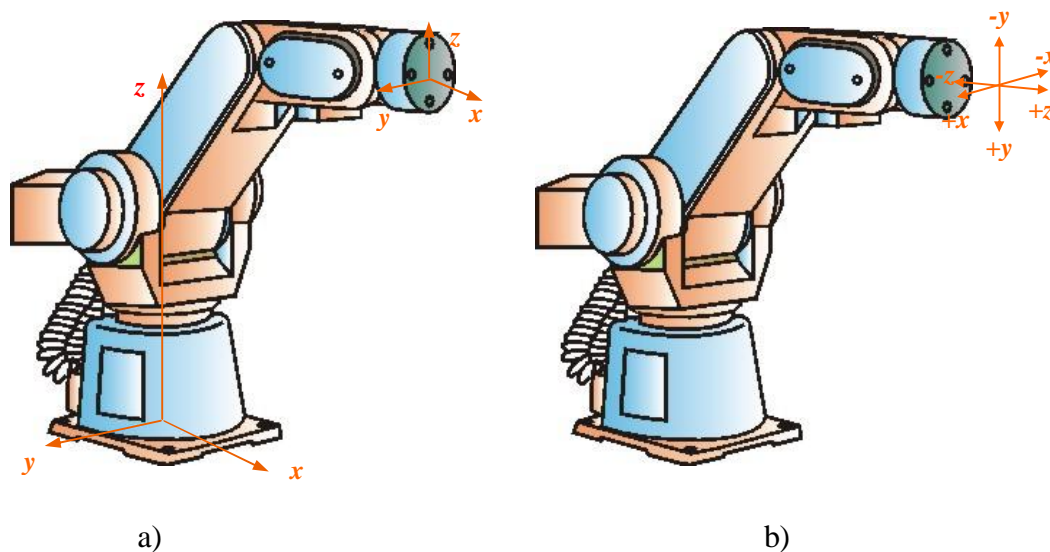
Za razliku od predhodnog pristupa, ovdje je moguće izvođenje faze učenja robota i u opasnim sredinama jer se učenje odvija daljinski, a direktno je primjenjivo kod teških i robusnih robota. Također, bolje je iskorištenje raspoložive memorije jer, ovisno o tipu upravljačke jedinice programski može biti izveden uvjetni ili bezuvjetni skok na pojedine sekvence programa, što omogućuje izbjegavanje programiranja istog kretanja više puta. Nedostatak ove metode je odvratanje pažnje operatera od procesa, radi odabira odgovarajuće tipke na privjesku za učenje.

Jedan od nedostataka, u oba slučaja, kod “playback” robota je neproduktivnost robota tokom faze učenja, dok je, s druge strane, način definiranja radnog zadatka vrlo jednostavan.

9.2.3. Roboti sa fazom učenja i off-line programiranjem

Kod robota sa off-line programiranjem definiranje koordinata tačaka planirane trajektorije se izvodi pomoću privjeska za učenje (engl. teaching box), dok programe pišu programeri koristeći se robotskim programskim jezicima. Ovdje se radi o upravljanju tipa “tačka po tačka”. Na privjesku za učenje nalazi se displej za prikazivanje broja tačke manipulcijskog prostora tokom faze učenja, dok će tokom faze izvođenja programa biti prikazan broj programske linije koja se izvodi. Mogu biti prikazani i neki statusni pokazatelji. Na privjesku za učenje nalaze se tipke za upravljanje stanjem prihvatnice, kretanjima u zglobovima ili vanjskim koordinatama, tipka za resetovanje rada robota, tipka koja omogućuje izvođenje programa “korak po korak” i sl. Opširnije o mogućnostima privjeska za učenje dato je u slijedećem dijelu na primjeru privjeska za učenje robota RV-M1.

Tokom faze učenja, prihvatnica se, postepenim pomjeranjima pomoću tipki privjeska za učenje, dovodi u željenu tačku. Tačka se pod određenim brojem pohranjuje u memoriju upravljačke jedinice, kao i kod “playback” robota sa indirektnom fazom učenja. Ukupan broj pohranjenih tačaka kojima se definira trajektorija ograničen je raspoloživom memorijom. Kod ovih robota mogu se pojaviti poteškoće želi li se prihvatnica pomjerati po pravoj liniji posebno kod robota sa revolutnim zglobovima. Naime, kretanje po pravoj liniji prirodno je kod robota sa kartezijskom strukturom, dok se kod robota sa revolutnim zglobovima mora koristiti linearna interpolacija.



Slika 9.4. Različiti načini upravljanja kretanjima osa

Problem se može riješiti primjenom dvije metode upravljanja kretanjem i to:

1. primjenom vanjskog koordinatnog sistema (engl. world coordinate system) i
2. primjenom koordinatnog sistema alata (engl. tool coordinate system).

U prvom slučaju, prikazanom na sl. 9.4.a, definira se vanjski koordinatni sistem pričvršćen za osnovu robota, a u središtu se prihvatnice definira novi koordinatni sistem sa istom orijentacijom. Na sl. 9.4.b prikazan je koordinatni sistem alata čiji se položaj i orijentacija definiraju u odnosu na površinu za koju je pričvršćena prihvatnica. Ova dva sistema upravljanja kretanjem svrsishodna su samo kada robot ima sposobnost pomijeranja duž prave linije. U oba slučaja robot se, primjenom privjeska za učenje, prebacuje u odgovarajući mod rada, koji omogućuje da se kretanje prihvatnice ostvaruje duž osa navedenih koordinatnih sistema.

U upravljačku jedinicu robota unosi se program preko kompjutera, pojedinačno instrukcija po instrukcija, ili automatski uz postojanje namjenskih softwera sa navedenom mogućnosti. U tom slučaju, pisanje programa može biti izvršeno i na nekom drugom mjestu, a program će putem magnetnog medija ili mrežno biti proslijeđen kompjuteru povezanom za upravljačku jedinicu robota. Program se oslanja na pohranjene tačke u memoriji upravljačke jedinice.

Roboti sa off – line programiranjem i fazom učenja predstavljaju produžetak “playback” robota sa indirektnim učenjem, uz otklanjanje mnoštva nedostataka u pogledu povećane tačnosti, sinhroniziranosti kretanja sa drugim komponentama, uvođenju povratnih petlji i sl. Osnovne prednosti robota sa off-line programiranjem u odnosu na prethodne su:

- programiranje je vrlo jednostavno, jer uglavnom sintaksa instrukcije sa engleskom kraticom upućuju na radnju koju treba obaviti,
- modularno programiranje omogućuje korištenje rutina iz biblioteka programa,
- moguća je sinhronizacija svih kretanja u radnom prostoru što posebno dolazi do izražaja kada je robot sastavni dio fleksibilnih proizvodnih sistema,
- informacije sa senzora ili CAD/CAM informacije mogu biti ugrađene u program što dopušta ugradnju logike u program, odnosno mogućnosti odlučivanja,
- program se može napisati bez pristupa robotu,
- postupcima simulacije trajektorije se mogu prekontrolisati, optimizirati, pa se izbjegavaju eventualna oštećenja robotskog sistema kod izvođenja programa bez prethodne kontrole,
- moguće je uvjetno djelovanje robota, na temelju ugrađenih povratnih petlji.

9.2.4. Roboti sa strukturnim programiranjem

Kod svih do sada opisanih načina programiranja težište je bilo na opisivanju trajektorije koju treba da slijedi prihvatnica, tako da će izvođenjem kretanja robot izvršiti planirani zadatak. Drugim riječima, korišteni su programski jezici orijentirani programiranju kretanja.

Kod robota sa strukturnim programiranjem postoji mogućnost definiranja položaja predmeta primjenom vizuelnih sistema, a omogućuju definiranje kontinuirane putanje. Programiranje se nastoji okrenuti zadatku. Programi upotrijebljeni za robote ovog tipa nastali su razvojem kompjuterskih programskih jezika i imaju filozofiju strukturnog programiranja. Npr. robotski program AL temelji se na sintaksi kompjuterskog programskog jezika ALGOL, HELP je produžetak PASCALa. Nedostatak im je što od korisnika zahtijevaju određeni nivo znanja o robotskim jezicima.

9.2.5. Roboti sa programiranjem zadatka

Za razliku od svih dosadašnjih tipova robota čije je korištenje bilo uvjetovano postojanjem dobro organizirane sredine, roboti sa programiranjem zadatka imaju mogućnost djelovanja u neorganiziranim sredinama. Opremljeni su vrlo snažnim senzorskim sistemom. U prvom redu to su vizuelni sistemi koji prikupljaju informacije o rasporedu predmeta u manipulacijskom prostoru robota. S obzirom da je postupak obrade informacija sa vizuelnih senzora najčešće izuzetno složen, a s druge strane, da bi te informacije bile raspoložive u realnom vremenu, robotski sistem mora biti opremljen vrlo brzom sofisticiranom upravljačkom jedinicom sa razvijenim strateškim modelom upravljanja.

Roboti ovog tipa moraju imati intenzivnu komunikaciju sa okolinom, imaju mogućnost donošenja odluka i u determinističkim i nedeterminističkim sredinama, pa su roboti multivarjabilni vođeni sistemi.

Za programiranje rada ovih robota koriste se programski jezici čije naredbe označavaju radni zadatak kojeg treba obaviti. Npr. robotski jezik AUTOPASS sadrži instrukciju koja od robota zahtijeva da prenese komad sa jednog na drugo mjesto, ne određujući pri tome kako će se prikupiti informacija o položaju radnog komada i sl.

Danas se još uvijek roboti ovog tipa šire ne koriste i predmetom su brojnih istraživačkih radova.

9.3. Robotski jezici

Danas postoji mnoštvo programskih jezika namijenjenih programiranju rada robota. Ne postoji apsolutni standard za robotske jezike. Neki robotski jezici nastali su od programskih jezika namijenjenih programiranju NC alatnih mašina, dok su drugi razvijeni iz kompjuterskih programskih jezika. U prvom slučaju programske jezike su razvili uglavnom proizvođači opreme, dok su u drugom slučaju oni nastali na institutima za robotiku kroz istraživački rad. Oni su uglavnom napisani za određene robotske familije.

Pod robotskim programom naziva se skup instrukcija čijim će izvršavanjem upravljačka jedinica robotskog sistema omogućiti da kroz programirane kretnje robot obavi planirani zadatak.

Tabela 9.1. Robotski jezici

Robotski jezik	Proizvođač	Karakteristika
Funky	IBM	Omogućuje komunikaciju sa dodatnom opremom, a izvođenje faze učenja i unos instrukcija mogući su preko tastature.
VAL (VicArm Language)	Stanford University	Razvijen 1973. godine. Temelji se na robotskom jeziku WAVE. Omogućuje definiranje kontinuirane putanje.
AUTOPASS	IBM	Temelji se na programskom jeziku PL/I. Omogućuje višeprosorski rad, obradu informacija sa senzora, kao i rad više robota.
AL (Arm language)	Stanford Artificial Intelligence Lab.	Temelji se na programskom jeziku ALGOL. Omogućuje vođenje prihvatnice po putanji, brzini, interpolaciju putanje, izuzetno je složen i koristi se u istraživačke svrhe.
LM (Langage de Manipulatio)	IMAG robotics laboratory at the University of Grenoble	Razvijen je 1979. godine. Prihvata glavne koncepte jezika AL (paralelno programiranje), ali se temelji na mikrokompjuteru.

Programiranje tekstualnim programskim jezicima ima prednosti u odnosu programiranje npr. "playback" robota, a ogledaju se u slijedećem:

- bolje su iskorištene senzorske sposobnosti,
- poboljšana je mogućnost upravljanja eksternom opremom,
- unaprijeđena je primjena robota u fleksibilnim proizvodnim ćelijama, gdje je funkcionisanje robota uvjetovano stanjima mašina i drugih komponenti fleksibilne ćelije,
- omogućena je komunikacija sa drugim kompjuterskim sistemima,

Postoji više različitih nivoa robotskih jezika. Na najnižem nivou nalaze se tzv. mašinski jezici (mašinski kod ili njegova mnemonička reprezentacija – *asembleri*). Oni omogućuju potpunu iskorištenost kompjutera, kao i optimizaciju memorijskog prostora. S druge strane, korektno pisanje programa je vrlo teško, teško je pronaći greške u programu, a problem predstavlja i njegovo editovanje. Kako bi se proces programiranja učinio jednostavnijim i lakšim za korisnika, razvili su se programski jezici višeg nivoa. Izvršavanje programa napisanih pomoću programskih jezika višeg nivoa moguće je na dva načina i to:

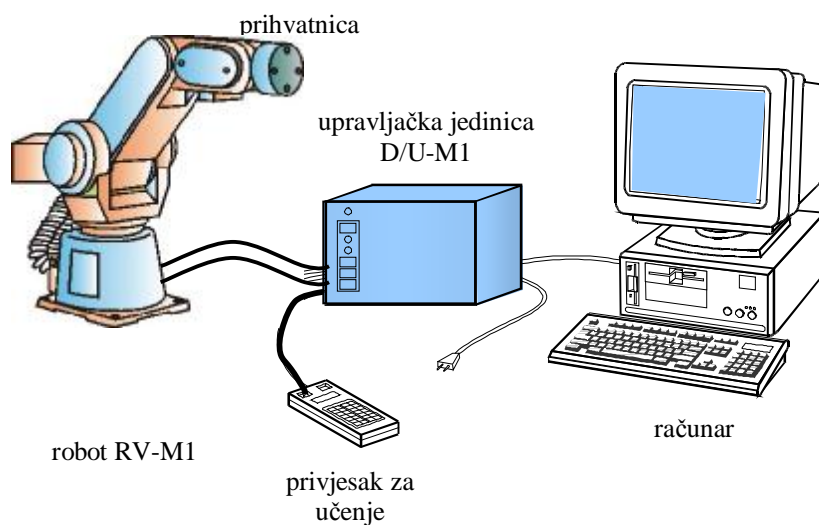
- primjenom *compilera* koji program prvo prevode na mašinski kod, pa tek onda izvode i
- primjenom *interperetera* koji direktno izvode programe napisane pomoću programskih jezika višeg nivoa.

U tabeli 9.1 navedeni su neki robotski jezici sa robotskom konfiguracijom na kojoj se i primjenjuju.

9.4. Primjer rada robotskog sistema

Robotski sistem Mitsubishi RV-M1, prikazan na sl. 9.5, sastoji se iz slijedećih komponenti:

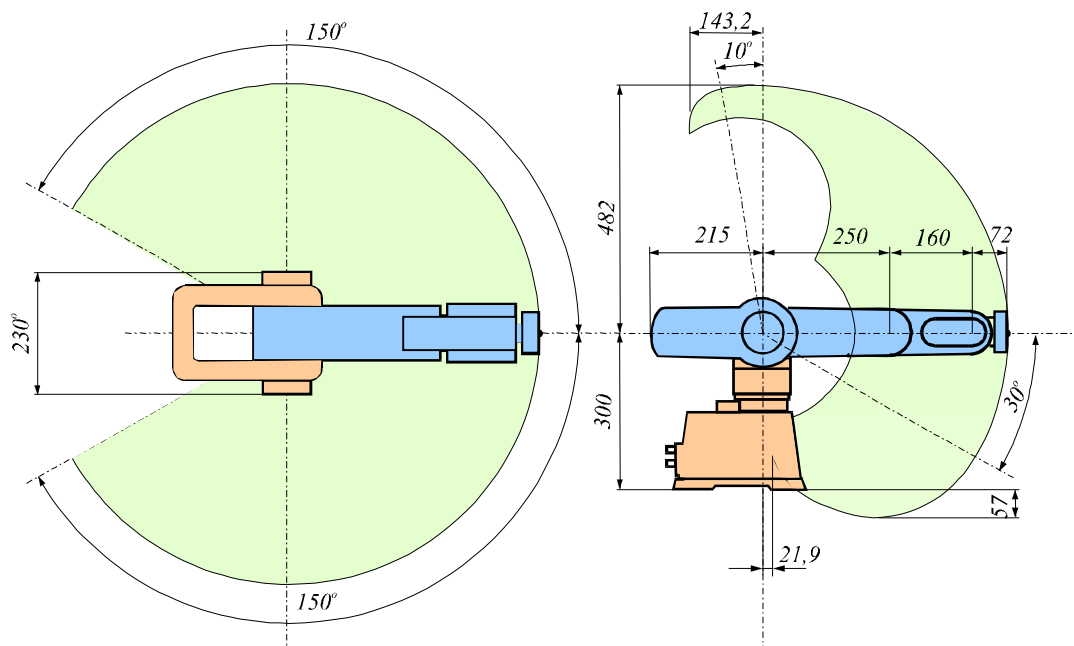
- robotske ruke RV-M1,
- hvataljke (engl. end effector) HM-01,
- upravljačke jedinice (engl. drive unit) D/U-M1,
- računara i
- privjeska za učenje (engl. teaching box) T/M-M1.



Slika 9.5. Robotski sistem Mitsubishi RV-M1

Robotska ruka ima pet rotacijskih stepani slobode kretanja, i to:

- rotaciju struka (osa rotacije J1),
- rotaciju ramena (osa rotacije J2),
- rotaciju lakta (osa rotacije J3),
- zakretanje prihvata (osa rotacije J4) i
- rotaciju prihvata (osa rotacije J5).



Slika 9.6. Manipulacijski prostor robota RV-M1

Maksimalna brzina kretanja tačke P iznosi 1000 mm/s, a ponovljivost položaja je 0,3 mm. Masa robota - robotske ruke je 19 kg. Za normalan rad robotskog sistema potrebno je osigurati radnu temperaturu od 5° do 40°C.

Glavna svojstva upravljačke jedinice D/U – M1 data su u tabeli 9.2.

Tabela 9.2. Standardna svojstva upravljačke jedinice

<i>Svojstvo</i>	<i>Opis</i>
<i>Metoda učenja</i>	Robotski programski jezik (63 naredbe), Ručni unos podataka (<i>engl. Manual Data Input</i>) upotrebom kompjutera.
<i>Metod upravljanja</i>	Upravljanje tačka po tačka (<i>engl. Point to Point</i>) s upotrebom DC servo motora.
<i>Broj upravljačkih osa</i>	5 (+1 dodatna) osa.
<i>Mjerenje položaja</i>	Inkrementalni enkoder.
<i>Inicijalizacija robota</i>	Granični prekidači i inkrementalni enkoderi.
<i>Funkcije interpolacije</i>	Linearna i zglobna interpolacija.
<i>Podešavanje brzine</i>	10 koraka (max. 1000 mm/s).
<i>Broj položaja</i>	629 (8KB).
<i>Broj programskih koraka</i>	2048 (16 KB)
<i>Pohranjivanje podataka</i>	EPROM ili baterijski podržan RAM.
<i>Definiranje položaja</i>	Privjesak za učenje. Kompjuter sa pripremom od strane korisnika. Namjenski programi za automatizaciju prenosa podataka od kompjutera do upravljačke jedinice
<i>Oprema za programiranje</i>	Kompjuter sa pripremom od strane korisnika, softverska potpora "ROBOT".
<i>Napon</i>	120V/220V/230V/240V AC, 0,5 KVA
<i>Radna temperatura</i>	5° do 40° C
<i>Težina</i>	23 kg
<i>Dimenzije</i>	380 x 331 x 246 mm

Za osnaživanje pojedinih stupnjeva slobode kretanja koriste se DC servomotori, a redukcija broja okretaja za sve ose rotacije realizira se korištenjem harmoničnog prijenosa. Manipulacijski prostor robotskog sistema RV-M1 prikazan je na sl. 9.6.

Prihvatnica, koja se smatra dopunskom opremom robotskog sistema, definira njegovu funkciju. Prihvatnica u obliku hvataljke prikazuje da se radi o montažnom, odnosno robotu koji opslužuje alatne mašine.

Hvataljka HM-01 s kojom je opremljen robotski sistem RV-M1, osnažena je DC servomotorom. Raspon stiska je od 0 do 60 mm, a maksimalna sila stezanja je 34,33 N. Sila stezanja može biti podešena u 16 koraka. Masa hvataljke je 600 g.

9.4.1. Funkcije privjeska za učenje

Izgled i dimenzije privjeska za učenje prikazani su na sl. 9.7. Privjesak za učenje je povezan sa 3 metra dugim kablom za upravljačku jedinicu robotskog sistema.

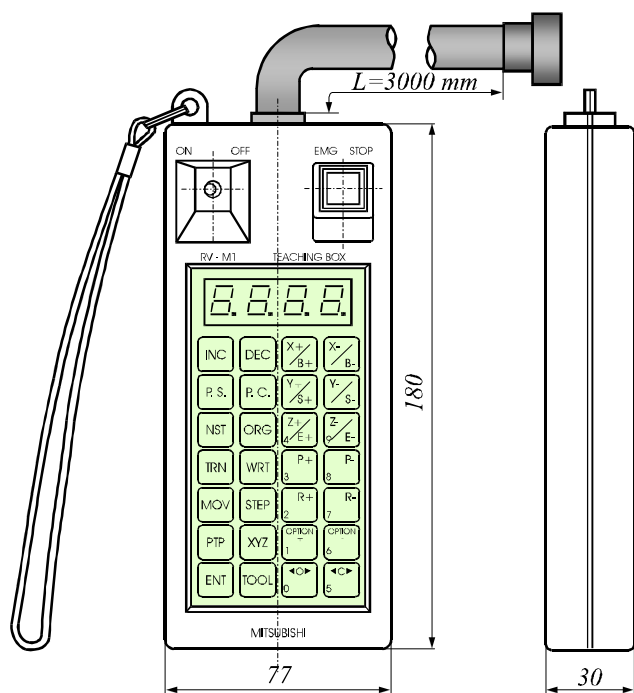
Na privjesku za učenje nalaze se slijedeći prekidači i tipke:

- (1) Naponski prekidač (ON/OFF),

Okretanjem naponskog prekidača u ON položaj omogućeno je djelovanje robota upotrebom tipki privjeska za učenje. Za djelovanje robotskog sistema upotrebom inteligentnih naredbi sa osobnog računala potrebno je osigurati prebacivanje naponskog prekidača u OFF položaj.

- (2) INC (+ ENT)

Pomicanje robota za jedan položaj naprijed od trenutnog položaja.



Slika 9.7. Privjesak za učenje

- (3) DEC (+ ENT)

Pomicanje robota za jedan položaj natrag od trenutnog položaja.

- (4) Prekidač za zaustavljanje djelovanja robota u slučaju opasnosti,

- (5) P. S. (+ Broj + ENT)

Pridruživanje trenutnom položaju navedenog pozicijskog broja.

(6) (+ +)

Brisanje podatka o položaju navedenom brojem.

(7) (+)

Inicijalizacija robota.

(8) (+)

Kretanje robota u multi položaj u kartezijevom koordinatnom sistemu.

(9) (+)

Kopiranje sadržaja EPROMa u RAM upravljačke jedinice.

(10) (+)

Kopiranje sadržaja RAMa u EPROM upravljačke jedinice.

(11) (+ +)

Pomicanje prihvatnice u navedeni položaj.

(12) (+ +)

Izvršavanje programa korak po korak, počevši od programske linije čiji je broj naveden. Svaki slijedeći korak programa izvršava se pritiskom na tipku .

(13)

Nakon što je pritisnuta ova tipka, djelovanje robotskog sistema rezultira pomicanjima u zglobovima. Stanje PTP je inicijalno podešeno okretanjem naponskog prekidača privjeska za učenje u položaj ON.

(14)

Nakon pritiska na ovu tipku realizira se kretanje po osima kartezijevog koordinatnog sistema.

(15)

Pritiskom na ovu tipku, kretanje robota se vrši u pravcu alata.

(16)

Izvršava naredbe odabrane tipkama (3) do (12).

(17)

Kretanje prihvatnice u pozitivnom smjeru X osi, odnosno zakretanje struka u pozitivnom smjeru.

(18) $\boxed{X - / B -}$

Kretanje prihvatnice u negativnom smjeru X osi, odnosno zakretanje struka u negativnom smjeru.

(19) $\boxed{Y + / S +}$

Kretanje prihvatnice u pozitivnom smjeru Y osi, odnosno zakretanje ramena u pozitivnom smjeru.

(20) $\boxed{Y - / S -}$

Kretanje prihvatnice u negativnom smjeru Y osi, odnosno zakretanje ramena u negativnom smjeru.

(21) $\boxed{Z + / E + 4}$

Kretanje prihvatnice u pozitivnom smjeru Z osi, odnosno zakretanje lakta u pozitivnom smjeru, kao i kretanje prema alatu. Također služi i kao numerička tipka "4".

(22) $\boxed{Z - / E - 9}$

Kretanje prihvatnice u negativnom smjeru Z osi, odnosno zakretanje lakta u negativnom smjeru, kao i kretanje od alata. Također služi i kao numerička tipka "9".

(23) $\boxed{P + 3}$

Omogućuje zakretanje prihvatnice u pozitivnom smjeru. Također služi i kao numerička tipka "3".

(24) $\boxed{P - 8}$

Omogućuje zakretanje prihvatnice u negativnom smjeru. Također služi i kao numerička tipka "8".

(25) $\boxed{R + 2}$

Omogućuje rotaciju prihvatnice u pozitivnom smjeru. Također služi i kao numerička tipka "2".

(26) $\boxed{R - 7}$

Omogućuje rotaciju prihvatnice u negativnom smjeru. Također služi i kao numerička tipka "7".

(27) $\boxed{\text{OPTION} + 1}$

Omogućuje kretanje odabrane osi u pozitivnom smjeru. Također služi i kao numerička tipka “1”.

(28) OPTION -6

Omogućuje kretanje odabrane osi u negativnom smjeru. Također služi i kao numerička tipka “6”.

(29) <O> 0

Omogućuje otvaranje prihvatnice. Također služi i kao numerička tipka “0”.

(30) <C> 5

Omogućuje zatvaranje prihvatnice. Također služi i kao numerička tipka “5”.

(31) Diode prikazuju troznamenasti broj pri upotrebi tipki INC, DEC, P.S

P.C. ili MOV označavajući broj položaja.

(32) Diode prikazuju četvorocifreni broj pri upotrebi tipke STEP ili pri izvođenju programa označavajući broj programske linije.

9.4.2. Veza upravljačka jedinica - kompjuter

U biti postoje dva tipa veze robota, odnosno njegove upravljačke jedinice (engl. *drive unit*) i kompjutera:

- paralelna (Centronics) veza, kojom robot šalje 8 bita u paraleli i
- serijska (RS232C) veza za prijenos informacija bit po bit.

Serijski prijenos podataka dozvoljava veće udaljenosti od paralelnog prijenosa i ona iznose od 3 do 15 m. Također, serijska veza dozvoljava dvosmjerni prijenos podataka što omogućuje da se preko osobnog računala pročitaju podaci sa upravljačke jedinice robotskog sistema.

9.4.3. Opis naredbi robotskog sistema RV-M1

Naredbe robotskog sistema RV-M1 podijeljene su u pet skupina i to:

- naredbe za upravljanje položajem i kretanjem,
- naredbe programske kontrole,
- naredbe za upravljanje prihvatnicom,
- I/O naredbe,
- naredbe čitanja (RS232C),
- razne naredbe.

Lista naredbi sa kratkim opisom data je u tabelama 9.3, 9.4, 9.5, 9.6 i 9.7.

Tabela 9.3. Naredbe za upravljanje položajem i kretanjem robota

Red. br.	N a z i v	Ulazni oblik	F u n k c i j a	Progra mabiln ost	Napomena
1.	<i>Decrement Position</i>	DP	Pomicanje robota za jedan položaj natrag od trenutnog položaja.	da	
2.	<i>Draw</i>	DW x,y,z	Pomicanje prihvatnice u položaj udaljen od tekućeg za navedene iznose po X, Y i Z osi.	da	
3.	<i>Here</i>	HE a	Pridruživanje trenutnom položaju pozicijskog broja a.	da	$1 \leq a \leq 629$
4.	<i>Home</i>	HO	Definiranje nultog položaja u kartezijevom koordinatnom sistemu.	da	
5.	<i>Increment Position</i>	IP	Pomicanje robota za jedan položaj naprijed od trenutnog položaja.	da	
6.	<i>Move Approach</i>	MA a_1,a_2 [,O/C]	Pomicanje prihvatnice iz tekućeg u položaj udaljen od položaja (a_1) za iznos pomaka jednakom koordinatama položaja (a_2). Ovo ne uzrokuje promjenu koordinata položaja a_1 i a_2 .	da	$1 \leq a_1, a_2 \leq 629$ O:otvorena C:zatvorena prihvatnica
7.	<i>Move Continuous</i>	MC a_1, a_2 [, O/C]	Pomicanje robota iz tekućeg u položaj a_1 , a zatim kontinuirano pomicanje robota preko položaja čiji su pozicijski brojevi između a_1 i a_2 do položaja a_2 u rastućem ili opadajućem redu u ovisnosti da li je $a_1 < a_2$ ili $a_1 > a_2$.	da	$1 \leq a_1, a_2 \leq 629$
8.	<i>Move Joint</i>	MJ q_1, q_2, q_3, q_4, q_5	Kretanja u pojedinim stupnjevima slobode za navedene iznose kuteva od tekućeg položaja.	ne	
9.	<i>Move</i>	MO a [, O/C]	Pomicanje prihvatnice u navedeni položaj.	da	$1 \leq a \leq 629$ O:otvorena C:zatvorena prihvatnica
10.	<i>Move Position</i>	MP x, y, z, p, r	Pomicanje prihvatnice u položaj čije su koordinate (pozicija i kut) navedene kao x, y, z, p, r .	ne	

11.	<i>Move Straight</i>	MS a, n [, O/C]	Pomicanje robota u položaj (a) kroz n međutačaka po ravnoj liniji.	da	$1 \leq a \leq 629$ $1 \leq n \leq 99$ O:otvorena C:zatvorena prihvatnica
12.	<i>Move Tool</i>	MT a, b [, O/C]	Pomicanje prihvatnice iz tekućeg položaja u položaj udaljen od definiranog položaja (a) za iznose pomaka (b) u smjeru prihvatnice.	da	$1 \leq a \leq 629$ O:otvorena C:zatvorena prihvatnica
13.	<i>Nest</i>	NT	Inicijaliziranje robota	da	
14.	<i>Origin</i>	OG	Pomicanje robota u nulti položaj u kartezijevom koordinatnom sistemu.	da	
15.	<i>Pallet Assign</i>	PA i, j, k	Definiranje broja točaka mreže (j,k) za paletu (i).	da	$1 \leq i \leq 9$ $1 \leq j, k \leq 255$
16.	<i>Position Clear</i>	PC a ₁ , [, a ₂]	Brisanje svih pozicijskih podataka između položaja a ₁ i a ₂ .	ne	$a_1 \leq a_2$ $1 \leq a_1, a_2 \leq 629$ (ili $a_1 = 0$)
17.	<i>Position Define</i>	PD a, x, y, z, p, r	Definiranje položaja (a) navedenim iznosima koordinata u odnosu na nulti položaj.	ne	$1 \leq a \leq 629$
18.	<i>Position Load</i>	PL a ₁ , a ₂	Definiranje položaja (a ₁) na temelju koordinata položaja (a ₂).	da	$1 \leq a_1, a_2 \leq 629$
19.	<i>Pallet</i>	PT a	Izračunavanje koordinata točaka mreže palete (a) i pridruživanje izračunatim koordinatama odgovarajućeg pozicijskog broja.	da	$1 \leq a \leq 9$
20.	<i>Position Exchange</i>	PX a ₁ , a ₂	Zamjenjivanje koordinata položaja (a ₁) i (a ₂).	da	$1 \leq a_1, a_2 \leq 629$
21.	<i>Shift</i>	SF a ₁ , a ₂	Pomicanje koordinata položaja (a ₁) za iznose koordinata položaja (a ₂) u odnosu na nulti položaj.	da	$1 \leq a_1, a_2 \leq 629$
22.	<i>Speed</i>	SP a [, H/L]	Podešavanje brzine kretanja robota i vremena ubrzanja / usporavanja.	da	$1 \leq a \leq 9$ H: kraće vrijeme ubrzanja/usporenja, L: duže vrijeme ubrzanja/usporenja.

23.	<i>Timer</i>	TI a	Zaustavljanje svih operacija robota za vrijeme (a). (Jedinica: 0,1 s)	da	$1 \leq a \leq 32767$
24.	<i>Tool</i>	TL a	Definiranje udaljenosti između montažne površine i kraja prihvatnice.	da	$0 \leq a \leq +300.0$ Jedinica: mm

Tabela 9.4. Naredbe programske kontrole

Red. br.	N a z i v	Ulazni oblik	F u n k c i j a	Progra mabiln ost	Napomena
25.	<i>Compare Counter</i>	CP a	Učitavanje vrijednosti brojila (a) u interni registar.	da	$1 \leq a \leq 99$
26.	<i>Disable Act</i>	DA a	Onemogućavanje prekida pomoću bita (a) vanjskog signala.	da	$1 \leq a \leq 7$ (15)
27.	<i>Decrement Counter</i>	DC a	Umanjivanje vrijednosti brojila (a) za 1.	da	$1 \leq a \leq 99$
28.	<i>Delete Line</i>	DL a ₁ [, a ₂]	Brisanje sadržaja programskih linija od (a ₁) do (a ₂).	ne	$a_1 \leq a_2$ $1 \leq a_1, a_2 \leq 2048$
29.	<i>Enable Act</i>	EA a ₁ , a ₂	Omogućavanje prekida korištenjem bita (a ₁) vanjskog signala i definiranje programske linije (a ₂) s kojom se nastavlja realiziranje programa kada se prekid javi.	da	(-15) (+15) -7 ≤ a ₁ ≤ +7 + : ON; - : OFF $1 \leq a_2 \leq 2048$
30.	<i>End</i>	ED	Kraj programa.	da	
31.	<i>If Equal</i>	EQ a ₁ (ili &b), a ₂	Uzrokovanje skoka na programsku liniju (a ₂) ukoliko je vrijednost pohranjena u internom registru jednaka specificiranoj vrijednosti (a ₁).	da	(-32767) (+32767) $0 \leq a_1 \leq 255$ (decim.) $0 \leq b \leq \&FF$ (hex.) (&8001)(&7FFF) $1 \leq a_2 \leq 2048$
32.	<i>Go Sub</i>	GS a	Omogućavanje izvršavanja potprograma koji započinje programskom linijom (a).	da	$1 \leq a \leq 2048$
33.	<i>Go To</i>	GT a	Omogućavanje bezuvjetnog skoka na programsku liniju (a).	da	$1 \leq a \leq 2048$

34.	<i>Increment Counter</i>	IC a	Povećavanje vrijednosti brojila (a) za 1.	da	$1 \leq a \leq 99$
35.	<i>If Larger</i>	LG a ₁ (ili &b), a ₂	Uzrokovanje skoka na programsku liniju (a ₂), ukoliko je ulazni signal ili vrijednost brojila veći od a ₁ (ili &b).	da	(-32767) (+32767) 0 ≤ a ₁ ≤ 255 (decim.) 0 ≤ b ≤ &FF (hex.) (&8001)(&7FFF) 1 ≤ a ₂ ≤ 2048
36.	<i>If Not Equal</i>	NE a ₁ (ili &b), a ₂	Uzrokovanje skoka na programsku liniju (a ₂) ukoliko ulazni signal ili vrijednost brojila nisu jednaki a ₁ (ili &b).	da	(-32767) (+32767) 0 ≤ a ₁ ≤ 255 (decim.) 0 ≤ b ≤ &FF (hex.) (&8001)(&7FFF) 1 ≤ a ₂ ≤ 2048
37.	<i>New</i>	NW	Brisanje sadržaja RAMa upravljačke jedinice.	ne	
38.	<i>Next</i>	NX	Provjera završetka petlje započete naredbom RC.	da	
39.	<i>Repeat Cycle</i>	RC a	Ponavljanje programske petlje (a) puta.	da	$1 \leq a \leq 32767$
40.	<i>Run</i>	RN a ₁ [, a ₂]	Izvršavanje programske linije od (a ₁) do (a ₂), pri čemu naredba (a ₂) nije uključena.	ne	$1 \leq a_1, a_2 \leq 2048$
41.	<i>Return</i>	RT	Kompletiranje potprograma aktiviranog naredbom GS i povratak u glavni program.	da	
42.	<i>Set Counter</i>	SC a ₁ , [a ₂]	Učitavanje vrijednost (a ₂) u brojilo (a ₁).	da	$1 \leq a_1 \leq 99$ $-32767 \leq a_2 \leq +32767$
43.	<i>If Smaller</i>	SM a ₁ (ili &b), a ₂	Skok na programsku liniju (a ₂) ako su ulazni signal ili vrijednost brojila manji od (a ₁) (ili &b).	da	(-32767) (+32767) 0 ≤ a ₁ ≤ 255 (decim.) 0 ≤ b ≤ &FF (hex.) (&8001)(&7FFF) 1 ≤ a ₂ ≤ 2048

Tabela 9.5. Naredbe za upravljanje prihvatnicom

Red. br.	Naziv	Ulazni oblik	Funkcija	Programabilnost	Napomena
44.	<i>Grip Close</i>	GC	Zatvaranje prihvatnice.	da	
45.	<i>Grip Flag</i>	GF a	Definiranje stanja otvoreno/zatvoreno prihvatnice. Koristi se u sprezi sa naredbom PD.	da	a=0 (otvoreno) a=1 (zatvoreno)
46.	<i>Grip Open</i>	GO	Otvoravanje prihvatnice.	da	
47.	<i>Grip Pressure</i>	GP a ₁ , a ₂ , a ₃	Definiranje sile stezanja, kao i vremena zadržavanja sile stezanja.	da	0 ≤ a ₁ , a ₂ ≤ 15 0 ≤ a ₃ ≤ 99 (Jedinica: 0,1s)

Tabela 9.6. I/O naredbe

Red. br.	Naziv	Ulazni oblik	Funkcija	Programabilnost	Napomena
48.	<i>Input Direct</i>	ID	Bezuvjetno prihvaćanje vanjskog signala sa ulaznog porta.	da	
49.	<i>Input</i>	IN	Sinkrono prihvaćanje vanjskog signala sa ulaznog porta.	da	
50.	<i>Output Bit</i>	OB a	Definiranje bita (a) izlaznog signala.	da	-7 ≤ a ≤ +7 (-15) (+15) + : ON; - : OFF
51.	<i>Output Direct</i>	OD a (ili &b)	Bezuvjetno slanje signala (a) (ili &b) sa izlaznog porta.	da	(-32767) (+32767) 0 ≤ a ≤ 255 (decim.) 0 ≤ b ≤ &FF (hex.) (&8001)(&7FFF)
52.	<i>Output</i>	OT a (ili &b)	Sinkrono slanje signala (a) (ili &b) sa izlaznog porta.	da	(-32767) (+32767) 0 ≤ a ≤ 255 (decim.) 0 ≤ b ≤ &FF (hex.) (&2701)(&7FFF)
53.	<i>Test Bit</i>	TB a ₁ , a ₂	Testira stanje bita a ₁ ulaznog porta i ovisno o rezultatima, prenosi realiziranje programa na programsku liniju a ₂ .	da	-7 ≤ a ₁ ≤ +7 (-15) (+15) + : ON; - : OFF 1 ≤ a ₂ ≤ 2048

Tabela 9.7. Naredbe čitanja (RS232C)

Red. br.	Naziv	Ulazni oblik	Funkcija	Programabilnost	Napomena
54.	Counter Read	CR a	Čitanje sadržaja brojila (a).	da	$1 \leq a \leq 99$
55.	Data Read	DR	Čitanje ulaznog signala u sprezi sa naredbama ID i IN. Čitanje sadržaja internog registra koristeći RS232C.	da	
56.	Error Read	ER	Čitanje statusa pogreške. (Nema pogreške: 0, Pogreška tipa I: 1, Pogreška tipa II: 2)	ne	
57.	Line Read	LR a	Čitanje sadržaja programske linije (a).	ne	$1 \leq a \leq 2048$
58.	Position Read	PR a	Čitanje koordinata položaja (a) u kartezijskom koordinatnom sistemu.	da	$1 \leq a \leq 629$
59.	Where	WH	Čitanje koordinata tekućeg položaja u kartezijskom koordinatnom sistemu.	da	

Tabela 9.8. Razne naredbe

Red. br.	Naziv	Ulazni oblik	Funkcija	Programabilnost	Napomena
60.	Reset	RS	Resetiranje pogreške tipa II.	ne	
61.	Transfer	TR	Kopiranje sadržaja EPROMa u RAM upravljačke jedinice.	ne	
62.	Write	WR	Kopiranje sadržaja RAMa u EPROM upravljačke jedinice.	ne	
63.	Comment	,	Omogućavanje pisanja komentara.	da	

LITERATURA:

- [1] Craig, J. J.: *Introduction to robotics, mechanics and control*, 2nd, USA, Addison – Wesley Publishing company, 1997.
- [2] Čohodar, M.: *Prilog unapređenju rada robotskog sustava RV-M1 razvojem softverske potpore*, magistarski rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 1999.
- [3] Groover, M. P.: *Automation, Production Systems, and Computer Integrated Manufacturing*, Prentice-Hall International, Inc., Englewood Cliffs, 1987.
- [4] *Industrial micro - Robot System – Model RV-M1*, Instruction manual,
- [5] Kafriksen, E.; Stephans, M.: *Industrial robots and robotics*, Reston Publishing Company, Virginia, 1984.
- [6] Leatham-Jones, B.: *Elements of Industrial Robotics*, Pitman publishing, London, 1987.
- [7] Novaković, B.: *Metode vođenja tehničkih sistema, primjena u robotici, fleksibilnim sistemima i procesima*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.
- [8] Sciavicco, L.; Siciliano, B.: *Modeling and control of robot manipulators*, University of Naples, Naples, Italy, McGraw-Hill Series in Electrical Engineering Series, 1996.
- [9] Shoham, M. A.: *Textbook of robotics: I – Basic Concepts*, Kogan Page Ltd, London, 1984.
- [10] Shoham, M. A.: *Textbook of robotics: II – Structure, Control and Operation*, Kogan Page Ltd, London, 1986.
- [11] Šurina, T.; Crneković, M.: *Industrijski roboti*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.
- [12] Vukobratović, M.; Stokić, D.; Kirćanski, I.; Kirćanski, M.; Hristić, D.; Karan, B.; Vujić, D.; Đurović, M.: *Uvod u robotiku*, Institut "Mihajlo Pupin", Beograd, 1986.
- [13] Warnecke, H.J.; Schraft, R.D.: *Industrial Robots, Application Experience*, IFS Publications Ltd, Bedford, 1982.

Prilog

Isak Karabegović, Tehnički fakultet Bihać
Samir Vojić, Tehnički fakultet Bihać

ROBOT+TEHNOLOGIJA

1. Primjena robota u prehrambenoj industriji
2. Primjena robota u drvoprerađivačkoj industriji
3. Primjena robota u hemijskoj industriji
4. Primjena robota u industriji stakla i keramike
5. Primjena robota u metalnoj proizvodnji
6. Primjena robota u mašinstvu
7. Primjena robota u elektro i elektronskoj industriji
8. Primjena robota u industriji mjerne tehnike i optike
9. Primjena robota u automobilskoj industriji



Slika 1: Primjena robota u proizvodnji piva



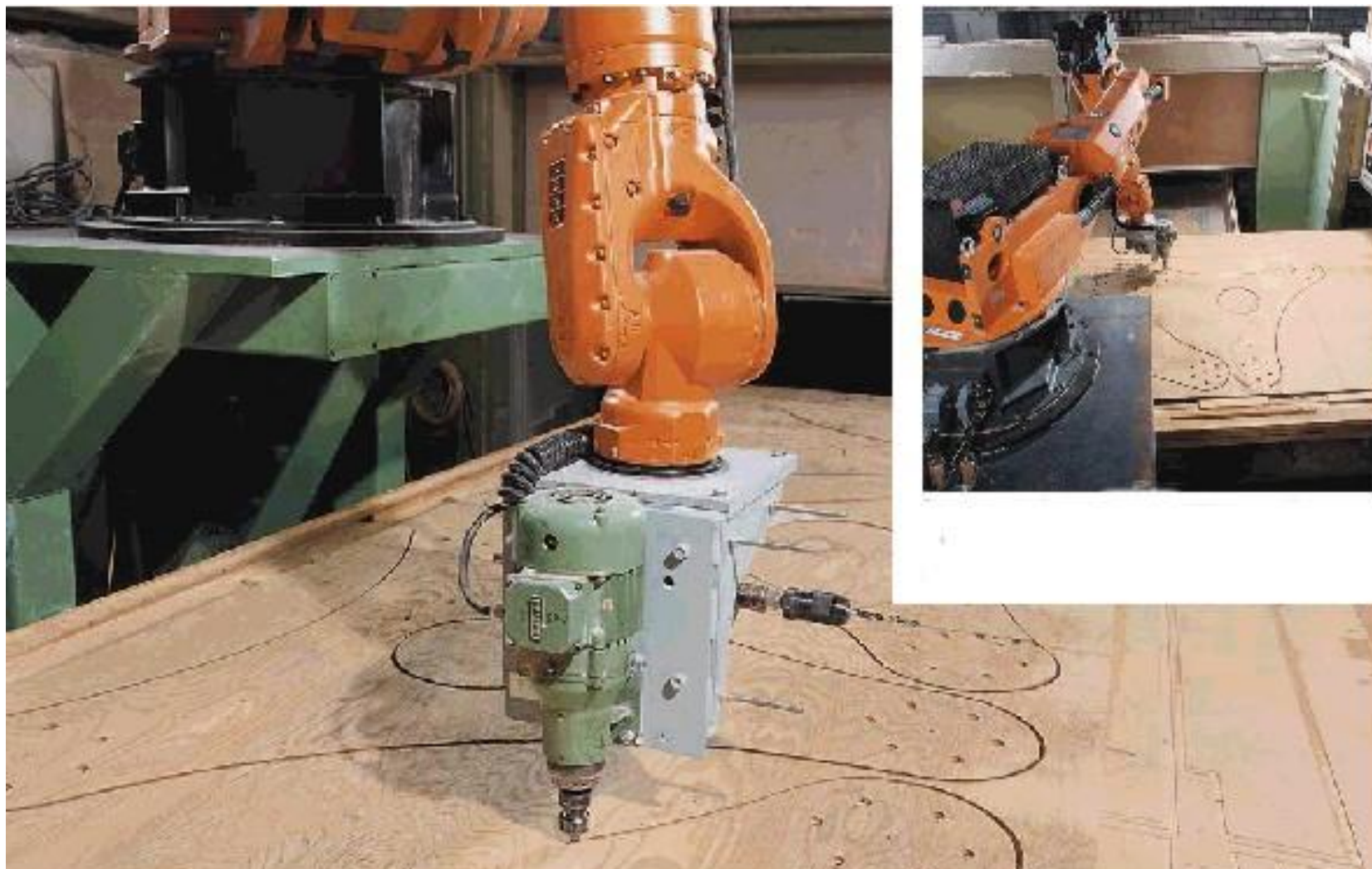
Slika 2 : Primjena robota u prehrambenoj industriji



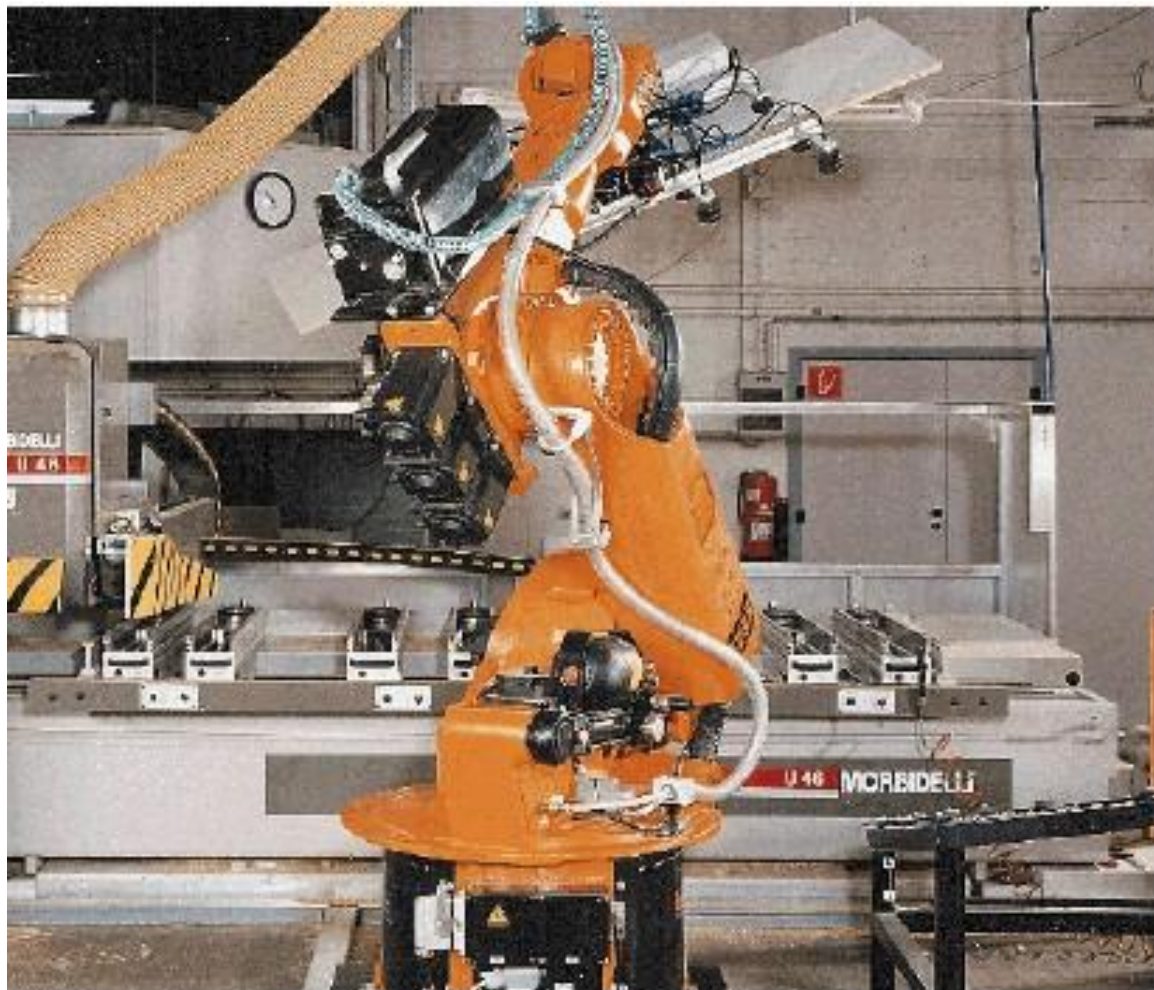
Slika 3: Primjena robota u industriji mlijeka



Slika 4: Primjena robota u drvoprađivačkoj industriji



Slika 5: Primjena robota za bušenje i rezanje drveta



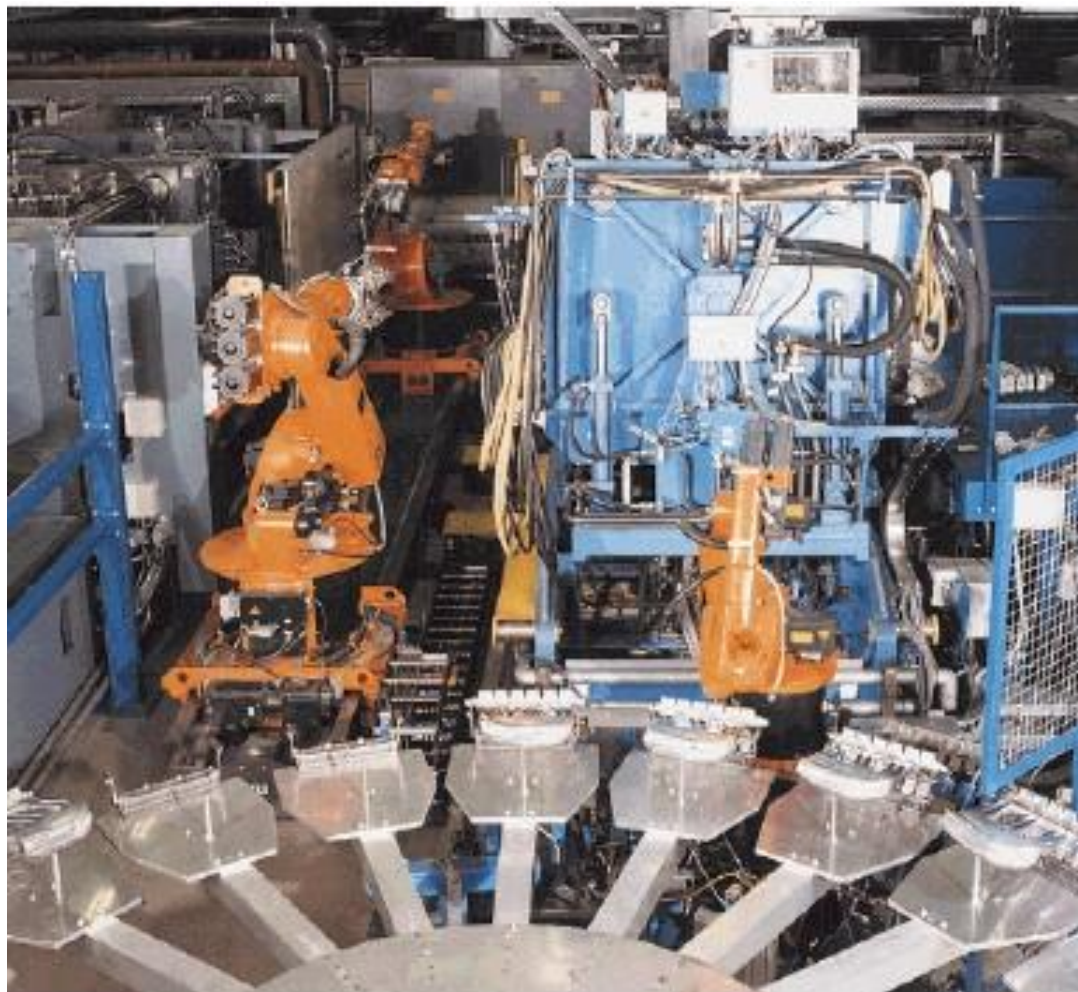
Slika 6: Primjena robota u proizvodnji uredskog namještaja



Slika 7: Primjena robota za opsluživanje



Slika 8: Primjena robota pri paletiranju



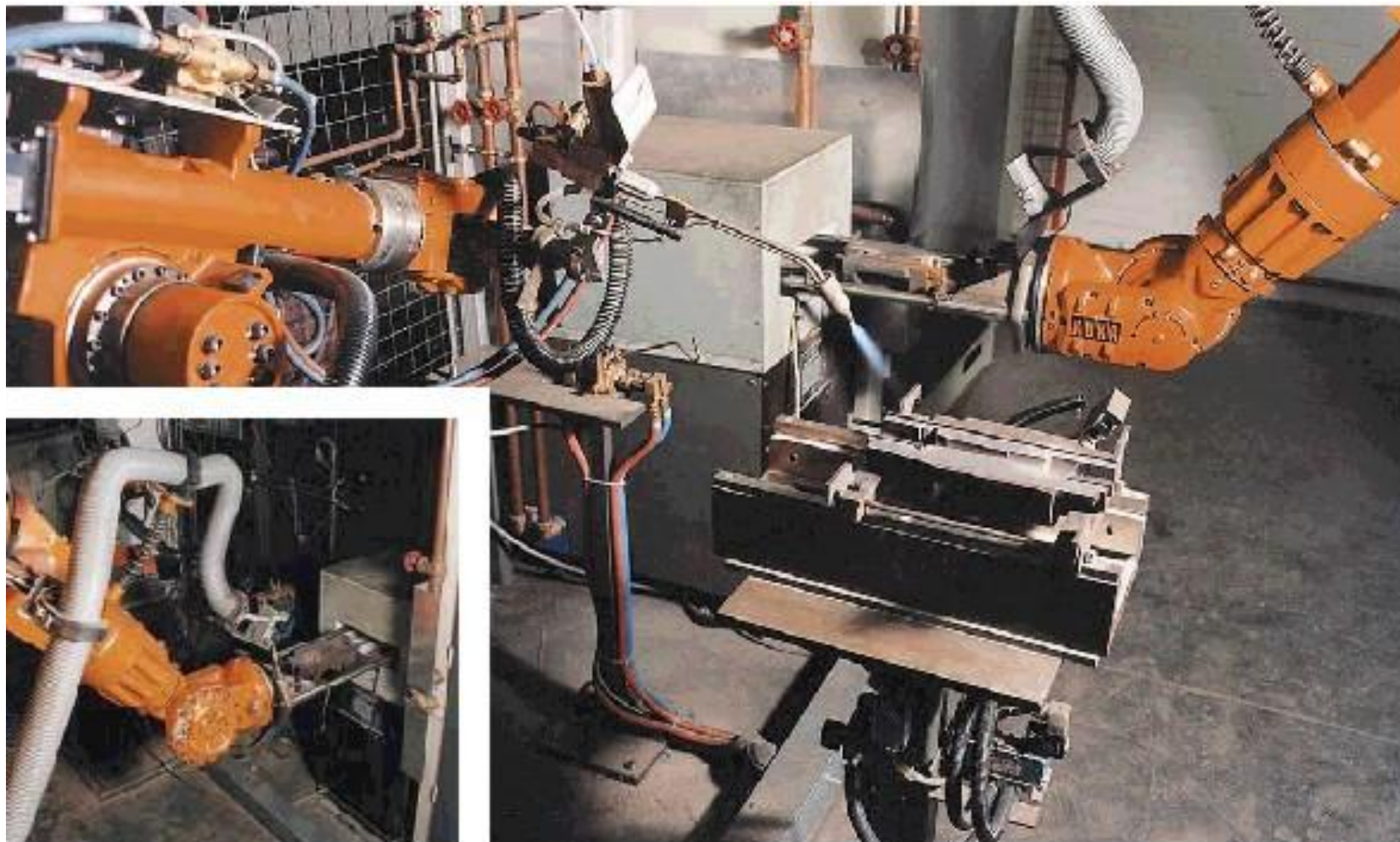
Slika 9: Primjena robota pri lijevanju metala



Slika 10: Primjena robota vulkanizaciji guma



Slika 11: Primjena robota pri obradi porculana



Slika 12: Primjena robota pri obradi stakla



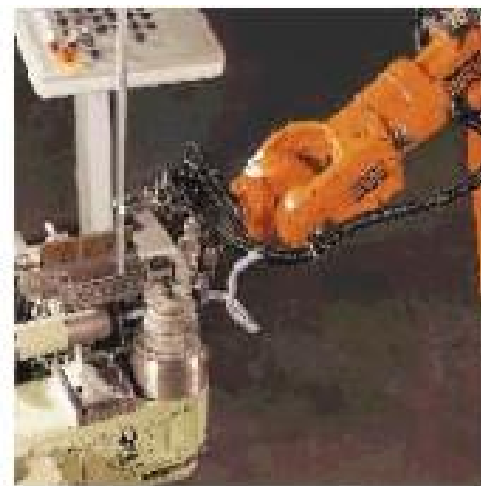
Slika 13: Primjena robota pri MAG zavarivanju



Slika 14: Primjena robota pri rezanju plazmom



Slika 15: Primjena robota pri plazma rezanju cijevi



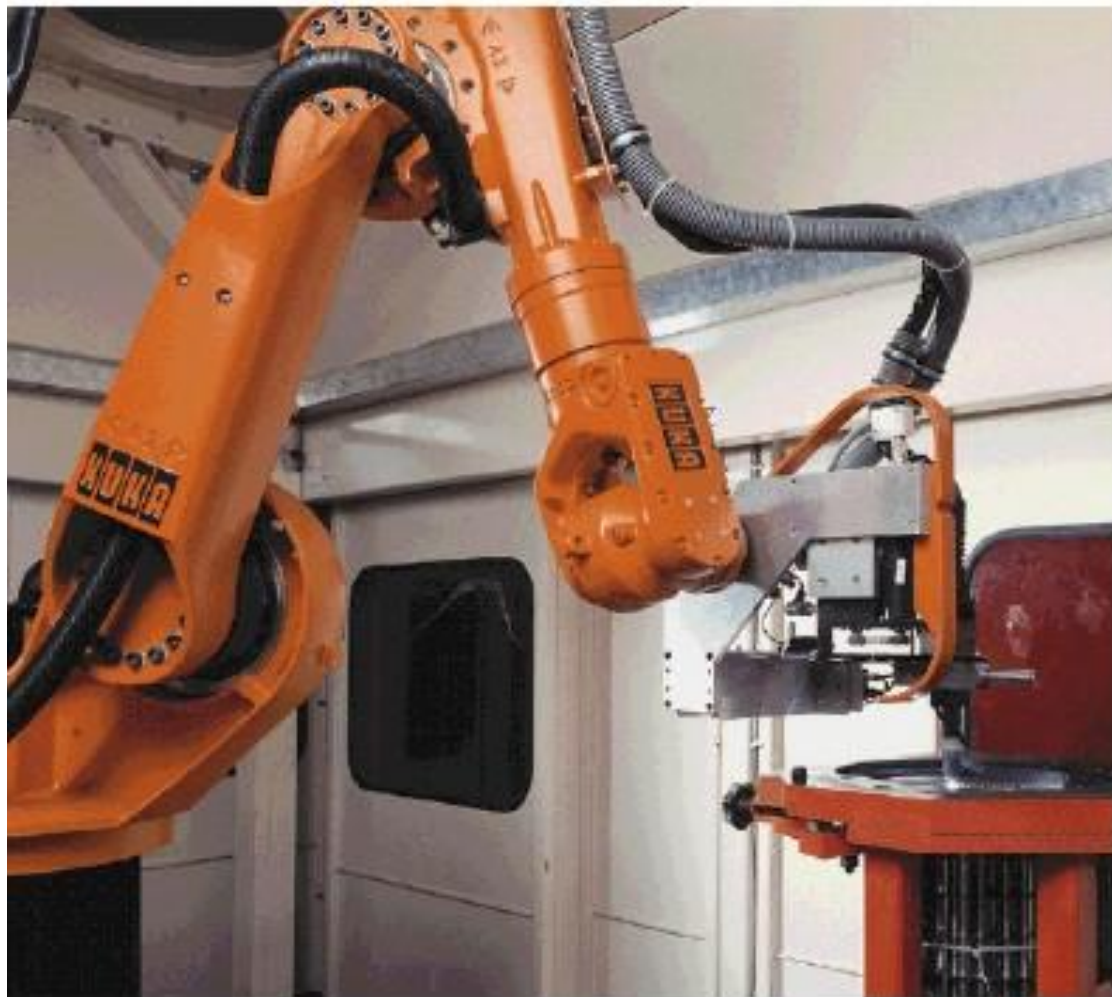
Slika 16: Primjena robota za premještanje pri proizvodnji žice



Slika 17: Primjena robota pri odlaganju odlivaka



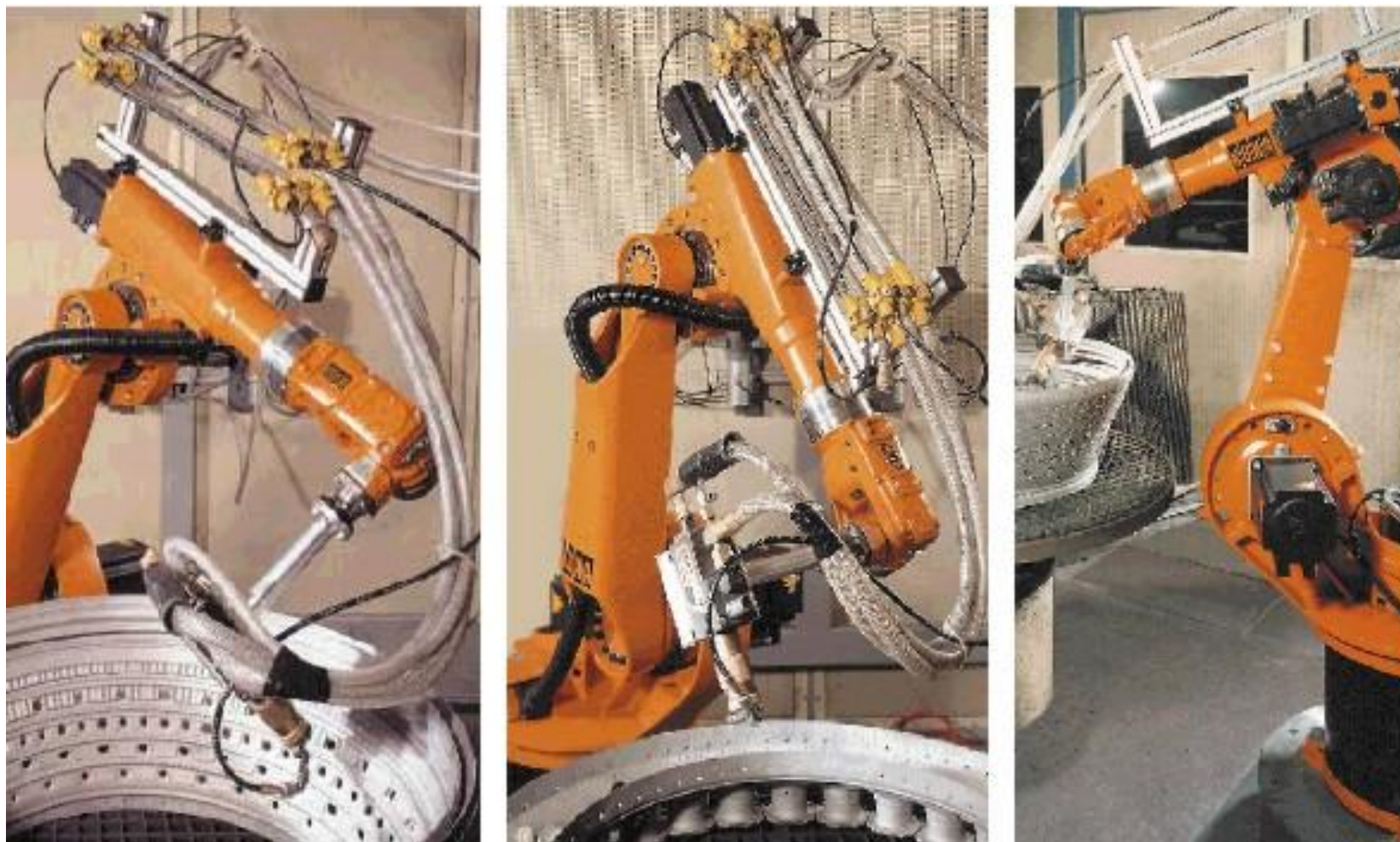
Slika 18: Primjena robota pri MIG/MAG zavarivanju



Slika 19: Primjena robota pri TIG zavarivanju



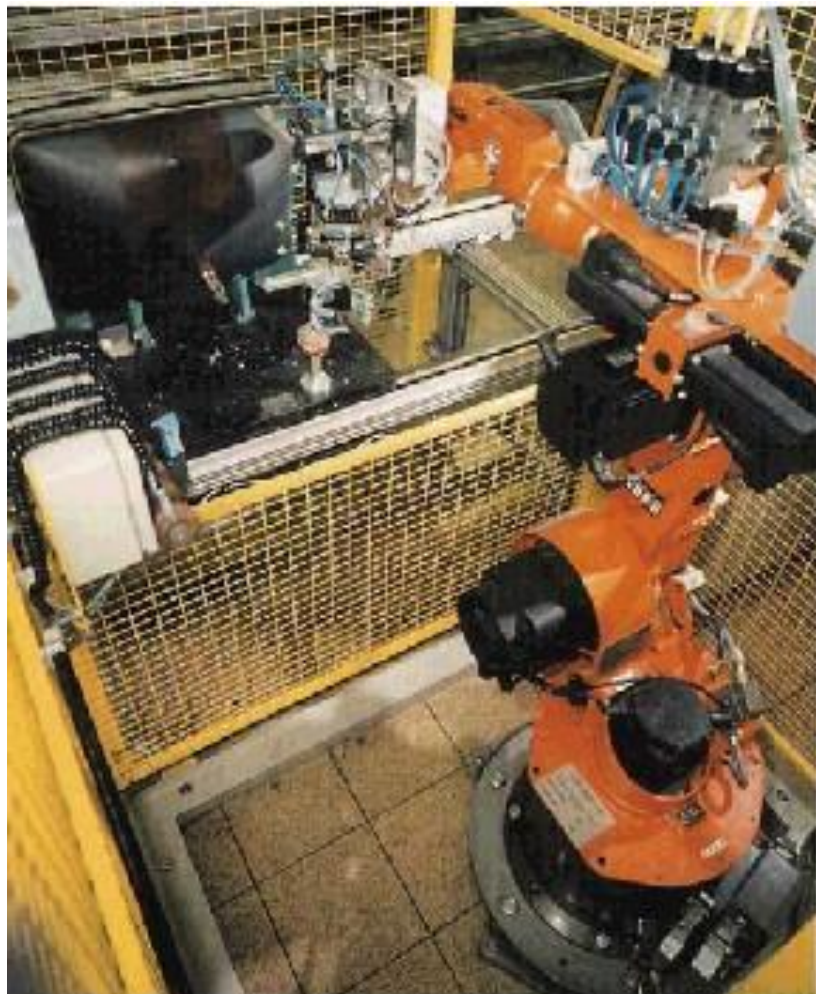
Slika 20: Primjena robota pri brušenju i poliranju



Slika 21: Primjena robota pri izradi turbina za avione



Slika 22: Primjena robota pri MAG zavarivanju u malim unutrašnjim otvorima



Slika 23: Primjena robota pri montaži katodnih cijevi televizora



Slika 24: Primjena robota pri pakovanju



Slika 25: Primjena robota pri tačkastom zavarivanju automobila



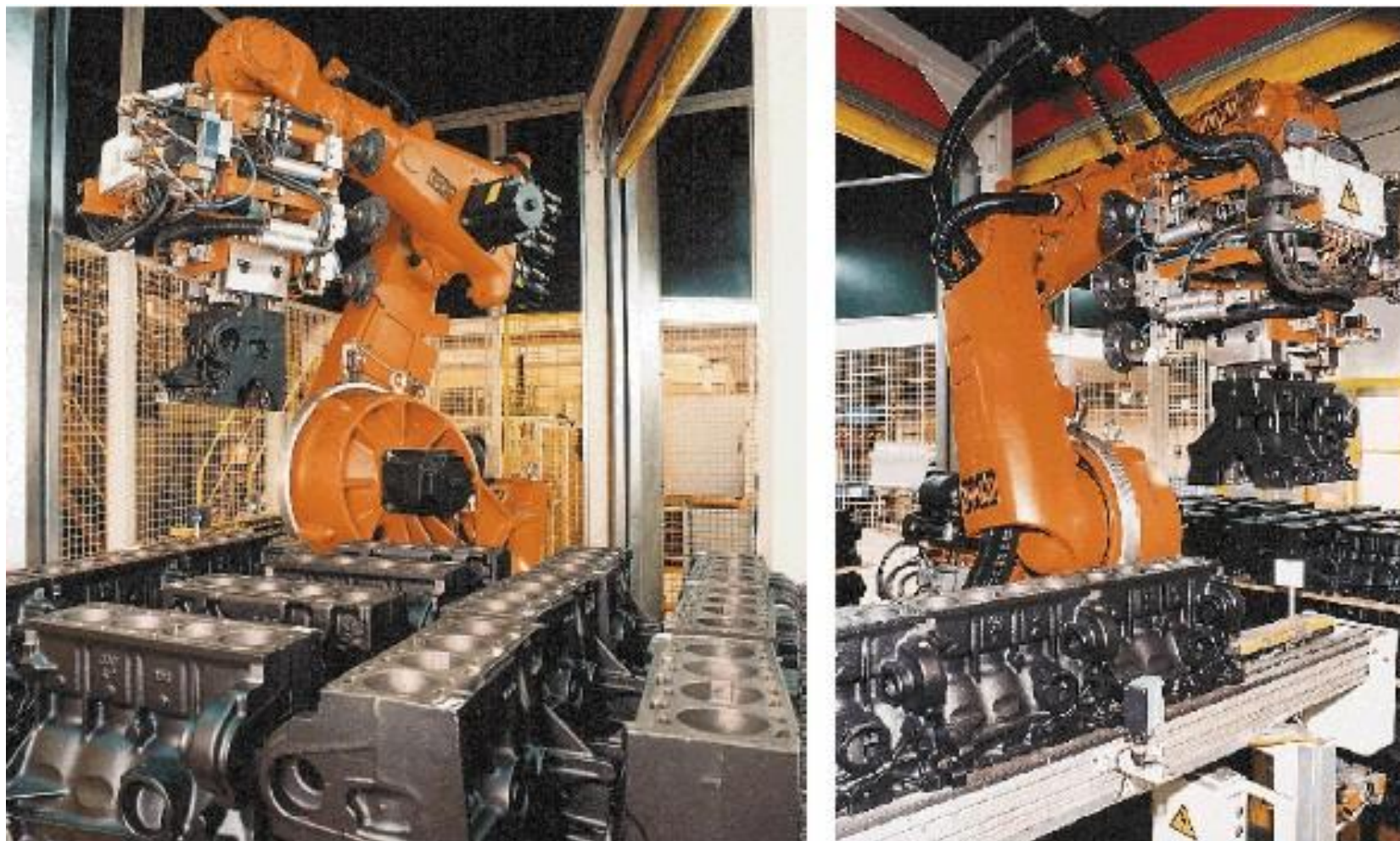
Slika 26: Primjena robota pri testiranju automobila



Slika 27: Primjena robota pri opsluživanju alatnih mašina



Slika 28: Primjena robota pri premještanju branika za automobile



Slika 29: Primjena robota pri otpaletiziranju blokova motora



Slika 30: Primjena robota pri premještanju haube automobila



Slika 31: Primjena robota pri opsluživanju prese



Slika 32: Primjena robota pri premještanju dijelova automobila



Slika 33: Primjena robota pri montaži električne instalacije u automobilu



Slika 34: Primjena robota pri postavljanju automobilskih osovina



Slika 35: Primjena robota pri montaži sjedišta u automobilu

Prilog

Isak Karabegović, Tehnički fakultet Bihać
Samir Vojić, Tehnički fakultet Bihać

KONSTRUKCIJE ROBOTA

1. KUKA roboti
2. ARC MATE roboti
3. KAWASAKI roboti
4. MOTOMAN roboti
5. SEIKO roboti

Simboli

Skalarne veličine:

h	- Relativna koordinata translatornog članka,
J	- Moment inercije,
K	- Kinetička energija,
M^{ak}	- Moment aktuatora u rotacionom zglobo,
m	- Masa,
P	- Potencijalna energija,
Q	- Generalisana sila,
q_i	- Generalisana koordinata,
θ_i	- Zglobna koordinata rotacionog članka,
d_i	- Dimenzije robota
a_i	- Dimenzije robota
\mathbf{K}	- Kruto tijelo
f	- Stepen slobode kretanja
n_z	- Broj zglobova robota
T	- Translatorski zglob
R	- Rotacioni zglob
J_i	- Osa rotacije zgloba robota
x, y, z	- Koordinatne ose
x_0, y_0, z_0	- Ose baznog koordinatnog sistema robota
q, j, γ	- Euelerovi uglovi
c_i	- $\cos q_i$ -trigonometrijska funkcija cosinusa
s_i	- $\sin q_i$ - trigonometrijska funkcija sinusa
c_{ij}	- $\cos(q_i + q_j)$ -cosinus zbira dva ugla
s_{ij}	- $\sin(q_i + q_j)$ -sinus zbira dva ugla
$\lambda(t)$	- Parametar vremena
T_k	- Vrijeme potrebno za prijelaz putanje
U	- Napon
R	- Električni otpor mijerne trake
x_1	- Efekat prigušenja

Matrične veličine:

$\{a\}$	- Vektor ubrzanja,
$[A]$	- Matrica inercije robota,

$\{B\}$	- Vektor Coriolisovih i centrifugalnih djelovanja,
$\{C\}$	- Vektor djelovanja gravitacije,
$\{\epsilon\}$	- Vektor ugaonog ubrzanja,
$\{F\}, \{S\}, \{f\}$	- Vektor sila,
$\{g\}$	- Vektor ubrzanja Zemljine teže,
$\{J\}$	- Matrica inercije članka,
$\{M\}, \{n\}, \{n\}$	- Vektor momenta sila,
$\{q\}$	- Vektor generalisanih koordinata,
$\{r\}$	- Vektor vanjskih koordinata
$\{D\}$	- Matrica homogenih transformacija
$\{i\}\{j\}\{k\}$	- Jedinični vektori
$\{o\}\{a\}\{n\}$	- Jedinični vektori orijentacije efektora
$\{R\}$	- Matrica rotacije između dva koordinatna sistema,
$\{\omega\}$	- Vektor ugaone brzine,
$\{p\}$	- Vektor položaja,
$\{\tau\}$	- Vektor sila/momenata u aktuatorima robota,
$\{v\}$	- Brzina,
$\{\hat{z}\}$	- Jedinični vektor zglobne ose članka,
${}^{i-1}[D]_i$	- Matrica homogenih transformacija od i-1 do i
${}^0[W]_6$	- Matrica generalnog kretanja robota
${}^0[W]_R$	- Matrica kretanja ruke robota
${}^r[W]_H$	- Matrica kretanja hvataljke robota
${}^0[R]$	- Submatrica orijentacije ruke robota
${}^m[W]_n$	- Matrica prelaza iz n-tog u m-ti koordinatni sistem