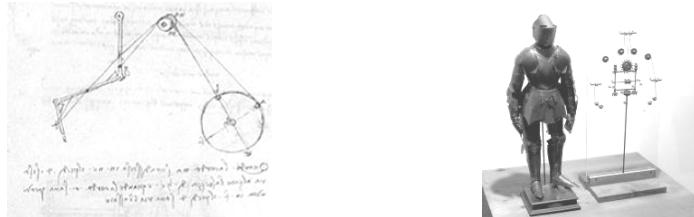
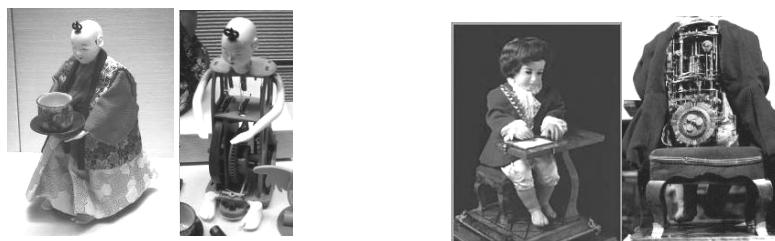


Želja da realizuje mašine koja će ga zameniti pri poslovima isuviše opasnim, napornim ili monotonim, kod čoveka je prisutna, verovatno, odvek. Veoma često su konstrukcije poprimale čovekoliki izgled (Sl. 1.1. - 1.3.), delom zbog težnje da napravi sopstvenu repliku, a delom zbog lakšeg uklapanja ovako koncipirane mašine na radno mesto koje je već prilagođeno čoveku. Mada se tokom novije istorije mogu naći primeri složenih mehanizama (Sl. 1.2.) koji su realizovali veoma složene pokrete ovi uređaji, pri strožijem tumačenju, ne mogu biti nazvani robotima. Pre svega, od robota se očekuje znatno širi



Sl. 1.1. Skica ideje o načinu pogona noge robota (levo) i model viteza , Leonardo da Vinči, oko 1495. god.



Sl. 1.3. Pokretne lutke za služenje čaja  
iz Japana, XVIII vek

Sl. 1.2. Automat časovničara Jaquet Droz-a  
poznat pod nazivom Pisar, oko 1750.godine

spektar aktivnosti nego što su ovi automati mogli da realizuju tj. očekuje se da mogu da realizuju različite zadatke (mada tekst koji Pisar, Sl. 1.2., ispisuje može da bude proizvoljno zadat u dužini od 40 karaktera, ipak ovaj automat može samo da piše i to samo jednom vrstom slova), a intuitivno se očekuje samostalno i svrshishodno delovanje robota u okolini u

kojoj se nalazi. Za realizaciju takvih mašina tada nije bilo uslova.

Tabela 1. Pregled razvoja robotike

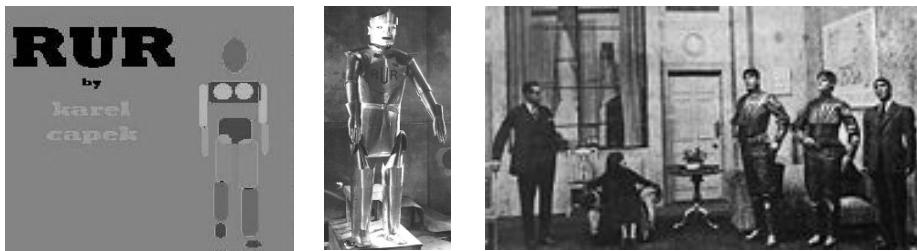
God.	Dostignuće
1898	Nikola Tesla javno demonstrirao radiom upravljeni (teledirigovani) model broda.
1946	Džorž Devol (George Devol) razvio prvi magnetski kontroler. Na Pensilvanijskom univerzitetu realizovan "Eniac", prvi savremeni računar.
1952	Na MIT-u realizovana prva NC mašina koja predstavlja prvi primer gde su softver i hardver integrirani u okvir istog uređaja.
1954	Džozef Inglberger (Joseph Engelberger), student Kolumbijskog univerziteta, otkupio prava na Devolov robot i osnovao prvu robotsku kompaniju "Junimejšn" (Unimation).
1956	Izraz "veštacka inteligencija" uveden u naučnu terminologiju
1962	Dženeral Motors (General Motors) instalisa prvi robot (firma Junimejšn) na poslovima opsluživanja mašine za livenje.
1968	Mobilni robot sa elementima veštacke intel. (Šejki (Shakey)) realizovan na SRI
1972	Prof. Vukobratović postavio teoretske principe dvonožnog hoda.
1973	Sinsinat Milakron (Cincinnati Milacron) razvio T3, prvi komercijalni robot.
1973	Na Stanford univerzitetu razvijen prvi jezik za programiranje robota (WAVE).
1976	U Čarls Draper (Charles Draper) laboratorijama na MIT-u razvijen RCC uređaj za montažu.
1977	ASEA ponudila na tržištu dva industrijska roboata na električni pogon.
1978	Prvi Puma robot iz firme "Junimejšn" instalisan u Dženeral Motors-u.
1979	SCARA (Selective Compliant Robot for Assembly) realizovan u Japanu.
1980	Počeo ubrzani razvoj industrijske robotike.
1984	Na Waseda univerzitetu razvijen Wabot-2 koji je bio u stanju da čita note i svira električne orgulje.
1986	Na Waseda univerzitetu realizovan dvonožni hodajući robot (WL-12) koji je hod ostvario na osnovu ZMP-a.
1987	Kompamije ASEA i BBC Brown Boveri formirale ASEA Brown Boveri (ABB)
1992	Istraživački 8-nožni robot Dante I ušao u krater vulkana Erebus na Antarktiku
1997	Honda javno prikazala autonomni humanoidni robot P3 (osmi prototip u okviru projekta koji je počeo 1986 godine).
1998	U Japanu započet veliki projekat Humanoid.
2000	Realizovan prvi autonomni humanoidni robot ASIMO firme Honda, Japan. Sony prikazao svoj humanoidni robot SDR (Sony Dream Robot)

Jasno je da su za pojavu robotike morala postojati odgovarajuća teorijska znanja i steći se adekvatni tehnološki uslovi. Obzirom da se do ovih uslova stiglo postepenim razvojem nije

## *Uvod*

## Industrijska robotika

moguće potpuno jednoznačno odrediti kada je započeo razvoja robotike. Smatra se da je za pojavu robota od suštinskog značaja bio razvoj teorije upravljanja, računara i elektronike, pa se pregled razvoja robotike dat u Tabeli 1 je fokusira uglavnom na ove oblasti.



Sl. 1. 4. Plakat, glavni lik i scena iz predstave Rosumovi univerzalni roboti (RUR) češkog pisca Karel Čapek.

Reč robot je u savremeni rečnik 1920. godine uveo češki pisac Karel Čapek, u svom pozorišnom komadu R.U.R. (Rosumovi univerzalni roboti, Sl. 1.4.). Reč robot potiče od češke reči *robot* koja označava teški rad.

Postoji više definicija šta je robot. Prema definiciji Međunarodne organizacije za standardizaciju (standard ISO 8373) manipulacioni industrijski robot je definisan kao "automatsko upravljeni reprogramabilni višenamenski manipulator sa tri ili više upravljalnih osa, koji može biti nepokretan ili pokretan u odnosu na podlogu i koji se koristi u zadacima industrijske automatizacije". Prema definiciji Japanske asocijacije za robotiku (JARA) roboti se mogu klasifikovati u šest klasa:

- Ručno (pomoću operatora) upravljeni uređaji za rukovanje materijalom.
- Uređaj za rukovanje materijalom koji je tako konstruisan da može da realizuje samo fiksni, unapred definisani, niz pokreta (*engl. Fixed Sequence Robot*).
- Uređaj za rukovanje materijalom koji je tako konstruisan da može da realizuje niz pokreta koji lako možemo da modifikujemo (*engl. Variable Sequence Robot*).
- Robot kod kojeg se kretanje može zapamtiti radi kasnijeg ponavljanja (*engl. Playback Robot*).
- Numerički upravljeni roboti koji imaju uređaj za ručno obučavanje provođenjem kroz niz definisanih položaja.
- Inteligentni roboti koji mogu da "razumeju" svoju okolinu i u stanju su da završe zadatak uprkos izmenjenim radnim uslovima.

Zbog nesaglasnosti ovih definicija podaci o broju robota u Japanu nisu u potpunosti kompatibilni sa podacima o broju robota u drugim zemljama.

Dok je u početnim fazama razvoj uglavnom bio fokusiran na industrijsku robotiku, savremeni trenutak i bliska prošlost su karakterisani naglom ekspanzijon razvoja robota i u drugim oblastima života. Tako se pojavljuju: roboti za domaćinstvo, roboti koji se koriste u terapeutске svrhe, roboti za negu starijih i onemoćalih osoba, roboti za pomoći pri hirurškim zahvatima, roboti za gašenje požara, roboti u industriji zabave ... (Sl. 1.5.). Neki od njih imaju humanoidni oblik (Sl. 1.6.). Često se robotika u drugim oblastima izvan industrijske naziva servisnom dok se, ukoliko roboti imaju čovekoliki izgled naziva humanoidnim.



a)



b)



c)



d)

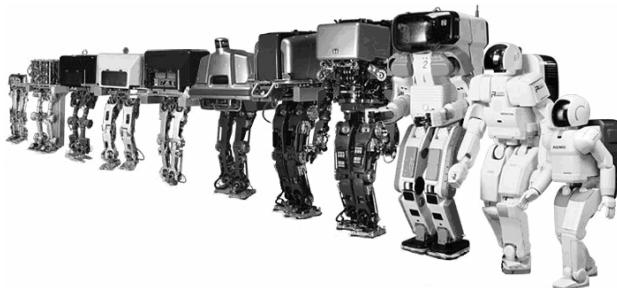


e)



f)

Sl. 1.5. Roboti van oblasti industrijske robotike: a) robot usisivač, b) terapeutski robot Faro, c) pomoć hendikepiranim osobama, d) pomoć pri hirurškim zahvatima, e) protivpožarni robot, f) roboti u industriji zabave



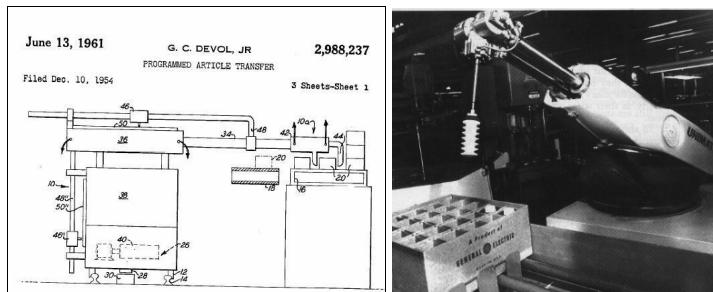
Sl. 1.6. Razvoj Asimo (HONDA) humanoidnog robota

Razmotrimo detaljnije razvoj industrijske robotike. Ako preskočimo rane faze (pojava motora sa obrtnim magnetnim poljem i elektronskog računara) za početak ubrzanog razvoja industrijske robotike presudan je bio pronalazak tranzistora 1947. godine i integriranog kola 1959. godine što je omogućilo minijaturizaciju, povećanje pouzdanosti rada računara i njegovu primenu u upravljanju robotima. Time su omogućeni intenzivni proraču-ni prilikom realizacije programiranih putanja, obrade senzorskih informacija i upravljanja električnim pogonima. U to vreme, 1961. godine, Džordžu Devolu (George Devol) je odobren patent broj US 2998237, mašine za rukovanje materijalom što je predstavljalo početak industrijske robotike. Prva skica patenta prikazana je na Sl. 1.7. Još u toku obrade patentne

## *Uvod*

## Industrijska robotika

prijeve, 1956. godine formirana je kompanija Junimejšn (Unimation) Inc., čiji su osnivači bili Džordž Devol i Jozef Englberger. Prvi prototip je izašao iz fabrike 1959. godine i instalisan je u livnici u vlasništvu GM u Nju Džersiju (General Motors, New Jersey), a 1961. godine počinje sa stalnim radom. Početak industrijske primene robota prati i osnivanje istraživačkih laboratorija za oblast robotike pri univerzitetima u SAD, Evropi i Japanu.



budu adekvatni<sup>1</sup>. Ukoliko se u okviru radnog mesta javlja potreba za podizanjem teških predmeta ili ukoliko je posao monoton i ponavljajući ili ukoliko je radni prostor kontaminiran (buka, ispareњa, prašina, ...) ili ukoliko posao tokom dugog vremenskog perioda zahteva visok stepen koncentracije treba razmišljati o uvođenju automatizacije i robotizacije na takvo radno mesto. Tako se npr. u Nissan-u smatra da radno mesto treba automatizovati ukoliko tokom jedne smene podignut teret prelazi 20 tona ili ukoliko broj ponavljanja jedne akcije, isto tokom jedne smene, prelazi 4000. Tako je, za montažu točkova na automobile (jedan točak ima masu od 20-30 kg) koja se tokom jedne smene realizuje 1000 puta razvijen poseban robot. Drugi karakterističan primer monotonih i ponavljajućih pokreta na radnim mestu je pakovanje i paletizacija, dok su ispareњa prilikom bojenja veoma često kancerogena i kontaminiraju radni prostor. U oba slučaja primena robota predstavlja adekvatno rešenje.

Kada se govori o ceni robotizacije radnog mesta treba voditi računa o ceni samog robota i uređenju radnog mesta. Obzirom na osobinu robota da veoma tačno ponavljaju pokrete, a da on-line prepoznavanje scene zahteva instalaciju veoma skupe opreme (ukoliko je scena takva da je uopšte moguće prepoznavanje u realnom vremenu) potrebno je radno mesto realizovati kao visoko strukturirano. To znači da je potrebno da se u svakom trenutku svi elementi potrebni u radnom procesu nalaze na tačno određenim i unapred poznatim lokacijama što se postiže korišćenjem raznih vrsta dodavača, paleta i sl. što zahteva ulaganje značajnih sredstava. Da bi se sredstva uložena u uređenje radnog mesta što pre vratila veoma je poželjno da roboti rade više smena, ukoliko je moguće, 24 časa dnevno.

Životni vek proizvoda je sve kraći pa se neminovno zahteva skraćivanje vremena razvoja novog proizvoda. Osim toga, i proizvodne linije treba da budu takve da mogu da se koriste za proizvodnju više od jednog proizvoda. Stoga se postavlja zahtev za visokim stepenom fleksibilnosti, koji treba da bude viši ne samo u odnosu na krutu autonatizaciju već i u odnosu na radne procese koje realizuje čovek. Tako je npr. Rolls-Royce za 75% skratio vreme obrade delova hemijskim nagrizanjem time što se maske za pokrivanje zaštićenih delova više ne prave ručno korišćenjem šablonu, već se koriste podaci iz CAD sistema. Sa druge strane, Nissan trenutno radi na formiraju jedinstvene linije za proizvodnju automobila na kojoj bi bilo moguće proizvoditi sve njihove modele (Intelligent Body Assembly System). To nameravaju da postignu korišćenjem jednostavnih robota kojima bi menjali pribore na liniji u skladu sa svakim novim modelom automobila.

Drugo, ranije postavljeno, pitanje je bilo: kada ne treba koristiti robe? Odgovor je da robe ne treba koristiti onda kada su prednosti čoveka u odnosu na robota značajne za realizaciju zadatka. Prednosti čoveka u odnosu na robota u procesu proizvodnje su sledeće:

- Čovek ima mnogo veći broj senzora koji su boljeg "kvaliteta" od onih koje koriste roboti. Osim toga, čovek mnogo efikasnije koristi senzorske informacije.
- Čovek ima sposobnost učenja i može da donosi ispravne odluke čak i kada svi potrebni podaci ne postoje.
- Čovek je veoma fleksibilan i može se lako prilagoditi drugom zadatku (čovek je "lak za programiranje").
- Čovek poseduje mobilnost u smislu jednostavnog prelaska sa jednog na drugo radno mesto.

---

<sup>1</sup> Posmatrano kratkoročno, preopterećenje ljudskog tela dovodi do zamora, a u dužem periodu i do povreda.

## *Uvod*

## Industrijska robotika

- Novo radno mesto ne zahteva posebnu pripremu u smislu prilagođavanja čoveku (male kapitalne investicije).

Ukoliko je na radnom mestu neophodno da izvršilac poseduje jednu ili više pomenutih osobina potrebno je na to mesto postaviti čoveka.

Osvrnamo se, na kraju, na razvoj industrijske robotike u poslednje dve decenije. Prema UNECE (Press Release ECE/STAT/04/P01, Geneva, 20 oktobar 2004), robotika je tokom poslednje decenije XX veka, posmatrano sa različitih aspekata, značajno napredovala. Tako, na primer, odnos nekih osnovnih ekonomskih i tehnoloških parametara sa početka i sa kraja poslednje decenije XX veka to potvrđuje: nominalna cena robota je smanjena od 43% do 80%, broj isporučenih jedinica je uvećan za 782%, broj različitih tipova robota je uvećan za 400%, ukupna nosivost je uvećana za 26%, tačnost pozicioniranja je uvećana za 61%, brzina kretanja poslednje ose je uvećana za 39%, maksimalni dohvati je uvećan za 36%, srednje vreme rada pre pojave otkaza je uvećano za 137% (sada iznosi i do 100,000 sati), veličina RAM-a je uvećana za preko 400 puta a broj maksimalno upravljenih SS je uvećan za 45%.

Period veoma značajnog tehnološkog unapređenja industrijskih robota tokom ovog perioda je istovremeno praćen konstantnim rastom tržišta. U tome su prednjačile Evropa i SAD obzirom da je Japan najveći deo robotizacije priveo kraju desetak godina ranije. Na kraju XX veka, u svetu se broj robota u upotrebi približio broju od  $900.000 \pm 100.000$  (poznat je broj proizvedenih i isporučenih robota ali se ne zna tačno koliko je robota izvan upotrebe zbog zastarelosti). Iako je preporučeni radni vek robota dvanaest godina, nije redak slučaj da se roboti koriste i posle tog perioda u zavisnosti od intenziteta ranijeg korišćenja ali i od ekonomske opravdanosti nove investicije.

Broj robota u Japanu je u tom trenutku iznosio (uključujući i najjednostavnije manipulatorе) 389.442, u Sjedinjenim američkim državama 89.880, u Evropskoj uniji 198.897, ostaku Evrope 10.783, Aziji i Australiji 53.132, a u ostatku sveta 8.900. Broj robota na 10.000 industrijskih radnika u pojedinim zemljama je iznosio: Japan 272; Južna Koreja 125; SAD 52; EU 81; Nemačka 127; Italija 102; Švedska 89; Velika Britanija 34; Australija 31. U automobilskoj industriji, koja je u znatno većoj meri robotizovana, u proseku, na 10.000 radnika dolazi 1000 robota (u Japanu 1.700, u Italiji 850 (najviše u Evropi), u SAD 590 robota, ...).

Predviđanja za period do kraja prve decenije XXI veka ukazuju na to da će broj novih, proizvedenih i instaliranih, robota dostići cifru od 131.000, odnosno da će broj aktivnih robota na kraju decenije dostići 1.150.000 jedinica. Cena robota će neznatno opadati a broj robota u odnosu na broj radnika će biti povećan: predviđa se 352 robota na 10.000 radnika u Japanu, preko 173 u Koreji, 171 u Nemačkoj, 130 u Italiji, 90 u SAD.

Interesantno je da je 2005. godine naručeno 59% robota antropomorfne konfiguracije, 12%, cilindrične, 8% SCARA konfiguracije i ukupno 21% svih ostalih konfiguracija.

Za samo pet godina, rast u servisnoj robotici iznosio je 31.600 jedinica. Sa 5.680 jedinica, podvodna robotika predstavlja glavni pravac komercijalizacije. Slede roboti za čišćenje, vojni i bezbednosni roboti, građevinarski roboti, medicinski roboti i mobilne platforme opšte namene. Prodato je 1.9 miliona jedinica za domaćinstvo 1 milion robota-igračaka.

Strah da će roboti zatvoriti mnoga radna mesta nije se pokazao u potpunosti opravdanim. Posle očekivanog otpuštanja na početku robotizacije u nekoj industrijskoj grani, ubrzani rast obično otvara nova radna mesta ili se, usled opšteg napretka društva, otvaraju investicije u drugim granama čime se povećava potreba za radnom snagom, koja pri tome mora da

Industrijska robotika

*Uvod*

se prekvalificuje. Opet, kao primer možemo uzeti automobilsku industriju gde se, posmatrano u celini, i pored povremenih kriza se beleži konstantni rast novootvorenih radnih mesta.

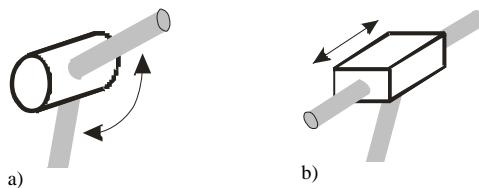
## LITERATURA

- An C., Atkinson C, and Hollerbach J.: **Model-Based Control of a Robot Manipulator**, The MIT Press, 1998.
- Angeles J.: Fundamentals of Robotic Mechanical Systems, Theory, Methods and Algorithms, Springer-Verlag, 2003.
- Asada H. and Slotine J.J.: **Robot Analysis and Control**, John Wiley and sons, 1985.
- Ben-Zion Sandler, Robotics- designing the Mechanisms for Automated machinery, Prentice – Hall, Inc., 1991
- Bruyninckx H. and De Schutter J.: **Introduction to Intelligent Robotics**, Katholieke Uiversteit Leuven, 2001.
- Craig J.: Introduction to Robotics: Mechanics & Control, Addison-Wesley, 1986.
- Dorf. R and Bishop R.: **Modern Control Systems**, Addison-Wesley, 1995.
- Eugene I. Rivin, **Mechanical design of robots**, McGraw-Hill, Inc., 1987
- Fu K., Gonzales R., and Lee C.: **Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence**, McGraw-Hill Book Company, 1987.
- Yamauchi Y., **Application and evaluation of robots in Nissan**, Proc. of Automotive Manufacturing International '93, pp 73-81, 1993.
- Emrich M., **A New Wrinkle in Auto Body Manufacture-And Guess Who's Doing It**, Proc. of Manufacturing Systems, pp. 44-46, August 1991.
- Sekine Y., Koyama S., Imazu H., **Nissan's New Production System: Intelligent Body Assembly System**, Proc. of SAE Int. Congress and Exposition, Feb 1991, Detroit.
- Seegräber L., Greifsysteme für Montage, Handhabung und Industrieroboter, Expert-Verlag, 1993.

## 2 OSNOVNE DEFINICIJE I STRUKTURE MANIPULACIONIH ROBOTA

### 2.1 OSNOVNI POJMOVI

Mehanička struktura industrijskog robota se sastoji od segmenata spojenih zglobovima koji mogu biti rotacioni ili linearni (translatoryni). Zadatak mehaničke konstrukcije je da ostvari potrebno kretanje hvataljke robota tokom realizacije radnog zadatka. To znači da je potrebno da hvataljka u svakoj tački putanje ostvari planiranu poziciju i orientaciju, kao i odgovarajuću brzinu i ubrzanje. Konstrukcionalna realizacija zglobova koji se danas primenjuju kod industrijskih robota je takva da jedan zglob omogućava samo jedno relativno kretanje (Sl. 2.1) segmenata koje povezuje. Jedno kretanje koje zglob dozvoljava (translacija ili rotacija) se, po analogiji sa terminologijom u mehanici, naziva jednim stepenom slobode (SS). Prema tome, zglob koji omogućava samo jedno relativno kretanje ima jedan stepen slobode i naziva se jednostrukim. Stoga se može reći da se mehanička struktura robota sastoji od više segmenata koji su povezani jednostrukim zglobovima. Jasno je da se složena prostorna kretanja vrha robota ostvaruju istovremenim i uskladenim kretanjem više zglobova. Pozicije zglobova se, bez obzira da li se radi o rotacionim ili linearnim zglobovima, se nazivaju unutrašnjim koordinatama.



Sl. 2.1. Šematski prikaz a) rotacionog i b) translatorynog zgloba

Obzirom da je za dostizanje proizvoljno zadate pozicije i orientacije krutog tela u prostoru potrebno šest stepeni slobode (tri translacije duž osa koordinatnog sistema i tri rotacije oko njih) jasno je da mehanička struktura robota koja treba da obezbedi pozicioniranje vrha robota u bilo kojoj tački svog radnog prostora sa proizvoljnom orientacijom mora da ima šest jednostrukih, odgovarajućih spregnutih, zglobova jer na taj način mehanička struktura robota obezbeđuje šest stepeni slobode kretanja vrha robota. Stoga je jasno da, kada je u pitanju mehanička struktura sa šest stepeni slobode, za proizvoljno zadatu poziciju i orientaciju hvataljke u prostoru postoji samo jedno rešenje (samo jedan skup vrednosti pomeraja u zglobovima) koje obezbeđuje da hvataljka bude u zadatoj poziciji sa traženom orientacijom.

U slučaju da mehanička struktura ima više od šest stepeni slobode postoji više mogućih položaja zglobova (teoretski, beskonačno mnogo) sa kojima se ostvaruje tražena pozicija i orientacija hvataljke. Roboti čija mehanička struktura nosi hvataljku imaju više od šest,

prostorno raspoređenih, zglobova (steperi slobode) su uvek *redundantni*<sup>2</sup>. Treba uočiti da se redundantnost definiše kao razlika u broju stepeni slobode koje zahteva realizacija radnog zadatka i broja stepeni slobode koje poseduje mehanička struktura robota. Ako robot poseduje "višak" stepeni slobode za određeni zadatak on je za taj zadatak redundantan. U suprotnom slučaju nije. Prema tome, za neki zadatak robot koji ima šest ili manje stepeni slobode može, dok za neki drugi zadatak ne mora biti redundantan. Po pravilu, industrijski roboti imaju najviše šest stepeni slobode, mada se na tržištu već pojavljuju realizacije koje imaju i više SS<sup>3</sup>.

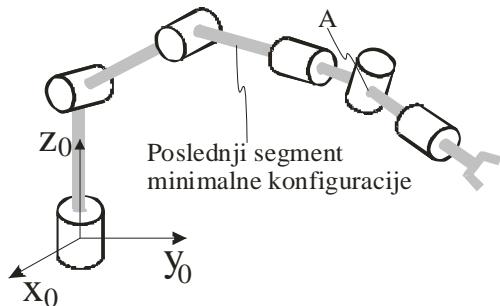
Deo prostora u kome se hvataljka robota može naći, naziva se radnim prostorom (engl. *workspace*). Oblik radnog prostora zavisi od vrste i rasporeda zglobova minimalne konfiguracije, dimenzija segmenata i opsega kretanja svakog zgoba. Na Sl. 2.7. je prikazana kontura radnog prostora u vertikalnoj ravni. Ukupan radni prostor se dobija rotacijom ove konture oko ose prvog zgoba. *Potpuno operativnim radnim prostorom* (engl. *versatile workspace*) nazivamo radni prostor u okviru kojeg robot može u svakoj tački da ostvari bilo koju zahtevanu orientaciju hvataljke. *Maksimalnim radnim prostorom* nazivamo deo prostora u okviru koga robot može da dohvati svaku tačku makar sa samo jednom mogućom orientacijom hvataljke. Jasno je da je maksimalni radni prostor veći, i da se u njegovim zonama koje su bliže graničnim oblastima smanjuje opseg mogućih orientacija hvataljke koje robot može da postigne. Tačke koje su na graničnoj spoljnoj površini radnog prostora robot može da dohvati samo sa potpuno ispruženom mehaničkom strukturom pa je jasno da je u tim tačkama moguće ostvariti samo jednu orientaciju hvataljke. Dodatna razmatranja vezana za radni prostor su data u odeljku 2.3.

Kao što smo već rekli mehanička struktura industrijskog manipulacionog robota se sastoji od segmenata koji su spojeni zglobovima. Prvi zglob, računato od osnove je fiksiran za podlogu, dok je na poslednji pričvršćena hvataljka. Ukupna mehanička konfiguracija se uobičajeno deli na dve celine: prva tri segmenta sa pripadajućim zglobovima (računato od podloge) se nazivaju *minimalnom konfiguracijom* dok druga tri zglobova čine *zglob hvataljke* (Sl. 2.2). Adekvatnim izborom uglova minimalne konfiguracije se hvataljka pozicionira u željenu tačku radnog prostora dok se zglobom hvataljke obezbeđuje zahtevana orijentacija.

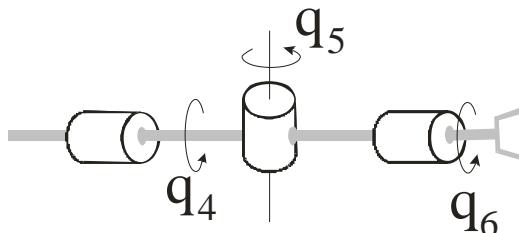
Celina koju formiraju poslednja tri zglobova u kinematskom lancu mehaničke strukture robota se naziva zglobom hvataljke. Uobičajeno je da su sva tri zglobova rotaciona (Sl. 2.3) i realizovani tako da se sve tri ose sekut u jednoj tački (tačka A na Sl. 2.2). Ova tačka ostaje nepokretna za bilo koju vrednost uglova u zglobovima 4, 5 i 6. Ovakva konstrukcija se naziva Ojlerovim zglobom. Ukoliko se tačka A adekvatno pozicionira u radnom prostoru robota izborom odgovarajućih uglova u zglobovima hvataljke, se obezbeđuje potrebna orijentacija hvataljke. Obzirom da se zglob hvataljke direktno nadovezuje na minimalnu

<sup>2</sup> Ljudska ruka ima sedam stepeni slobode i redundantna je. Da biste lakše shvatili značaj redundantnosti naslonite dlani na neki nepokretan objekat iz vaše okoline, npr. zid. Obezbedujući da se trup i dlani ne pomjeraju deo ruke između dlana i ramena može zauzeti više položaja. Stoga je jasno da nam redundantnost omogućava slobodu da zahtevenu poziciju i orijentaciju hvataljke ostvarimo takvim položajem mehaničke strukture koji nam najviše odgovara.

<sup>3</sup> Firma Motoman je juna 2008. godine predstavila dvoručni model SDA10. Ukupno robot ima 15 SS (svaka „ruka“ ima po 7 SS plus rotacija centralnog stuba), nosivost svake ruke je po 10 kg, ponovljivost je  $\pm 0,1$  mm. Obe ruke mogu raditi sinhrono na istom zadatku, ali se svakom rukom može upravljati i nezavisno. Za detaljnije informacije videti <http://www.motoman.com/motomedia/pr/SDA10web.pdf>



Sl. 2.2. Primer kinematske šeme jedne mehaničke konfiguracije. Zglobovi 1, 2 i 3 čine minimalnu konfiguraciju, a zglobovi 4, 5 i 6 zglob hvataljke. Sve tri ose zglobova 4, 5 i 6 se sekut u tački A.



Sl. 2.3. Kinematska šema zgloba hvataljke gde se sve tri ose sekut u jednoj tački (Ojlerov zglob).

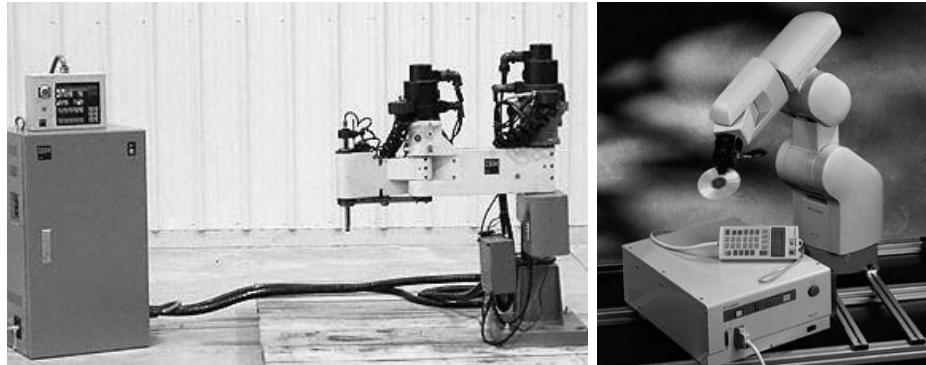
konfiguraciju jasno je da se tačka A na Sl. 2.2 ne pomera u odnosu na poslednji segment minimalne konfiguracije. Ova činjenica će na pogodan način biti iskorišćena kasnije kod raspreznanja mehaničke strukture pri rešavanju inverznog kinematskog zadatka.

Uobičajeno se mehanička struktura formira kao jednostruki kinematski lanac, mada se mogu naći primjeri višestrukih kinematskih lanaca. Višestrukim kinematskim lancima se, uglavnom, vrši prenos kretanja sa motora na zglob ukoliko je motor udaljen od zglobova koji osnažuju tj. nije direktno povezan na osovinu zglobova mehaničke strukture. To se najčešće odnosi na motore kojima je osnažen zglob hvataljke.

Robotski manipulacioni sistem (Sl. 2.4.) se minimalno sastoji od:

- mehaničke konfiguracije osnažene aktuatorima
- odgovarajućeg upravljačkog uređaja (kontrolera) za upravljanje kretanjem izvršnih organa, koji se obično nalazi u istom kućištu sa energetskim delom sistema za napajanje aktuatora.
- uređaja za ručno navođenje robota, koji se često naziva uređajem za obučavanje (engl. *Teaching box*) tj. programiranje robota.

Na Sl. 2.4 su data dva primera robotskih sistema i u oba slučaja se vide sve tri pomenute



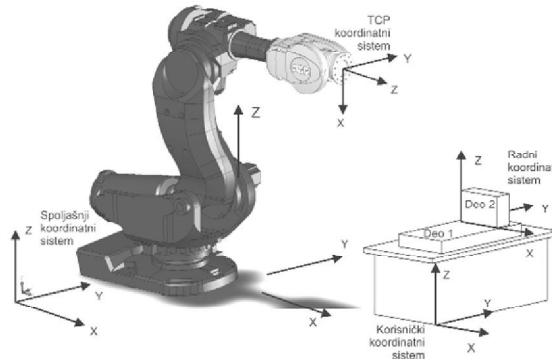
Sl. 2.4. Kompletan sistem manipulacionih robota (mehanička konfiguracija, upravljački uredaj i uređaj za obučavanje).

komponente. U pojedinačnim slučajevima one mogu da variraju po veličini i obliku. Mogu postojati još neki dodatni elementi (izvor ulja pod pritiskom za robot sa hidrauličnim aktuatorima, disketna jedinica za unošenje programa koji je razvijen na nekom drugom uređaju, ...).

## 2.2 DEFINICIJA OSNOVNIH KOORDINATNIH SISTEMA

Za uspešnu primenu robota neophodan je, u što većoj meri, univerzalan i standardizovan način opisa informacija koje su značajne i za robot i za zadatku.

U odnosu na osnovni (spoljašnji) koordinatni sistem (engl. *world coordinates*) se definiše globalni položaj robota i radnog mesta (Sl. 2.5). Globalni položaj robota se opisuje položajem koordinatnog sistema osnove robota (engl. *base coordinates*). Spoljašnji koordinatni sistem i koordinatni sistem osnove robota su nepokretni i ne menjaju svoj položaj tokom realizacije zadatka. Položaj hvataljke (ili alata ukoliko ga robot nosi) se definiše posebnim koordinatnim sistem koji se postavlja u TCP (engl. *Tool Center Point*) ili u tačno definisanu tačku čiji položaj se precizira u odnosu na TCP. Položaj TCP-a definiše



Sl. 2.5. Osnovni koordinatni sistemi

proizvođač robota. U slučaju robota koji je prikazan na Sl. 2.5, koordinatni sistem osnove je postavljen tako da je osa Z koaksijalna sa osom prvog zglobova robota, X osa je upravna na nju, dok se osa Y bira tako da formira desni koordinatni sistem. U TCP je koordinatni sistem postavljen tako da je Z osa koaksijalna sa osom šestog zglobova robota, X osa je normalna na ravan radnog stola, a Y osa je izabrana tako da čini desni koordinatni sistem sa X i Z osama. Koordinatni sistemi kojima se definiše položaj radnog mesta i radnog predmeta su: korisnički koordinatni sistem (engl. *user coordinates*) koji se odnosi na položaj radnog mesta i koordinatni sistem objekta (engl. *object coordinate system*) koji se odnosi na radni predmet.

## 2.3 OSNOVNI RADNI PARAMETRI INDUSTRIJSKIH ROBOTA

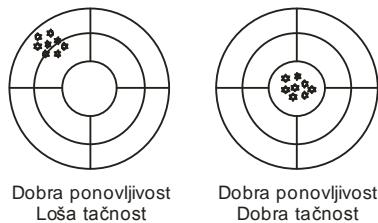
Najvažniji parametari robota su: ponovljivost, tačnost, rezolucija, veličina radnog prostora, kao i raspodela funkcije nosivosti u okviru radnog prostora.

Ukoliko je robot doveden u određenu tačku radnog prostora u kojoj su mu zapamćene unutrašnje koordinate a zatim se iz te tačke izvede, pa mu se izda komanda da se u vrati u istu tačku, greška pozicioniranja u odnosu na tačku u kojoj je prethodno bio se naziva *ponovljivošću*. Drugim rečima ponovljivost je rastojanje između ostvarene i željene pozicije ukoliko je robot u željenoj poziciji prethodno bio i zapamtio unutrašnje koordinate koji toj poziciji odgovaraju. Ponovljivost se definiše kao poluprečnik kruga koji obuhvata sve tako dostignute položaje.

*Tačnost* je rastojanje u prostoru između ostvarene i zadate (komandovane) pozicije ukoliko robot u komandovanoj poziciji nije prethodno bio.

*Rezolucija* je najmanji pomeraj komandovanog pokreta koji se može realizovati. Veličina rezolucije je posledica ograničenog broja bitova digitalnog upravljačkog sistema robota.

Roboti imaju i za red veličina bolju ponovljivost od tačnosti. Recimo, SCARA robot može imati ponovljivost od 0.05mm, dok je tačnost najmanje pet puta lošija od ponovljivosti.



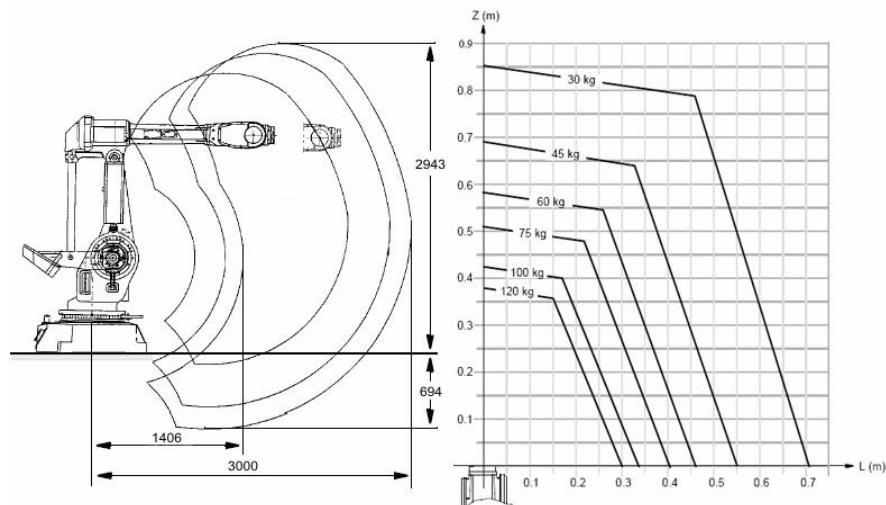
Sl. 2.6. Ilustracija tačnosti i ponovljivosti

Ukažimo još jednom na razliku između tačnosti i ponovljivosti. Naime, kada se robot već nalazi u nekoj tački radnog prostora mogu se zapamtiti vrednosti koordinata u zglobovima (za rotacione zglove to su uglovi, za translatorne su to linearna izduženja) kojima odgovaraju trenutni položaji segmenta. Kada se robot izvede iz te pozicije a zatim mu se komanduje da ponovo ode u istu tačku (vrednosti koordinata koje treba ostvariti su poznate) greška pozicioniranja se naziva *ponovljivošću*. Ukoliko se robotu komanduje da ode u tačku u kojoj prethodno nije bio i nema informaciju o koordinatama u zglobovima koji toj poziciji odgovaraju, upravljački uređaj robota mora da ih „sračuna“ na osnovu kinematskog

modela koji poseduje. Greška pozicioniranja je u ovom slučaju dodatno indukovana odstupanjem parametara modela od stvarnih parametara robota i naziva se tačnošću.

Dakle, ukoliko želimo da povećamo preciznost izvršavanja zadatka, tačnost robota je osnovni ograničavajući faktor. Stoga su razvijeni razni kalibracioni postupci pomoću kojih se odstupanja stvarnih parametara robota od parametara koji upravljački uređaj robota koristi minimiziraju. Ponovljivost pri tome ostaje nepromjenjena.

Već ranije smo ukazali da se sam radni prostor može dalje deliti na maksimalni i potpuno operativni u zavisnosti od mogućnosti pristupanja svakoj njegovoj tački sa proizvoljnom orijentacijom hvataljke. U slučaju da je potrebno da se vodi računa o održavanju željene tačnosti položaja pod opterećenjem (Sl. 2.7), radni prostor se deli na koncentrične prostore



Sl. 2.7. Radni prostor robota i maksimalno dozvoljeno opterećenje na prirubnici hvataljke na različitim pozicijama u koordinatnom sistemu osnove.

kojima se pripisuju vrednosti nosivosti robota. Tako je radni prostor pri najvećoj nosivosti (a da je i dalje obezbeđena željena tačnost pozicioniranja) daleko manji od radnog prostora neopterećenog manipulacionog robota. Vrlo često se u podacima proizvođača, samo navodi podatak o veličini radnog prostora neopterećenog robota, a tek se na osnovu posebnih zahteva daje informacija o veličina i obliku radnog prostora pod delimičnim ili maksimalnim opterećenjem.

Često se radno prostor koji odgovara određenoj tačnosti pozicioniranja u kombinaciji sa nosivošću robota prikazuje putem familije krivih za približne vrednosti nosivosti robota u vertikalnoj ravni. Ove krive su odredene za maksimalnu vrednost momenta inercije po bilo kojoj od tri ose TCP koordinatnog sistema u centru mase objekta koji robot nosi. Sa Sl. 2.7 se vidi da je u konkretnom primeru nosivost na spoljašnjim granicama radnog prostora smanjena za 70% u odnosu na unutrašnje granice.

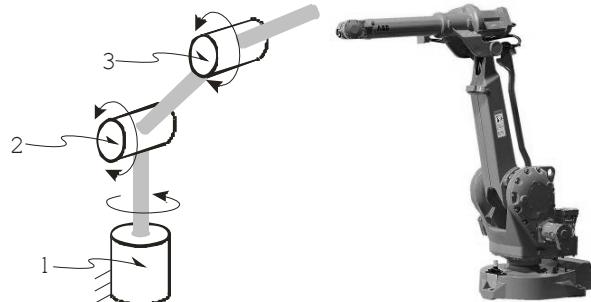
## 2.4 OSNOVNE MEHANIČKE STRUKTURE (KONFIGURACIJE) MANIPULACIONIH ROBOTA

U literaturi se mogu pronaći razni načini sistematizacije industrijskih manipulacionih robota. Veoma često su kriterijumi koji se koriste bazirani na njihovim tehničkim karakteristikama i važe u potpunosti samo u određenom vremenskom periodu. Ovde je usvojena podela koja se bazira na tipu mehaničke strukture minimalne konfiguracije robota obzirom da to predstavlja jednu od veoma važnih karakteristika, a koja je relativno nepromenljiva tokom vremena.

Prikazaćemo osnovne konfiguracije industrijskih robota.

### 2.4.1 Robot antropomorfne konfiguracije

Kod većine robotskih konfiguracija, pa i kod ove, prvi stepen slobode (računato od podloge) je rotacioni i osa prvog zgloba je vertikalna. Ovaj zglob obezbeđuje rotaciju kompletног robota oko vertikalne ose. Ose drugog i trećeg zgloba su međusobno paralelne,

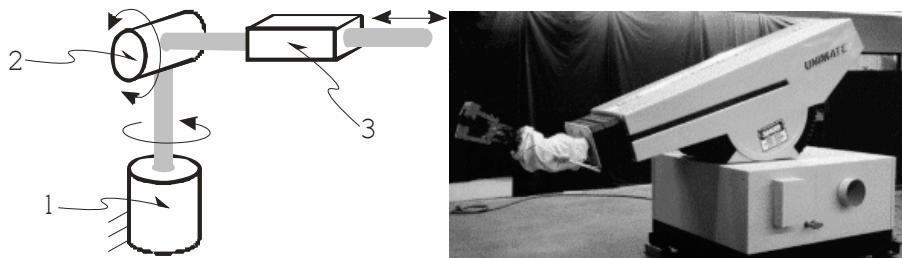


Sl. 2.8. Kinematska šema i fotografija tipične robotske konfiguracije antropomorfnog tipa

horizontalne i upravne na osu prvog zgloba. Kretanjem drugog i trećeg zgloba se obezbeđuje da se vrh minimalne konfiguracije pozicionira u proizvoljnu tačku u vertikalnoj ravni koja sadrži osu prvog zgloba. Skica kinematske strukture i fotografija robota antropomorfne konfiguracije su prikazani na Sl. 2.8. Mehanička struktura robota antropomorfne konfiguracije podseća na strukturu ruke čoveka pa se stoga za drugi segment minimalne konfiguracije često koristi naziv nadlaktica, a za treći podlaktica (Sl. 2.8.). Osnovna karakteristika robota antropomorfne konfiguracije je da može da pređe iznad prepreke koja mu se nađe na putu. Ako pogledamo kinematsku šemu ove konfiguracije jasno je da se pokretanjem npr. trećeg zgloba utiče na intenzitet momenta oko ose drugog zgloba čak i u slučaju da se ovaj zglob ne pomera. Ovaj uticaj se naziva sprezanjem. Stoga se kaže da, ukoliko kretanje jednog zgloba utiče značajno na pogonske momente (ili pogonske sile ukoliko su zglobovi translatorni) drugih zglobova, posmatrana konfiguracija ima značajno sprezanje među zglobovima. Roboti antropomorfne konfiguracije su karakteristični po tome što imaju veliko sprezanje među zglobovima.

#### 2.4.2 Robot sferne (polarne) konfiguracije

I kod sferne konfiguracije osa prvog zgloba je usmerena vertikalno naviše dok je osa drugog horizontalna i upravna na osu prvog zgloba. Treći zglob je translatorni. Prema tome, kod sferne konfiguracije vrsta i raspored prva dva zgloba su istovetni kao kod antropomorfne. Kinematska šema sferne konfiguracije je prikazana na Sl. 2.9. Kao i ranije drugi i treći zglob omogućavaju pozicioniranje vrha minimalne konfiguracije u bilo kojoj tački vertikalne ravni, dok se rotacijom vertikalne ravni oko ose prvog zgloba vrh robota može pozicionirati bilo gde u okviru radnog prostora



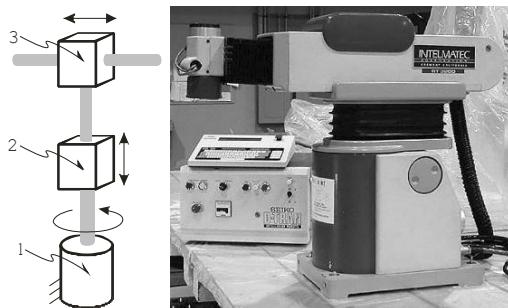
Sl. 2.9. Kinematska šema i fotografija robota sferna (polarne) konfiguracije

Ova konfiguracija je nazvana sfernom po obliku radnog prostora koji predstavlja deo sfere, a polarnom obzirom da ugao rotacije drugog zgloba i izduženje trećeg zgloba odgovaraju polarnim koordinatama.

Treba primetiti da, pošto je treći zglob translatoran, prilaz radnom mestu treba da bude bez prepreka obzirom da ih robot ove konfiguracije ne može zaobići.

#### 2.4.3 Robot cilindrične konfiguracije

Minimalna konfiguracija robota cilindrične konfiguracije ima jedan rotacioni i dva translationalna zgloba (Sl. 2.10). I kod ove, kao i kod prethodnih konfiguracija, prvi segment predstavlja obrtni stub oko vertikalne ose pa je prvi zglob rotacioni i postavljen na isti način kao i u prethodnim konfiguracijama. Drugi i treći zglob su translatorni (linearni). Osa drugog zgloba je vertikalna što znači da se njegovim kretanjem vrši podizanje odnosno spuštanje kompletne strukture koja se nalazi dalje od zgloba, prema vrhu robota. Osa trećeg zgloba



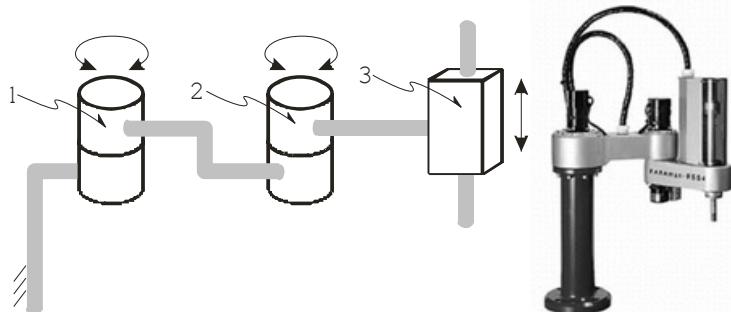
Sl. 2.10. Kinematska šema i fotografija robota cilindrične konfiguracije

je horizontalna tako da se njegovim pokretanjem vrši primicanje odnosno odmicanje hvataljke u odnosu na vertikalni stub robota.

Ova konfiguracija se naziva cilindričnom prema obliku radnog prostora koji predstavlja deo cilindra. Roboti ove konfiguracije imaju veoma malo sprezanje među zglobovima.

#### 2.4.4 Robot scara konfiguracije

Roboti SCARA konfiguracije (engl. *Selective Compliance Assembly Robot Arm*), imaju dva rotaciona i jedan translatorični zglob. Dva međusobno paralelna rotaciona zgloba sa vertikalnim osama obrtanja su postavljeni na stubnu osnovu tako da se oba segmenta kreću u horizontalnoj ravni. Na kraju drugog segmenta se nalazi translatorični zglob čija osa je takođe vertikalna (Sl. 2.11). Zglob hvataljke ima najčešće samo jedan stepen slobode i to obrtanje oko vertikalne ose. Prema tome, roboti SCARA konfiguracije uobičajeno imaju samo četiri stepena slobode.



Sl. 2.11. Kinematska šema i fotografija robota SCARA konfiguracije

Kretanjem rotacionih zglobova se vrši pozicioniranje translatoričnog zgloba u željenu tačku horizontalne ravni, a zatim se spuštanjem translatoričnog zgloba dovodi hvataljka do željenog položaja u okviru radnog prostora.

SCARA konfiguracija ima veoma malo sprezanje među zglobovima obzirom da gravitaciono opterećenje u potpunosti prima sama mehanička struktura rotacionih zglobova.

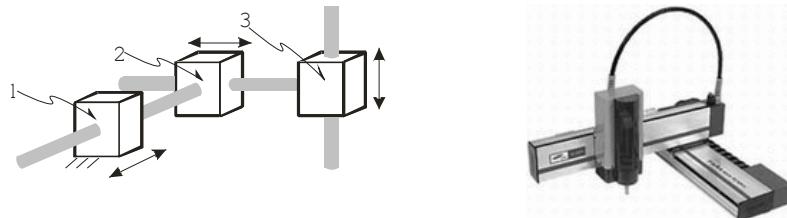
Roboti SCARA konfiguracije su prvi put realizovani u Japanu 1972. godine, i uglavnom su namenjeni za realizaciju montažnih zadataka. Odlikuju se velikom tačnošću pozicioniranja i brzinom rada, kao i relativno velikom nosivošću. Najveći nedostatak SCARA robota potiče od njegove konstrukcije – postavljen je visoko i zauzima veliki deo prostora iznad prostora u kome se obavljaju radni zadaci, tako da taj prostor mora da bude slobodan.

#### 2.4.5 Robot Dekartove (pravougle) konfiguracije

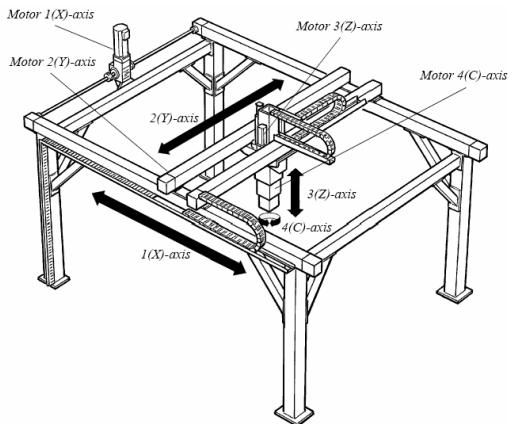
Minimalnu konfiguraciju kod ovih robota, kao što se vidi sa Sl. 2.12, čine tri translatorična zgloba čije su ose paralelne osama Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema. Odatle potiče i naziv ovakve konfiguracije (može se sresti još nekoliko naziva: pravouglja, kartezijanska (engl. *Cartesian*) ili portalna (engl. *gantry*) konfiguracija ukoliko se robot postavi na postolje kojim se nadnosi nad radni prostor kojem pristupa odozgo).

Obzirom na vrstu i raspored zglobova kod robota ove konfiguracije jasan je doprinos

kretanja u svakom od zglobova kretanju hvataljke, čime je programiranje, pa čak i ručno vođenje znatno olakšano. Radni prostor predstavlja paralelepiped čije dimenzije zavise od opsega kretanja svakog zgloba



Sl. 2.12. Kinematska šema i fotografija robota pravougle konfiguracije



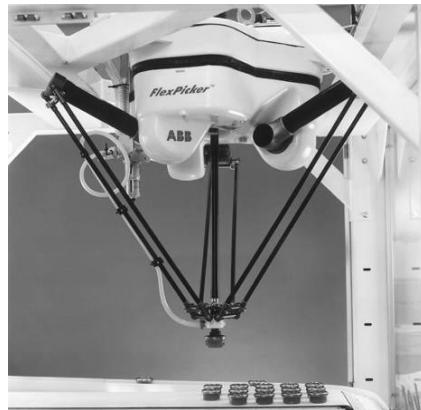
Sl. 2.13. Robot pravougle konfiguracije postavljen na postolje koje se nalazi iznad mašine koju opslužuje

Roboti ove konfiguracije imaju veoma malo sprezanje među zglobovima.

Radi smanjenja zauzetog prostora u pogonu roboti ovakve konfiguracije se veoma često postavljaju na postolje (Sl. 2.13) kojim se izdižu iznad radne mašine (portalni ili gantry robot). Naravno, u ovakvim slučajevima pristup radnom prostoru radne mašine mora biti slobodan odozgo. Dimenzije postolja mogu biti takve da robot može da opslužuje i po nekoliko mašina

#### 2.4.6 Paralelni roboti

Sve dosada opisane konfiguracije su imale osnovnu formu kinematskog lanca, a samo su se razlikovale vrsta i dispozicija zglobova. Paralelni roboti se u tom smislu konstrukcionalno sruštinski razlikuju, ali smatramo da je potrebno da ih ovde pomenemo. Oni predstavljaju dve platforme (u nominalnom položaju ove platforme su paralelne) koje su povezane segmentima promenljive dužine (Sl. 2.14). Jedna platforma se smatra bazom ili osnovom (na Sl. 2.14 je to gornja platforma), a druga je radna čijim položajem i orientacijom se upravlja i na njoj se nalazi hvataljka.



Sl. 2.14. Fotografija paralelnog robota

Promenom rastojanja između odgovarajućih zglobova na baznoj i radnoj platformi menja se položaj i orijentacija radne platforme na koju se postavlja hvataljka ili alat koji robot nosi. Promena rastojanja između zglobova na baznoj i radnoj platformi se može realizovati ili segmentima promenljive dužine (teleskopski segmenti sa translatornim zglobovima) ili kao dvosegmentnim elementima sa rotacionim zglobovima kao što je prikazano na Sl. 2.14.

Roboti ove konfiguracije se odlikuju izuzetnom agilnošću (brzinom kretanja pri prelasku iz jednog položaja u drugi), velikom krutošću držanja položaja i relativno malom masom u odnosu na nosivost obzirom da svaki segment (ruka) nosi samo jednu trećinu opterećenja za razliku od robota ripa kinematskog lanca gde svaki segment trpi celokupno opterećenje.

U ovoj knjizi se roboti ovakve konfiguracije neće detaljnije izučavati.

## LITERATURA

- An C., Atkinson C., and Hollerbach J.: **Model-Based Control of a Robot Manipulator**, The MIT Press, 1998.
- Angeles J.: **Fundamentals of Robotic Mechanical Systems, Theory, Methods and Algorithms**, Springer-Verlag, 2003.
- Asada H. and Slotine J.J.: **Robot Analysis and Control**, John Wiley and sons, 1985.
- Ben-Zion Sandler, Robotics- designing the Mechanisms for Automated machinery, Prentice – Hall, Inc., 1991
- Bruyninckx H. and De Schutter J.: **Introduction to Intelligent Robotics**, Katholieke Universiteit Leuven, 2001.
- Craig J.: **Introduction to Robotics: Mechanics & Control**, Addison-Wesley, 1986.
- Dorf. R and Bishop R.: **Modern Control Systems**, Addison-Wesley, 1995.
- Eugene I. Rabin, **Mechanical design of robots**, McGraw-Hill, Inc., 1987
- Fu K., Gonzales R., and Lee C.: **Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence**, McGraw-Hill Book Company, 1987.
- Fu K., Gonzales R., and Lee C.: **Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence**, McGraw-Hill Book Company, 1987.
- J.M.Selig, **Introductory Robotics**, Prentice – Hall, Inc., 1992
- John Iovine, **PIC Robotics**, McGraw-Hill Companies, Inc., 2004
- John M. Holland, **Designing Autonomous Mobile Robots**, Elsevier, Inc., 2004
- Jorge Angeles, **Fundamentals of Robotic Mechanical Systems**, Springer-Verlag, New York, Inc., 2003

Industrijska robotika

*Osnovne definicije i ...*

Lewin A.R.W.Edwards, Open-Source Robotics and Process Control Cookbook, Elsevier, Inc., 2005

Nwokah O., and Hurmuzlu Y., Editors, **The Mechanical Systems Design Handbook**, CRC Press, 2002.

Paul E. Sandin, **Robot mechanisms and mechanical devices**, McGraw-Hill, Inc., 2003

Rade L., and Westergren B.: **Mathematics Handbook for Science and Engineering**, Studentlitteratur, Lund,1995.

Sciavicco L. and Siciliano B.: **Modeling and Control of Robot Manipulators**, The McGraw-Hill Company, 1996.

Thomas R. Kurfess **Robotics and Automation Handbook**, CRC Press LLC, 2005

Yoram Koren, **Robotics for Engineers** McGraw-Hill, 1985

---

### **3 KINEMATSKI MODEL ROBOTA I: POLOŽAJ I ORIJENTACIJA ROBOTA U PROSTORU**

---

#### **3.1 UVOD**

Već smo ranije pomenuli da se robotski mehanizam može predstaviti sistemom krutih tela spojenih zglobovima koji nazivamo kinematskim lancem. Radi matematičkog opisa kretanja segmenata koji simultanim kretanjem određuju ponašanje hvataljke, za svaki segment se, prema određenim pravilima, postavlja koordinatni sistem koji se kreće zajedno sa njim. Pošto svaki od zglobova dopušta samo jedno relativno kretanje (rotaciono ili translatoryno), položaj hvataljke je rezultat niza suksesivnih rotacionih ili translatorynih transformacija nad koordinatnim sistemima. U ovoj glavi će biti opisane elementarne transformacije i uveden pojam homogenih transformacija koje u okviru iste matrice objedinjuju rotaciju i translaciju.

Na taj način je moguće, poznavajući geometrijske karakteristike robota i trenutne veličine uglova u zglobovima, jednoznačno odrediti položaj i orijentaciju poslednjeg segmenta robota u odnosu na početni. Obrnut zadatak, odrediti vrednosti uglova u zglobovima tako da hvataljka bude u tačno određenoj poziciji i sa željenom orijentacijom je mnogo složeniji i nije uvek jednoznačno rešiv.

#### **3.2 KOORDINATNI SISTEMI I NJIHOVE TRANSFORMACIJE**

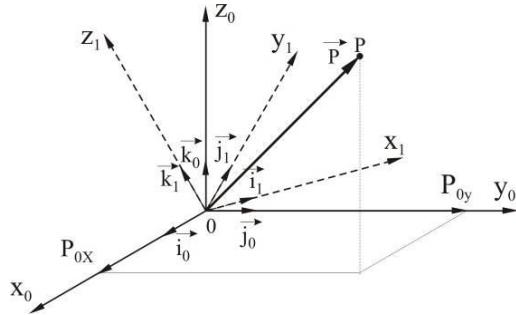
Neka su dva desna koordinatna sistema  $O_o-x_oy_oz_o$  i  $O_1-x_1y_1z_1$  spojeni koordinatnim početcima (Sl. 3.1.) ali neka im se ose ne poklapaju. Sistem  $O_o-x_oy_oz_o$  ćemo smatrati nepokretnim. Neka su ortovi koordinatnih sistema  $O_o-x_oy_oz_o$  i  $O_1-x_1y_1z_1$  dati sa  $\{i_0, j_0, k_0\}$  i  $\{i_1, j_1, k_1\}$ , respektivno. Uočimo li zatim tačku P, vektor  $\vec{p}$  od koordinatnog početka do tačke P, možemo izraziti u odnosu na bilo koji od dva posmatrana koordinatna sistema. Vektor  $\vec{p}$  izražen u odnosu na nepokretni (bazni) koordinatni sistem  $O_o-x_oy_oz_o$  je dat sa:

$$\vec{p}_o = p_{ox} \cdot \vec{i}_o + p_{oy} \cdot \vec{j}_o + p_{oz} \cdot \vec{k}_o \quad (3.1)$$

dok izražen u odnosu na koordinatni sistem  $O_1-x_1y_1z_1$  postaje:

$$\vec{p}_1 = p_{1x} \cdot \vec{i}_1 + p_{1y} \cdot \vec{j}_1 + p_{1z} \cdot \vec{k}_1 \quad (3.2)$$

Bez obzira u kom koordinatnom sistemu je izražen vektor  $\vec{p}$ , reč je o reprezentacijama istog vektora pa za komponentu npr. u x pravcu možemo pisati



Sl. 3.1. Elementarne transformacije koordinatnih sistema

$$\begin{aligned} p_{ox} &= \vec{p}_0 \cdot \vec{i}_0 = \vec{p}_1 \cdot \vec{i}_0 \\ p_{oy} &= p_{1x} \cdot \vec{i}_1 \cdot \vec{i}_0 + p_{1y} \cdot \vec{j}_1 \cdot \vec{i}_0 + p_{1z} \cdot \vec{k}_1 \cdot \vec{i}_0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Slične relacije se mogu uspostaviti i za komponente u preostala dva pravca, y i z

$$p_{oz} = p_{1x} \cdot \vec{i}_1 \cdot \vec{j}_0 + p_{1y} \cdot \vec{j}_1 \cdot \vec{j}_0 + p_{1z} \cdot \vec{k}_1 \cdot \vec{j}_0 \quad (3.4)$$

$$p_{oy} = p_{1x} \cdot \vec{i}_1 \cdot \vec{k}_0 + p_{1y} \cdot \vec{j}_1 \cdot \vec{k}_0 + p_{1z} \cdot \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_0 \quad (3.5)$$

Sva tri izraza (3.3-3.5) možemo napisati u kompaktnoj formi

$$\vec{p}_0 = R_0^1 \cdot \vec{p}_1 \quad (3.6)$$

gde je  $R_0^1$  definiše relativno ugaono odstupanje koordinatnih sistema  $O_o-x_oy_oz_o$  i  $O_1-x_1y_1z_1$

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} \vec{i}_1 \cdot \vec{i}_0 & \vec{j}_1 \cdot \vec{i}_0 & \vec{k}_1 \cdot \vec{i}_0 \\ \vec{i}_1 \cdot \vec{j}_0 & \vec{j}_1 \cdot \vec{j}_0 & \vec{k}_1 \cdot \vec{j}_0 \\ \vec{i}_1 \cdot \vec{k}_0 & \vec{j}_1 \cdot \vec{k}_0 & \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Matrica  $R_0^1$  se naziva matricom rotacije. Iz (3.7) se vidi da kolone matrice  $R_0^1$  predstavljaju projekcije ortova koordinatnog sistema  $O_1-x_1y_1z_1$  na sistem  $O_o-x_oy_oz_o$ . Na sličan način kao u izrazima (3.3-3.5), izražavajući komponente vektora  $p_1$  preko vektora  $p_0$  možemo napisati

$$\vec{p}_1 = R_1^0 \cdot \vec{p}_0 \quad (3.8)$$

gde je

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} \vec{i}_0 \cdot \vec{i}_1 & \vec{j}_0 \cdot \vec{i}_1 & \vec{k}_0 \cdot \vec{i}_1 \\ \vec{i}_0 \cdot \vec{j}_1 & \vec{j}_0 \cdot \vec{j}_1 & \vec{k}_0 \cdot \vec{j}_1 \\ \vec{i}_0 \cdot \vec{k}_1 & \vec{j}_0 \cdot \vec{k}_1 & \vec{k}_0 \cdot \vec{k}_1 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Matrice  $R_0^1$  i  $R_1^0$  predstavljaju jedna u odnosu na drugu inverzne transformacije. Obzirom

da je skalarni proizvod vektora ( $\vec{i}_0 \cdot \vec{j}_0 = \vec{j}_0 \cdot \vec{i}_0$ ) komutativan lako se može pokazati da važi

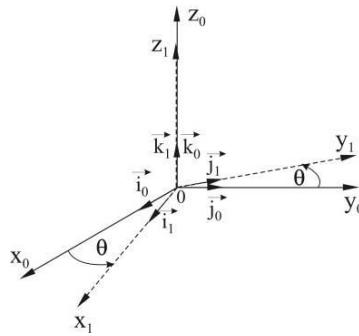
$$R_1^0 = (R_0^1)^{-1} = (R_0^1)^T \quad (3.10)$$

Matrice za koje važi (3.10) se nazivaju **ortogonalnim**. Vektori kolone u  $R_0^1$  su jedinične dužine i međusobno su ortogonalni. U slučaju desnog koordinatnog sistema determinanta matrice  $R_0^1$  ima vrednost +1. Ortogonalne matrice čija determinanta ima vrednost 1 nazivamo matricama rotacije. Prema tome, možemo da zaključimo da su **matrice rotacije  $R$**  ortogonalne.

### 3.2.1 Elementarne rotacije

Razmotrimo rotacije koordinatnog sistema  $O_o-x_o y_o z_o$  oko njegovih koordinatnih osa. Pozitivnim smerom rotacije smatramo rotaciju u pravcu kazaljke na časovniku gledajući iz koordinatnog početka u pravcu ose.

Razmotrimo, najpre, rotaciju koordinatnog sistema oko  $z$  ose. Posle rotacije (Sl. 3.2) za ugao  $\theta$  koordinatni sistem  $O_o-x_o y_o z_o$  se premešta u novi položaj obeležen sa  $O_1-x_1 y_1 z_1$ .



Sl. 3.2. Rotacija koordinatnog sistema oko  $z$  ose

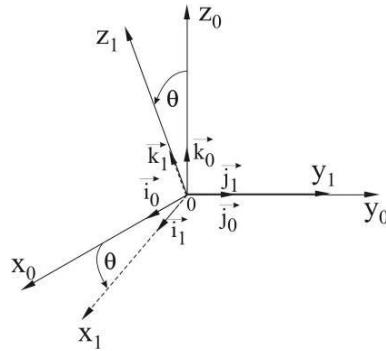
Imajući u vidu da važe sledeće relacije  $\vec{i}_1 \cdot \vec{i}_0 = \cos \theta$ ,  $\vec{j}_1 \cdot \vec{i}_0 = -\sin \theta$ ,  $\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_0 = \cos \theta$ ,  $\vec{i}_1 \cdot \vec{j}_0 = \sin \theta$  i  $\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_0 = 1$  kao i na osnovu izraza (3.7) dobija se

$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

gde  $R_{z,\theta}$  označava matricu rotacije oko  $z$  ose za ugao  $\theta$ . Zbog pojednostavljenog zapisivanja nadalje ćemo, kada god je to pogodno, koristiti skraćeni zapis  $\sin \theta = S\theta$  i  $\cos \theta = C\theta$ , pa skraćenim zapisivanjem (3.11) postaje

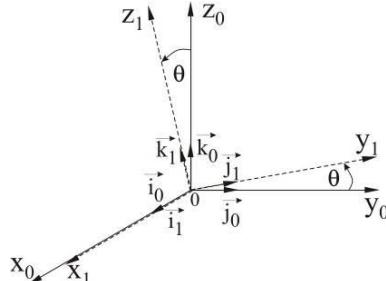
$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Na sličan način se mogu odrediti matrice rotacija oko ostalih koordinatnih osa. Najpre ćemo odrediti matricu rotacije oko  $y$  ose. Na Sl. 3.3 je šematski prikazana rotacija koordinatnog sistema oko  $y$  ose. Na isti način kao ranije sledi

Sl. 3.3. Rotacija koordinatnog sistema oko  $y$  ose

$$R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Za rotaciju koordinatnog sistema oko  $x$  ose (Sl. 3.4) sledi

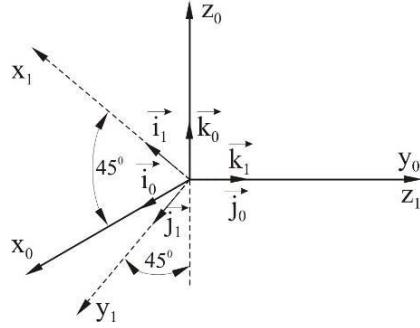
Sl. 3.4. Rotacija koordinatnog sistema oko  $x$  ose

$$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Matrice rotacija (3.12), (3.13) i (3.14) koje predstavljaju rotacije oko koordinatnih osa  $x, y$  i  $z$  za određeni ugao se nazivaju **elementarnim matricama rotacije**.

**Primer 3.1.**

Za slučaj relativnog položaja koordinatnih sistema  $O_o-x_oy_oz_o$  i  $O_1-x_1y_1z_1$  kao na Sl. 3.5. odrediti matricu rotacije kao i projekcije vektora  $\vec{i}_1$ ,  $\vec{j}_1$ ,  $\vec{k}_1$  na ose koordinatnog sistema  $O_o-x_oy_oz_o$ .



Sl. 3.5. Transformacija koordinatnog sistema u Primeru 3.1.

Već je ranije rečeno da kolone u matrici rotacije (3.7) predstavljaju projekcije ortova koordinatnog sistema  $O_1-x_1y_1z_1$  na sistem  $O_o-x_oy_oz_o$ . Prema tome

$$\vec{i}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \quad \vec{j}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \quad \vec{k}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

pa sledi

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & \cos 45^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos 45^\circ & -\cos 45^\circ & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix}$$

gde je sa  $R_0^1$  označena matrica rotacije između koordinatnih sistema  $O_o-x_oy_oz_o$  i  $O_1-x_1y_1z_1$ .

### 3.2.2 Slaganje rotacija

Pretpostavimo da se koordinatni počeci sistema  $O_o-x_oy_oz_o$ ,  $O_1-x_1y_1z_1$  i  $O_2-x_2y_2z_2$  poklapaju ali da im se koordinatne ose ne poklapaju, tj. da su sistemi rotirani jedan u odnosu na drugi. Matrica  $R_0^1$  predstavlja matricu rotacije između koordinatnih sistema  $O_o-x_oy_oz_o$  i  $O_1-x_1y_1z_1$ , matrica  $R_1^2$  matricu rotacije između  $O_1-x_1y_1z_1$  i  $O_2-x_2y_2z_2$  a matrica  $R_0^2$  predstavlja matricu rotacije između koordinatnih sistema  $O_o-x_oy_oz_o$  i  $O_2-x_2y_2z_2$ . Uočimo li ponovo tačku P (kao na Sl. 3.1) njene koordinate možemo izraziti na sledeći način

$$\vec{p}_0 = R_0^1 \cdot \vec{p}_1 \quad (3.15)$$

$$\vec{p}_0 = R_0^2 \cdot \vec{p}_2 \quad (3.16)$$

$$\vec{p}_1 = R_1^2 \cdot \vec{p}_2 \quad (3.17)$$

Ukoliko (3.17) smenimo u (3.15) sledi

$$\vec{p}_0 = R_0^1 \cdot R_1^2 \cdot \vec{p}_2 \quad (3.18)$$

odakle upoređivanjem izraza (3.16) i (3.18) sledi

$$R_0^2 = R_0^1 \cdot R_1^2 \quad (3.19)$$

Izraz (3.19) opisuje transformaciju koordinata vektora pri više sukcesivnih rotacija što se naziva slaganjem rotacija. Ako su nam poznate koordinate vektora  $\vec{p}$  u odnosu na koordinatni sistem  $O_2-x_2y_2z_2$  (vektor  $\vec{p}_2$ ), iz izraza (3.18) se jasno vidi sledeće: da bi dobili koordinate istog vektora u odnosu na koordinatni sistem  $O_o-x_oy_oz_o$  vektor  $\vec{p}_2$  treba prvo pomnožiti matricom rotacije  $R_1^2$  da bi dobili njegove koordinate u odnosu na koordinatni sistem  $O_1-x_1y_1z_1$ , a zatim, novodobijeni vektor pomnožiti matricom rotacije  $R_0^1$ . Rezultat je vektor  $\vec{p}$  izražen u odnosu na koordinatni sistem  $O_0-x_0y_0z_0$ .

Izraz (3.18) se može interpretirati i na drugi način. Prepostavimo sada da se u početnom trenutku sva tri koordinatna sistema poklapaju. Zarotirajmo zajedno koordinatne sisteme  $O_1-x_1y_1z_1$ , i  $O_2-x_2y_2z_2$  u odnosu na sistem  $O_o-x_oy_oz_o$  za matricu rotacije  $R_0^1$ , a zatim samo koordinatni sistem  $O_2-x_2y_2z_2$  u odnosu na  $O_1-x_1y_1z_1$  za  $R_1^2$ . Pri više uzastopnih rotacija koordinatni sistem koji se kreće nazivamo **tekućim koordinatnim sistemom**. Posebno je važno da se istakne da je od izuzetne važnosti **redosled rotacija**. Da bi to ilustrovali, razmotrimo dve uzastopne rotacije: rotaciju za ugao  $\varphi$  oko  $y$  ose, a zatim rotaciju za ugao  $\theta$  oko tekuće  $z$  ose. U skladu sa predhodnim razmatranjem sledi

$$R = R_{y,\varphi} \cdot R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} C\varphi & 0 & S\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\varphi & 0 & C\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\varphi \cdot C\theta & -C\varphi \cdot S\theta & S\varphi \\ S\theta & C\theta & 0 \\ -S\varphi \cdot C\theta & S\varphi \cdot S\theta & C\varphi \end{bmatrix}$$

Ako se redosled rotacija izmeni i prvo se realizuje rotacija za ugao  $\theta$  oko  $z$  ose, a zatim rotacija za ugao  $\varphi$  oko tekuće  $y$  ose, sledi

$$R^* = R_{z,\theta} \cdot R_{y,\varphi} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\varphi & 0 & S\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\varphi & 0 & C\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\varphi \cdot C\theta & -S\theta & C\theta \cdot S\varphi \\ S\theta \cdot C\varphi & C\theta & S\theta \cdot S\varphi \\ -S\varphi & 0 & C\varphi \end{bmatrix}$$

Obzirom da rezultat nije isti, moženo zaključiti da množenje matrica rotacije nije komutativno i da se mora voditi računa o redosledu rotacija. Dakle,

$$R \neq R^*$$

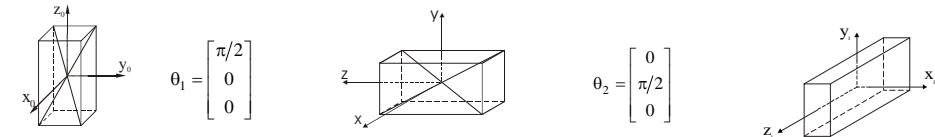
Ilustrovaćemo ovo još očiglednije sledećim primerom. Zarotirajmo paralelepiped oko  $x_0$  ose za  $+\pi/2$ , a zatim oko novog položaja  $y$  ose ponovo za  $+\pi/2$ . Položaj paralelepippeda posle

### Kinematika: položaj robota

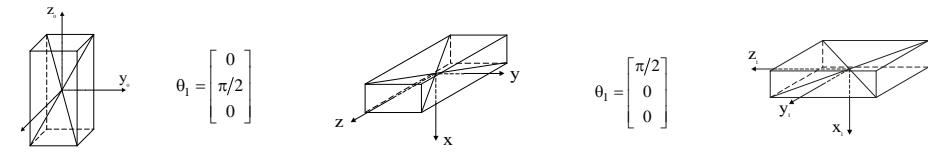
### Industrijska robotika

svake od rotacija je prikazan na Sl. 3.6.a.

a)



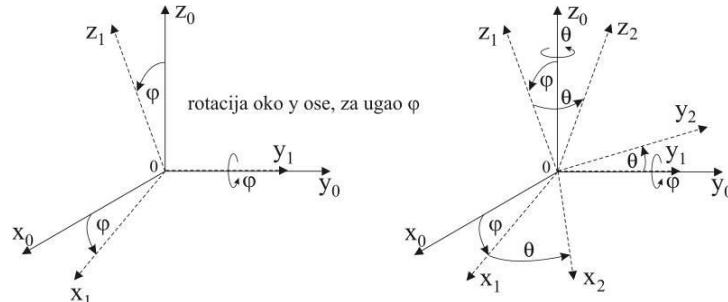
b)



Sl. 3.6. Uzastopne rotacije tela

Međutim, promenimo redosled rotacija, i paralelepiped zarotirajmo prvo oko \$y\_0\$- ose za \$\pi/2\$, a zatim oko \$x\$- ose za \$\pi/2\$. Položaj paralelepipeda posle svake od transformacija je prikazan na Sl. 3.6.b. Očigledno je da je rezultujući položaj paralelepipeda drugačiji nego u prethodnom slučaju.

U svim prethodnim primerima rotacije su realizovane oko osa tekućeg koordinatnog sistema. Razmotrimo sada slaganje rotacija oko nepokretnog koordinatnog sistema. Na Sl. 3.7. su prikazane dve uzastopne rotacije koordinatnog sistema \$O\_0-x\_0y\_0z\_0\$, prvo oko ose \$y\_0\$ za ugao \$\varphi\$ (novi položaj koordinatnog sistema je prikazan sa \$O\_1-x\_1y\_1z\_1\$), a zatim za ugao \$\theta\$ oko ose \$z\_0\$ (novi položaj koordinatnog sistema je prikazan sa \$O\_2-x\_2y\_2z\_2\$).



Sl. 3.7. Uzastopne rotacije koordinatnog sistema oko osa nepokretnog koordinatnog sistema

Pošto se prva rotacija vrši oko ose \$y\_0\$ koja istovremeno predstavlja i trenutnu osu rotacije važi:

$$\vec{p}_0 = R_{y,\varphi} \cdot \vec{p}_1$$

Pošto se sledeća rotacija vrši oko ose \$z\_0\$ nepokretnog koordinatnog sistema, da bismo primenili zakon o slaganju rotacija (3.19) treba najpre vratiti koordinatni sistem u prvobitno stanje (primeniti rotaciju oko ose \$y\_0\$ za ugao \$-\varphi\$), zatim realizovati rotaciju oko ose \$z\_0\$ za

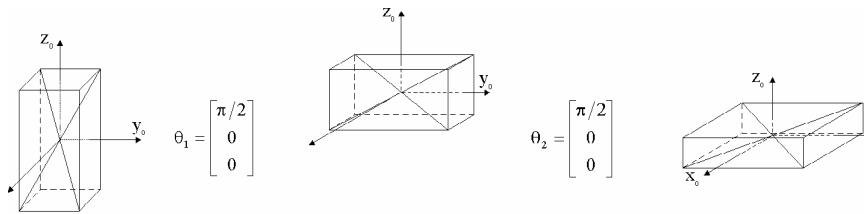
ugao  $\varphi$ , a zatim ponovo izvršiti rotaciju oko ose  $y_0$  za ugao  $\varphi$ . Prema tome, sledi

$$\vec{p}_1 = R_{y,-\varphi} \cdot R_{z,\theta} \cdot R_{y,\varphi} \cdot \vec{p}_2 \quad (3.22)$$

Konačno, ukupna transformacija se dobija u sledećoj formi:

$$\vec{p}_0 = R_{y,\varphi} \cdot R_{y,-\varphi} \cdot R_{z,\theta} \cdot R_{y,\varphi} \cdot \vec{p}_2; \quad \vec{p}_0 = R_{z,\theta} \cdot R_{y,\varphi} \cdot \vec{p}_2 \quad (3.23)$$

Prema tome, možemo da zaključimo da za rotacije oko fiksнog koordinatnog sistema možemo da primenimo zakon o slaganju rotacija (3.19) oko trenutnih osa ali **obrnutim redom** u odnosu na redosled rotacija oko osa nepokretnog koordinatnog sistema. Ako ovo primenimo na prethodni primer rotacije paralelepipađa, i ako želimo da postignemo isti rezultat kao pri rotaciji oko  $y_0$  za  $\pi/2$ , a zatim oko  $x$  za  $\pi/2$ , prvo moramo da izvršimo rotaciju oko  $x_0$  za  $\pi/2$ , a zatim oko  $y_0$  isto za  $\pi/2$ , što je prikazano na Sl. 3.8.



Sl. 3.8. Slaganje rotacija oko osa fiksнog koordinatnog sistema

Prema tome, možemo da zaključimo da za slaganje rotacija važi sledeće pravilo:

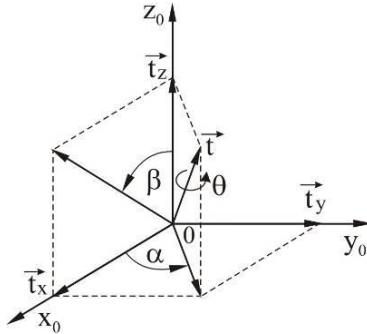
$R_0^2 = R_0^1 \cdot R_1^2$  – ako se rotacija vrši oko osa trenutnog koordinatnog sistema.

$R_0^2 = R_1^2 \cdot R_0^1$  – ako se rotacija vrši oko osa nepokretnog koordinatnog sistema.

Napomenimo da je pri rešavanju zadatka na ovu činjenicu potrebno posebno obratiti pažnju.

### 3.2.3 Rotacija oko proizvoljne ose

U dosadašnjim primerima smo razmatrali rotacije koordinatnih sistema oko njihovih osa. Međutim, postavlja se pitanje kako pronaći matricu rotacije ukoliko je rotacija izvršena za određeni ugao  $\theta$  oko proizvoljne ose definisane ortom  $\vec{t}$ , koja se ne poklapa ni sa jednom od koordinatnih osa, (Sl. 3.9.). Neka su projekcije orta  $\vec{t}$ , na nepokretni koordinatni sistem date sa  $\vec{t} = [t_x, t_y, t_z]^T$ . Ovaj zadatak se može rešiti na sledeći način: osu definisanu ortom  $\vec{t}$  treba najpre zarotirati tako da se poklopi sa nekom od koordinatnih osa, npr. sa  $z$  osom, zatim treba izvršiti rotaciju za posmatrani ugao  $\theta$  i na kraju vratiti osu u njen prvobitni položaj. Da bi realizovali predloženi način i vektor  $\vec{t}$  poklopili sa  $z$  osom treba ga najpre rotirati za ugao  $-\alpha$  oko  $z_0$  ose, a zatim za ugao  $-\beta$  oko ose  $y_0$  nepokretnog koordinatnog sistema. Zatim treba izvršiti traženu rotaciju za ugao  $\theta$ , i na kraju vratiti vektor  $\vec{t}$  u prvobitni položaj. Prema tome, sledi



Sl. 3.9. Rotacija oko proizvoljne ose

$$R_{t,\theta} = R_{z,\alpha} \cdot R_{y,\beta} \cdot R_{z,\theta} \cdot R_{y,-\beta} \cdot R_{z,-\alpha} \quad (3.24)$$

Sa Sl. 3.9 je očigledno

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{t_y}{\sqrt{t_x^2 + t_y^2}}, & \cos \alpha &= \frac{t_x}{\sqrt{t_x^2 + t_y^2}} \\ \sin \beta &= \sqrt{t_x^2 + t_y^2}, & \cos \beta &= t_z \end{aligned} \quad (3.25)$$

pa se, množenjem matrica iz (3.24) dobija tražena matrica rotacije u obliku:

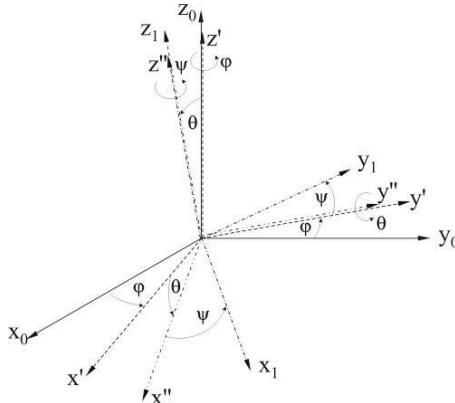
$$R_{t,\theta} = \begin{bmatrix} t_x^2(1 - C\theta) + C\theta & t_x t_y (1 - C\theta) - t_z S\theta & t_x t_z (1 - C\theta) + t_y S\theta \\ t_x t_y (1 - C\theta) + t_z S\theta & t_y^2(1 - C\theta) + C\theta & t_y t_z (1 - C\theta) - t_x S\theta \\ t_x t_z (1 - C\theta) - t_y S\theta & t_y t_z (1 - C\theta) + t_x S\theta & t_z^2(1 - C\theta) + C\theta \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

### 3.2.4 Ojlerovi uglovi

Jedan od načina za definisanje željene orientacije koordinatnog sistema je putem zadavanja tri uzastopne rotacije izvedene na tačno određeni način. Ovo omogućavaju Ojlerovi uglovi jer predstavljaju tri uzastopne rotacije ( $\theta$ ,  $\phi$  i  $\psi$ ) izvedene po tačno utvrđenom redosledu. Postoji više načina definisanja Ojlerovih uglova, ali ćemo mi pomenuti samo dva koja se najčešće sreću: ZYZ i ZYX.

#### I način: ZYZ Ojlerovi uglovi

Prema ovom načinu definisanja Ojlerovih uglova, treba koordinatni sistem iz početnog položaja zarotirati oko  $z_0$  ose za ugao  $\phi$ , zatim oko novog položaja ose  $y$  (osa  $y'$  na Sl. 3.10.) izvršiti rotaciju za ugao  $\theta$ , i na kraju, oko novog položaja ose  $z$  (osa  $z''$ ) za ugao  $\psi$ .



Sl. 3.10. Transformacije koordinatnog sistema preko ZYZ Ojlerovih uglova

Primenom pravila o slaganju rotacija dobijamo:

$$R_0^1 = R_{z,\varphi} \cdot R_{y,\theta} \cdot R_{z,\psi} \quad (3.27)$$

pa sledi

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} C\varphi \cdot C\theta \cdot C\psi - S\varphi \cdot S\psi & -C\varphi \cdot C\theta \cdot S\psi - S\varphi \cdot C\psi & C\varphi \cdot S\theta \\ S\varphi \cdot C\theta \cdot C\psi + C\varphi \cdot S\psi & -S\varphi \cdot C\theta \cdot S\psi + C\varphi \cdot C\psi & S\varphi \cdot S\theta \\ -S\theta \cdot C\psi & S\theta \cdot S\psi & C\theta \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

čime je matrica rotacije određena.

### II način: ZYX Ojlerovi uglovi

U ovom slučaju, krajnju orijentaciju koordinatnog sistema dobijamo kada koordinatni sistem iz početnog položaja zarotiramo oko ose \$z\_0\$ za ugao \$\varphi\$, zatim oko novog položaja ose \$y\$ izvršimo rotaciju za ugao \$\theta\$, i na kraju, oko novog položaja ose \$x\$ izvršimo rotaciju za ugao \$\psi\$.

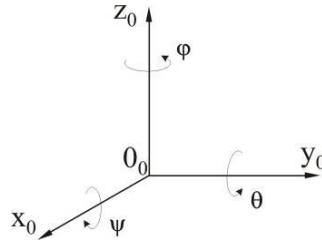
Na isti način kao ranije možemo dobiti konačnu matricu rotacije u obliku:

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} C\varphi \cdot C\theta & C\varphi \cdot S\theta \cdot S\psi - S\varphi \cdot C\psi & C\varphi \cdot S\theta \cdot C\psi + S\varphi \cdot S\psi \\ S\varphi \cdot C\theta & S\varphi \cdot S\theta \cdot S\psi + C\varphi \cdot C\psi & S\varphi \cdot S\theta \cdot C\psi - C\varphi \cdot S\psi \\ -S\theta & C\theta \cdot S\psi & C\theta \cdot C\psi \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

čime je i za ovaj slučaj definisana odgovarajuća matrica rotacije.

### 3.2.5 Rotacija definisana uglovima skretanja, valjanja i propinjanja

Matricu rotacije možemo definisati nizom uzastopnih rotacija oko osa nepokretnog koordinatnog sistema po određenom redosledu (Sl. 3.11.): rotacija oko \$z\_0\$ ose za ugao \$\varphi\$, rotacija oko \$x\_0\$ ose za ugao \$\psi\$ i rotacija oko \$y\_0\$ ose za ugao \$\theta\$. Po analogiji sa kretanjem vozila (broda, aviona...) ugao \$\varphi\$ nazivamo uglom skretanja (definiše skretanje sa kursa),



Sl. 3.11. Uglovi skretanja, valjanja i propinjanja

ugao  $\psi$  nazivamo uglom valjanja (odgovara bočnom valjanju broda) a ugao  $\theta$  nazivamo uglom propinjanja. Zbog već stečene navike korišćenja, navodimo termine za ove uglove na engleskom jeziku: ugao skretanja se naziva *yaw*, ugao valjanja *roll*, a ugao propinjanja *pitch*.

Matrica rotacije ima sledeći oblik

$$R_0^1 = R_{z,\varphi} \cdot R_{y,\theta} \cdot R_{x,\psi}$$

ili u konačnoj formi

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} C\varphi \cdot C\theta & -S\varphi \cdot C\psi + C\varphi \cdot S\theta \cdot S\psi & S\varphi \cdot S\psi + C\varphi \cdot S\theta \cdot C\psi \\ S\varphi \cdot C\theta & C\varphi \cdot C\psi + S\varphi \cdot S\theta \cdot S\psi & -C\varphi \cdot S\psi + S\varphi \cdot S\theta \cdot C\psi \\ -S\theta & C\theta \cdot S\psi & C\theta \cdot C\psi \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

### 3.2.6 Određivanje ose i ugla rotacije ako je poznata matrica rotacije

Sama matrica rotacije nam ne daje fizičku predstavu o kakvoj rotaciji se radi. Stoga je pogodno, ukoliko je poznata matrica rotacije između dva koordinatna sistema, da se odredi ekvivalentna osa oko koje treba izvršiti rotaciju i ugao rotacije koji odgovaraju datoj matrici rotacije. Ako je, u opštem obliku, matrica rotacije data sa

$$R_{k,\theta} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

onda je ekvivalentni ugao, obeležimo ga sa  $\theta$ , dat sa

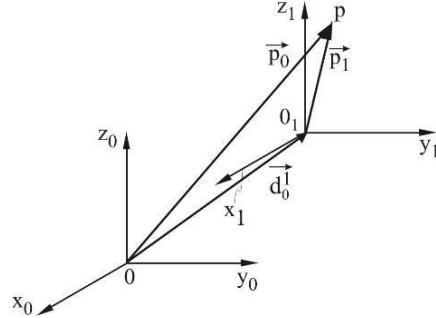
$$\theta = \arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) \quad (3.32)$$

a projekcije orta ose t su date sa

$$t = \frac{1}{2 \cdot \sin \theta} \cdot \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

## 3.2.7 Homogene transformacije

Do sada smo razmatrali transformaciju koordinata samo usled rotacije dva koordinatna sistema, međutim, pored rotacije javlja se potreba i za translacijom. Na Sl. 3.12. su prikazana dva paralelna koordinatna sistema  $O_o-x_oy_oz_o$  i  $O_1-x_1y_1z_1$ . Vektorom  $\vec{d}_0^1$ ,



Sl. 3.12. Translacija koordinatnog sistema

izraženim u odnosu na koordinatni sistem  $O_o-x_0y_0z_o$ , je definisana translacija koordinatnog početka sistema  $O_1-x_1y_1z_1$  u odnosu na koordinatni početak sistema  $O_o-x_0y_0z_o$ . Obzirom da su koordinatni sistemi paralelni veza između vektora  $\vec{p}_0$  i  $\vec{p}_1$  kojim su definisane koordinate tačke P u odnosu na svaki od ova dva koordinatna sistema je data sa:

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{d}_0^1 \quad (3.34)$$

Ako je koordinatni sistem  $O_1-x_1y_1z_1$  dodatno rotiran u odnosu na  $O_o-x_0y_0z_o$ , tada je veza između ovih koordinatnih sistema data sa:

$$\vec{p}_0 = R_0^1 \cdot \vec{p}_1 + \vec{d}_0^1 \quad (3.35)$$

gde  $R_0^1$  označava matricu rotacije između dva koordinatna sistema.

Prepostavimo, dalje, da se tri koordinatna sistema  $O_o-x_0y_0z_o$ ,  $O_1-x_1y_1z_1$  i  $O_2-x_2y_2z_2$  nalaze u proizvolnjom relativnom odnosu tj. da im se koordinatni počeci ne poklapaju i da im ose nisu paralelne. Obzirom da koordinate proizvoljne tačke P koju možemo izraziti u odnosu na bilo koji od ovih koordinatnih sistema, možemo napisati:

$$\begin{aligned} \vec{p}_0 &= R_0^1 \cdot \vec{p}_1 + \vec{d}_0^1 \\ \vec{p}_1 &= R_1^2 \cdot \vec{p}_2 + \vec{d}_1^2 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Zamenimo li (3.36) u (3.35) dobijamo

$$\vec{p}_0 = R_0^1 \cdot R_1^2 \cdot \vec{p}_2 + R_0^1 \vec{d}_1^2 + \vec{d}_0^1 \quad (3.37)$$

Međutim, veza između koordinatnih sistema  $O_o-x_0y_0z_o$  i  $O_2-x_2y_2z_2$  se može napisati direktno

$$\vec{p}_0 = R_0^2 \cdot \vec{p}_2 + \vec{d}_0^2 \quad (3.38)$$

Upoređivanjem (3.37) i (3.38) sledi

$$R_0^2 = R_0^1 \cdot R_1^2 \quad (3.39)$$

$$\vec{d}_0^2 = \vec{d}_0^1 + R_0^1 \cdot \vec{d}_1^2 \quad (3.40)$$

Matrica rotacije  $R_0^2$  se, kao i ranije, može izraziti proizvodom dve uzastopne matrice rotacije  $R_0^1$  i  $R_1^2$ . Vektor rastojanja koordinatnih početaka  $\vec{d}_0^2$  sistema  $O_o-x_oy_oz_o$  i  $O_2-x_2y_2z_2$  je izražen kao vektorski zbir vektora  $\vec{d}_0^1$  i  $\vec{d}_1^2$ , ali moramo uočiti da je neophodno da se vektor  $\vec{d}_1^2$  izrazi odnosu na bazni koordinatni sistem  $O_o-x_oy_oz_o$ . (ukoliko želimo da vršimo operacije nad dva vektora, oni moraju biti predstavljeni u odnosu na isti koordinatni sistem).

Vežu između koordinatnih sistema  $O_o-x_oy_oz_o$ ,  $O_1-x_1y_1z_1$  i  $O_2-x_2y_2z_2$  iz prethodnog primera možemo izraziti proizvodom matrica formiranih od matrice rotacije i vektora translacije na sledeći način:

$$\begin{bmatrix} R_0^1 & \vec{d}_0^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1^2 & \vec{d}_1^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0^1 \cdot R_1^2 & R_0^1 \cdot \vec{d}_1^2 + \vec{d}_0^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Lako se može uočiti da i rezultujuća matrica ukupne transformacije ima istu strukturu pri čemu je matrica ukupne rotacije definisana sa (3.39), a vektor translacije izrazom (3.40).

Matrica formirana na sledeći način od matrice rotacije i vektora translacije između dva koordinatna sistema

$$H = \begin{bmatrix} R & \vec{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \\ [0 & 0 & 0] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{matrica} \\ \text{rotacije} \end{bmatrix}^{3 \times 3} & \begin{bmatrix} \text{vektor} \\ \text{translacija} \end{bmatrix}^{3 \times 1} \\ \begin{bmatrix} \text{vektor} \end{bmatrix}^{1 \times 3} & \begin{bmatrix} \text{faktor} \end{bmatrix}^{1 \times 1} \\ \begin{bmatrix} \text{perspektive} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \text{skaliranja} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

se naziva matricom **homogene transformacije** i obeležićemo je sa  $H$ . Matrica  $R$  definiše rotaciju između dva posmatrana koordinatna sistema, a vektor  $\vec{d}$  translaciju između njihovih koordinatnih početaka. Vektor iz poslednje vrste matrice  $H$ , vektor  $[0,0,0]$  se naziva vektorom perspektive, a član  $H(4,4)$  faktorom skaliranja. U svim primerima koji su od interesa za nas, vektor perspektive i faktor skaliranja će biti konstantni i imajuće vrednosti kao u (3.42).

Prema tome, pomoću homogenih transformacija se u okviru iste matrice objedinjavaju transformacije koordinata nastale usled rotacije i translacije između dva koordinatna sistema. Ukupna transformacija nastala kao rezultat niza sukcesivnih transformacija se, kao i u slučaju rotacija, dobija uzastopnim množenjem matrica odgovarajućih homogenih transformacija redosledom kojim su se dogadale. Pravila za slaganje rotacija i redosled transformacija, koje su izvedene ranije za rotacije, u potpunosti važe i za homogene transformacije.

Po analogiji sa rotacijama, homogene transformacije koje odgovaraju samo jednom stepenu slobode kretanja u odnosu na koordinatne ose nazivamo *osnovnim* homogenim transformacijama. Prema tome, osnovne homogene transformacije kojima se opisuje samo

translatorno kretanje su:

$$H_{x,a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H_{y,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H_{z,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.43.)$$

gde matrica  $H_{x,a}$  označava translaciju duž ose  $x$  za dužinu  $a$ , matrica  $H_{y,b}$  translaciju duž ose  $y$  za dužinu  $b$ , a matrica  $H_{z,c}$  translaciju duž ose  $z$  za dužinu  $c$ . Često se radi asocijativnijeg obeležavanja umesto  $H_{x,a}$  može sresti oznaka  $Trans_{x,a}$ , umesto  $H_{y,b}$  se može sresti  $Trans_{y,b}$ , a  $Trans_{z,c}$  umesto  $H_{z,c}$ . Osnovne homogene transformacije za rotaciono kretanje su:

$$H_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha & 0 \\ 0 & S\alpha & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H_{y,\varphi} = \begin{bmatrix} C\varphi & 0 & S\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\varphi & 0 & C\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H_{z,\theta} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.44.)$$

gde matrica  $H_{x,\alpha}$  označava rotaciju oko ose  $x$  za ugao  $\alpha$ , matrica  $H_{y,\varphi}$  rotaciju oko ose  $y$  za ugao  $\varphi$ , a matrica  $H_{z,\theta}$  rotaciju oko ose  $z$  za ugao  $\theta$ . I u ovom slučaju se radi jasnijeg obeležavanja umesto  $H_{x,\alpha}$  može sresti oznaka  $Rot_{x,\alpha}$ , umesto  $H_{y,\varphi}$  se može sresti  $Rot_{y,\varphi}$ , a  $Rot_{z,\theta}$  umesto  $H_{z,\theta}$ . U svim ovim slučajevima je jasno da se radi o homogenim transformacijama a ne o matricama rotacije po dimenzijama matrica.

### 3.3 KINEMATSKI MODEL ROBOTSKOG MANIPULATORA

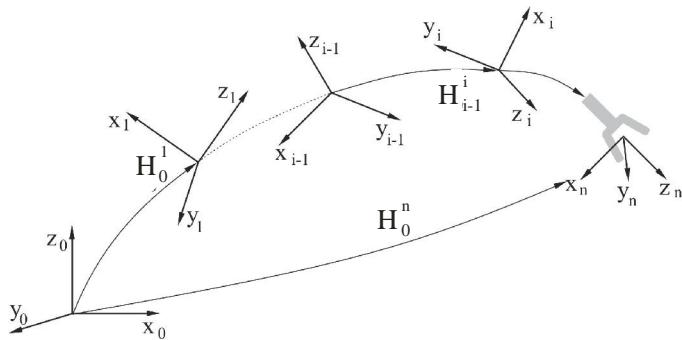
Matematički aparat koji smo razvili u prethodnim odeljcima za određivanje transformacija koordinatnih sistema u prostoru je veoma pogodan za opis kretanja robota. Naime, robot se može predstaviti nizom krutih segmenata spojenih zglobovima koji nazivamo kinematskim lancem (Sl. 2.2). Kretanje u jednom zgobu pokreće odgovarajući segment, a time i sve ostale segmente koji se nalaze "dalje", prema vrhu kinematskog lanca uključujući i poslednji segment - hvataljku<sup>4</sup> čiji položaj i orientaciju, često i tokom kretanja, a sasvim sigurno u određenim tačkama kada je to od interesa za realizaciju zadatka, moramo ostvariti. Neka je svakom od segmenata robota uključujući i hvataljku pridružen koordinatni sistem koji je u odnosu na „svoj“ segment nepokretan. Ovi koordinatni sistemi se nazivaju lokalnim za razliku od nepokretnog sistema u odnosu na koji se kretanje lokalnih koordinatnih sistema izražava, a koji se još naziva spoljašnjim (globalnim ili fiksnim, ...). Poznavanjem tačnog položaja koordinatnih sistema svakog od segmenata, kao i vrednosti unutrašnjih koordinata u zglobovima moguće je jednoznačno odrediti položaj i orientaciju hvataljke (Sl. 3.13). Ovaj zadatak je poznat kao direktni kinematski problem.

Obrnuti zadatak, kako odrediti unutrašnje koordinate u svakom od zglobova tako da se hvataljka nađe u zahtevanoj poziciji sa zahtevanom orijentacijom, je poznat kao inverzni

<sup>4</sup> Poslednji segment robota može biti, zavisno od radnog zadatka, hvataljka ili neki uredaj (npr. aparat za tačkasto ili šavno zavarivanje, glodalno, prskalica za bojenje, ...).

kinematski problem i nije jednoznačno rešiv. Svaki od ovih zadataka će u okviru ove glave biti posebno obrađen.

Koordinatni sistemi se na segmente mogu postavljati na različite načine, jedino položaj svakog od njih u odnosu na "sopstveni" segment uvek mora biti potpuno poznat i tokom vremena nepromenljiv. Međutim, određena sistematizacija u izboru položaja koordinatnih sistema je neophodna, a opšte prihvaćen dogovor o načinu postavljanja koordinatnih sistema je poznat kao Denavit-Hartenbergova ili DH notacija (konvencija). Prvi sistematski način



Sl. 3. 13. Transformacija položaja "lokalnih" koordinatnih sistema i rezultujući položaj hvataljke tokom kretanja robota

definisanja položaja koordinatnih sistema primjenjen u algoritmu za modeliranje dinamike manipulacionih robota je predložen od strane M. Vukobratovića ali je tokom vremena potisnut DH notacijom.

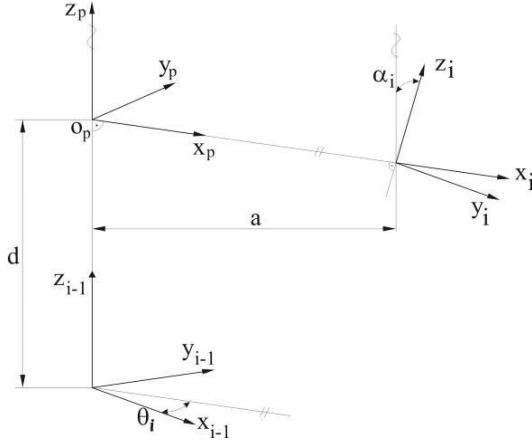
### 3.3.1 Denavit - Hartenbergova notacija

Uvođenje DH notacije ćemo započeti razmatranjem osnovnih transformacija između dva koordinatna sistema:  $i-1$ -vog i  $i$ -toga sa koordinatnim počecima  $O_{i-1}$  i  $O_i$  (Sl. 3.14) čiji međusobni položaj zadovoljava sledeće uslove:

- osa  $x_i$  je normalna na osu  $z_{i-1}$ ;
- osa  $x_i$  seče osu  $z_{i-1}$ .

Uočimo da je između ova dva koordinatna sistema umetnut pomoći koordinatni sistem sa osama  $x_p$ ,  $y_p$  i  $z_p$  čiji koordinatni početak  $O_p$  je definisan presekom osa  $z_{i-1}$  i  $x_i$ .

Razmotrimo transformacije koje je potrebno primeniti da bi se ova dva koordinatna sistema poklopila. Ukupnu transformaciju ćemo podeliti u dva koraka: najpre ćemo  $i-1$ -vi koordinatni sistem pomeriti tako da se poklopi sa pomoćnim, a zatim ćemo ga pomeriti tako da se poklopi sa  $i$ -tim. Sa slike se vidi da je za poklapanje koordinatnih početaka  $O_{i-1}$  i  $O_p$  najpre potrebno koordinatni sistem  $i-1$  zarotirati za ugao  $\theta$  oko ose  $z_{i-1}$  a zatim ga translatoryno pomeriti za veličinu  $d$  duž iste ose. (Primetite da se ose  $z_{i-1}$  i  $z_p$  poklapaju). Da bi se pomoći koordinatni sistem poklopio sa  $i$ -tim, potrebno ga je translatoryno pomeriti duž ose  $x_p$  za veličinu  $a$ , a zatim zarotirati, isto oko ose  $x_p$ , za ugao  $\alpha$ .



Sl. 3.14. Međusobni odnos koordinatnih sistema pri DH konvenciji

Prema tome, da bi se  $i$ -vi koordinatni sistem doveo do poklapanja sa  $i$ -tim potrebno je izvršiti sledeće transformacije

$$H_{i-1}^i = \text{Rot}_{z,\theta_i} \cdot \text{Tran}_{z,d_i} \cdot \text{Tran}_{x,a} \cdot \text{Rot}_{x,a} \quad (3.45)$$

što se može u formi homogenih transformacija (prve dve transformacije su objedinjene u jednu, druge dve u drugu transformaciju) izraziti na sledeći način

$$H_{i-1}^P = \text{Rot}_{z,\theta_i} \cdot \text{Tran}_{z,d_i} = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$H_P^i = \text{Rot}_{x,a_i} \cdot \text{Tran}_{x,a_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

ili u formi jedinstvene transformacije između  $i$ -vog i  $i$ -tog koordinatnog sistema

$$H_{i-1}^i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i \cdot C\alpha_i & S\theta_i \cdot S\alpha_i & a_i \cdot C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i \cdot C\alpha_i & -C\theta_i \cdot S\alpha_i & a_i \cdot S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

Prema tome, ukupna transformacija između dva koordinatna sistema proizvoljnog međusobnog položaja ali takvog da su ispunjena dva ranije navedena uslova, se može opisati sa četiri elementarne transformacije. Drugim rečima, korišćenjem DH notacije, ukupna transformacija je opisana sa samo četiri parametra  $\theta$ ,  $a$ ,  $d$ , i  $a$ , koji se nazivaju Denavit–Hartenbergovim (ili skraćeno DH) parametrima.

## Kinematika: položaj robota

## Industrijska robotika

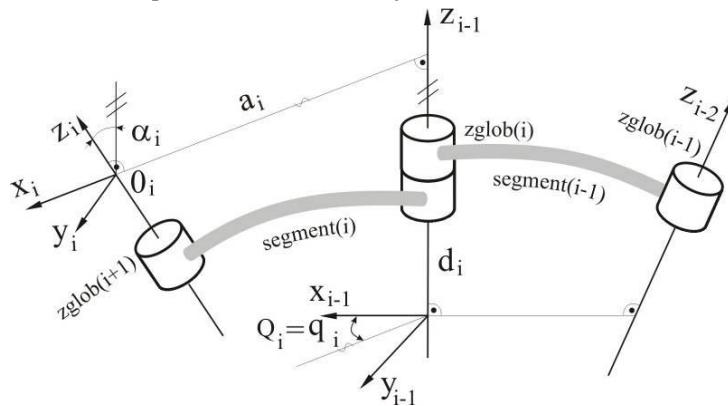
Da bi se međusobni položaj dva koordinatna sistema koji pripadaju susednim segmentima robotskog mehanizma, u opštem slučaju, mogao opisati transformacijom (3.48) potrebno je da se obezbedi da koordinatni sistemi koje pridružujemo pojedinačnim segmentima mehanizma zadovoljavaju oba navedena uslova ( $x_i \perp z_{i-1}$  i  $x_i$  seče  $z_{i-1}$ ).

Stoga razmotrimo dva susedna segmenta robota,  $i$ -ti i  $i$ -vi, (na Sl. 3.15. je prepostavljeno da su segmenti spojeni rotacionim zglobovima sa samo jednim stepenom slobode) gde su ose obrtanja zglobova obeležene sa  $z_i$ ,  $z_{i-1}$  i  $z_{i-2}$ , i da se, u opštem slučaju, mimoilaze u prostoru. Prepostavimo, dalje, da je koordinatni sistem sa početkom  $O_{i-1}$  već postavljen. Tada je moguće odrediti zajedničku normalu između osa  $z_i$  i  $z_{i-1}$  kao zajedničku normalu između dve mimoilazne prave (na Sl. 3.15. je ova zajednička normala obeležena sa  $a_i$ ).

Ako u pravcu zajedničke normale  $a_i$  postavimo osu  $x_i$  (smer se može birati proizvoljno), a osu  $y_i$  odredimo tako da sa  $x_i$  i  $z_i$  obrazuje desni koordinatni sistem tada koordinatni sistemi  $O_{i-1}$  i  $O_i$  predstavljaju dva koordinatna sistema koji zadovoljavaju oba ranije navedena uslova i njihov međusobni položaj možemo opisati Denavit-Hartenbergovim parametrima.

DH parametri  $\theta$ ,  $d$ ,  $a$  i  $\alpha$  između dva koordinatna sistema koji se nalaze na dva susedna segmenta su definisani na sledeći način:

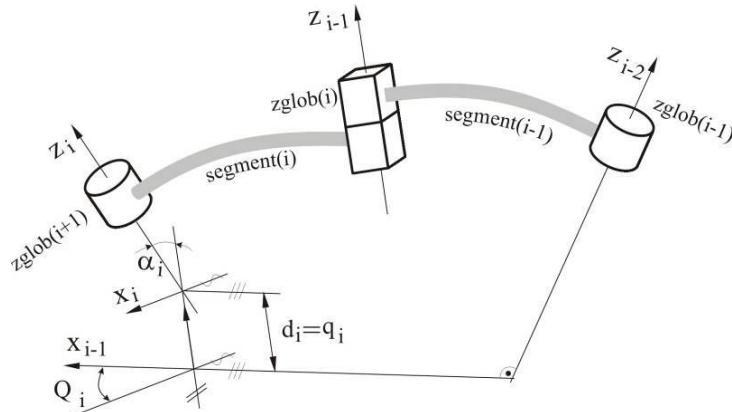
- parametar  $a$  je rastojanje između osa  $z_{i-1}$  i  $z_i$  mereno duž ose  $x_i$
- parametar  $d$  je rastojanje koordinatnog početka  $O_{i-1}$  i preseka osa  $x_i$  i  $z_{i-1}$  mereno duž ose  $z_{i-1}$ ;
- parametar  $\alpha$  je ugao između osa  $z_{i-1}$  i  $z_i$  (od ose  $z_{i-1}$  ka osi  $z_i$ ) meren u ravni normalnoj na osu  $x_i$ ;
- parametar  $\theta$  je ugao između osa  $x_{i-1}$  i  $x_i$  meren u ravni normalnoj na osu  $z_{i-1}$
- Parametre  $\theta$ ,  $d$ ,  $a$  i  $\alpha$  je moguće na sličan način odrediti i u slučaju linearног (translatornog) zgloba, koji je prikazan na Sl. 3.16. Kod translatornog zgloba položaj samog zgloba nije važan jer će se prilikom kretanja uvek na isti način translatorno pomerati deo sistema koji



Sl. 3.15. DH parametri za rotacioni zglob

se u kinematskom lancu nalazi posle njega. Zbog toga se koordinatni sistem postavlja tako da se parametri upuste, tj.  $z_{i-1}$  osa se postavlja u pravcu izduživanja translatornog zgloba i bira se da  $a_i = 0$ . Osa  $x_i$  se postavlja u istom ili suprotnom smeru od vektora  $z_{i-1} \times z_i$ .

Veličina  $d$  odgovara unutrašnjoj koordinati  $q_i$ . Nulta vrednost  $q_i$  odgovara položaju kada se koordinatni počeci  $O_i$  i  $O_{i-1}$  poklapaju. Za translatori zglob ugao  $\theta_i$ , nije promenljiv već fiksani i predstavlja kinematski parametar, isto kao i ugao  $\alpha_i$ .



Sl. 3.16 DH parametri za linearni (translatorni) zglob

Kada se za dati robot izvrši pridruživanje koordinatnih sistema pojedinim segmentima i odrede DH parametri tada su homogene matrice transformacije funkcije samo unutrašnjih koordinata  $q_i$  u zglobovima.

Napomenimo da slobodno telo u prostoru ima šest stepeni slobode, dok se relativni položaj dva koordinatna sistema prema DH notaciji opisuje sa samo sa četiri parametra. To je moguće zbog toga što je ovde položaj koordinatnih sistema ograničen sa dva dodatna uslova ( $x_i \perp z_{i-1}$  i  $x_i$  seče  $z_{i-1}$ ) čime se oduzimaju dva stepena slobode.

DH parametrima se može pridružiti određeno fizičko značenje. Tako, parametar  $a_i$  reprezentuje dužinu segmanta,  $\alpha_i$  ugao između osa zglobova istog segmenta ("uvrnutost" segmenta, engl. *twist*), parametar  $d_i$  predstavlja smaknutost (engl. *offset*) koordinatnih početaka  $O_{i-1}$  i  $O_i$  (u slučaju pravilnih geometrijskih oblika segmenata  $d_i$  predstavlja smaknutost "centra zglobova") dok parametar  $\theta_i$  predstavlja ugao međusobnog zakretanja  $i-1$ -vog i  $i$ -tog koordinatnog sistema što je u slučaju linearne zgloba posledica savijenosti segmenta.

U slučaju rotacionog zgloba  $a_i$ ,  $d_i$ , i  $\alpha_i$  predstavljaju fiksne parametre mehanizma dok promenljiva  $\theta_i$  predstavlja unutrašnju koordinatu  $q_i$  (ugao zakretanja između dva segmenta). U slučaju translatornog zgloba parametri  $a_i$ ,  $\theta_i$  i  $\alpha_i$  su fiksni parametri mehanizma, a promenljiva  $d_i$  predstavlja unutrašnju koordinatu  $q_i$  (pomeraj u zglobu).

Takođe je važno da se napomene da pri proceduri određivanja položaja koordinatnih sistema koji pripadaju pojedinim segmentima ni u jednom trenutku nije vodeno računa o stvarnom obliku segmenata i stvarnom položaju zglobova. Naime, kinematski model roboata predstavljen DH notacijom odgovara svim "stvarnim" mehaničkim konfiguracijama sa datim rasporedom i tipom zglobova tj. odgovara svim konfiguracijama kod kojih se sve ose zglobova nalaze na istim mestima. Oblik samih segmenata ne utiče na DH parametre što predstavlja prednost DH notacije.

Treba obratiti pažnju da kod DH notacije postoji neslaganje u rednom broju zglobova i njemu pripadajućeg koordinatnog sistema. Naime, numeracija segmenata kinematskog lanca kreće od segmenta vezanog za podlogu i počinje sa 1 (1, 2, ..., n). Numeracija zglobova takođe počinje od podloge na isti način kao i kod segmenata, ali se koordinatni sistemi koji pripadaju zglobovima numerišu drugačije. Osa baznog zglobova (zglob kojim se robot povezuje sa podlogom) se uvek obeležava sa  $z_0$ , tj. numeracija počinje od nule. To znači, da je  $i$ -ti zglob prvi zglob  $i$ -tog segmenta dok je odgovarajući koordinatni sistem  $i$ -vi što se može videti na Sl. 3.14. i Sl. 3.15. Na isti način, prvi zglob početnog segmenta kinematskog lanca (segment 1) je zglob 1, a njemu pripadajući koordinatni sistem je  $O_0$ .

Procedura formiranja kinematskog modela (postavljanja koordinatnih sistema i formiranja matrica transformacije) počinje identifikacijom osa svih zglobova jer tip i raspored zglobova moraju biti poznati unapred. Pri određivanju položaja koordinatnih sistema prema DH konvenciji treba voditi računa o nekim specifičnostima na koje ćemo sada ukazati.

Najpre treba ukazati na činjenicu da se bazni koordinatni sistem može postaviti bilo gde na osi  $z_0$  (njegov položaj nije jednoznačno određen i može se izabrati nama najpovoljnija pozicija) a ose  $x_0$  i  $y_0$  treba odrediti tako da se oformi desni koordinatni sistem. Dalje se koordinatni sistemi postavljaju na način opisan ranije.

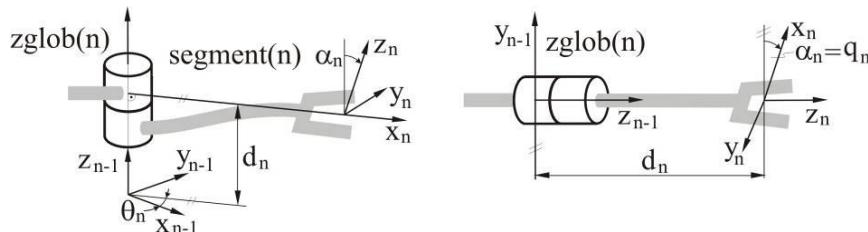
Razmotrimo, dalje, situaciju koja se javlja ako dve ose zglobova  $z_{i-1}$  i  $z_i$  pripadaju istoj ravni. Tu se mogu javiti dva slučaja:

- ose  $z_{i-1}$  i  $z_i$  se sekut,
- ose  $z_{i-1}$  i  $z_i$  su paralelne.

U drugom slučaju, koji je sasvim čest u praksi, postoji beskonačno mnogo zajedničkih normala osa  $z_{i-1}$  i  $z_i$ . U tom slučaju se osa  $x_i$  bira tako da bude normalna a da  $z_{i-1}$  i da prolazi kroz  $O_{i-1}$ . Primetimo da je u tom slučaju  $d_i$  jednako nuli, a zbog paralelnosti osa  $z_{i-1}$  i  $z_i$  parametar  $\alpha_i$  je takođe jednak nuli. Kada je osa  $x_i$  određena, osa  $y_i$  se bira tako da oformi desni koordinatni sistem.

U prvom slučaju, kada se ose  $z_{i-1}$  i  $z_i$  sekut,  $x_i$  se bira kao normala na ravan koja je definisana osama  $z_{i-1}$  i  $z_i$  dok je smer  $x_i$  proizvoljan. Najprirodniji izbor koordinatnog početka  $O_i$  je u preseku osa  $z_{i-1}$  i  $z_i$  mada se može izabrati bilo koja tačka na osi  $z_i$ . Treba primetiti da je u ovom slučaju parametar  $a_i$  jednak nuli.

Takođe treba obratiti pažnju na postavljanje koordinatnog sistema na poslednji ( $n$ -ti) segment, tj. na postavljanje koordinatnog sistema hvataljke (Sl. 3.15). Koordinatni početak.



Sl. 3.17. Postavljanje koordinatnog sistema hvataljke

$O_n$  se može izabrati proizvoljno, ali treba voditi računa da se DH parametri maksimalno uprostite. Zbog toga se preporučuje da se  $O_n$  bira simetrično između prstiju hvataljke, jedino

treba da se obezbedi da je osa  $x_n$  upravna na  $z_{n-1}$ .

Ukoliko je poslednji zglob rotacioni treba osu  $z_n$  izabrati tako da je paralelna  $z_{n-1}$ . Postupak za formiranje kinematskog modela robota proizvoljne mehaničke konfiguracije se može sistematizovati u nekoliko sledećih koraka:

1. Locirati i označiti sve ose zglobova od  $z_0$  do  $z_{n-1}$ .
2. Postaviti bazni koordinatni sistem bilo gde na  $z_0$  osi.

**Napomena:** korake 3÷5 ponavljati za  $i = 1$  do  $i = n - 1$

3. Locirati koordinatni početak  $O_i$  na mestu gde zajednička normala na ose  $z_i$  i  $z_{i-1}$  preseca osu  $z_i$ . Ako se  $z_i$  preseca sa  $z_{i-1}$  onda  $O_i$  postaviti u tačku preseka, a ako su ose  $z_i$  i  $z_{i-1}$  paralelne onda  $O_i$  postaviti u zglob  $z_i$ .
4. Postaviti osu  $x_i$  duž zajedničke normale između  $z_{i-1}$  i  $z_i$  kroz tačku  $O_i$  ili u pravcu koji je normalan na ravan određenu osama  $z_i$  i  $z_{i-1}$  ako se ove dve ose sekut.
5. Postaviti  $y_i$  tako da se formira desni koordinatni sistem.
6. Postaviti koordinatni sistem hvataljke na pogodan način.
7. Formirati tablicu parametara  $a_i$ ,  $d_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $\theta_i$ .
8. Formirati homogenu matricu transformacije zamenjujući vrednosti parametara iz tablice, formirati ukupnu matricu transformacije množeći redom sve matrice od početne do krajnje.

Odavde se može zaključiti sledeće:

- koordinatni sistemi se postavljaju u zglobove robota,
- na svakom segmentu se nalaze po dva koordinatna sistema,
- prvi koordinani sistem (računato od početka (baze) kinematskog lanca pripada prethodnom segmentu, drugi koordinatni sistem je vezan za dotični segment i njegov položaj se menja zajedno sa promenom položaja dotičnog segmenta.

Na opisani način je moguće u potpunosti definisati položaje svih koordinatnih sistema i oformiti ukupnu matricu transformacije koja povezuje poziciju i orientaciju krajnjeg koordinatnog sistema kinematskog lanca (koordinatnog sistema hvataljke) izraženu u odnosu na bazni (nepokretni) koordinatni sistem

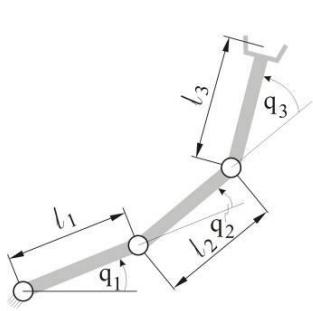
### 3.3.2 Direktni kinematski problem

Pod direktnim kinematskim problemom podrazumevamo određivanje pozicije i orientacije koordinatnog sistema poslednjeg segmenta kinematskog lanca u odnosu na nepokretni (bazni) koordinatni sistem ukoliko su poznate vrednosti pomeraja u zglobovima (ugao zakretanja za rotacioni i izduženje za translatorni zglob). Ilustrovaćemo ovo na nekoliko primera.

#### **Primer 3.2:**

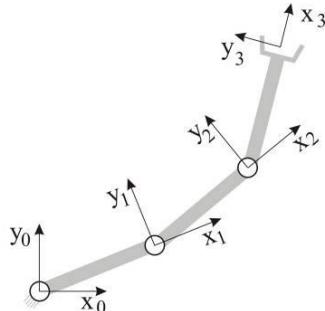
Odrediti tablicu DH parametara i matrice homogenih transformacija za ravanski trosegmentni robotski manipulator prikazan na Sl. 3.18.

Kinematika: položaj robota



a) bez ucrtanih koordinatnih sistema

Industrijska robotika



b) sa ucrtanim koordinatnim sistemima

Sl. 3.18. Trosegmentna ravanska konfiguracija

Tablica Denavit - Hartenbergovih parametara je data u sledećoj tabeli

Tabela 1. Denavit - Hartenbergovi parametri

Segment	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	$l_1$	0	0	$q_1$
2	$l_2$	0	0	$q_3$
3	$l_3$	0	0	$q_3$

Matrice pojedinačnih transformacija su date sa:

$$H_0^1 = \begin{bmatrix} C1 & -S1 & 0 & l_1 C1 \\ S1 & C1 & 0 & l_1 S1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H_1^2 = \begin{bmatrix} C2 & -S2 & 0 & l_2 C2 \\ S2 & C2 & 0 & l_2 S2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H_2^3 = \begin{bmatrix} C3 & -S3 & 0 & l_3 C3 \\ S3 & C3 & 0 & l_3 S3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dok je ukupna transformacija data sa

$$H_0^3 = H_0^1 \cdot H_1^2 \cdot T_2^3 = \begin{bmatrix} C123 & -S123 & 0 & l_1 \cdot C1 + l_2 \cdot C12 + l_3 \cdot C123 \\ S123 & C123 & 0 & l_1 \cdot S1 + l_2 \cdot S12 + l_3 \cdot S123 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gde je  $S123 = \sin(q_1 + q_2 + q_3)$ ,  $C123 = \cos(q_1 + q_2 + q_3)$ .

### Primer 3.3:

Odrediti tablicu DH parametara i matrice homogenih transformacija za trosegmentnu antropomorfnu konfiguraciju sa Sl. 3.19 ako su dužine drugog i trećeg segmenta  $a_2$  i  $a_3$ , respektivno.

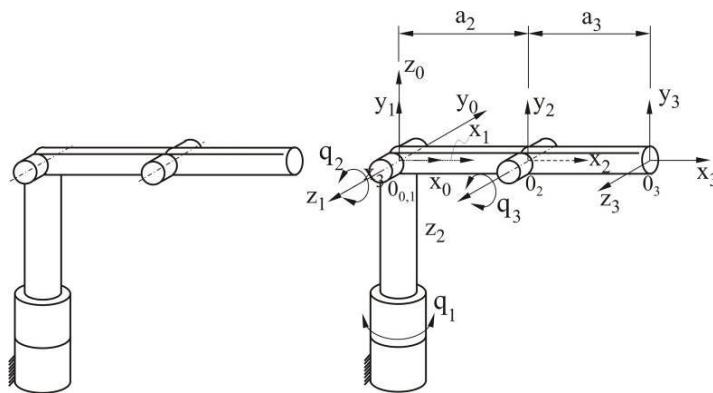
Položaji odgovarajućih koordinatnih sistema prema DH notaciji su ucrtani na Sl. 3.19. dok su Denavit - Hartenbergovi parametri dati u Tabeli 2:

Tabela 2. Denavit - Hartenbergovi parametri

Segment	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	$\pi/2$	0	$q_1$
2	$a_2$	0	0	$q_2$
3	$a_3$	0	0	$q_3$

Matrice pojedinačnih homogenih transformacija su date sa

$$H_0^1 = \begin{bmatrix} C1 & 0 & S1 & 0 \\ S1 & 0 & -C1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H_1^2 = \begin{bmatrix} C2 & -S2 & 0 & a_2 C2 \\ S2 & C2 & 0 & a_2 S2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H_2^3 = \begin{bmatrix} C3 & -S3 & 0 & a_3 C3 \\ S3 & C3 & 0 & a_3 S3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$



Sl. 3.19. Antropomorfna minimalna konfiguracija

dok je ukupna transformaciona matrica data sa

$$H_0^3 = H_0^1 \cdot H_1^2 \cdot H_2^3 = \begin{bmatrix} C1 \cdot C23 & -C1 \cdot S23 & S1 & C1 \cdot (a_3 \cdot C23 + a_2 \cdot C2) \\ S1 \cdot C23 & S1 \cdot S23 & -C1 & S1 \cdot (a_3 \cdot C23 + a_2 \cdot C2) \\ S23 & C23 & 0 & a_3 \cdot S23 + a_2 \cdot S2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

gde je  $S23 = \sin(q_2 + q_3)$ ,  $C23 = \cos(q_2 + q_3)$ .

Na taj način je određena ukupna transformacija krajnjeg koordinatnog sistema  $O_3$  u odnosu na bazni  $O_0$  u funkciji koordinata u zglobovima. Vektor pozicije koordinatnog sistema  $O_3$  je definisan četvrtom kolonom u matrici (3.50) i njegove koordinate direktno odgovaraju koordinatama koordinatnog početka  $O_3$  u odnosu na  $O_0$ . Najčešće se direktni kinematski problem ovim smatra rešenim. Međutim, obzirom da nam matrica rotacije ne daje rešenje u obliku neke od uobičajenih reprezentacija orijentacije koordinatnih sistema ponekad je

pogodno odrediti orijentaciju krajnjeg koordinatnog sistema u željenoj formi.

Pretpostavimo da želimo da orijentaciju koordinatnog sistema  $O_3$  definisanu matricom rotacije iz (3.50) predstavimo ZYX Ojlerovim uglovima čija je matrica rotacije data sa (3.29). Drugim rečima, želimo da odredimo Ojlerove uglove  $\theta$ ,  $\varphi$  i  $\psi$  tako da ukupna rotacija odgovara rotaciji koja je definisana matricom rotacije (3.29).

Matrica rotacije definisana u okviru homogene transformacije (3.50) je data sa

$$R_0^3 = \begin{bmatrix} C1 \cdot C23 & -C1 \cdot S23 & S1 \\ S1 \cdot C23 & S1 \cdot S23 & -C1 \\ S23 & C23 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}.$$

Matrica rotacije izražena ZYX Ojlerovim uglovima je

$$R_0^3 = \begin{bmatrix} C\varphi \cdot C\theta & C\varphi \cdot S\theta \cdot S\psi - S\varphi \cdot C\psi & C\varphi \cdot S\theta \cdot C\psi + S\varphi \cdot S\psi \\ S\varphi \cdot C\theta & S\varphi \cdot S\theta \cdot S\psi + C\varphi \cdot C\psi & S\varphi \cdot S\theta \cdot C\psi - C\varphi \cdot S\psi \\ -S\theta & C\theta \cdot S\psi & C\theta \cdot C\psi \end{bmatrix}$$

Obzirom da želimo da obe rotacije kao rezultat daju istu ukupnu rotaciju pojedinačni članovi u ovim dvema matricama treba da su jednaki. Izjednačavanjem izraza uz pojedine članove dobijamo

$$r_{11} = C\varphi \cdot C\theta \quad (3.51)$$

$$r_{12} = C\varphi \cdot S\theta \cdot S\psi - S\varphi \cdot C\psi \quad (3.52)$$

$$r_{13} = C\varphi \cdot S\theta \cdot C\psi + S\varphi \cdot S\psi \quad (3.53)$$

$$r_{21} = S\varphi \cdot C\theta \quad (3.54)$$

$$r_{22} = S\varphi \cdot S\theta \cdot S\psi + C\varphi \cdot C\psi \quad (3.55)$$

$$r_{23} = S\varphi \cdot S\theta \cdot C\psi - C\varphi \cdot S\psi \quad (3.56)$$

$$r_{31} = -S\theta \quad (3.57)$$

$$r_{32} = C\theta \cdot S\psi \quad (3.58)$$

$$r_{33} = C\theta \cdot C\psi \quad (3.59)$$

Na ovaj način smo dobili sistem od 9 jednačina sa 3 nepoznate koji možemo rešiti na više načina. Ako (3.51) pomnožimo sa  $S\psi$ , a (3.54) sa  $C\psi$

$$r_{11} \cdot S\psi = S\varphi \cdot C\varphi \cdot C\theta \quad (3.60)$$

$$r_{21} \cdot C\varphi = C\varphi \cdot S\varphi \cdot C\theta \quad (3.61)$$

i od jednačine (3.60) oduzmemos jednačinu (3.61), dobijamo

$$r_{11} \cdot S\psi - r_{21} \cdot C\varphi = 0$$

$$\frac{S\varphi}{C\varphi} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{r_{21}}{r_{11}}$$

odakle, konačno, sledi

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{r_{21}}{r_{11}}$$

Zatim, pomnožimo (3.58) sa  $C\psi$ , a (3.59)  $S\psi$ , pa dobijamo

$$r_{32} \cdot C\psi = C\psi \cdot C\theta \cdot S\psi \quad (3.62)$$

$$r_{33} \cdot S\psi = S\psi \cdot C\theta \cdot C\psi \quad (3.63)$$

Ako zatim od (3.62) oduzmemos (3.63) sledi

$$r_{32} \cdot C\psi - r_{33} \cdot S\psi = 0$$

pa konačno dobijamo

$$\frac{S\psi}{C\psi} = \operatorname{tg}\psi = \frac{r_{32}}{r_{33}}$$

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{r_{32}}{r_{33}}$$

Da bi odredili ugao  $\theta$  pomnožimo (3.51) sa  $C\psi$ , a (3.54) sa  $S\psi$

$$r_{11} = C\varphi \cdot C\theta / C\varphi$$

$$r_{21} = S\varphi \cdot C\theta / S\varphi$$

odakle sledi

$$r_{11} \cdot C\varphi = C\varphi^2 \cdot C\theta \quad (3.64)$$

$$r_{21} \cdot S\varphi = S\varphi^2 \cdot C\theta \quad (3.65)$$

Ako zatim (3.64) sabremo sa (3.65) sledi:

$$r_{11} \cdot C\varphi + r_{21} \cdot S\varphi = (C\varphi^2 + S\varphi^2) \cdot C\theta \quad (3.66)$$

Ako jednačinu (3.57) pomnožimo sa  $C\theta$  i podelimo sa  $-S\theta$  dobijamo

$$-r_{31} \cdot \frac{C\theta}{S\theta} = C\theta \quad (3.67)$$

Ako desnu stranu u (3.66) zamenimo sa (3.67) dobijamo

$$r_{11} \cdot C\varphi + r_{21} \cdot S\varphi = -r_{31} \cdot \frac{C\theta}{S\theta}$$

*Kinematika: položaj robota*

Industrijska robotika

$$\frac{r_{11} \cdot C\varphi + r_{21} \cdot S\varphi}{-r_{31}} = \frac{C\theta}{S\theta}$$

odakle sledi

$$\frac{C\theta}{S\theta} = \tan\theta = \frac{-r_{31}}{r_{11} \cdot C\varphi + r_{21} \cdot S\varphi}$$

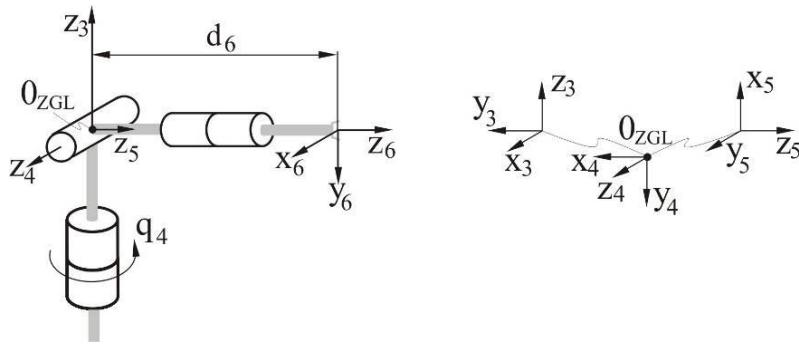
i konačno dobijamo

$$\theta = \arctan \frac{-r_{31}}{r_{11} \cdot C\varphi + r_{21} \cdot S\varphi}$$

Time je direktni kinematski problem u potpunosti rešen

**Primer 3.4:**

Odrediti tablicu DH parametara i matrice homogenih transformacija za sferni zglob čija kinematska šema je prikazana na Sl. 3.19.



a) kinematska šema zgloba

b) koordinatni sistemi zgloba hvataljke

Sl. 3. 20. Sferni (Ojlerov) zglob

Položaj koordinatnih sistema zgloba hvataljke je prikazan na Sl. 3.20.b. Tablica Denavit - Hartenbergovih parametara je data sa

Tabela 3. Denavit - Hartenbergovi parametri

Segment	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
4	0	$-\pi/2$	0	$q_4$
5	0	$\pi/2$	0	$q_5$
6	0	0	$d_6$	$q_6$

Pojedinačne matrice transformacija su:

$$H_3^4 = \begin{bmatrix} C4 & 0 & -S4 & 0 \\ S4 & 0 & C4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H_4^5 = \begin{bmatrix} C5 & 0 & S5 & 0 \\ S5 & 0 & -C5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

$$H_5^6 = \begin{bmatrix} C6 & -S6 & 0 & 0 \\ S6 & C6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

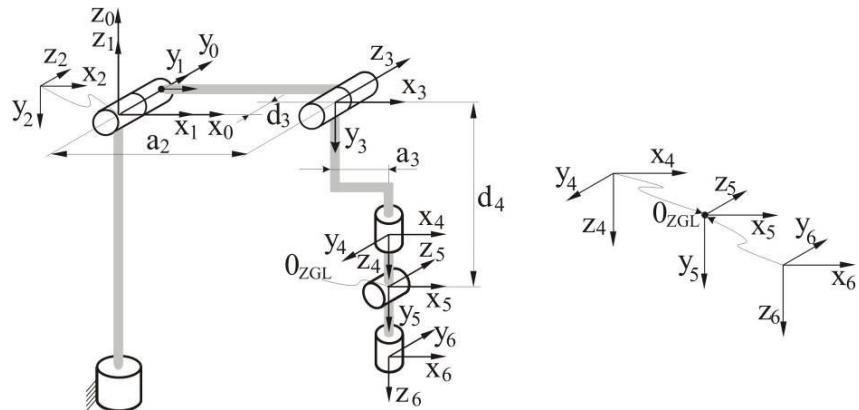
dok je ukupna matrica transformacije data sa

$$H_3^6 = H_3^4 \cdot H_4^5 \cdot H_5^6 = \\ = \begin{bmatrix} C4 \cdot C5 \cdot C6 - S4 \cdot S6 & -C4 \cdot C5 \cdot S6 - S4 \cdot C6 & C4 \cdot S5 & C4 \cdot S5 \cdot d_6 \\ S4 \cdot C5 \cdot C6 + C4 \cdot S6 & -S4 \cdot C5 \cdot S6 + C4 \cdot C6 & S4 \cdot S5 & S4 \cdot S5 \cdot d_6 \\ -S5 \cdot C6 & S5 \cdot S6 & C5 & C5 \cdot d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

čime je zadatak rešen. Primetimo da matrica rotacije iz (3.69) odgovara matrici rotacije kada je orientacija zadata ZYZ Ojlerovim uglom. Vrednost rotacije za ugao  $q_4$  odgovara vrednosti ugla  $\varphi$ , za ugao  $q_5$  ugлу  $\theta$ , a za ugao  $q_6$  uglu  $\psi$ . To je i razlog što se sferni zglob još naziva i Ojlerovim zglobom.

### Primer 3.5:

U ovom primeru ćemo prikazati formiranje kinematskog modela standardnog industrijskog manipulacionog robota antropomorfnog tipa PUMA koji ima šest stepeni slobode sa svim rotacionim zglobovima. Kinematska shema robota je prikazana na Sl. 3.21. Treba uočiti



a) Kinematska šema

b) Koordinatni sistemi zgloba hvataljke

Sl. 3.21. Industrijski manipulacioni robot PUMA

*Kinematika: položaj robota*

Industrijska robotika

da je konstruktivno rešenje robota takvo da obezbeđuje da se sve tri ose zglobova hvataljke sek u jednoj tački, tj. zglob hvataljke je Ojlerov zglob..

Koordinatni sistemi, postavljeni u skladu sa DH notacijom su prikazani na Sl. 3.21. a odgovarajući DH parametri u sledećoj tabeli:

Tabela 4. Denavit-Hartembergovi parametri

Segment	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	$q_i$
1	0	0	0	$q_1$
2	-90°	0	0	$q_2$
3	0	$a_2$	$d_3$	$q_3$
4	-90°	$a_3$	$d_4$	$q_4$
5	90°	0	0	$q_5$
6	-90°	0	0	$q_6$

Matrice pojedinačnih homogenih transformacija su date sa

$$\begin{aligned}
 H_0^1 &= \begin{bmatrix} C1 & -S1 & 0 & 0 \\ S1 & C1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_1^2 = \begin{bmatrix} C2 & -S2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -S2 & -C2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 H_2^3 &= \begin{bmatrix} C3 & -S3 & 0 & a_2 \\ S3 & C3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_3^4 = \begin{bmatrix} C4 & -S4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -S4 & -C4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.70) \\
 H_4^5 &= \begin{bmatrix} C5 & -S5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S5 & C5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_5^6 = \begin{bmatrix} C6 & -S6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -S6 & -C6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Ukupna matrica transformacije se može dobiti množenjem pojedinačnih matrica transformacija. Da bi ovaj primer mogli koristiti u narednom odeljku kada budemo govorili o rešavanju inverznog kinematskog zadatka dodatno ćemo izvesti neke međurezultate.

Pomnožimo najpre  $H_4^5$  i  $H_5^6$ , odakle sledi

$$H_4^6 = H_4^5 \cdot H_5^6 = \begin{bmatrix} C5C6 & -C5S6 & -S5 & 0 \\ S6 & C6 & -1 & 0 \\ S5C6 & S5S6 & C5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Na isti način možemo odrediti matricu transformacije  $H_3^6$

$$H_3^6 = H_3^4 \cdot H_4^6 = \begin{bmatrix} C4C5C6 & -C4C5S6 - S4C6 & -C4S5 & a_3 \\ S5C6 & S5S6 & C5 & d_4 \\ -S4C5C6 - C4S6 & S4C5S6 - C4C6 & S4S5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Ukupna transformacija između prvog i trećeg koordinatnog sistema je

$$H_1^3 = H_1^2 \cdot H_2^3 = \begin{bmatrix} C23 & -S23 & 0 & a_2C2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ -S23 & -C23 & 0 & -a_2S2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

gde su iskorišćene poznate relacije iz trigonometrije

$$C23 = C2C3 - S2S3 \quad \text{i}$$

$$S23 = S2C3 + C2S3$$

pa za ukupnu transformaciju između prvog i šestog koordinatnog sistema dobijamo

$$H_1^6 = H_1^3 \cdot H_3^6 = \begin{bmatrix} \hat{r}_{11} & \hat{r}_{12} & \hat{r}_{13} & \hat{p}_x \\ \hat{r}_{21} & \hat{r}_{22} & \hat{r}_{23} & \hat{p}_y \\ \hat{r}_{31} & \hat{r}_{32} & \hat{r}_{33} & \hat{p}_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

gde je

$$\begin{aligned} \hat{r}_{11} &= C23[C4C5C6 - S4S6] - S23S5C6 \\ \hat{r}_{21} &= -S4C5C6 - C4S6 \\ \hat{r}_{31} &= -S23[C4C5C6 - S4S6] - C23S5C6 \\ \hat{r}_{12} &= -C23[C4C5S6 + S4C6] + S23S5S6 \\ \hat{r}_{22} &= S4C5S6 - C4C6 \\ \hat{r}_{32} &= S23[C4C5S6 + S4C6] + C23S5S6 \\ \hat{r}_{13} &= -C23C4S5 - S23C5 \\ \hat{r}_{23} &= S4S5 \\ \hat{r}_{33} &= S23C4S5 - C23C5 \\ \hat{p}_x &= a_2C2 + a_3C23 - d_4S23 \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\hat{p}_y = d_3$$

$$\hat{p}_z = -a_3 S 23 - a_2 S 2 - d_4 C 23$$

I konačno, dodajući transformaciju  $H_0^1$  između baznog i prvog koordinatnog sistema već staćunatoj transformaciji  $H_1^6$ , za ukupnu transformaciju  $H_0^6$  dobijamo

$$H_0^6 = H_0^1 \cdot H_1^6 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

gde je

$$\begin{aligned} r_{11} &= C1 [C23(C4C5C6 - S4S6) - S23S5C6] + S1(S4C5C6 + c4S6) \\ r_{21} &= S1 [C23(C4C5C6 - S4S6) - S23S5C6] - C1(S4C5C6 + C4S6) \\ r_{31} &= -S23[C4C5C6 - S4S6] - C23S5C6 \\ r_{12} &= C1 [C23(-C4C5S6 - S4C6) + S23S5S6] + S1(C4C6 - C4C6 - S4C5S6) \\ r_{22} &= S1 [C23(-C4C5S6 - S4C6) + S23S5S6] - C1(-S4C5S6 + C4C6) \\ r_{32} &= -S23[-C4C5S6 - S4C6] + C23S5S6 \\ r_{13} &= -C1(C23C4S5 + S23C5) - S1S4S5 \\ r_{23} &= -S1(C23C4S5 + S23C5) + C1S4S5 \\ r_{33} &= S23C4S5 - C23C5 \\ p_x &= C1(a_2 C2 + a_3 C23 - d_4 S23) - d_3 S1 \\ p_y &= S1(a_2 C2 + a_3 C23 - d_4 S23) + d_3 C1 \\ p_z &= -a_3 S23 - a_2 S2 - d_4 C23 \end{aligned} \quad (3.77)$$

Jednačine (3.77) konstituišu kinematički model robota PUMA i predstavljaju osnovu za kinematsku analizu ovog robotskog manipulatora.

### 3.3.3 Inverzni kinematski problem

Inverzni kinematski problem je zadatak određivanja koordinata u zglobovima robota (uglova u rotacionim i izduženja (pomeraja) u translatornim, tj.  $q_1, q_2, \dots, q_6$ ) koje obezbeđuju da hvataljka robota ostvari unapred zahtevanu poziciju i orientaciju. Ovaj problem je znatno složeniji od direktnog kinematskog problema i ne daje uvek jednoznačno

rešenje. Imajući na umu da se homogena matrica ukupne transformacije sastoji od matrice rotacije i vektora translacije proizilazi da je potrebno simultano rešiti skup od 12 trigonometrijskih nelinearnih jednačina. Prikazaćemo dva osnovna načina rešavanja ovog problema: analitički i numerički. Analitički dobijeno rešenje ima sve prednosti koje svako analitičko rešenje ima (mogućnost analize izraza kojim je rešenje dato i uočavanje specijalnih slučajeva (kod nas su najinteresantnije singularne konfiguracije) kompaktan izraz koji zahteva najmanji broj računskih operacija pri apliciranju na računar, ...), ali je put do rešenja veoma složen. Numeričko rešenje dobijamo korišćenjem računara i izbegavamo zamorno računanje, ali kao rezultat dobijamo samo broj i ne možemo ga koristiti kao rešenje u analitičkom obliku.

Sa tri naredna primera ćemo ilustrovati analitičko rešavanje inverznog kinematskog problema.

### Primer 3.6.

Ilustrovaćemo najpre, rešavanje inverznog kinematskog zadatka na jednostavnom primeru trosegmentnog mehanizma prikazanog na Sl. 3.18. Prepostavimo da se traži da kraj drugog segmenta (ustvari, koordinatni početak sistema  $O_3$ ) zauzima poziciju definisanu koordinatama  $(x, y)$  i da je njegova orientacija zadata uglom  $\Phi$  gde očigledno važi  $\Phi = q_1 + q_2 + q_3$ . Zadatak je da se odrede uglovi  $q_1, q_2$  i  $q_3$  koji to obezbeđuju.

Jasno je da je preduslov za rešavanje ovog zadatka postojanje kinematskog modela. Podsetimo se da je to već urađeno u Primeru 3.2. Izraz za konačnu transformaciju od baznog do krajnjeg koordinatnog sistema koja je izvedena u Primeru 3.2 obzirom na postavljeni zadatak možemo napisati u nešto izmenjenoj formi

$$H_0^3 = \begin{bmatrix} C\Phi & -S\Phi & 0 & x \\ S\Phi & C\Phi & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

pri čemu važi

$$C\Phi = C123 \quad (3.79)$$

$$S\Phi = S123 \quad (3.80)$$

$$x = l_1 \cdot C1 + l_2 \cdot C12 \quad (3.81)$$

$$y = l_1 \cdot S1 + l_2 \cdot S12 \quad (3.82)$$

Ako kvadriramo i saberemo jednačine (3.81) i (3.82) dobijamo

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 C2 \quad (3.83)$$

odakle sledi

$$C2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}.$$

Da bi rešenje postojalo mora desna strana jednačine imati vrednost između -1 i +1, na osnovu čega sledi

$$S2 = \pm \sqrt{1 - C2^2}$$

pa se ugao  $q_2$  može odrediti na osnovu izraza

$$q_2 = \operatorname{arctg} \left( \frac{S2}{C2} \right) \quad (3.84)$$

Pošto je ugao  $q_2$  određen<sup>5</sup> pređimo na određivanje ugla  $q_1$ . Napišimo izraze za  $x$  i  $y$  u formi

$$x = k_2 \cdot C1 - k_2 \cdot S1$$

$$y = k_1 \cdot S1 + k_2 \cdot C1$$

gde je

$$\begin{aligned} k_1 &= l_1 + l_2 \cdot C2 \\ k_2 &= l_2 \cdot S2 \end{aligned} \quad (3.85)$$

Ako usvojimo da je  $r = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$  i  $\gamma = \operatorname{arctg}(k_1^2 + k_2^2)$ , sledi

$$\begin{aligned} k_1 &= r \cos(\gamma) \\ k_2 &= r \sin(\gamma) \end{aligned} \quad (3.86)$$

Sada se izraxi za  $x$  i  $y$  mogu napisati kao

$$\begin{aligned} x/r &= \cos(\gamma) \cos(q_1) - \sin(\gamma) \sin(q_1) \\ y/r &= \cos(\gamma) \sin(q_1) + \sin(\gamma) \cos(q_1) \end{aligned} \quad (3.87)$$

ili

$$x/r = \cos(\gamma + q_1)$$

$$y/r = \sin(\gamma + q_1)$$

Pošto je

$$\gamma + q_1 = \operatorname{arctg} \left( \frac{y/r}{x/r} \right) = \operatorname{arctg}(y/x)$$

sledi

$$q_1 = \operatorname{arctg} \left( \frac{y/r}{x/r} \right) - \operatorname{arctg}(k_2/k_1) \quad (3.88)$$

Primetimo da promena znaka  $q_1$  utiče na  $k_2$  što utiče na vrednost  $q_1$ . Na kraju se

<sup>5</sup> Za računarsko rešavanje funkcije  $\operatorname{arctg}$  preporučujemo korišćenje funkcije Atan2, jer vodi računa u kom se od četiri kvadranta nalazi traženi ugao i dodeljuje rešenju ispravan znak.

vrednost za  $q_3$  može odrediti iz

$$q_3 = \Phi - q_2 - q_1 \quad (3.89)$$

Time je zadatak potpuno rešen.

### Primer 3.7.

Sledeći primer kojim ćemo ilustrovati analitičko rešavanje inverznog kinematskog zadatka se odnosi na trosegmentnu antropomorfnu konfiguraciju prikazanu na Sl. 3.19. Potrebno je odrediti uglove u zglobovima  $q_1, q_2, q_3$  ako je tačka koju treba da dosegne vrh robota data koordinatama  $(x, y, z)$ . Obzirom da robot ima samo tri stepena slobode nije moguće upravljati i orientacijom poslednjeg koordinatnog sistema, već se može obezbediti samo zahtevana pozicija  $p_z = [x, y, z]^T$ . Na osnovu vektora pozicije iz ukupne homogene transformacije (3.50) možemo pisati

$$x = C1 \cdot (a_3 C23 + a_2 C2) \quad (3.90)$$

$$y = S1 \cdot (a_3 C23 + a_2 C2) \quad (3.91)$$

$$z = a_3 \cdot S23 + a_2 \cdot S2 \quad (3.92)$$

Da bi odredili  $q_1$  pomnožimo (3.90) sa  $S1$  a (3.91) sa  $C1$  na osnovu čega sledi

$$x \cdot S1 = C1 \cdot S1 (a_3 C23 + a_2 C2) \quad (3.93)$$

$$y \cdot C1 = S1 \cdot C1 (a_3 C23 + a_2 C2) \quad (3.94)$$

Ako (3.93) oduzmemos od (3.94) sledi

$$x \cdot S1 - y \cdot C1 = 0$$

odakle dobijamo

$$q_1 = \arctg \frac{y}{x} + k\pi$$

Da bi odredili  $q_3$  pomnožimo (3.90) sa  $C1$ , a (3.91) sa  $S1$

$$x \cdot C1 = C1^2 \cdot (a_3 C23 + a_2 C2) \quad (3.95)$$

$$y \cdot S1 = S1^2 \cdot (a_3 C23 + a_2 C2) \quad (3.96)$$

Ako (3.95) i (3.96) saberemo

$$x \cdot C1 + y \cdot S1 = (S1^2 + C1^2) \cdot (a_3 \cdot C23 + a_2 \cdot C2) \quad (3.97)$$

$$z = a_3 \cdot S23 + a_2 \cdot S2 \quad (3.98)$$

pa zatim izraze (3.97) i (3.98) kvadriramo sledi:

$$x^2 \cdot C1^2 + 2 \cdot x \cdot y \cdot C1 \cdot S1 + y^2 \cdot S1^2 = a_3^2 \cdot C23^2 + 2 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot C23 \cdot C2 + a_2^2 \cdot C2^2 \quad (3.99)$$

$$z^2 = a_3^2 \cdot S23^2 + 2 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot S23 \cdot S2 + a_2^2 \cdot S2^2 \quad (3.100)$$

Kada jednačine (3.99) i (3.100) saberemo, dobijamo:

$$z^2 + (x \cdot C1 + y \cdot C1)^2 = (S23^2 + C23^2) \cdot a_3^2 + (S2^2 + C2^2) \cdot a_2^2 + 2 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot (C23 \cdot C2 + S23 \cdot S2)$$

odakle sledi

$$C3 = \frac{(x \cdot C1 + y \cdot S1)^2 + z^2 - a_3^2 - a_2^2}{2 \cdot a_3 \cdot a_2}. \quad (3.101)$$

Na osnovu poznate relacije iz trigonometrije  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  možemo pisati

$$S3 = \pm \sqrt{1 - C3^2} \quad (3.102)$$

pa konačno sledi

$$q_3 = \arctg \frac{S3}{C3} \quad (3.103)$$

čime je ugao  $q_3$  određen. Odredimo sada ugao  $q_2$ . Najpre u izrazima (3.97) i (3.98) sinus i kosinus zbiru uglova ( $\varphi_2 + \varphi_3$ ) rastavimo pomoću adicioneih teorema na osnovu čega se dobija

$$C1 \cdot x + S1 \cdot y = a_3 \cdot C2 \cdot C3 - a_3 \cdot S2 \cdot S3 + a_2 \cdot S2 \quad (3.104)$$

$$z = S2(a_3 C3 + a_2) + a_3 C2 S3 \quad (3.105)$$

Ako jednačinu (3.104) pomnožimo sa  $(a_3 \cdot S3)$  a jednačinu (3.105) sa  $-(a_3 C3 + a_2)$ , obe jednačine saberemo, posle sređivanja sledi:

$$S2 = \frac{(C3 \cdot a_3 + a_2) \cdot z - S3 \cdot a_3 \cdot (C1 \cdot x + S1 \cdot y)}{(C3 \cdot a_3 + a_2)^2 + S3^2 \cdot a_3^2}$$

$$C2 = \frac{(C3 \cdot a_3 + a_2) \cdot (C1 \cdot x + S1 \cdot y) + S3 \cdot a_3 \cdot z}{(C3 \cdot a_3 + a_2)^2 + S3^2 \cdot a_3^2}$$

odakle određujemo ugao  $q_2$  kao

$$q_2 = \arctg \frac{(C3 \cdot a_3 + a_2) \cdot z - S3 \cdot a_3 \cdot (C1 \cdot x + S1 \cdot y)}{(C3 \cdot a_3 + a_2) \cdot (C1 \cdot x + S1 \cdot y) + S3 \cdot a_3 \cdot z} \quad (3.106)$$

čime je zadatak rešen. Treba napomenuti da izborom znaka u (3.102) biramo jedno od dva moguća rešenja („lakat gore“ ili „lakat dole“). Time se ilustruje da rešenja inverznog kinematskog zadatka nije jedinstveno.

**Primer 3.8.**

Za robot PUMA konfiguracije iz Primera 3.5 rešiti inverzni kinematski zadatak.

Ukupna matrica rotacije (data sa (3.76) čiji elementi su definisani sa (3.77)) se može napisati u formi

$$H_0^6 = H_0^1(q_1) H_1^2(q_2) H_2^3(q_3) H_3^4(q_4) H_4^5(q_5) H_5^6(q_6) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

Gornji izraz možemo, množenjem matricom  $[H_0^1(q_1)]^{-1}$  sleva, preuređiti tako da se ugao  $q_1$  pojavi samo sa leve strane sistema

$$[H_0^1(q_1)]^{-1} H_0^6 = H_1^2(q_2) H_2^3(q_3) H_3^4(q_4) H_4^5(q_5) H_5^6(q_6). \quad (3.108)$$

Ako sračunamo  $[H_0^1(q_1)]^{-1}$  i zamenimo u gornji izraz dobijamo

$$\begin{bmatrix} C1 & S1 & 0 & 0 \\ -S1 & C1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = H_1^6 \quad (3.109)$$

Primetimo da je u Primeru 3.5  $H_1^6$  definisano jednačinama (3.75). Izjednačavanjem izraza za elemente (2,4) sa obe strane jednačine (3.109) dobijamo

$$-S1p_x + C1p_y = d_3 \quad (3.110)$$

Ako u (3.110) zamenimo

$$\begin{aligned} p_x &= p_{HORIZ} C\Phi \\ p_y &= p_{HORIZ} S\Phi \end{aligned} \quad (3.111)$$

gde je

$$p_{HORIZ} = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

$$\Phi = \operatorname{arctg}(p_y / p_x)$$

sledi

$$C1S\Phi - S1C\Phi = \frac{d_3}{p_{HORIZ}}$$

Ako uočimo da leva strana predstavlja sinus razlike uglova možemo pisati

$$S(\Phi - q_1) = \frac{d_3}{p_{HORIZ}},$$

onda za kosinus razlike istih uglova važi

$$C(\Phi - q_1) = \pm \sqrt{1 - \left( \frac{d_3}{p_{HORIZ}} \right)^2}$$

odakle sledi

$$\Phi - q_1 = \arctg \left( \frac{\frac{d_3}{p_{HORIZ}}}{\pm \sqrt{1 - \left( \frac{d_3}{p_{HORIZ}} \right)^2}} \right), \quad (3.112)$$

pa se izraz za ugao  $q_1$  dobija u konačnoj formi

$$q_1 = \arctg \left( \frac{p_x}{p_y} \right) - \arctg \left( \frac{d_3}{\pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_3^2}} \right) \quad (3.113)$$

Primetimo da rešenje za  $q_1$  nije jednoznačno.

Ako je  $q_1$  poznato, tada su poznate sve vrednosti sa leve strane izraza (3.109). Ako sada izjednačimo izraze za elemente (1, 4) i (3, 4) dobijamo

$$\begin{aligned} C1p_x + S1p_y &= a_3C23 - d_4S23 + a_2C2 \\ -p_z &= a_3S23 + d_4C23 + a_2S2 \end{aligned} \quad (3.114)$$

Kvadriranjem jednačina (3.110) i (3.114) i njihovim sabiranjem dobijamo

$$a_3C3 - d_4S3 = K \quad (3.115)$$

gde je

$$K = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - a_2^2 - p_3^2 - d_3^2 - p_4^2}{2a_2}.$$

Jednačina (3.115) je istog oblika kao (3.109) pa može biti rešena na isti način, pa za  $q_3$  dobijamo

$$q_3 = \arctg \left( \frac{a_3}{d_4} \right) - \arctg \left( \frac{K}{\pm \sqrt{a_3^2 + d_4^2 - K^2}} \right). \quad (3.116)$$

Kao i za  $q_1$  i rešenje za  $q_3$  ima dve moguće vrednosti.

Da bi odredili  $q_2$  pomnožimo izraz (3.107) sleva sa  $[H_0^3(q_2)]^{-1}$  odakle sledi

$$\begin{bmatrix} C1C23 & S1C23 & -S23 & -a_2C3 \\ -C1S23 & -S1S23 & -C23 & a_2S3 \\ -S1 & C1 & 0 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = H_3^6 \quad (3.117)$$

Matrica  $H_3^6$  je izvedena ranije u primeru 3.5. i data je izrazom (3.76) i (3.77). Izjednačavanjem elemenata (1,4), kao i (2, 4) sa obe strane (3.117) sledi

$$\begin{aligned} C1C23p_x + S1C23p_y - S23p_z - a_2C3 &= a_3 \\ -C1S23p_x - S1S23p_y - C23p_z + a_2S3 &= d_4 \end{aligned} \quad (3.118)$$

Rešavajući obe jednačine simultano po  $S23$  i  $C23$  dobijamo

$$\begin{aligned} S23 &= \frac{(-a_3 - a_2C3)p_z + (C1p_x + S1p_y)(a_2S3 - d_4)}{p_z^2 + (C1p_x + S1p_y)^2} \\ C23 &= \frac{(a_2S3 - d_4)p_z - (-a_3 - a_2C3)(C1p_x + S1p_y)}{p_z^2 + (C1p_x + S1p_y)^2} \end{aligned}$$

Obzirom da su imenici jednak i pozitivni, za zbir uglova  $q_2$  i  $q_3$  sledi

$$q_2 + q_3 = \arctg \left( \frac{(-a_3 - a_2C3)p_z - (C1p_x + S1p_y)(-a_2S3 + d_4)}{(a_2S3 - d_4)p_z + (a_3 + a_2C3)(C1p_x + S1p_y)} \right) \quad (3.119)$$

Na osnovu izraza (3.119) za ugao  $q_2$  koji je dat sa

$$q_2 = (q_2 + q_3) - q_3 \quad (3.120)$$

dobijamo četiri vrednosti obzirom da  $q_1$  i  $q_3$  imju po dva moguća rešenja. Sad su poznate sve vrednosti na levoj strani (3.117) pa izjednačavanjem elemenata (1,3) i (3,3) na obe strane dobijamo

$$\begin{aligned} r_{13}C1C23 + r_{23}S1C23 - r_{33}S23 &= -C4S5 \\ -r_{13}S1 + r_{23}C1 &= S4S5 \end{aligned} \quad (3.121)$$

Ukoliko je  $S5 \neq 0$  možemo odrediti ugao  $q_4$  prema

$$q_4 = \arctg \left( \frac{r_{13}S1 + r_{23}C1}{-r_{13}C2C23 - r_{23}S1C23 + r_{33}S23} \right) \quad (3.122)$$

Za  $q_5 = 0$  robot se nalazi u singularnoj poziciji jer su ose zglobova 4 i 6 kolinearne pa za isti ugaoni pomeraj uzrokuju isto pomeranje hvataljke. Prema tome, jedino možemo da odredimo njihov zbir ili razliku. U tom slučaju je pogodno da se za  $q_4$  usvoji proizvoljna vrednost (najčešće trenutna vrednost koju ugao  $q_4$  ima) a da se zatim  $q_6$  sračuna. Kada se, u kasnijoj proceduri,  $q_6$  odredi, možemo se vratiti i sračunati tačnu vrednost ugla  $q_4$ .

Ostaje da još odredimo ugao  $q_5$ . Ponovo transformišimo polaznu jednačinu (3.107) množeći je sleva sa  $[H_0^4(q_4)]^{-1}$  tako da dobijamo

$$[H_0^4(q_4)]^{-1} H_0^6 = H_4^5 H_5^6 \quad (3.123)$$

gde je

$$\begin{aligned} & [H_0^4(q_4)]^{-1} = \\ & = \begin{bmatrix} C1C23C4 + S1S4 & S1C23C4 - C1S4 & -S23C4 & -a_2C3C4 + d_3S4 & -a_3C4 \\ -C1C23S4 + S1C4 & -S1C23S4 - C1C4 & S23S4 & a_2C3S4 + d_3C4 - a_3S4 \\ -C1S23 & -S1S23 & -C23 & a_2S3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dok je  $H_4^5$  dato jednačinama (3.71) iz primera 3.5. Izjednačavajući članove (1,3) i (3,3) u prethodnom izrazu, sledi

$$\begin{aligned} r_{13}(C1C23S4 + S1C4) + r_{23}(S1C23C4 - C1S4) - r_{33}S23C4 &= -S5 \\ r_{13}(-C1S23) + r_{23}(-S1S23) + r_{33}(-C23) &= C5 \end{aligned} \quad (3.124)$$

Odavde je

$$q_5 = \arctg\left(\frac{S5}{C5}\right) \quad (3.125)$$

gde su  $S5$  i  $C5$  dati izrazima (3.124).

Istim načinom, množeći polaznu jednačinu (3.107) sa  $[T_0^5(q_5)]^{-1}$ , a zatim izjednačavajući elemente (1,1) sa obe strane, ugao  $q_6$  se dobija iz

$$q_6 = \arctg\left(\frac{S6}{C6}\right) \quad (3.126)$$

gde je

$$\begin{aligned} S6 &= r_{11}(C1C23S4 + S1C4) - r_{21}(S1C23S4 + C1C4) - r_{31}S23S4 \\ C6 &= r_{11}[(C1C23C4 + S1S4)C5 - C1S23S5] + \\ &\quad r_{21}[(S1C23C4 - C1S4)C5 - S1S23S5] - r_{31}(S23C4C5 + C23S5) \end{aligned} \quad (3.127)$$

Obzirom da je za neke uglove dobijeno više rešenja kao i da postoje ograničenja na opseg kretanja koja se mogu realizovati u zglobovima konkretnog robota, sva varijantna rešenja treba razmotriti, neodgovarajuća odbaciti, a od preostalih izbrati ono koje nam naviše odgovara.

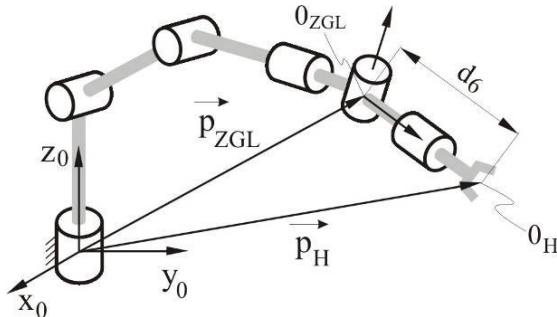
### 3.3.4 Rasprezanje ukupne konfiguracije robota na minimalnu konfiguraciju i zglob hvataljke

U predthodnom odeljku smo ilustrovali rešavanje zadatka inverzne kinematike analitičkim načinom, i kao što smo videli, u slučaju robota koji ima šest stepeni slobode taj zadatak je izuzetno složen. Stoga se pribegava pojednostavljenu problemu deleći ga na dva jednostavnija podzadataka. Podsetimo se da je osobina sfernog zglobova koji se postavlja na vrh minimalne konfiguracije (postala je praksa da se ovakvi zglobovi koriste kod industrijskih robota) da se sve tri ose zglobova ( $z_4$ ,  $z_5$  i  $z_6$ ) sekaju u jednoj tački. Obeležimo tu tačku, na primer, sa  $O_{ZGL}$  i nazovimo je centrom zgloba. Bez obzira na vrednosti uglova  $q_4$ ,  $q_5$  i  $q_6$  položaj tačke  $O_{ZGL}$  se neće promeniti što znači da je njena pozicija funkcija samo  $q_1$ ,  $q_2$  i  $q_3$ . Osim toga, zadavanjem vrednosti uglova  $q_4$ ,  $q_5$  i  $q_6$  možemo definisati orientaciju hvataljke. Na osnovu toga, ukupni zadatak inverzne kinematike možemo da podelimo na zadatak određivanja *inverzne pozicije* i *inverzne orientacije*.

Neka je orientacija hvataljke zadata matricom  $R$  a pozicija vektorom  $\vec{p}_H$

$$\begin{aligned} R_0^6(q_1, \dots, q_6) &= R \\ p_0^6(q_1, \dots, q_6) &= \vec{p}_H \end{aligned} \quad (3.128)$$

Rastojanje koordinatnog sistema hvataljke od tačke  $O_{ZGL}$  je konstantno i iznosi  $d_6$  (videti Primer 3.4). Orientacija hvataljke je određena pravcem ose  $z_6$  koordinatnog sistema  $O_6$ . Treba uočiti da vektor od tačke  $O_{ZGL}$  do  $O_6 \equiv O_H$  ima pravac ose  $z_6$  a intenzitet  $d_6$ . Stoga se vektor od tačke  $O_{ZGL}$  do  $O_6$  može izraziti kao  $d_6 \cdot R \cdot k = d_6 \cdot R \cdot [0 \ 0 \ 1]^T$  gde  $[0 \ 0 \ 1]^T$  predstavlja ort  $k$  ose  $z_6$ . Prema tome, vektor  $p_{ZGL}$  pozicije centra zgloba može se odrediti iz izraza:



Sl. 3.22 Rasprezanje ukupne mehaničke konfiguracije na minimalnu konfiguraciju i zglob hvataljke

$$\vec{p}_{ZGL} = \vec{p}_H - d_6 R \vec{k} \quad (3.129)$$

ili u razvijenoj formi

$$\begin{bmatrix} p_{ZGLx} \\ p_{ZGLy} \\ p_{ZGLz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{Hx} - d_6 r_{13} \\ p_{Hy} - d_6 r_{23} \\ p_{Hz} - d_6 r_{33} \end{bmatrix}$$

Iz ovog sistema od tri jednačine se mogu odrediti vrednosti koordinata zglobova  $q_1$ ,  $q_2$  i  $q_3$

### Kinematika: položaj robota

### Industrijska robotika

obzirom da je  $p_{ZGL}$  funkcija samo ove tri promenljive. Još preostaje da se odredi orientacija koordinatnog sistema hvataljke u odnosu na koordinatni sistem  $O_3$ . Imajući na umu da je ukupna matrica rotacije  $R$  poznata, možemo je napisati na sledeći način

$$R = R_0^3 \cdot R^6 \quad (3.130)$$

odakle sledi

$$R_0^6 = (R_0^3)^{-1} R = (R_0^3)^T R \quad (3.131)$$

Prema tome, za robe koji poseduju šest stepeni slobode i sforni zglob, algoritam određivanja inverzne kinematike se može svesti na sledeća tri koraka

**korak 1:** odrediti  $q_1, q_2$  i  $q_3$  iz uslova

$$p_{ZGL} = d_H - d_6 R k$$

**korak 2:** koristeći vrednosti za  $q_1, q_2$  i  $q_3$  i određene u prethodnom koraku

sračunati  $R_0^3$ .

**korak 3:** naći,  $q_4, q_5$  i  $q_6$  koji odgovaraju martici rotacije

$$R_0^6 = (R_0^3)^{-1} R = (R_0^3)^T R$$

čime se složenost problema znatno umanjuje.

### Primer 3.9.

Za robot antropomorfne konfiguracije sa šest stepeni slobode sa Sl. 3.22 rešiti inverzni kinematski problem rasporezanjem ukupne mehaničke konfiguracije na minimalnu konfiguraciju i zglob hvataljke.

Prvi deo zadatka (određivanje  $q_1, q_2$  i  $q_3$ ) je već rešen u Primeru 3.7. uz napomenu da vrh minimalne konfiguracije sa koordinatama  $[x \ y \ z]^T$  treba zameniti centrom zgoba hvataljke  $O_{ZGL}$  čiji položaj se određuje iz izraza  $\bar{p}_{ZGL} = \bar{p}_H - d_6 R \vec{k}$ .

Drugi deo zadatka predstavlja određivanje koordinata zglobova hvataljke  $q_4, q_5$  i  $q_6$  tako da se ostvari zahtevana orientacija. Podsetimo se da uglovi  $q_4, q_5$  i  $q_6$  odgovaraju ZYZ Ojlerovim uglovima izraženim u odnosu na koordinatni sistem  $O_3-x_3y_3z_3$ . Onda je moguće da se, na način sličan određivanju Ojlerovih uglova za poznatu matricu rotacije kao u Primeru 3.3, odrede traženi uglovi  $q_4, q_5$  i  $q_6$ . Naime, ako je matrica rotacije data sa

$$R_0^3 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

a matrica rotacije definisana ZYZ Ojlerovim uglovima sa

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} C\varphi \cdot C\theta \cdot C\psi - S\varphi \cdot S\psi & -C\varphi \cdot C\theta \cdot S\psi - S\varphi \cdot C\psi & C\varphi \cdot S\theta \\ S\varphi \cdot C\theta \cdot C\psi + C\varphi \cdot S\psi & -S\varphi \cdot C\theta \cdot S\psi + C\varphi \cdot C\psi & S\varphi \cdot S\theta \\ -S\theta \cdot C\psi & S\theta \cdot S\psi & C\theta \end{bmatrix}$$

tada se na osnovu poklapanja Ojlerovih uglova sa  $q_4, q_5$  i  $q_6$  može pisati

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C4C5C6_6 - S4S6 & -C4C5S6 - S4C6 & C4S5 \\ S4C5C6 + C4S6 & -S4C5S6 + C4C6 & S4S5 \\ -S5 \cdot C6 & S5 \cdot S6 & C5 \end{bmatrix}$$

Iz jednakosti elemenata  $r_{13}$  i  $r_{23}$  sa obe strane izraza dobijamo

$$q_4 = \arctg\left(\frac{r_{23}}{r_{13}}\right).$$

Kvadriranjem i sabiranjem elemenata  $r_{13}$  i  $r_{23}$  sa obe strane izraza i korišćenjem izraza za  $r_{33}$  dobijamo

$$q_5 = \arctg\left(\frac{\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}}{r_{33}}\right).$$

Izborom pozitivnog znaka za član  $\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}$  ograničavamo oblast dopustivih vrednosti za  $q_5$  na  $(0, \pi)$  i uz tu prepostavku, kao i korišćenjem izraza za elemenate  $r_{31}$  i  $r_{32}$  dobijamo

$$q_6 = \arctg\left(\frac{r_{32}}{-r_{31}}\right)$$

Prema tome, traženo rešenje je

$$q_4 = \arctg\left(\frac{r_{23}}{r_{13}}\right)$$

$$q_5 = \arctg\left(\frac{\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}}{r_{33}}\right)$$

$$q_6 = \arctg\left(\frac{r_{32}}{-r_{31}}\right)$$

Međutim, ukoliko za oblast rešenja za  $q_5$  izaberemo  $(-\pi, 0)$ , sledi

$$q_4 = \arctg\left(\frac{-r_{23}}{-r_{13}}\right)$$

$$q_5 = \arctg\left(\frac{-\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}}{r_{33}}\right)$$

$$q_6 = \arctg\left(\frac{-r_{32}}{r_{31}}\right)$$

Oba rešenja degenerišu kada je  $\sin q_5 = 0$  pa u tom slučaju jedino možemo da odredimo

*Kinematika: položaj robota*

Industrijska robotika

zbir ili razliku  $q_4$  i  $q_6$ . U stvari, ukoliko je  $q_5=0$  tada se rotacije  $q_4$  i  $q_6$  izvršavaju oko osa koje se poklapaju i daju isti doprinos orijentaciji hvataljke.

## LITERATURA

- An C., Atkinson C, and Hollerbach J.: **Model-Based Control of a Robot Manipulator**, The MIT Press, 1998.  
Angeles J.: Fundamentals of Robotic Mechanical Systems, Theory, Methods and Algorithms, Springer-Verlag, 2003.  
Asada H. and Slotine J.J.: **Robot Analysis and Control**, John Wiley and sons, 1985.  
Ben-Zion Sandler, Robotics- designing the Mechanisms for Automated machinery, Prentice – Hall, Inc., 1991  
Bruyninckx H. and De Schutter J.: **Introduction to Intelligent Robotics**, Katholieke Universiteit Leuven, 2001.  
Craig J.: Introduction to Robotics: Mechanics & Control, Addison-Wesley, 1986.  
Dorf. R and Bishop R.: **Modern Control Systems**, Addison-Wesley, 1995.  
Eugene I. Rivin, **Mechanical design of robots**, McGraw-Hill, Inc., 1987  
Fu K., Gonzales R., and Lee C.: Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence, McGraw-Hill Book Company, 1987.  
Fu K., Gonzales R., and Lee C.: Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence, McGraw-Hill Book Company, 1987.  
J.M.Selig, **Introductory Robotics**, Prentice – Hall, Inc., 1992  
John Iovine, **PIC Robotics**, McGraw-Hill Companies, Inc., 2004  
John M. Holland, **Designing Autonomous Mobile Robots**, Elsevier, Inc., 2004  
Jorge Angeles, **Fundamentals of Robotic Mechanical Systems**, Springer-Verlag, New York, Inc., 2003  
Lewin A.R.W.Edwards, Open-Source Robotics and Process Control Cookbook, Elsevier, Inc., 2005  
Nwokah O., and Hurmuzlu Y., Editors, **The Mechanical Systems Design Handbook**, CRC Press, 2002.  
Paul E. Sandin, **Robot mechanisms and mechanical devices**, McGraw-Hill, Inc., 2003  
Sciavicco L. and Siciliano B.: **Modeling and Control of Robot Manipulators**, The McGraw-Hill Company, 1996.  
Thomas R. Kurfess **Robotics and Automation Handbook**, CRC Press LLC, 2005  
Yoram Koren, **Robotics for Engineers** McGraw-Hill, 1985

---

## 4 KINEMATSKI MODEL ROBOTA II: DIFERENCIJALNA KINEMATIKA

---

### 4.1 UVOD

U prethodnom poglavlju su uspostavljene relacije između pozicije i orijentacije hvataljke robota i vrednosti unutrašnjih koordinata (koordinata u zglobovima) mehaničke konfiguracije (direktni kinematski problem). Takođe je pokazano kako se sračunavaju koordinate u zglobovima robota koje obezbeđuju željenu poziciju i orijentacije hvataljke (inverzni kinematski problem). U oba slučaja je uspostavljena veza između unutrašnjih i spoljašnjih koordinata u jednom diskretnom položaju.

Suštinski važan zadatak predstavlja realizacija koordinisanog kretanja zglobova robota u cilju ostvarivanja željene trajektorije hvataljke. Da bi se ovaj zadatak rešio potrebno je da se uspostavi veza između brzina u zglobovima robota i rezultujuće brzine kretanja hvataljke. *Jakobijan* (ili jakobijeva matrica) kojom se ovo preslikavanje uspostavlja predstavlja osnovu za rešavanje ove klase zadataka. Osim toga, u okviru ove glave će biti obradene osnove diferencijalne kinematike, načini za sračunavanje elemenata jakobijeve matrice, kao i numeričko rešavanje inverznog kinematskog problema.

### 4.2 DIFERENCIJALNA KINEMATIKA

U realnom robotskom sistemu se informacije o trenutnim vrednostima unutrašnjih koordinata u zglobova mehanizma uzimaju u diskretnim trenucima vremena koji su definisani veličinom vremenskog intervala uzorkovanja (engl. *sampling time*). Stvarnu brzinu kretanja zgloba je, prema tome, nemoguće potpuno tačno znati već se ona može približno odrediti (proceniti) kao količnik pomeraja koji je određen razlikom dva uzastopna merenja i proteklog vremena. Ovako sračunata vrednost može biti veoma bliska stvarnoj vrednosti trenutne brzine. U slučaju da je vremenski interval na kome se vrše merenja konstantan, određivanje trenutne brzine se svodi na određivanje malih diferencijalnih kretanja tokom intervala uzorkovanja. Stoga ćemo se u ovom odeljku pozabaviti nekim, nama potrebnim, aspektima diferencijalne kinematike.

#### 4.2.1 Infinitezimalne rotacije

Napišimo matricu rotacije oko  $x$  ose (3.14) za infinitezimalno mali ugao  $d\Phi_x$

### Planiranje kretanja

### Industrijska robotika

$$R_x(d\Phi_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(d\Phi_x) & -\sin(d\Phi_x) \\ 0 & \sin(d\Phi_x) & \cos(d\Phi_x) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -d\Phi_x \\ 0 & d\Phi_x & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

gde je, obzirom da se radi o malim uglovima,  $\sin(d\Phi_x) \approx d\Phi_x$  i  $\cos(d\Phi_x) \approx 1$ . Slično (4.1) se može pokazati i za infinitezimalne rotacije oko y i z osa,  $d\Phi_y$  i  $d\Phi_z$ . Množeći matrice infinitezimalnih rotacija za  $d\Phi_x$  i  $d\Phi_y$  dobijamo

$$\begin{aligned} R_x(d\Phi_x) \cdot R_y(d\Phi_y) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -d\Phi_x \\ 0 & d\Phi_x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & d\Phi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -d\Phi_y & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & d\Phi_y \\ d\Phi_x d\Phi_y & 1 & -d\Phi_x \\ -d\Phi_y & d\Phi_x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d\Phi_y \\ 0 & 1 & -d\Phi_x \\ -d\Phi_y & d\Phi_x & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.2)$$

gde smo male veličine drugog reda  $d\Phi_x d\Phi_y$  zanemarili. Ako sada zamenimo redosled množenja videćemo da će proizvod  $R_y(d\Phi_y) \cdot R_x(d\Phi_x)$  dati isti rezultat kao u prethodnom slučaju, pa može da se zaključi da za infinitezimalne rotacije važi osobina komutativnosti, tj.

$$R_x(d\Phi_x) \cdot R_y(d\Phi_y) = R_y(d\Phi_y) \cdot R_x(d\Phi_x) \quad (4.3)$$

U opštem slučaju se infinitezimalne rotacije oko osa x, y i z mogu prikazati sa

$$R(d\Phi_x, d\Phi_y, d\Phi_z) = \begin{bmatrix} 1 & -d\Phi_z & d\Phi_y \\ d\Phi_z & 1 & -d\Phi_x \\ -d\Phi_y & d\Phi_x & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Ako su  $R(d\Phi_x, d\Phi_y, d\Phi_z)$  i  $R(d\Omega_x, d\Omega_y, d\Omega_z)$  dve matrice infinitezimalnih rotacija, tada se za dve uzastopne rotacije dobija

$$\begin{aligned} R(d\Phi_x, d\Phi_y, d\Phi_z) \cdot R(d\Omega_x, d\Omega_y, d\Omega_z) &= \\ &= \begin{bmatrix} 1 & (d\Phi_z + d\Omega_z) & -(d\Phi_y + d\Omega_y) \\ -(d\Phi_z + d\Omega_z) & 1 & (d\Phi_x + d\Omega_x) \\ (d\Phi_y + d\Omega_y) & -(d\Phi_x + d\Omega_x) & 1 \end{bmatrix} = \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$R(d\Phi_x + d\Omega_x, d\Phi_y + d\Omega_y, d\Phi_z + d\Omega_z)$$

odakle se može zaključiti da je rezultujuća rotacija suma komponentnih rotacija, tj. da važi osobina aditivnosti. Prema tome, pošto infinitezimalne rotacije poseduju osobine aditivnosti i komutativnosti mogu se zapisivati u vektorskoj formi

$$d\Phi = \begin{bmatrix} d\Phi_x \\ d\Phi_y \\ d\Phi_z \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

što će u tekstu koji sledi biti korišćeno.

#### 4.2.2 Osnovne osobine kososimetričnih matrica

Za matricu  $S$  kažemo da je kososimetrična (antisimetrična) ukoliko je ispunjen uslov:

$$S^T + S = 0 \quad (4.7)$$

što se može, uzimajući u obzir elemente matrice  $S$ , iskazati kao

$$S_{ij} + S_{ji} = 0 \quad j, i = 1, 2, 3. \quad (4.8)$$

Da bi (4.8) bilo ispunjeno svi dijagonalni članovi moraju biti nule, dok svi vandijagonalni članovi moraju da zadovoljavaju  $S_{ij} = -S_{ji}$ . Odavde sledi da svaka antisimetrična matrica ima samo tri nezavisna elementa, pa se može napisati u formi:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -S_3 & S_2 \\ S_3 & 0 & -S_1 \\ -S_2 & S_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ukoliko za elemente matrice  $S_{ij}$  usvojimo komponente vektora  $a = (a_x, a_y, a_z)^T$  tada matrica  $S(\vec{a})$  ima oblik

$$S(\vec{a}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$$

što se u slučaju ortova  $i, j$  i  $k$  može napisati kao

$$S(\vec{i}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S(\vec{j}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S(\vec{k}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Navedimo sada nekoliko osnovnih osobina kososimetričnih matrica koje će nam biti od koristi kasnije. Prva osobina je linearost

$$S(\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}) = \alpha \cdot S(\vec{a}) + \beta \cdot S(\vec{b}) \quad \alpha, \beta - \text{skalari.} \quad (\text{osobina 1})$$

koja se može dokazati direktnom proverom. Osim toga, za matricu  $S(\vec{a})$  i vektor  $\vec{p} = [p_x \ p_y \ p_z]^T$  se, isto direktnom proverom, može pokazati da važi

$$S(\vec{a}) \cdot \vec{p} = \vec{a} \times \vec{p} \quad (\text{osobina 2})$$

tj. da je proizvod matrice  $S(\vec{a})$  i vektora  $\vec{p}$  jednak vektorskemu proizvodu vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{p}$ .

Takođe se direktnom proverom može pokazati da za dva vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  i ortogonalnu matricu  $R$  (podsetimo se da su matrice rotacije  $R$  ortogonalne tj. da važi:  $R^T = R^{-1}$ ) važi

$$R(\vec{a} \times \vec{b}) = R(\vec{a}) \times R(\vec{b}) \quad (\text{osobina 3})$$

Drugim rečima, rotirani vektorski proizvod dva vektora je jednak vektorskemu proizvodu rotiranih vektora. Dalje, ako na

$$R \cdot S(a) \cdot R^T(b)$$

primenimo osobinu 2, dobijamo

$$R \cdot S(a) \cdot R^T(b) = R(a \times R^T \cdot b)$$

a ako na ovaj izraz primenimo osobinu 3, sledi

$$R(a \times R^T \cdot b) = (R \cdot \vec{a}) \times (R \cdot R^T \cdot \vec{b})$$

što se, budući da je  $R$  ortogonalno, može napisati u jednostavnijoj formi

$$(R \cdot \vec{a}) \times (R \cdot R^T \cdot \vec{b}) = R(\vec{a}) \times \vec{b}$$

i na kraju, ponovnom primenom osobine 3, dobijamo

$$R(\vec{a}) \times \vec{b} = S(R \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b}.$$

Prema tome, zaključujemo

$$R \cdot S(\vec{a}) \cdot R^T \cdot (\vec{b}) = S \cdot (R \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

a, ovim smo dokazali da važi

$$R \cdot S(\vec{a}) \cdot R^T = S \cdot (R \cdot \vec{a}) \quad (\text{osobina 4})$$

Dalje, pretpostavimo da je rotaciona matrica funkcija samo jedne promenljive  $\theta$ , a obzirom da je  $R$  ortogonalno, sledi

$$R(\theta) \cdot R^T(\theta) = I$$

Ako diferenciramo obe strane po  $\theta$  dobija se

$$\frac{dR}{d\theta} \cdot R^T(\theta) + R(\theta) \cdot \frac{dR^T}{d\theta} = 0 \quad (4.9)$$

Definišimo matricu  $S$  kao

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dR}{d\theta} \cdot R^T(\theta) \quad (4.10)$$

Transponovanjem matrice  $S$  dobijamo

$$S^T = \left( \frac{dR}{d\theta} \cdot R^T(\theta) \right)^T = R(\theta) \cdot \frac{dR^T}{d\theta} \quad (4.11)$$

Upoređivanjem izraza (4.10) i (4.11) sa (4.9) vidimo da za  $S$  definisano kao u (4.10) važi

$$S + S^T = 0$$

pa možemo da zaključimo da ako je matrica  $S$  definisana kao u (4.10) onda je ona antisimetrična. Pomnožimo li obe strane (4.10) sa  $R$  sledi

$$\frac{dR}{d\theta} = S \cdot R(\theta) \quad (4.12)$$

Ovaj izraz nam kaže da izvod matrice rotacije možemo sračunati ako matricu rotacije  $R$  pomnožimo kososimetričnom matricom  $S$ .

#### Primer 4.1:

Ako je matrica rotacije oko  $x$  ose za ugao  $\theta$  data sa

$$R = R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix}$$

(vidi izraz 3.14) izračunati matricu  $S$  prema (4.10).

Diferenciranjem i transponovanjem matrice  $R_{x,\theta}$  i uvrštavanjem u (4.10) sledi:

$$S = \frac{dR}{d\theta} \cdot R^T(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S\theta & -C\theta \\ 0 & C\theta & -S\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & S\theta \\ 0 & -S\theta & C\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = S(i)$$

Prema tome, pokazali smo da je

$$\frac{dR_{x,\theta}}{d\theta} = S(i) \cdot R_{x,\theta}$$

Na isti način možemo pokazati da važi

$$\frac{dR_{y,\theta}}{d\theta} = S(j) \cdot R_{y,\theta}, \quad \frac{dR_{z,\theta}}{d\theta} = S(k) \cdot R_{z,\theta}$$

što prepuštamo čitaocu.

#### 4.2.3 Ugaone brzine i ubrzanja

Prepostavimo sada da matrica  $R$  nije konstantna već da je funkcija vremena. Na osnovu (4.12) možemo pisati

$$\dot{R} = S(t) \cdot R(t)$$

gde je  $S(t)$  kososimetrična matrica. Za vektor  $\omega(t)$  koji predstavlja ugaonu brzinu rotirajućeg koordinatnog sistema u odnosu na fiksni, kososimetrična matrica  $S$  postaje  $S(\omega(t))$ . Ovo možemo jednostavno pokazati na sledećem primeru.

Ako je  $R(t) = R_{x,\theta(t)}$  tada se njen izvod može sračunati prema

$$\dot{R} = \frac{dR}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \cdot S(\vec{i}) \cdot R(t) = S(\omega(t)) \cdot R(t)$$

gde je  $\omega(t) = i \cdot \dot{\theta}$  - ugaona brzina rotacije oko  $x$  ose.

Prepostavimo, dalje, da je  $\vec{p}_1$  vektor koji je fiksiran u odnosu na koordinatni sistem  $O_1-x_1y_1z_1$  koji rotira u odnosu na koordinatni sistem  $O_0-x_0y_0z_0$ . Tada su koordinate vektora  $p$  u odnosu na  $O_0-x_0y_0z_0$  date sa

$$\vec{p}_0 = R_0^1(t) \cdot \vec{p}_1$$

odakle, posle diferenciranja, i primenom osobine 2 sledi

$$\dot{p}_0 = \dot{R}_0^1(t) \cdot p_1 = S(\omega) \cdot R_0^1(t) \cdot p_1 = S(\omega) \cdot p_0 = \omega \times p_0$$

poznat izraz za brzinu izraženu preko vektorskog proizvoda.

Na sličan način ćemo razmotriti slučaj kada je relativno kretanje između koordinatnih sistema  $O_0-x_0y_0z_0$  i  $O_1-x_1y_1z_1$  usložnjeno, pa pored rotacije postoji i translacija

$$\vec{p}_0 = R_0^1 \cdot \vec{p}_1 + \vec{d}_0^1 / \frac{d}{dt}$$

pa diferenciranjem prethodnog izraza, imajući u vidu da je  $p_1$  konstantan, sledi

$$\dot{p}_0 = \dot{R}_0^1(t) \cdot p_1 + \dot{d}_0^1 = S(\omega) \cdot R_0^1(t) \cdot p_1 + \dot{d} = \omega \times r + v \quad (4.13)$$

gde  $\vec{r}$  predstavlja vektor  $\vec{p}_1$  izražen u odnosu na nepokretni koordinatni sistem  $O_0-x_0y_0z_0$ , a  $v$  je brzina kretanja koordinatnog početka  $O_1$  u odnosu na koordinatni sistem  $O_0$ .

Da bismo izveli izraz za relativna ubrzanja između dva koordinatna sistema podsetimo se izraza za diferenciranje vektorskog proizvoda

$$\frac{d}{dt}(a \times b) = \frac{da}{dt} \times b + a \times \frac{db}{dt}$$

Napišimo ponovo izraz (4.13) u formi

$$\dot{p}_0 - \dot{d}_0^1 = \dot{R}_0^1 \cdot p_1 = \omega \times R_0^1 \cdot p_1$$

pa ga diferencirajmo po vremenu

$$\ddot{p}_0 - \ddot{d}_0^1 = \dot{\omega} \times R_0^1 \cdot p_1 + \omega \times (\dot{R}_0^1 \cdot p_1) = \dot{\omega} \times r + \omega \times (\omega \times r) \quad (4.14)$$

Izraz (4.14) možemo da napišemo i u formi

$$\ddot{p}_0 = \dot{\omega} \times r + \omega \times (\omega \times r) + a \quad (4.15)$$

gde je  $a$  linearno ubrzanje, dok izraz  $\omega \times (\omega \times r)$  predstavlja centripetalno ubrzanje koje je uvek upereno prema osi obrtanja i upravno je na nju dok član  $\dot{\omega} \times r$  predstavlja tangencijalno ubrzanje

Ukoliko  $p_1$  menja svoj položaj u odnosu na koordinatni sistem  $O_1$  izraz (4.15) postaje

$$\ddot{p}_0 = \dot{\omega} \times r + \omega \times (\omega \times r) + 2 \cdot \omega \times R_0^1 \cdot \dot{p}_1 + a \quad (4.16)$$

gde je  $a = R_0^1 \cdot \ddot{p}_1 + \ddot{d}_0^1$ , dok izraz  $2 \cdot \omega \times R_0^1 \cdot \dot{p}_1$  označava Koriolisovo ubrzanje.

#### 4.2.4 Sabiranje ugaonih brzina

U ovom odeljku ćemo izvesti izraze za sabiranje ugaonih brzina ukoliko se dva koordinatna sistema  $O_1$  i  $O_2$  kreću u odnosu na nepokretni koordinatni sistem  $O_0$ . Izrazimo vektor položaja tačke  $P$  u odnosu na razne koordinatne sisteme

$$p_0 = R_0^1 \cdot p_1 + d_0^1 \quad (4.17)$$

$$p_1 = R_1^2 \cdot p_2 + d_1^2 \quad (4.18)$$

$$p_0 = R_0^2 \cdot p_2 + d_0^2 \quad (4.19)$$

gde, prema (3.39) i (3.40) i dalje važi

$$R_0^2 = R_0^1 \cdot R_1^2 \quad (4.20)$$

$$d_0^2 = d_0^1 + R_0^1 \cdot d_1^2$$

Obzirom da su matrice rotacije funkcije vremena diferenciranjem (4.20) dobijamo

$$\dot{R}_0^2 = \dot{R}_0^1 \cdot R_1^2 + R_0^1 \cdot \dot{R}_1^2 \quad (4.21)$$

Izraz sa leve strane (4.21) tj. ( $\dot{R}_0^2$ ) možemo napisati kao

$$\dot{R}_0^2 = S(\omega_0^2) \cdot R_0^2 \quad (4.22)$$

Prvi izraz sa desne strane u (4.21) tj.  $\dot{R}_0^1 \cdot R_1^2$  možemo napisati kao

$$\dot{R}_0^1 \cdot R_1^2 = S(\omega_0^1) \cdot R_0^1 \cdot R_1^2 = S(\omega_0^1) \cdot R_0^2 \quad (4.23)$$

dok drugi izraz sa desne strane (4.21) tj.  $R_0^1 \cdot \dot{R}_1^2$  možemo transformisati na sledeći način

$$R_0^1 \cdot \dot{R}_1^2 = S(\omega_1^2) \cdot R_1^2 =$$

Ako pomnožimo gornji izraz sa  $R_0^{1T} \cdot R_0^1$

$$= R_0^1 \cdot S(\omega_1^2) \cdot R_0^{1T} \cdot R_0^1 \cdot R_1^2 =$$

i primenimo pravilo 4, dobijamo

$$= S(R_0^1 \cdot \omega_1^2) \cdot R_0^1 \cdot R_1^2 = S(R_0^1 \cdot \omega_1^2) \cdot R_0^2 \quad (4.24)$$

Unošenjem (4.22), (4.23) i (4.24) u 4.21), sledi

$$S(\omega_0^2) \cdot R_0^2 = \{S(\omega_0^1) + S(R_0^1 \cdot \omega_1^2)\} \cdot R_0^2 \quad (4.25)$$

Obzirom da je  $S(a) + S(b) = S(a + b)$  sledi

$$\omega_0^2 = \omega_0^1 + R_0^1 \cdot \omega_1^2 \quad (4.26)$$

Odavde zaključujemo da se ugaone brzine mogu sabirati samo pod uslovom da su izražene u istom koordinatnom sistemu.

### 4.3 JAKOBIJAN

Svako kretanje u zglobovima robota ima za posledicu kretanje hvataljke. Međutim, kretanje hvataljke po određenoj trajektoriji zahteva koordinisano kretanje svih zglobova mehaničke strukture robota. Da bi mogli da realizujemo zahtevano kretanje hvataljke robota potrebno je da se uspostavi veza između kretanja u zglobovima mehaničke konfiguracije i kretanja hvataljke, tj. brzine u zglobovima  $\dot{q}$ , i linearne i ugaone brzine hvataljke ( $\dot{p}$  i  $\omega$ , respektivno) pa možemo pisati

$$\dot{p} = J_L \dot{q}$$

$$\overline{\omega} = J_U \dot{q}$$

Ove dve jednačine možemo objediniti u jedinstven izraz čime se dobija relacija

$$\dot{s} = v = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \overline{\omega} \end{bmatrix} = J(q) \dot{q} \quad (4.32)$$

gde je  $\dot{s}$  ukupni vektor brzine hvataljke izražen u spoljašnjim koordinatama (objedinjeni su vektori linearne i ugaone brzine hvataljke),  $\dot{q} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T$  je vektor brzina u zglobovima mehanizma. Matrica  $J(q)$  kojom se povezuje kretanje u zglobovima mehanizma sa kretanjem hvataljke se naziva jakobijevom matricom ili jakobijanom. Prema tome, *jakobijeva matrica povezuje brzine kretanja zglobova robotske mehanizme sa linearnom i ugaonom brzinom kretanja hvataljke izražene u spoljašnjim (dekartovim pravouglim) koordinatama*.

Da bi bolje razumeli prirodu matrice  $J$  napišimo izraz (4.32) u razvijenoj formi (posmatraćemo mehanizam koji ima šest stepeni slobode),

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} & J_{15} & J_{16} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} & J_{25} & J_{26} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} & J_{35} & J_{36} \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} & J_{45} & J_{46} \\ J_{51} & J_{52} & J_{53} & J_{54} & J_{55} & J_{56} \\ J_{61} & J_{62} & J_{63} & J_{64} & J_{65} & J_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Posmatrajmo samo prvu jednačinu sistema

$$\dot{x} = J_{11}\dot{q}_1 + J_{12}\dot{q}_2 + J_{13}\dot{q}_3 + J_{14}\dot{q}_4 + J_{15}\dot{q}_5 + J_{16}\dot{q}_6 \quad (4.34)$$

Iz forme izraza (4.34) se vidi da su članovi (elementi) jakobijana u stvari parcijalni izvodi funkcije kojom se definiše pozicija i orijentacija vrha robota u spoljašnjim koordinatama po unutrašnjim uglovima u zglobovima mehanizma robota i mogu se odrediti analitički ili

#### 4.3.1 Analitičko sračunavanje jakobijana

Najjasnije ćemo način određivanja jakobijana analitičkim putem pokazati na primeru.

**Primer 4.2.**

Za trosegmentni antropomorfni mehanizam (minimalnu konfiguraciju) čija je kinematska šema prikazana na Sl. 3.19. analitičkim načinom odrediti jakobijan.

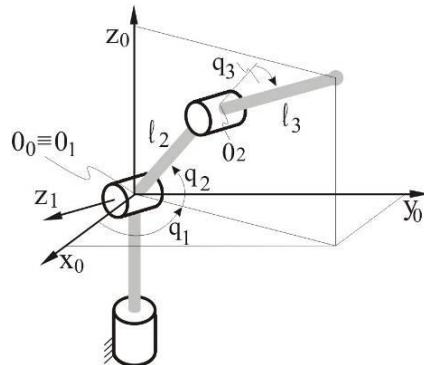
Pri rešavanju ovog zadatka prvo treba napisati jednačine koje povezuju poziciju vrha robota sa vrednostima uglova u zglobovima. Za konfiguraciju prikazanu na Sl. 3.19. te jednačine su:

$$x = a_2 C_1 C_2 + a_3 C_1 C_2 3$$

$$y = a_2 S_1 C_2 + a_3 S_1 C_2 3 \quad (4.35)$$

$$z = a_2 S_2 + a_3 S_2 3$$

Zatim je potrebno uspostaviti vezu između malih (infinitesimalnih) pomeraja u zglobovima i rezultujućih pomeraja hvataljke. Da bismo tu vezu uspostavili treba diferencirati izraze (4.35) po uglovima u zglobovima, pa dobijamo



Sl. 4.2. Kinematska šema trosegmentnog antropomorfog mehanizma

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_3} dq_3 \\ dy &= \frac{\partial y(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial y(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial y(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_3} dq_3 \\ dz &= \frac{\partial z(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial z(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial z(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_3} dq_3 \end{aligned} \quad (4.36)$$

što se u vektorskoj formi može napisati kao

$$ds = J(q) dq \quad (4.37)$$

gde je

$$ds = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}, \quad dq = \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{bmatrix}.$$

pa sledi

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Matrica  $J$  je, dakle, matrica parcijalnih izvoda funkcija  $x(q_1, q_2, q_3)$ ,  $y(q_1, q_2, q_3)$  i  $z(q_1, q_2, q_3)$  u odnosu na uglove u zglobovima  $q_1, q_2$  i  $q_3$ . Prema tome, vrednosti elemenata matrice  $J$  se mogu dobiti diferenciranjem gornjih izraza.

Za primer trosegmentne minimalne konfiguracije antropomorfnog mehanizma sa Sl. 3.19. matrica  $J$  se dobija u konačnoj formi

$$J_{(q)} = \begin{bmatrix} -a_2 S1C2 - a_3 S1C23 & -C1(a_2 S2 + a_3 C23) & -a_3 C1S23 \\ a_2 S1C2 + a_3 C1C23 & -S1(a_2 S2 + a_3 S23) & a_3 S1S23 \\ 0 & a_2 C2 + a_3 C23 & a_3 C23 \end{bmatrix}$$

Treba primetiti da su elementi matrice  $J$  funkcije uglova u zglobovima i da se sa promenom položaja mehaničke konfiguracije robota menjaju. Prema tome, tokom realizacije određenog pokreta **matrica  $J$  nije konstantna** i vrednosti njenih elemenata treba sračunavati za svaki novi položaj mehaničke konfiguracije.

### 4.3.2 Numeričko sračunavanje jakobijana

U ovom odeljku će biti prikazan način numeričkog sračunavanja elemenata jakobijana kako bi se ovaj zadatak mogao efikasno realizovati primenom računara.

Kao što smo već uočili i linearnom i ugaonom kretanju hvataljke doprinosi kretanje u svakom od zglobova mehanizma. Ako napišemo jakobihevu matricu u sledećem obliku

$$J = \begin{bmatrix} J_{L1} & J_{L2} & \dots & J_{Ln} \\ J_{U1} & J_{U2} & \dots & J_{Un} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

tako da svaki elemenat ( $J_{Li}$ ) i ( $J_{Ui}$ ) predstavlja vektor kolonu dimenzije (3x1), lako se može uočiti da prvi deo kolone ( $J_{Li}$ ) odgovara doprinosu  $i$ -tog zgloba linearom, a drugi deo ( $J_{Ui}$ ) ugaonom kretanju hvataljke. U razvijenoj formi (4.39) postaje

$$\begin{bmatrix} v_H \\ \omega_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{L1}^1 & J_{L1}^2 & J_{L1}^3 \\ J_{L2}^1 & J_{L2}^2 & J_{L2}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ J_{U1}^1 & J_{U1}^2 & J_{U1}^3 \\ J_{U2}^1 & J_{U2}^2 & J_{U2}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ J_{Un}^1 & J_{Un}^2 & J_{Un}^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Odavde se linearna brzina vrha robota može izraziti na sledeći način

$$v_H = J_{L1} \cdot \dot{q}_1 + J_{L2} \cdot \dot{q}_2 + \dots + J_{Ln} \cdot \dot{q}_n \quad (4.41)$$

a na isti način i ugaona brzina hvataljke

$$\omega_H = J_{U1} \cdot \dot{q}_1 + J_{U2} \cdot \dot{q}_2 + \dots + J_{Un} \cdot \dot{q}_n \quad (4.42)$$

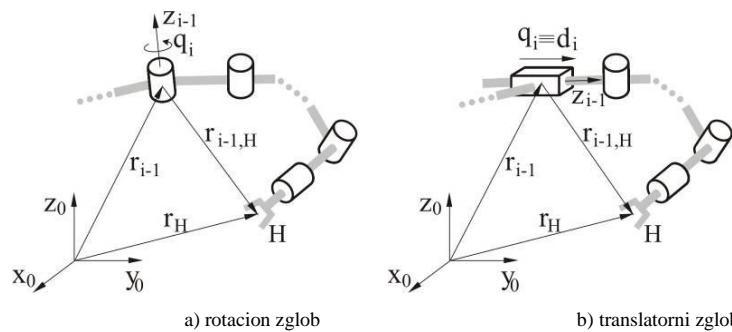
Razmotrimo na koji način možemo da odredimo elemente matrice  $J_{Li}$  i  $J_{Ui}$ .

Na Sl. 4.3.a. je prikazan slučaj kada je  $i$ -ti zglob robota (rotacioni) i njegov položaj u odnosu na hvataljku, dok je na Sl. 4.3.b.  $i$ -ti zglob robota translatori. Neka su sa  $z_{i-1}$  obeležene ose zglobova koje su postavljene u postupku određivanja DH parametara.

Razmotrimo najpre kako kretanje nekog od zglobova mehanizma može da doprinese promeni linearne brzine hvataljke.

U slučaju da je  $i$ -ti zglob translatoran njegovo pomeranje izaziva samo translatorno pomeranje hvataljke u pravcu  $z_{i-1}$  ose, intenziteta  $\dot{d}_i$  (pripadajuća  $z$  osa je tada  $z_{i-1}$ , a DH parametar  $d_i$  je promenljiva), tj.

$$J_{Li} \cdot \dot{q}_i = z_{i-1} \cdot \dot{d}_i \quad (4.43)$$



Sl. 4.3. Infinitesimalni pomeraji hvataljke zbog pomeranja rotacionog (translatornog) zgloba

Ako je  $i$ -ti zglob rotacioni njegovim pokretanjem će deo mehanizma koji se nalazi dalje od zglobova koji se pokreće (uključujući i hvataljku) dobiti ugaonu brzinu

$$\omega_i = z_{i-1} \cdot \dot{q}_i \quad (4.44)$$

koja će linearnu brzinu hvataljke robota, koja je od ose obrtanja udaljena za  $r_{i-1,H}$ ,

promeniti za

$$J_{Li} \cdot \dot{q}_i = \omega_i \times r_{i-1,H} = (z_{i-1} \times r_{i-1,H}) \cdot \dot{q}_i \quad (4.45)$$

Na sličan način ćemo odrediti kako kretanja u translatornom i rotacionom zglobu doprinose promeni ugaone brzine hvataljke.

Ako je  $i$ -ti zglob translatoryni on ne doprinosi promeni ugaone brzine hvataljke, pa je

$$J_{Ui} \cdot \dot{q}_i = 0 \quad (4.46)$$

Ako je  $i$ -ti zglob rotacioni, ugaona brzina koja se generiše kretanjem zgloba, je data sa

$$J_{Ui} \cdot \dot{q}_i = z_{i-1} \cdot \dot{q}_i \quad (4.47)$$

Prema tome, jednačinama (4.43, 4.45-4.47) je moguće odrediti elemente jakobijana  $J_{Li}$  i  $J_{Ui}$  za slučaj translatornih i rotacionih zglobova pa, prema tome, možemo rezimirati

- za translatoryni zglob

$$\begin{bmatrix} J_{Li} \\ J_{Ui} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

- za rotacioni zglob

$$\begin{bmatrix} J_{Li} \\ J_{Ui} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{i-1} \times r_{i-1,H} \\ z_{i-1} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Pri računavanju jakobijana jedine veličine koje treba odrediti su vektori  $z_{i-1}$  i  $r_{i-1,H}$  koji su funkcije samo pomeraja u zglobovima robota. Vektor  $z_{i-1}$  predstavlja treći kolonu u matrici rotacije  $R_0^{i-1}$  (vidi (3.7)) i moguće ga je veoma jednostavno odrediti na sledeći način

$$z_{i-1} = R_0^1(q_1)R_1^2(q_2)\dots R_{i-2}^{i-1}(q_{i-1})z_0 \quad (4.50)$$

gde je  $z_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$  što nam omogućava da se iz matrice  $R_0^{i-1}$  odaberemo samo treći kolonu.

Vektor položaja od  $i-1$ -vog zgloba do hvataljke  $r_{i-1,H}$  je moguće odrediti (Sl. 4.3.a i b) kao razliku vektora  $p_H$  od koordinatnog početka do hvataljke i vektora  $p_{i-1}$  od koordinatnog početka do  $i-1$ -vog zgloba. Vektor  $p_H$  je moguće odrediti kao prva tri elementa četvrte kolone ukupne homogene matrice transformacije  $H_0^H$  koja je data sa

$$H_0^H = H_0^1(q_1)H_1^2(q_2)\dots H_{n-1}^H(q_n)$$

pa sledi

$$p_H = H_0^H p_0 \quad (4.51)$$

gde je  $p_0$  dato sa  $p_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ . Sličnim postupkom je moguće odrediti i vektor

$p_{i-1}$ . Naime,

$$p_{i-1} = H_0^1(q_1)H_1^2(q_2)\dots H_{i-2}^{i-1}(q_{i-1})p_0 \quad (4.52)$$

i konačno dobijamo:

$$r_{i-1,H} = p_H - p_{i-1}$$

Prema tome, izrazi (4.50-4.52) omogućavaju jednostavno sračunavanje elemenata jakobijana numeričkim putem pod uslovom da su poznate matrice transformacije koje odgovaraju datoj (trenutnoj) pozici mehaničke strukture robota.

#### Primer 4.3:

Numeričkim načinom odrediti elemete jakobijana za trosegmentnu antropomorfnu konfiguraciju (Sl. 3.19) i koordinatne sisteme postavljene kao u primeru 3.2.

Odredimo najpre projekcije osa zglobova

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z_1 = \begin{bmatrix} S1 \\ -C1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_2 = \begin{bmatrix} S1 \\ -C1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obzirom da su sva tri zgloba rotaciona jakobijan ima oblik

$$J_{11} = [z_0 \times (O_3 - O_0) \quad z_1 \times (O_3 - O_1) \quad z_2 \times (O_3 - O_2)]$$

na osnovu čega sledi,

$$O_0 = O_1 = [0 \quad 0 \quad 0]^T, \quad O_2 = \begin{bmatrix} a_2 C1C2 \\ a_2 S1C2 \\ a_2 S2 \end{bmatrix}, \quad O_3 = \begin{bmatrix} a_2 C1C2 + a_3 C1C23 \\ a_2 S1C2 + a_3 S1C23 \\ a_2 S2 + a_3 S23 \end{bmatrix}.$$

Sada možemo da odredimo elemete Jakobijana

$$\begin{aligned} z_0 \times (O_3 - O_0) &= \begin{bmatrix} -a_2 S1C2 - a_3 S1C23 \\ a_2 S1C2 + a_3 C1C23 \\ 0 \end{bmatrix} \\ z_1 \times (O_3 - O_1) &= \begin{bmatrix} -C1(a_2 S2 + a_3 S1C23) \\ -S1(a_2 S2 + a_3 S23) \\ a_2 C2 + a_3 C23 \end{bmatrix}, \quad z_2 \times (O_3 - O_2) = \begin{bmatrix} a_3 C1S23 \\ a_3 S1S23 \\ a_3 C23 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

odakle konačno sledi

$$J = \begin{bmatrix} -a_2 S1C2 - a_3 S1C23 & -C1(a_2 S2 + a_3 C23) & -a_3 C1S23 \\ a_2 S1C2 + a_3 C1C23 & -S1(a_2 S2 + a_3 S23) & a_3 S1S23 \\ 0 & a_2 C2 + a_3 C23 & a_3 C23 \end{bmatrix}$$

što je isti rezultat dobijen analitičkim načinom. Osim toga, primetimo da je jakobijan dobijen u formi matrice dimenzija  $(3 \times 3)$  obzirom da se radi samo o minimalnoj

#### 4.4 NUMERIČKO REŠAVANJE INVERZNOG KINEMATSKOG PROBLEMA

Jakobijeva matrica koju smo odredili u prethodnom odeljku predstavlja osnovu za numeričko rešavanje inverznog kinematskog problema. Postupak rešavanja je potpuno opšti i ne zavisi od tipa robota, ali za razliku od analitičkog rešenja, ovde se dobija samo jedno rešenje koje odgovara zadatom vektoru spoljašnjih koordinata  $s$  i to ono koje je najbliže zadatom rešenju  $q^{POC}$  od kojeg je procedura započeta. Naime, iz izraza (4.34)

$$\dot{s} = J(q)\dot{q} \quad (4.34)$$

inverzijom jakobijeve matrice dobijamo

$$\dot{q} = J(q)^{-1} \dot{s} \quad (4.53)$$

Ukoliko je poznata početna poza robota  $q^{POC}$  koja je bliska očekivanom rešenju (tj. ako su poznati uglovi u zglobovima robota koji dovode hvataljku u okolinu očekivanog položaja i orientacije) tada se pozicije u zglobovima mogu pronaći integracijom brzina u zglobovima nad posmatranim vremenskim intervalom

$$q(t) = q^{POC}(t) + \int_t^{t+\Delta t} \dot{q}(\tau) d\tau \quad (4.54)$$

Ako integraciju realizujemo u diskretnom vremenu, najjednostavnijom Ojlerovom metodom integracije, gornji izraz postaje

$$q(t + \Delta t) = q^{POC}(t) + \dot{q}(t) \Delta t \quad (4.55)$$

Ukoliko na (4.55) primenimo (4.53) sledi

$$q(t + \Delta t) = q^{POC}(t) + J^{-1}(q(t)) \cdot \dot{s}(t) \cdot \Delta t \quad (4.56)$$

ili sa modifikovanom notacijom

$$q_{(k+1)} = q_k + J^{-1}(q_k) \Delta s_k \quad (4.57)$$

Neka je zadat vektor spoljašnjih koordinata  $s^0$  i neka je potrebno da se odredi vektor unutrašnjih koordinata koje odgovaraju položaju hvataljke  $s^0$ .

Prepostavimo najpre približno početno rešenje  $q^{(k)}$ , ( $q^{(k)} \approx f^{-1}(s^0)$ ). Kada se na osnovu prepostavljenog rešenja  $q^{(k)}$  računa pozicija hvataljke pojaviće se odstupanje između tačne i približne pozicije

$$\Delta s^{(k)} = s^0 - f \cdot (q^{(k)}) \approx J \cdot [q^{(k)}] \cdot [q^{(k+1)} - q^{(k)}] \quad (4.58)$$

gde je  $q^{(k+1)}$  tačnije rešenje inverznog kinematskog problema od početno pretpostavljenog  $q^{(k)}$  za  $s^0$  odakle sledi

$$q^{(k+1)} \approx q^{(k)} + J^{-1} \cdot (q^{(k)}) \cdot \Delta s^{(k)} \quad (4.59)$$

što predstavlja osnovnu relaciju za iterativni postupak rešavanja inverznog kinematskog problema. Postupak rešavanja se može definisati sledećim koracima:

**korak 1:** za zadato  $s^0$  prepostavimo rešenje inverznog problema  $q^{(k)}$ ;

**korak 2:** odrede se vrednosti spoljašnjih koordinata za pretpostavljeno  $q^{(k)}$ ;

**korak 3:** izračunamo grešku  $\Delta s^{(k)}$ ;

**korak 4:** izračunamo Jakobijan  $J$  u pretpostavljenom rešenju  $q^{(k)}$ ;

**korak 5:** izračunamo inverzni Jakobijan  $J^{-1}$ ;

**korak 6:** na osnovu izraza (4.59) odredimo naredno rešenje koje je bliže tačnom rešenju nego što je bilo prethodno;

**korak 7:** opisanu proceduru ponavljamo sve dok greška ne bude manja od unapred zadate vrednosti  $\varepsilon$  kojom se definiše željena tačnost rešenja, tj. dok ne bude ispunjen uslov,

$$|\Delta s^{(k)}| < \varepsilon \quad (4.60)$$

Prikazani postupak je klasična Njutnova metoda za rešavanje sistema nelinearnih jednačina kojim se dobija samo jedno rešenje i to ono koje je najbliže početnom pretpostavljenom rešenju  $q^{(0)}$ .

## 4.5 PSEUDO INVERZNI JAKOBIJAN

Prethodno opisani postupak numeričkog rešavanja inverznog kinematskog problema je baziran na relaciji

$$\dot{q} = J(q)^{-1} \dot{s} \quad (4.53)$$

tj. na prepostavci da je moguće odrediti inverzni jakobijan  $J(q)^{-1}$  tj. da je matrica  $J$  kvadratna i da nema singularitet. Ako sa  $m$  označimo dimenziju vektora spoljašnjih koordinata  $s$ , a sa  $n$  broj stepeni slobode mehaničke konfiguracije robota možemo razlikovati tri slučaja:

b)  $m = n$

U ovom slučaju je Jakobijeva matrica kvadratna te se može odrediti njena inverzna matrica

$$\dot{q} = J(q)^{-1} \dot{s}$$

ako je njena determinanta različita od nule. Položaji robota u kojima je  $\det(J(q)) = 0$  predstavljaju singularne tačke u kojima se ne može odrediti inverzni Jakobijan.

c)  $m > n$

U ovom slučaju broj stepeni slobode zadatka je veći od broja stepeni slobode robota pa se može dogoditi da ne postoji  $\dot{q}$  koje je rešenje sistema (4.53). Drugim rečima broj jednačina je manji od broja nepoznatih u sistemu. Stoga se pribegava traženju rešenja koje zadovoljava sistem uz najmanju grešku. Obeležimo sa  $\dot{q}^*$  vektor koordinata zglobova koji zadovoljava uslov da je greška definisana izrazom

$$G = \text{Greska}^2 = (\dot{J}\dot{q}^* - \dot{s})^T (\dot{J}\dot{q}^* - \dot{s}) \quad (4.61)$$

minimalna. Razvojem gornjeg izraza dobijamo

$$G = (\dot{J}\dot{q}^*)^T (\dot{J}\dot{q}^*) - 2(\dot{s})^T \dot{J}\dot{q}^* + \dot{s}^T \dot{s} \quad (4.62)$$

Da bi minimizirali grešku diferencirajmo gornji izraz i izjednačimo ga sa nulom tj.  $\partial G / \partial q_i = 0$

$$\frac{\partial G}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} (\dot{q}^{*T} (\dot{J}^T \dot{J}) \dot{q}^*) - \frac{\partial}{\partial q} (2\dot{s}^T \dot{J}\dot{q}^*) \quad (4.63)$$

Sređivanjem izraza dobijamo

$$(\dot{J}^T \dot{J}) \dot{q}^* = \dot{J}^T \dot{s} \quad (4.64)$$

ili

$$\dot{q}^* = (\dot{J}^T \dot{J})^{-1} \dot{J}^T \dot{s}$$

pod uslovom da  $(\dot{J}^T \dot{J})^{-1}$  postoji. Matrica  $(\dot{J}^T \dot{J})^{-1} \dot{J}^T$  se naziva levim pseudo inverznim Jakobijanom. Ako ovu matricu obeležimo sa  $J^{PS}$  možemo pisati

$$\dot{q} = J^{PS} \dot{s} \quad (4.65)$$

čime su određene koordinate zglobova tako da je greška pozicioniranja minimalna.

d)  $m < n$

U ovom slučaju je broj stepeni slobode koji zahteva zadatak manji od broja stepeni slobode koji poseduje robotski manipulator (manipulator je redundantan), tj broj jednačina je veći od broja nepoznatih u sistemu pa postoji beskonačno mnogo rešenja od kojih treba odabratи jedno. Jedan od načina da se vrši izbor rešenja je da Euklidova norma bude minimalna. Ovo rešenje možemo dobiti metodom Lagranževih množitelja. Ako je  $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m]$  vektor Lagranževih množitelja možemo postaviti novu funkciju cilja

$$\psi(\dot{q}) = (\dot{q})^T (\dot{q}) + \lambda^T (\dot{J}\dot{q} - \dot{s}) \quad (4.66)$$

koja je u minimumu kada je  $\partial\psi / \partial q = 0$ , pa se može pisati

$$2\dot{q} + J^T \lambda = 0 \quad (4.67)$$

$$\dot{q} = -J^T \lambda / 2 \quad (4.68)$$

Zamenom ovog izraza u polazni (4.34)  $\dot{s} = J(q)\dot{q}$  sledi

$$\dot{s} = J(-J^T \lambda / 2) \quad (4.69)$$

pa se posle sređivanja dobija

$$\lambda = -2(JJ^T)^{-1}\dot{s} \quad (4.70)$$

pod uslovom da  $(JJ^T)^{-1}$  postoji. Zamenjujući ovaj izraz u (4.68) i nakon jednostavnih transformacija dobijamo

$$\dot{q} = J^T (JJ^T)^{-1} \dot{s} \quad (4.71)$$

Matrica  $J^T (JJ^T)^{-1}$  se naziva desnim pseudoinverznim Jakobijanom koji ćemo kao i u prethodnom slučaju obeležiti sa  $J^{PS}$ , pa se konačno može pisati

$$\dot{q} = J^{PS} \dot{s} \quad (4.72)$$

odakle možemo odrediti tražene koordinate zglobova.

Na opisani način se može prevazići problem kada Jakobijan nije kvadratni i kada nije moguće naći inverznu matricu.

## 4.6 SINGULARNE KONFIGURACIJE

Kao što smo već videli, linearna veza između brzine hvataljke izražene u spoljašnjim koordinatama i brzina u zglobovima

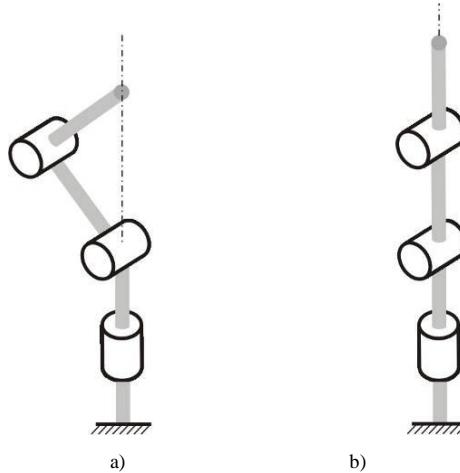
$$\dot{s} = J(q)\dot{q}$$

je uspostavljena jakobijanom. Ukoliko takvu vezu, pri određenim položajima (konfiguracijama) mehaničke strukture robota, nije moguće jednoznačno uspostaviti govorimo o pojavi *singularnih* konfiguracija. Matematičkim rečnikom rečeno, singularne su one konfiguracije mehaničke strukture pri kojima matrica  $J(q)$  nema puni rang. Singularni položaji se odlikuju sledećim osobinama:

e) U singularnom položaju robot gubi jedan ili više SS.

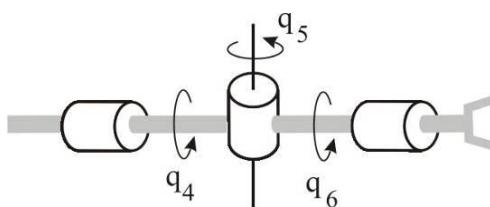
Kao primer ovakvog slučaja navedimo bilo koji robot čija hvataljka je dospila granicu radnog prostora (spoljnju ili unutrašnju). Ovaj slučaj odgovara situaciji sa Sl. 4.4.b (hvataljka je na spoljašnjoj granici radnog prostora) ili kada je treći segment savijen potpuno naniže  $q_3 = \pi$ .

f) U singularnom položaju može postojati beskonačno mnogo rešenja inverznog kinematskog problema.



Sl. 4.4. Singulari položaji antropomorfne minimalne konfiguracije

Da bi ilustrovali ovaj slučaj posmatrajmo minimalnu konfiguraciju (samo prva tri stepena slobode) antropomorfne konfiguracije u položaju koji je prikazan na Sl. 4.4. a. Obzirom da se vrh minimalne konfiguracije nalazi na osi obrtanja prvog zgloba njen položaj ne zavisi od trenutne vrednosti ugla  $q_1$  i ovaj položaj je ostvaren za bilo koju vrednost ugla  $q_1$ . Ovo važi za bilo koje vrednosti uglova  $q_2$  i  $q_3$  ako je ispunjeno da se vrh minimalne konfiguracije nalazi na vertikalnoj osi obrtanja, pa i za slučaj kada je  $q_2 = q_3 = 0$  i kada je mehanička struktura robota potpuno ispružena naviše (Sl. 4.4.b). Drugi primer kojim ovakvu situaciju možemo ilustrovati je sferni (Ojlerov) zglob hvataljke robota u položaju koji je prikazan na Sl. 4.5. Uočimo da, ukoliko su ugaone brzine u četvrtom i šestom zglobu jednake po intenzitetu a suprotne po smeru ( $\dot{q}_4 = -\dot{q}_6$ ) hvataljka će mirovati. Osim toga, ovde pripada bilo koji položaj robota sa Sl. 4.4.a osim potpuno ispružene konfiguracije (Sl. 4.4.b).



Sl. 4.5. Singulani položaj sfernog zgloba

Kao što je već pomenuto uslov za pojavu singulariteta je kada jakobijan gubi puni rang. Međutim, sračunavanje uslova singulariteta se može pojednostaviti ako se mehanička struktura robota raspregne na minimalnu konfiguraciju i zglob hvataljke. U tom slučaju Jakobijan robota sa šest stepeni slobode se u blok-formi može prikazati na sledeći način

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

gde su, u slučaju sfernog zglobova, matrice  $J_{12}$  i  $J_{22}$  date sa

$$J_{12} = \begin{bmatrix} z_3 \times r_{3,H} & z_4 \times r_{4,H} & z_5 \times r_{5,H} \end{bmatrix} \quad J_{22} = \begin{bmatrix} z_3 & z_4 & z_5 \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

gde je korišćena notacija iz odeljka 4.3.2. (vidi Sl. 4.3.). Obzirom da se položaj koordinatnog sistema hvataljke može slobodno birati, kao i da rezultat ne zavisi od izbora koordinatnog sistema u odnosu na koji je izražen smestimo ga u centar zglobova (mesto gde se sve tri ose sekut) pošto je tada ispunjeno  $r_{i-l,H} = 0 \quad i=4,5,6$ . U tom slučaju matrica  $J_{12}$  postaje

$$J_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

pa matrica  $J$  postaje blok donje-trougaona matrica, što znatno pojednostavljuje računavanje determinante

$$\det(J) = \det(J_{11}) \det(J_{22}) \quad (4.76)$$

odakle se uslovi singularnosti za minimalnu konfiguraciju mogu napisati kao

$$\det(J_{11}) = 0 \quad (4.77)$$

dok za zglob hvataljke važi sledeći uslov singularnosti

$$\det(J_{22}) = 0 \quad . \quad (4.78)$$

čime je postignuto raspregnuto razmatranje uslova singularnosti.

## 4.7 ELIPSOID BRZINA

Jakobijan predstavlja transformaciju n-dimenzionalnog prostora brzina (n je broj stepeni slobode koje ima robot) u zglobovima manipulacionog robota u m-dimenzionalni prostor (m je broj stepeni slobode zadatka) brzina kretanja hvataljke. Pokretanjem zglobova mehanizma pokreće se njegova hvataljka i od rasporeda zglobova i dužina segmenata zavisi "prenosna karakteristika mehanizma". Postoji više načina na koje mogu da se uporede prenosne karakteristike različitih mehanizma, a jedan od najpoznatijih je tzv. elipsoid brzina kojim se uspostavlja veza između potrebnih brzina u zglobovima da bi se postigla jedinična brzina hvataljke u svim pravcima. Da bi to postigli ograničimo brzinu hvataljke na m-dimenzionu jediničnu sferu

$$\dot{s}^T \dot{s} = 1 \quad (4.79)$$

i uporedimo odgovarajuće brzine zglobova iz n-dimenzionalnom prostoru stanja zglobova. Ako u gornji izraz uvedemo (4.32) posle jednostavnih transformacija dobijamo

$$\dot{q}^T J^T J \dot{q} = 1 \quad (4.80)$$

Gornja jednačina predstavlja elipsoid u n-dimenzionalnom prostoru stanja zglobova gde svaka tačka elipsoida odgovara jednoj kombinaciji brzina u zglobovima tako da vektor br-

zine hvataljke ima jedinični intenzitet. Obzirom da je proizvod  $J^T J$  simetrična, pozitivna semidefinitna matrica njeni sopstveni vektori su ortogonalni. Glavne ose elipsoida se poklapaju sa sopstvenim vektorima  $J^T J$  dok su dužine osa jednake recipročnim vrednostima kvadratnog korena sopstvenih vrednosti  $J^T J$ .

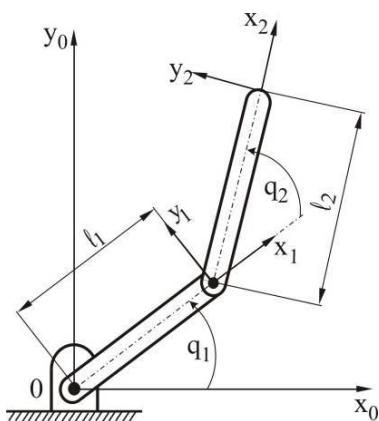
Pošto vrednosti elemenata jakobijana tokom kretanja hvataljke nisu konstante, već zavise od trenutne poze mehanizma (tj. od trenutnih vrednosti  $q_1$  i  $q_2$ ) sa promenom položaja hvataljke će se oblik i orijentacija elipsoida takođe menjati. Mehanizam se nalazi u *izotropnoj* tački (bolje je reći da poza mehanizma obezbeđuje izotropno ponašanje hvataljke ukoliko se m-dimenzionala jedinična sfera u prostoru hvataljke preslikava takođe u sferu u n-dimenzionom prostoru zglobova. Što je oblik ellipsoida bliži sferi to je "prenosna karakteristika mehanizma" bolja.

Ilustrovaćemo ovo na primeru dvosegmentnog ravanskog mehanizma sa dužinama segmenata  $a_1 = \sqrt{2}$  m,  $a_2 = 1$  m, koji je prikazan na Sl. 4.6. U ovom slučaju jakobijan ima formu

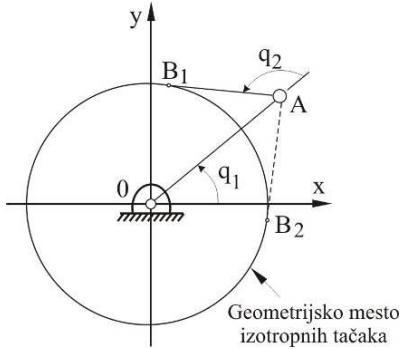
$$J = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}S_1 - S_{12} & -S_{12} \\ -\sqrt{2}S_1 + C_{12} & C_{12} \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

dok je proizvod  $J^T J$  dat sa

$$J^T J = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}C_2 + 3 & \sqrt{2}C_2 + 1 \\ \sqrt{2}C_2 + 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.82)$$



Sl. 4.6. Dvosegmentni ravanski mehanizam



Sl. 4.7. Geometrijsko mesto izotropnih tačaka

Sopstvene vrednosti  $J^T J$  su  $\lambda_1 = (2 - \sqrt{2})(-C_2 + 1)$  i  $\lambda_2 = (2 + \sqrt{2})(C_2 + 1)$ . Za  $q_2 = 3\pi/4$  i  $q_1 = 5\pi/4$  (uociti da je  $J^T J$  simetrična i da ne zavisi od  $q_1$ ) one postaju  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ . Odavde sledi da se robot kada je u poziciji za koju važi  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  nalazi u izotropnoj tački. Na Sl. 4.7 je prikazano geometrijsko mesto svih izotropnih tačaka za ovu konfiguraciju, a to je krug.

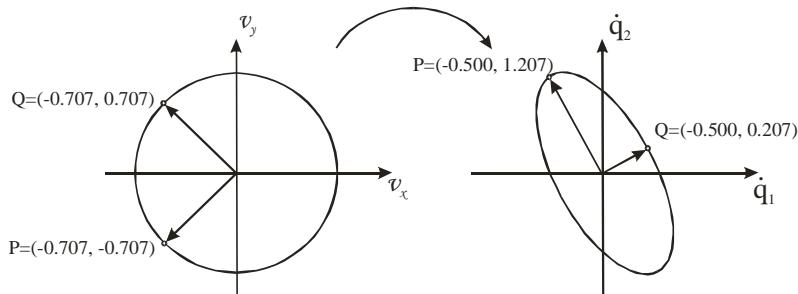
Posmatrajmo poziciju mehanizma kada je ugao u drugom zglobovu  $q_2 = \pi/2$ . Tada proizvod matrica  $J^T J$  postaje

$$J^T J = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

Uvođenjem (4.83.) u (4.78.) dobijamo jednačinu

$$3\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2 = \frac{(0.3827\dot{q}_1 - 0.9238\dot{q}_2)^2}{1.3065^2} + \frac{(0.3827\dot{q}_1 - 0.9238\dot{q}_2)^2}{0.5412^2} = 1$$

koja predstavlja elipsu prikazanu na Sl. 4.8 sa koje se vidi da za jediničnu brzinu



Sl. 4.8. Elipsoid brzina

*Planiranje kretanja*

## Industrijska robotika

hvataljke zahtevane brzina u zglobovima su  $(\dot{q}_1, \dot{q}_2) = (-0.5, 1.207)$  rad/s u pravcu velike, i  $(\dot{q}_1, \dot{q}_2) = (0.5, 0.207)$  rad/s u pravcu male ose elipse.

Pretpostavimo zatim, bez gubitka opštosti, da je  $q_1 = 0$ . Jakobijeva matrica tada postaje

$$J = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

odakle sledi da je za brzine u zglobovima  $(\dot{q}_1, \dot{q}_2) = (-0.5, 1.207)$  rad/s brzina hvataljke  $(v_x, v_y) = (-0.707, -0.707)$  m/s, a za  $(\dot{q}_1, \dot{q}_2) = (0.5, 0.207)$  rad/s brzina hvataljke je  $(v_x, v_y) = (-0.707, 0.707)$  m/s, kao što je prikazano na Sl. 4.8.a .

---

## 5 PLANIRANJE KRETANJA

---

### 5.1 DEFINISANJE PROBLEMA PLANIRANJA KRETANJA

U ovom poglavlju bavićemo se problemom planiranja kretanja robota. Kretanje je osnovna operacija kojom roboti obavljaju postavljene zadatke, bez obzira da li pri tome prenose različite predmete sa jednog mesta na drugo, na primer u zadacima opsluživanja alatnih mašina, ili na svom vrhu imaju pričvršćen alat kojim se zadatak neposredno izvršava, kao na primer kod farbanja, ili lučnog zavarivanja. Mi ćemo u ovom poglavlju razmotriti različite načine za definisanje kretanja koje robot treba da izvrši.

Cilj svake od metoda za planiranje kretanja jeste da se omogući korisniku, ili programeru robota, da na jednostavan, intuitivan način definiše osnovne parametre kretanja robota, a da upravljački softver robota na osnovu zadatih parametara generiše sve informacije o kretanju potrebne upravljačkom sistemu robota u toku izvršavanja kretanja.

Definišimo najpre osnovne pojmove vezane za planiranje kretanja robota:

- **Zadatak** robota koji često sadrži verbalne opise šta bi robot trebao da uradi, se ubičajeno sastoji se od više podzadataka, koji mogu dalje da se rasčlanjuju, sve dok se ne dođe do niza kretanja i akcija koje robot treba da obavi. Na primer, jedan zadatak mogao bi biti: sastavi prozvod od datih komponenata, ili, premesti obradak iz mašine na paletu, itd.
- **Putanja** je skup tačaka kroz koje robot treba da prođe da bi izvršio zadato kretanje. Primetimo da putanja nosi čisto geometrijsku informaciju. Primeri za putanje su: prava linija, kružnica, helikoida, itd.
- **Trajektorija** je putanja kojoj je pridružena informacija o vremenu. Drugim rečima, trajektorija definiše u kom trenutku će se robot naći na kojoj poziciji sa putanje. Za razliku od putanje, trajektorija sadrži informacije i o brzinama i ubrzanjima tokom kretanja, a ne samo pozicije kroz koje će robot proći.

Na sadašnjem nivou razvoja upravljačkih sistema robota, uglavnom još uvek nije moguće direktno zadavati zadatke robotu. Obzirom da se svaki zadatak raščlanjuje dalje na skup putanja kroz koje robot treba da prođe, a zatim se putanjama dodeljuje i vremenska zavisnost da bi se dobole trajektorije, to i dalje predstavlja previše složen problem za upravljački softver robota, a naročito kada se ima u vidu velika raznolikost zadataka koje roboti mogu da obavljaju.

Zbog toga raščlanivanje zadatka na putanje obično obavlja korisnik, odnosno programer

## *Planiranje kretanja*

## *Industrijska robotika*

roboata, a planiranje kretanja, odnosno generisanje putanja i trajektorija se obavlja uz pomoć upravljačkog softvera robota. Pri tome, programer zadaje samo osnovne parametre kretanja, na primer, ukupo vreme ili brzina kretanja robota od početne do krajnje pozicije, itd.

Metode za planiranje kretanja možemo podeliti u nekoliko kategorija, i na osnovu nekoliko kriterijuma, koji nisu međusobno isključivi. Prva podela može biti na osnovu karaktera zadatka koji robot obavlja. Postoje primene robota kod kojih je islučivo važno da robot iz tačke A stigne u tačku B, pri čemu oblik putanje između njih nije od značaja. Ovakav tip kretanja javlja se, na primer, u zadacima transporta materijala, gde je najvažnije da materijal bude uzet na jednom, a ostavljen na drugom mestu, a kako se robot kreće između, nije od naročitog interesa. Ovakav režim rada naziva se "kretanje od tačke do tačke", (*point to point motion*), ili "režim uzmi pa ostavi" (*pick and place operation*). Mi ćemo se na dalje služiti skraćenicom termina na engleskom, PTP, za obeležavanje ovakvog načina kretanja.

Drugu grupu primena robota karakteriše činjenica da je važna cela putanja po kojoj se robot kreće. Primer za to je robotsko farbanje, gde putanja robota direktno određuje kako se nosi boja na površinu koja se farba, ili robotsko lučno zavarivanje, gde putanja vrha robota treba da prati sastav koji se vari. Ovakve režime rada nazivamo "kretanje po kontinualnim putanjama" (*continuous path motion*), i na dalje ćemo ga označavati sa CP, skraćenicom termina na engleskom jeziku.

Jasno je da je planiranje PTP kretanja jednostavnije u odnosu na CP kretanje. Kod PTP dovoljno je zadati početnu i krajnju poziciju, kao parametre, i eventualno brzinu, ili vreme izvršavanja, a upravljači softver robota će onda sam generisati sve ostale potrebne informacije. Kod CP kretanja, potrebno je definisati putanju (koja može biti oblika jednostavnih matematička primitiva ali može biti i složena), a zatim treba definisati i vremenske informacije o kretanju duž putanje.

Druga podela se može učiniti na osnovu prostora u kome se zadaje kretanje. Tako razlikujemo planiranje kretanja u unutrašnjim koordinatama od planiranja kretanja u spoljašnjim koordinatama. Obzirom na to da je vrh robota relevantan za obavljanje zadatka, planiranje kretanja najprirodnije se obavlja u prostoru spoljašnjih koordinata, koje su vezane za kretanje vrha. Sa druge strane, kretanje robota odvija se u prostoru unutrašnjih koordinata, odnosno zglobova, pa je ponekad od interesa da se planiranje kretanja obavlja u ovom prostoru. Mi smo već videli da se primenom funkcija direktne ili inverzne kinematike, kretanje iz jednog prostora može preslikati u drugi prostor, naravno, uz sve teškoće, koje rešavanje inverzne kinematike nosi sa sobom.

Treba reći da iako ove dve podele nisu isključive, najčešće se planiranje CP kretanja obavlja u prostoru spoljašnjih koordinata, dok se planiranje PTP kretanja obavlja u prostoru unutrašnjih koordinata. Naravno, primenljive su i druge dve kombinacije, kada je to potrebno ili poželjno.

Uočimo da rezultat planiranja kretanja treba da bude vremenska zavisnost pozicije i orientacije vrha robota  $r(t)$ , ili vremenska zavisnost pozicija zglobova  $q(t)$ , koje treba da posluže kao referentne vrednosti za upravljački sistem robota. Ovim vremenskim zavisnostima pozicija, po potrebi, mogu se pridruziti i brzine i ubrzanja.

Mi ćemo sada proučiti nekoliko metoda za generisanje trajektorija, koje su primenljive za slučaj da u radnom prostoru robota nema prepreka, odnosno, da je robot slobodan da se kreće unutar celog radnog prostora. Ovaj pristup može se relativno lako proširiti i na slučaj kada unutar radnog prostora postoje statičke prepreke, čije su osobine, odnosno, veličina i položaj, unapred poznati i nepromenljivi. Slučaj kada se u radnom prostoru nalaze

dinamičke prepreke, zahteva potpuno drugačiji pristup planiranju kretanja, a takođe i sofisticirani senzorski sistem koji će prepreke detektovati, i odrediti njihove karakteristike, kao i složenije algoritme koji mogu *on-line* donositi odluke o promeni trajektorija. Problem planiranja kretanja u prisustvu dinamičkih prepreka izlazi van domena ove knjige, i mi se njime nećemo baviti.

## 5.2 PLANIRANJE PTP KRETANJA

Obzirom na činjenicu da su kod PTP kretanja važne samo početna i krajnja tačka putanje, a da kretanje između njih može biti proizvoljno, planiranje kretanja u ovom režimu može se podjednako uspešno sprovoditi i u prostoru spoljašnjih, i u prostoru unutrašnjih koordinata. Ipak je uobičajeno da se planiranje kretanja obavlja u unutrašnjim koordinatama, primenom sledeće proste procedure. Početna  $r_i$ , i krajnja  $r_f$  tačka putanje obično se zadaju u spoljašnjim koordinatama, koje su od interesa za obavljanje postavljenog zadatka. Zatim se primenom nekog od algoritama za rešavanje problema inverzne kinematike izračunaju pozicije u unutrašnjim koordinatama za početnu  $q_i$  i krajnju  $q_f$  tačku putanje.

Dobijanje informacija o početnoj i završnoj tački putanje moguće je izvesti na različite načine. Jedan pristup je već izložen, na osnovu podataka o položaju vrha, reši se problem inverzne kinematike, i dobiju se položaju u unutrašnjim koordinatama. Drugi popularan način je da se robot, uz pomoć upravljačke konzole, fizički dovede u željene tačke prostora koje predstavljaju krajnje tačke putanje. U tim tačkama, zapamte se trenutne vrednosti pozicija zglobova, i one predstavljaju polaznu osnovu za sintezu trajektorije. Kod savremenih robota, ovo pomeranje vrha robota u željene pozicije u prostoru sve češće se obavlja u virtualnom svetu računarske animacije.

Početna i krajnja pozicija putanje, bez obzira kako su dobijene, zajedno sa vremenskim parametrima, kao što je na primer ukupno vreme izvršavanja pokreta, predstavljaju zatim polazne parametre za generisanje trajektorije između krajnjih tačaka. Obzirom da sama putanja nije od interesa za izvršavanje zadatka, zadatak generisanja trajektorije moguće je rešiti na različite načine. Primetimo da je problem generisanja trajektorije kod PTP kretanja na neki način analogan problemu interpolacije: date su nam početna i krajnja tačka, potrebno je odrediti neke interpolacione funkcije koje će nam odrediti vrednosti pozicija između krajnjih tačaka.

Pre nego što se upustimo u rešavanje problema generisanja PTP trajektorija, razmotrimo koje bi osobine trebalo da poseduje generisana trajektorija. Iskustveno je poznato da živa bića, a mi ćemo kao primer uzeti čoveka, izvode uglavnom glatke pokrete. Zaista, kada pokrećemo naše ruke, to uglavnom činimo bez velikih trzaja. Ako bismo matematički analizirali pokrete ruke, mogli bismo reći da su pozicije zglobova ruke glatke funkcije vremena. Podsetimo se da pojam glatka funkcija, znači ne samo da je funkcija kontinualna, već je i dovoljan broj izvoda funkcije takođe neprekidan. Kada govorimo o kretanju, prvi izvod pozicije je brzina, a drugi izvod je ubrzanje. Prema tome, možemo reći da glatko kretanje podrazumeva kontinualnu promenu pozicije, i pri tome kontinualne promene brzine i ubrzanja. Ovakv pristup kretanja kod živih bića je potpuno prirođan, jer dovodi do kretanja sa optimalnom potrošnjom energije. Intuitivno je jasno da nagle, ili skokovite promene, bilo ubrzanja, brzine ili pozicije, zahtevaju mnogo veći utrošak energije od kontinualnih promena. Imajući ovo u vidu, i prilikom planiranja kretanja robota, težićemo

da dobijeno kretanje u što većoj meri bude glatko.

### 5.2.1 Linearna interpolacija

Polazna osnova za generisanje trajektorije su početna  $q_i$  i krajnja  $q_f$  tačka putanje, zadate u prostoru unutrašnjih koordinata. Mi ćemo posmatrati izolovani slučaj kretanja, odnosno pretpostaviti da robot kreće iz stanja mirovanja iz početne tačke putanje, a takođe, treba da se zaustavi u krajnjoj tački putanje. To drugim rečima znači  $\dot{q}_i = 0$ , odnosno  $\dot{q}_f = 0$ . Da bismo generisali trajektoriju, potrebno je još uspostaviti vremensku zavisnost pozicije robota. Pretpostavimo zato da ukupno trajanje pokreta treba da iznosi  $T_f$ . Bez umanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da je trenutak od koga računamo vreme jednak nuli, odnosno  $T_i = 0$ .

Pre nego što nastavimo sa izlaganjem, primetimo da je pozicija zglobova vektorska veličina. To dalje znači da i interpolacione funkcije koje tražimo treba da budu vektorske funkcije. Međutim, obzirom na to da kretanje zglobova može biti potpuno nezavisno, jer nas ne interesuje putanja po kojoj se vrh robota kreće, već samo njene krajnje tačke, možemo problem pojednostaviti, i zapravo rešavati  $n$  problema interpolacije, za svaki zglob robota pojedinačno. Pri tome, kao polazne podatke, uzimamo odgovarajuće vrste iz vektora položaja, a vreme izvršenja trajektorije je isto za sve zglove.

Na dalje ćemo koristiti skalarne oznake za pozicije i brzine, a radi preglenosti izraza, izostaviti indeksa koji pokazuje na koji zglob se izraz odnosi. Pri tome se podrazumeva da se problem generisanje trajektorije rešava za svaki zglob pojedinačno.

Najprostiji metod za interpolaciju jeste linearna interpolaciona funkcija data izrazom

$$q(t) = q_i \frac{T_f - t}{T_f} + q_f \frac{t}{T_f}, \quad (5.1)$$

dok se brzina može odrediti diferenciranjem izraza po vremenu  $t$ , čime se dobija

$$\dot{q}(t) = \frac{q_f - q_i}{T_f}, \quad (5.2)$$

a nakon još jednog diferenciranja po vremenu dobija se izraz za ubrzanje

$$\ddot{q}(t) = 0. \quad (5.3)$$

Jednačine (5.1), (5.2) i (5.3), izražavaju činjenicu da se linearna interpolacija vrši konstantnom brzinom, pa je ubrzanje jednak nuli. Kretanje konstantnom brzinom je osobina koja može biti od interesa u mnogim aplikacijama robota, pa je problem interpolacije naizgled rešen, i to veoma jednostavno.

Međutim, možemo uočiti da je jednačina (5.2) u suprotnosti sa graničnim uslovima za brzinu, odnosno zahtevom da robot krene iz mirovanja i da se na kraju kretanja zaustavi. To znači da je brzina prekidna funkcija, jer pre početka kretanja brzina jednaka nuli, a neposredno nakon početka kretanja brzina je određena izrazom (5.2). Sličan prekid postoji i pri kraju kretanja, neposredno pre dostizanja krajnje tačke trajektorije, brzina je određena izrazom (5.2), a odmah zatim pada na nulu, jer se robot zaustavlja.

Nagle promene brzine (npr. naglo startovanje ili zaustavljanje) dovode do izrazito velikih ubrzanja (teoretski beskonačno velikih) što zahteva adekvatne (dovoljno snažne) motore koji takva ubrzanja mogu da ostvare. Obzirom na neopravdanost ovakvog pristupa jasno je da je potrebno da se na početku trajektorije predviđi određeno vreme za ubrzavanje, i na kraju trajektorije za usporavanje, što nas dovodi do trapeznog profila brzine.

### 5.2.2 Trapezni profil brzine

Trapezni profil brzine predstavlja zapravo realno izvodljivu implementaciju kretanja konstatnom brzinom. Naime, obzirom da robot polazi iz stanja mirovanja, a želimo da se kreće nekom konstantnom brzinom, potrebno je izvesno vreme da se ta brzina dostigne. Takođe, zaustavljanje se ne odvija naglo, nego se pri kraju kretanja kontrolisano koči, i brzina smanjuje do nule.

Razmotrimo sada sa matematičkog aspekta opisano kretanje. Ponovo su date početna  $q_i$  i krajnja pozicija  $q_f$ , kao i ukupno vreme trajanja pokreta  $T_f$ . Ovim parametrima pridružimo još  $T_a$ , vreme predviđeno za ubrzavanje, odnosno usporavanje. Interpolacione funkcije za poziciju, brzinu i ubrzanje kod trapeznog profila brzine prikazane su na Sl.. 5.1. Sa Sl. 5.1. uočavamo, da je u vremenskom intervalu od početnog trenutka do trenutka  $T_a$  ubrzanje pozitivno, konstantno i iznosi  $\ddot{q}_{\max}$ . Jasno je da se onda radi o ravnomeru ubrzanom kretanju, pa brzina kretanja linearno raste, od vrednosti nula, odnosno mirovanja, do vrednosti  $\dot{q}_{\max}$ , dok se pozicija menja po kvadratnom zakonu. Ovaj interval predstavlja period ubrzavanja robota.

Od trenutka  $T_a$  do trenutka  $T_f - T_a$ , vidimo da je ubrzanje jednako nuli, pa se zapravo radi o kretanju konstatnom brzinom  $\dot{q}_{\max}$ , koja se zbog toga naziva brzina krstarenja. U ovom periodu, promena pozicije je linearna funkcija vremena.

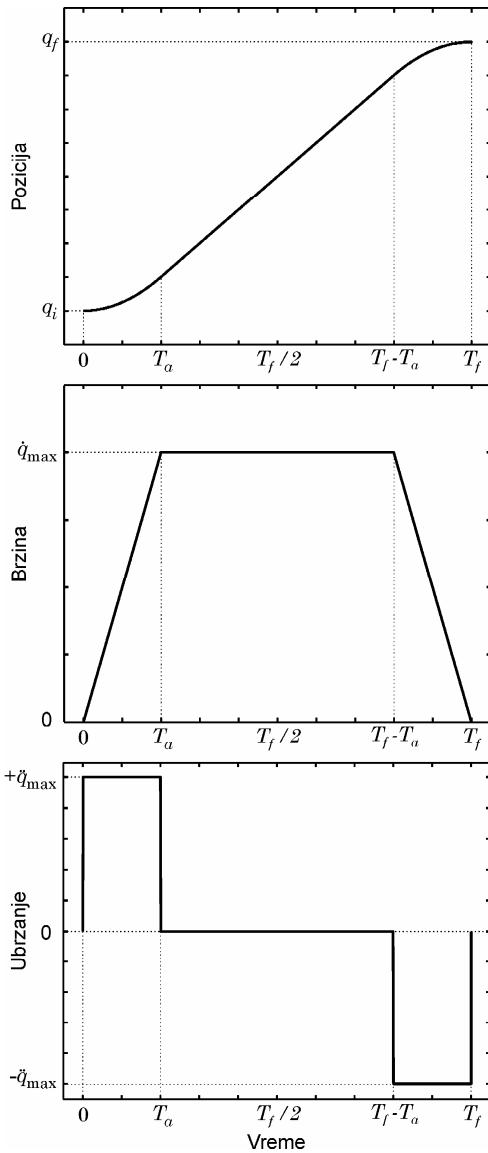
Konačno, od trenutka  $T_f - T_a$  do kraja kretanja, deluje negativno konstantno ubrzanje  $-\ddot{q}_{\max}$ , odnosno usporenje, pa je kretanje ravnomeru usporenjem. Zbog toga brzina linearno opada od brzine krstarenja do nule, kada se robot zaustavlja. Promena pozicije u ovom intervalu ponovo je kvadratna funkcija vremena. Ovaj interval kretanja naziva se period kočenja robota.

Obzirom na izgled grafikona brzine, ovakvo kretanje dobilo je naziv kretanje po trapeznom profilu brzine. Primetimo još da brzina krstarenja, maksimalno ubrzanje i period ubrzavanja odnosno kočenja nisu nezavisne veličine, jer mora da važi

$$\dot{q}_{\max} = \ddot{q}_{\max} \cdot T_a \quad (5.4)$$

Izraze za interpolacione funkcije možemo odrediti na osnovu Sl. 5.1. Lako možemo zaključiti da je ubzanje dato izrazom

$$\ddot{q}(t) = \begin{cases} +\ddot{q}_{\max} & 0 < t \leq T_a \\ 0 & T_a < t \leq T_f - T_a \\ -\ddot{q}_{\max} & T_f - T_a < t \leq T_f \end{cases} \quad (5.5)$$



Sl. 5.1. Trapezni profil brzine

Brzinu možemo odrediti integracijom jednačine (5.5), vodeći računa o početnim uslovima i vezi datoj izrazom (5.4), u sledećem obliku

$$\dot{q}(t) = \begin{cases} \ddot{q}_{\max} \cdot t & 0 < t \leq T_a \\ \ddot{q}_{\max} \cdot T_a & T_a < t \leq T_f - T_a \\ \ddot{q}_{\max} \cdot (T_f - t) & T_f - T_a < t \leq T_f \end{cases}. \quad (5.6)$$

Izraz za poziciju može se dobiti integracijom izraza za brzinu (5.6), vodeći ponovo računa o početnim uslovima, čime se dobija

$$q(t) = \begin{cases} q_i + 0.5 \cdot \ddot{q}_{\max} \cdot t^2 & 0 < t \leq T_a \\ q_i + \ddot{q}_{\max} \cdot T_a \cdot (t - T_a / 2) & T_a < t \leq T_f - T_a \\ q_f - 0.5 \cdot \ddot{q}_{\max} \cdot (T_f - t)^2 & T_f - T_a < t \leq T_f \end{cases}. \quad (5.7)$$

Podsetimo se da smo pošli od pretpostavke da je zadat opseg promene pozicije od  $q_i$  do  $q_f$ , ukupno vreme izvršavanja pokreta  $T_f$ , kao i vreme ubrzavanja, odnosno kočenja  $T_a$ . Jedina nepoznata veličina u izrazima (5.5), (5.6) i (5.7) je maksimalna vrednost ubrzanja  $\ddot{q}_{\max}$ , koja, očigledno, mora da zavisi od polaznih parametara.

Potrebnu vrednost maksimalnog ubrzanja odredićemo na sledeći način. Promena vrednosti pozicije od početne do krajnje, odnosno pređeni put, mora biti jednak površini ispod grafikona brzine. S obzirom na činjenicu da grafikon ima oblik trapeza, lako uspostavljamo vezu

$$q_f - q_i = (\ddot{q}_{\max} \cdot T_a) \cdot (T_f - T_a), \quad (5.8)$$

gde, obzirom na jednačinu (5.4), izraz  $\ddot{q}_{\max} \cdot T_a$  predstavlja visinu trapeza, dok izraz  $T_f - T_a$  predstavlja dužinu njegove srednje linije. Sada potrebnu vrednost ubrzanja možemo odrediti kao

$$\ddot{q}_{\max} = \frac{q_f - q_i}{T_a \cdot (T_f - T_a)}. \quad (5.9)$$

Primetimo još da je u svim prethodnim izrazima logično prepostavljeno da važi

$$T_a \leq \frac{T_f}{2}, \quad (5.10)$$

odnosno, periodi ubrzavanja, odnosno kočenja, ne mogu biti duži od polovine ukupnog vremena.

U specijalnom slučaju, kada je  $T_a = 0.5 \cdot T_f$ , period ubrzavanja i usporavanja traju po polovinu ukupnog vremena kretanja, odnosno, čim se dostigne brzina krstarenja počinje kočenje. Trapezni profil brzine sa Sl. 5.1 tada se deformatiše, jer se gubi središnji deo kretanja konstanom brzinom, pa za ovakvo kretanje kažemo da se odvija po trougaonom profilu brzine.

Već je rečeno da su kretanja robota, sa stanovišta brzine i ubrzanja, ograničena primenjenim aktuatorima. Drugim rečima, postoji maksimalno ubrzanje koje dati aktuator može proizvesti u posmatranom zglobu, kao što je i maksimalna brzina kretanja zgloba ograničena. Zbog toga je u praksi uobičajeno da se, umesto zadavanja vremena trajanja pokreta, i perioda ubrzavanja odnosno usporavanja, zadaju maksimalno ubrzanje, odnosno, želje-

na brzina krstarenja, a da se vremenski parametri izračunaju na osnovu njih.

Prema tome, neka je poznato  $q_i$ ,  $q_f$ ,  $\dot{q}_{\max}$  i  $\ddot{q}_{\max}$ , pri čemu, vrednost brzine krstarenja i maksimalna vrednost ubrzanja mogu biti zaista fizičke maksimalne vrednosti. Tada se dobija najkraće vreme trajanja pokreta. Na osnovu veze (5.4), lako određujemo vreme potrebno za ubrzavanje, odnosno kočenje, kao

$$T_a = \frac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}_{\max}}. \quad (5.11)$$

Smenom dobijenog izraza u jednačinu (5.9), možemo odrediti ukupno trajanje pokreta kao

$$T_f = \frac{q_f - q_i}{\dot{q}_{\max}} + \frac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}_{\max}}. \quad (5.12)$$

Trapezni profil brzine se često primenjuje u praksi, ne samo kod robota, već i kod drugih uređaja koji zahtevaju kretanje konstatnom brzinom, kao što su na primer, alatne mašine, portalne dizalice, elektromotorni pogoni, itd.

Primetimo na kraju da je ubrzanje prekidna funkcija vremena, jer se skokovito menja na granicama perioda ubrzavanja i kočenja. Ova nagla promena ubzanja, odražava se kao trzaj, koji može pobuditi neželjene oscilacije strukture robota, a takođe, nagla promena ubrzanja može biti teško ostvariva sa stanovišta aktuatora. Zbog toga ćemo pokušati da pronađemo interpolacione funkcije, koje bi nam omogućile kontinualnu promenu, ne samo pozicije i brzine, već i ubrzanja. Kao pogodni kandidati za interpolacione funkcije, nameću se polinomi, koje ćemo razmotriti u narednim deljcima.

### 5.2.3 Interpolacija polinomom trećeg stepena

Kao i ranije, polazna osnova za generisanje trajektorije su početna  $q_i$  i krajnja  $q_f$  tačka putanje, i ukupno trajanje pokreta  $T_f$ . Prema tome, mi imamo zadata četiri granična uslova, od kojih se dva odnose na početnu tačku putanje,

$$q(0) = q_i, \quad \dot{q}(0) = 0, \quad (5.13)$$

i još dva koja se odnose na krajnju tačku putanje

$$q(t_f) = q_f, \quad \dot{q}(t_f) = 0. \quad (5.14)$$

Zadatak nam je da pronađemo glatku interpolacionu funkciju koja će nam odrediti pozicije tokom vremena, između početne i krajnje tačke. Kao moguće rešenje prirodno se nameću polinomne funkcije, jer je opšte poznato da su polinomi neprekidne beskonačno diferencijabilne glatke funkcije sa svim svojim izvodima.

Pre nego što pređemo na određivanje interpolacionih polinoma, razmotrimo najpre mogućnost da izvršimo normalizaciju problema, što će nam olakšati ne samo izlaganje, nego i primenu dobijenih polinoma na sintezu kretanja različitih zglobova.

Uvedimo najpre normalizaciju po vremenu, uvođenjem smene

$$\tau = \frac{t}{T_f}, \quad (5.15)$$

čime se realno vreme  $t$  iz intervala  $t \in [0, T_f]$  preslikava u normalizovano vreme  $\tau$  na normalizovanom intervalu  $\tau \in [0, 1]$ .

Uvedimo zatim i normalizovanu poziciju  $p$  tako da se interval promene pozicije  $q$  preslikava na normalizovani interval

$$p = \frac{q - q_i}{q_f - q_i}, \quad [q_i, q_f] \xrightarrow{p(q)} [0, 1]. \quad (5.16)$$

Nakon ovih normalizacija, pozicija zglobova može se odrediti na osnovu

$$q(t)|_{t=\tau T_f} = q_i + (q_f - q_i)p(\tau). \quad (5.17)$$

Diferenciranjem izraza (5.17) možemo odrediti brzinu zglobova u funkciji normalizovane brzine, kao

$$\dot{q}(t) = (q_f - q_i)p'(\tau) \frac{d\tau}{dt}, \quad (5.18)$$

odnosno, obzirom na (5.15),

$$\dot{q}(t)|_{t=\tau T_f} = \frac{q_f - q_i}{T_f} p'(\tau). \quad (5.19)$$

Na sličan način možemo odrediti i ubrzanje zglobova u funkciji normalizovanog ubrzanja kao

$$\ddot{q}(t)|_{t=\tau T_f} = \frac{q_f - q_i}{T_f^2} p''(\tau). \quad (5.20)$$

Dakle, problem sinteze interpolacione funkcije za kretanje zglobova u realnom vremenu, zamenili smo sintezom interpolacione funkcije za normalizovanu poziciju u normalizovanom vremenu. Pri tome je izvršena i normalizacija graničnih uslova, u obliku

$$p(0) = 0, \quad \dot{p}(0) = 0, \quad (5.21)$$

$$p(1) = 1, \quad \dot{p}(1) = 0, \quad (5.22)$$

Obziroma na to da imamo četiri zadata uslova, na osnovu njih možemo odrediti polinom trećeg stepena, koji ima ukupno četiri koeficijenta, u obliku

$$p_3(\tau) = a_3\tau^3 + a_2\tau^2 + a_1\tau + a_0, \quad (5.23)$$

gde su  $a_0$  do  $a_3$  za sada nepoznati koeficijenti.

Da bismo iskoristili granične uslove po brzini normalizovane pozicije, diferencirajmo izraz (5.23), čime se dobija

$$p'_3(\tau) = 3a_3\tau^2 + 2a_2\tau + a_1. \quad (5.24)$$

Smenom uslova (5.21) u jednačine (5.23) i (5.24) lako možemo izračunati slobodne

članove:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0 \quad . \quad (5.25)$$

Smenom graničnih uslova (5.22) u izraze za normalizovanu poziciju (5.23) i brzinu (5.24), dobijamo sistem od dve jednačine sa dve nepoznate oblike

$$\begin{aligned} 1 &= a_3 + a_2 \\ 0 &= 3a_3 + 2a_2, \end{aligned} \quad (5.26)$$

čijim se rešavanjem određuju nepoznati koeficijenti

$$a_2 = 3, \quad a_3 = -2, \quad (5.27)$$

tako da je normalizovani interpolacioni polinom dat sa

$$p_3(\tau) = -2\tau^3 + 3\tau^2, \quad (5.28)$$

a normalizovana brzina je

$$p'_3(\tau) = -6\tau^2 + 6\tau, \quad (5.29)$$

dok je normalizovano ubrzanje dato sa

$$p''_3(\tau) = -12\tau + 6. \quad (5.30)$$

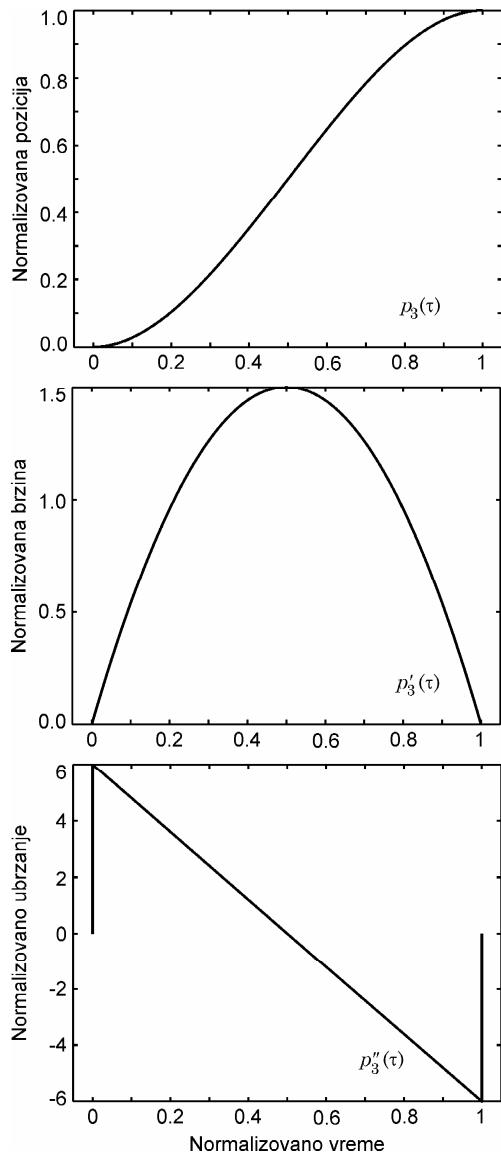
Grafički izgled normalizovane pozicije, brzine i ubrzanja prikazan je na Sl. 5.2. Sa slike uočavamo da je normalizovana pozicija zaista glatka funkcija vremena, kao i normalizovana brzina. Primetimo da normalizovana brzina kreće od nule, dostiže svoj maksimum na polovini vremena, a zatim opada do nulte vrednosti. Maksimalna vrednost normalizovane brzine iznosi

$$p'_{3\max} = 1.5. \quad (5.31)$$

Vidimo takođe da je normalizovano ubrzanje linearna funkcija normalizovanog vremena, međutim nije neprekidna. Naime, u početnom trenutku, ubrzanje ima skok od nulte vrednosti, na maksimalnu pozitivnu vrednost, a u krajnjem trenutku, sa maksimalne negativne vrednosti naglo pada na nulu. Maksimalna absolutna vrednost normalizovanog ubrzanja iznosi

$$p''_{3\max} = 6. \quad (5.32)$$

Kao što je već rečeno, diskontinuiteti u ubrzaju su nepoželjni, jer mogu pobuditi oscilacije u kretanju robota. Takođe, moramo biti svesni činjenice da ubrzanje ne može trenutno da se promeni. Skokovita promena ubrzanja implicira skokovitu promenu sile ili momenta aktuatora, a to dalje znači veliki utrošak energije u jako kratkom vremenskom intervalu, odnosno, beskonačnu snagu, što svakako nije fizički ostvarljivo. Drugim rečima, kretanje dobiteno interpolacionim polinomom trećeg stepena nije dovoljno glatko, jer poseduje prekide u ubrzaju.



Sl. 5.2. Normalizovana pozicija, brzina i ubrzanje kod interpolacije polinomom trećeg stepena

Ako želimo da ove prekide eliminišemo, možemo da pokušamo da povećamo stepen interpolacionog polinoma.

### 5.2.4 Interpolacija polinomom petog stepena

Ako želimo da dobijemo kretanje kod koga ubrzanje neće imati diskontinuitete, onda graničnim uslovima po poziciji i brzini moramo pridružiti i granične uslove po ubrzaju. Naime, s obzirom na to da robot kreće iz stanja mirovanja, ubrzanje u početnom trenutku mora biti jednako nuli. Takođe, obzirom na to da se na kraju kretanja robot zaustavlja, ubrzanje mora biti jednako nuli. Takođe, normalizovano ubrzanje treba da je kontinualna funkcija normalizovanog vremena, pri čemu imamo dva nova granična uslova vezana za ubrzanje. Broj graničnih uslova povećao se sada na šest:

$$p(0) = 0, \quad p'(0) = 0, \quad p''(0) = 0, \quad (5.33)$$

$$p(1) = 1, \quad p'(1) = 0, \quad p''(1) = 0, \quad (5.34)$$

tako da možemo potražiti interpolacioni polinom petog stepena, oblika

$$p_5(\tau) = a_5\tau^5 + a_4\tau^4 + a_3\tau^3 + a_2\tau^2 + a_1\tau + a_0, \quad (5.35)$$

pri čemu koeficijente  $a_i, i = 0, \dots, 5$  određujemo iz graničnih uslova.

Diferenciranjem izraza (5.35) po normalizovanom vremenu dobija se izraz za normalizovanu brzinu, a ponovnim diferenciranjem i izraz za normalizovano ubrzanje. Smenom graničnih uslova (5.33) i (5.34) u polinome za normalizovanu poziciju, brzinu i ubrzanje dobija se sistem jednačina čijim rešavanjem se određuju nepoznati koeficijenti. Konačno rešenje je oblika

$$p_5(\tau) = 6\tau^5 - 15\tau^4 + 10\tau^3, \quad (5.36)$$

dok je izraz za normalizovanu brzinu dat sa

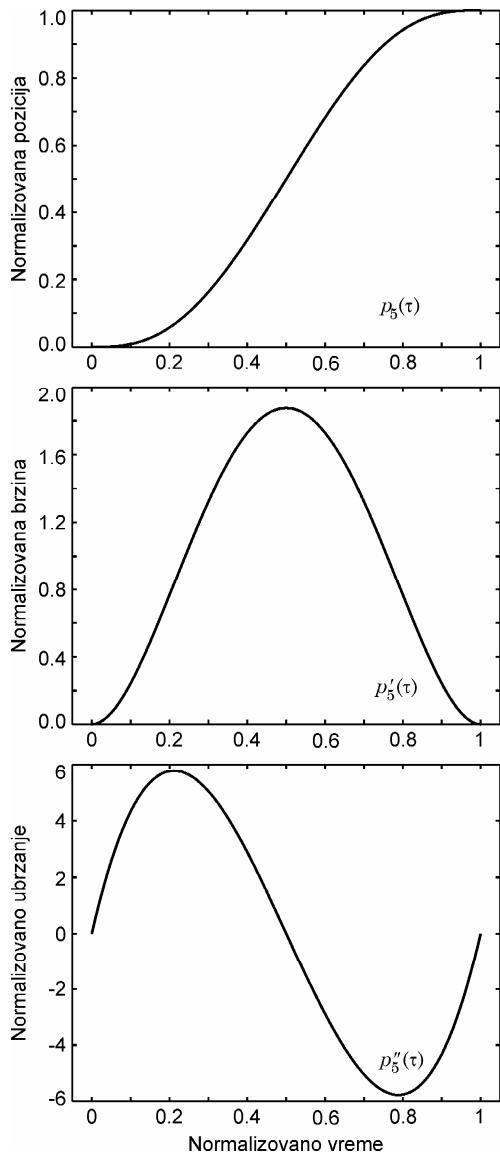
$$p'_5(\tau) = 30\tau^4 - 60\tau^3 + 30\tau^2, \quad (5.37)$$

a normalizovano ubrzanje je određeno sa

$$p''_5(\tau) = 120\tau^3 - 180\tau^2 + 60\tau. \quad (5.38)$$

Zavisnost normalizovane pozicije, brzine i ubrzanja u funkciji normalizovanog vremena grafički je prikazana na Sl. 5.3. Uporedimo dobijene rezultate sa interpolacionim polinomom trećeg stepena. Primećujemo da je kriva normalizovane pozicije nešto strmija u sredini vremenskog intervala, a nešto više zaravnjena na početku i kraju kretanja, što je posledica činjenice da je tada ubrzanje jednako nuli. Na grafikonu normalizovane brzine, primećujemo da kriva ima izraženiji zvonasti oblik, pri čemu je kriva uža nego kod polinoma trećeg stepena. Obzirom na to da je predeni put jednak u oba slučaja, a to je površina ispod krive brzine, maksimalna brzina, koja se ponovo javlja u sredini intervala, veća je nego kod polinoma trećeg reda, i iznosi

$$q'_{5 \max} = 15/8 = 1.875. \quad (5.39)$$

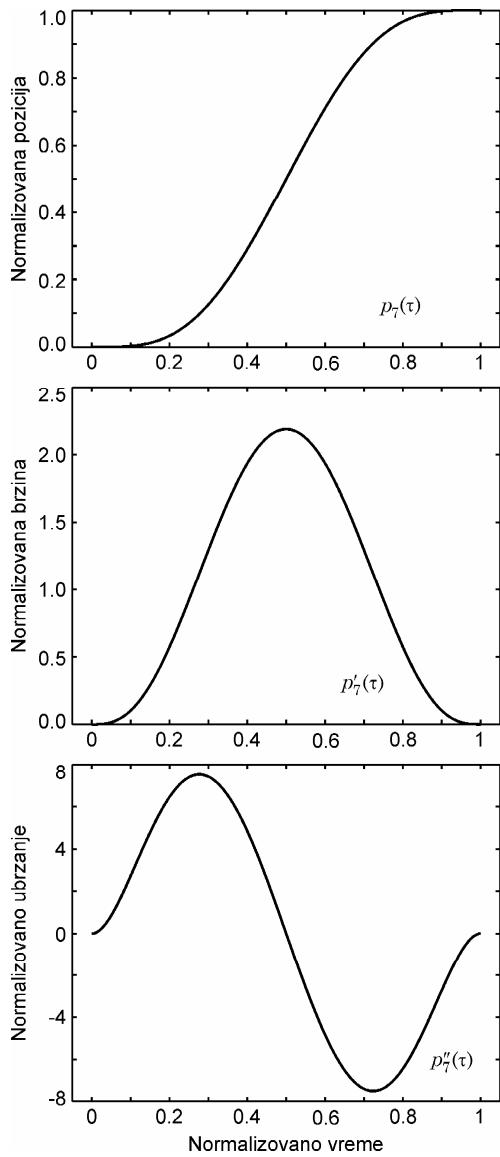


Sl. 5.3. Normalizovana pozicija, brzina i ubrzanje kod interpolacije polinomom petog stepena

Konačno, grafikon ubrzanja pokazuje da se ono kontinualno menja, a maksimalna apsolutna vrednost iznosi

$$q''_{\max} = 10\sqrt{3}/3 = 5.773 \quad (5.40)$$

Vidimo da smo u slučaju interpolacije polinomom petog stepena uspeli da ostvarimo glatko kretanje koje nema prekide u ubrzanju. Međutim, ni to ponekada nije dovoljno, jer može



Sl. 5.4. Normalizovana pozicija, brzina i ubrzanje kod interpolacije polinomom sedmog stepena postojati potreba da i viši izvodi pozicije budu kontinualni. Tada moramo primeniti polinome još većeg stepena.

### 5.2.5 Interpolacija polinomom sedmog stepena

U nekim aplikacijama robota, od interesa je da izvod ubrzanja, odnosno, treći izvod

pozicije, takođe bude kontinualna funkcija. Ovaj izvod ubrzanja u literaturi se obično označava kao "trzaj", što bi bio slobodan prevod engleskog termina "jerk". Da bi se to postiglo, graničnim uslovima (5.33) i (5.34) dodaju se još uslovi po trećem izvodu pozicije

$$p'''(0) = 0, \quad p'''(1) = 0, \quad (5.41)$$

čime se ukupan broj uslova povećao na osam, pa možemo konstruisati interpolacioni polinom sedmog stepena. Smenom graničnih uslova u izraz za polinom i njegove izvode, i rešavanjem sistema jednačina određuju se koeficijenti polinoma. Konačno rešenje je oblika

$$p_7(\tau) = -20\tau^7 + 70\tau^6 - 84\tau^5 + 35\tau^4, \quad (5.42)$$

dok je normalizovana brzina data sa

$$p'_7(\tau) = -140\tau^6 + 420\tau^5 - 420\tau^4 + 140\tau^3, \quad (5.43)$$

a normalizovano ubrzanje je

$$p''_7(\tau) = -840\tau^5 + 2100\tau^4 - 1680\tau^3 + 420\tau^2. \quad (5.44)$$

Grafički prikaz normalizovane pozicije, brzine i ubrzanja dat je na Sl. 5.4. U poređenju sa interpolacionim polinomima petog i trećeg stepena, važe slični zaključci kao i kod prethodnog poređenja. Kriva normalizovane pozicije je sada još strmija u sredini intervala, a zaravnjenija na krajevima. Kriva normalizovane brzine je uža, ali je zato maksimum veći, i iznosi

$$q'_{7 \max} = 35/16 = 2.1875. \quad (5.45)$$

Konačno, i kriva normalizovanog ubrzanja nešto sporije raste, odnosno opada na krajevima intervala, ali je zato absolutna maksimalna vrednost ubrzanja sada povećana na

$$q''_{7 \max} = 84\sqrt{5}/25 = 7.513. \quad (5.46)$$

Iz prethodne analize možemo zaključiti, da što je blaži polazak i završetak kretanja, to su potrebne veće maksimalne brzine i ubrzanja da bi se kretanje obavilo za isto vreme.

### 5.2.6 Primena normalizovanih interpolacionih polinoma

Primenom normalizacije po vremenu, i po vrednosti, uspeli smo da izraze za polinome različitih stepena učinimo nezavisnim od stvarnih parametara kretanja. U praksi, da bi se izrazi iskoristili, izračunavanja iz domena normalizovanih polinoma, moraju se putem relacija (5.17), (5.19), i (5.20) vrati u realno vreme, i realni opseg pozicija.

Pri tome je opseg promene pozicija zadat, odnosno, poznate su početna  $q_i$ , i krajnja pozicija  $q_f$ . Već smo videli, da se iz razloga limitiranih mogućnosti aktuatora, u praksi češće barata sa maksimalnim dozvoljenim ubrzanjima i brzinama, nego sa zadatim vremenom trajanja pokreta. Razlog tome je vrlo jednostavan, ako se zada suviše kratko vreme, trajektorija se ne može fizički ostvariti. Ako se pak, zada suviše dugačko vreme, onda se pokreti izvode nepotrebno sporo.

Razmotrimo postupak određivanja vremena izvršenja trajektorije, pod prepostavkom da su

poznate maksimalne dozvoljene veličine brzine  $\dot{q}_{\max}$  i ubrzanja  $\ddot{q}_{\max}$  zgloba.

Obzirom na vezu između brzine zgloba i normalizovane brzine, datu jednačinom (5.19), može se uspostaviti relacija između njihovih maksimalnih vrednosti

$$\dot{q}_{\max} = \frac{q_f - q_i}{T_{fv}} p'_{\max}, \quad (5.47)$$

odakle se određuje potrebno vreme trajanja pokreta sa stanovišta brzine, kao

$$T_{fv} = \frac{q_f - q_i}{\dot{q}_{\max}} p'_{\max}. \quad (5.48)$$

Sličnom analizom na osnovu jednačine (5.20), može se odrediti potrebno vreme izvršavanja pokreta sa stanovišta ubrzanja, kao

$$T_{fa} = \sqrt{\frac{q_f - q_i}{\ddot{q}_{\max}} p''_{\max}}, \quad (5.49)$$

pri čemu se, u izraze (5.48) i (5.49) smenjuju maksimalne vrednosti normalizovanih brzina, izrazi (5.31), i (5.45), odnosno maksimalne vrednosti normalizovanih ubrzanja, izrazi (5.32), (5.40), i (5.46), aproksimacionih polinoma izabranog stepena.

Za potrebno vreme trajanja pokreta zglobova usvaja se restriktivnije rešenje, odnosno duže vreme,

$$T_f = \max\{T_{fv}, T_{fa}\}, \quad (5.50)$$

da bi se izbeglo premašivanje fizički ostvarljivih granica.

Imajući u vidu da je izložena procedura nezavisna za svaki zglob, a da zglobovi mogu imati i različite opsege zadatog kretanja, i različite maksimalne vrednosti brzine i ubrzanja, nakon završetka analize sprovedene izračunavanjem jednačina (5.48), (5.49), i (5.50), za svaki od zglobova, imaćemo zapravo skup od  $n$  određenih vremena trajanja pokreta

$$\{T_{f1}, \dots, T_{fi}, \dots, T_{fn}\}. \quad (5.51)$$

Imamo sada dve mogućnosti. Prema prvoj, možemo pustiti da se svaki zglob kreće prema svojim maksimalnim parametrima. Pri tome, u opštem slučaju, vremena kretanja za pojedine zglobove biće različita, odnosno, neki zglobovi će ranije završiti pokret od drugih. Prema drugom pristupu, za vreme izvršenja pokreta usvojićemo najduže izračunato vreme

$$T_f = \max_i(T_{fi}), \quad (5.52)$$

pri čemu će trajanje pokreta za sve zglobove biti jednako. Primetimo da se pri ovom pokretu, maksimalnom brzinom kreće samo zglob za čije kretanje je potrebno najviše vremena, a preostali zglobovi se usporavaju, tako da vreme izvršenja pokreta bude jednak.

### 5.2.7 Nadovezivanje trajektorija

Sve tehnike za sintezu trajektorije koje smo do sada obradili, rešavale su problem izolovanog kretanja od tačke do tačke, odnosno, robot kreće iz stanja mirovanja, i u

završnoj tački putanje se ponovo zaustavlja. Sada smo zainteresovani za problem nadovezivanja trajektorija, odnosno, za slučaj kada postoji više segmenata kretanja, pri čemu je završna tačka prethodnog segmenta ujedno i početna tačka narednog, i tako redom. Ove središnje tačke između dva segmenta kretanja često se nazivaju čvorne tačke putanje, prema engleskom terminu "path knot point".

Jedno moguće rešenje se samo po sebi nameće. Tretirajmo svaki od segmenata kretanja nezavisno od ostalih, primenom neke od interpolacionih funkcija koje smo već razmotrili. Time se problem sinteze trajektorije svodi na problem sinteze segmenata trajektorije, koji je već rešen. Osnovna mana ovakvog pristupa je u tome, što će u čvornim tačkama doći do zaustavljanja robota. Ovakvo kretanje, osim što deluje neprirodno, jer je isprekidano čestim zaustavljanjem, zahteva i duže vreme izvršavanja u odnosu na kretanje kod kojeg zaustavljanja ne bi bilo.

Ako želimo da izbegnemo zaustavljanje u čvornim tačkama, mora se drugačije pristupiti rešavanju problema sinteze trajektorije. Pri tome se pristup za kretanje po trapeznom profilu brzine razlikuje od pristupa kod polinomne aproksimacije, pa ćemo ih posebno razmotriti.

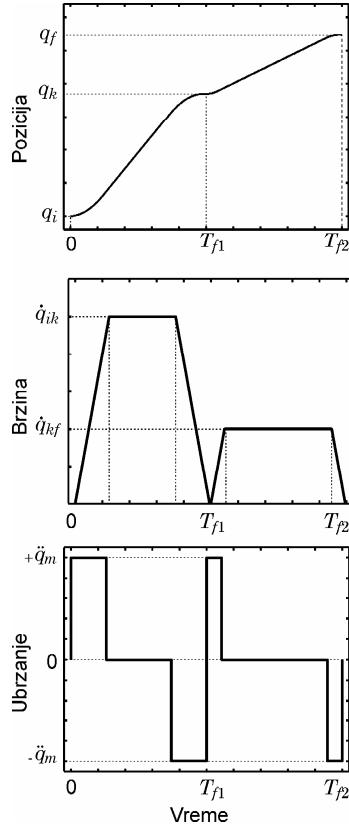
Zadržimo se najpre na problemu nadovezivanje trajektorija kod trapeznog profila brzine. Radi pojednostavljenja izlaganja, prepostavimo da su zadata samo dva segmenta trajektorije, preko tačaka  $q_i$ ,  $q_k$  i  $q_f$ , gde su kao i ranije,  $q_i$  i  $q_f$  početna i krajnja tačka putanje, a  $q_k$  je čvorna tačka između njih. Prepostavimo dalje, da je željena brzina krstarenja na prvom segmentu trajektorije  $\dot{q}_{ik}$ , a na drugom  $\dot{q}_{kf}$ , i da su ove dve brzine različite. Neka je dato i maksimalno ubrzanje  $\ddot{q}_m$  koje je isto na oba segmenta trajektorije. Primenom klasičnog postupka sinteze trajektorije po trapeznom profilu brzine, za svaki od segmenata pojedinačno, dobija se rezultujuće kretanje koje je prikazano na Sl. 5.5 sa leve strane.

U ovom primeru, kretanje u oba segmenta vrši se u istom smeru. Sa slike uočavamo da brzina kretanja opada od vrednosti  $\dot{q}_{ik}$  do nule, a zatim od nule raste do vrednosti  $\dot{q}_{kf}$ , odnosno, kretanje se zaustavlja u čvornoj tački. Logično rešenje u ovoj situaciji bilo bi, da se brzina promeni od  $\dot{q}_{ik}$  do  $\dot{q}_{kf}$ , bez nepotrebogn zaustavljanja. U tom slučaju, uštedelo bi se na delu vremena potrebnom da se brzina smanji do nule, kao i na delu potrebnom da bi se brzina potom vratila na traženu vrednost. Drugim rečima, dva trapezna profila možemo delimično preklopiti, i tako izbeći nepotrebno zaustavljanje.

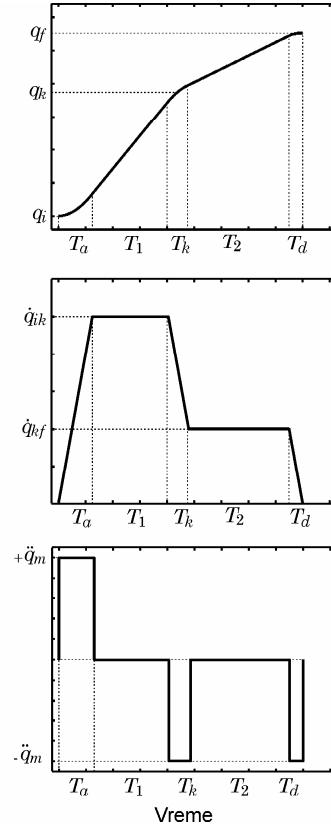
Postoje različiti načini da se izvrši pomenuto preklapanje, a izbor se zapravo svodi na određivanje pravog trenutka, kada treba početi kočenje, da bi se sa jedne brzine krstarenja prešlo na drugu. Na primer, sa promenom brzine može se otpočeti tek kada se dostigne pozicija  $q_k$ . Drugi pristup mogao bi biti da promenu brzine, odnosno kočenje otponemo tako da u tački  $q_k$  brzine bude jednaka novoj zadatoj vrednosti  $\dot{q}_{kf}$ . Promenu brzine možemo organizovati i tako da u poziciji definisanoj sa  $q_k$  brzina bude srednja vrednost dve zadate brzine. To bi praktično značilo da je period kočenja simetrično raspoređen u odnosu na tačku  $q_k$ . Rešenje poslednjeg opisanog pristupa prikazano je na Sl. 5.5 sa desne strane.

Obzirom na to da je broj mogućnosti za izbor trenutka početka kočenja, vrednosti ubrzanja i usporenja, vrednosti brzine na pojedinim segmentima, itd. jako veliki, izvođenje jednačina koje opisuju modifikaciju trapeznog profila odnело bi previše prostora. Čitaocima je ostavljeno za vežbu da samostalno izvedu jednačine za željeni režim spajanja segmenata.

### Planiranje kretanja



### Industrijska robotika



Sl. 5.5. Nadovezivanje trajektorije sa trapeznim profilom brzine, levo sa zaustavljanjem u čvornoj tački, i desno, bez zaustavljanja u čvornoj tački

Razmotrimo sada problem nadovezivanja trajektorija kod polinomne interpolacije. Nadovezivanje se može sada organizovati na drugačiji način. Naime, dodavanje novih čvornih tačaka predstavlja zapravo dodavanje novih uslova, odnosno novih podataka o trajektoriji. Zbog toga se stepen interpolacionog polinoma može povećati. Ako je, pored pozicije čvorne tačke, zadata i brzina u njoj, onda je broj uslova, odnosno količina informacija o trajektoriji još veća, pa i stepen interpolacionog polinoma može biti veći. Problem polinomne interpolacije kroz čvorne tačke dobro je proučen u numeričkoj matematici, a jedinstveno rešenje za problem sa  $n$  čvornih tačaka daje Lagranžov interpolacioni polinom  $n$ -tog stepena, odnosno, ako su pored pozicija zadate i brzine u  $m$  čvornih tačaka, Hermitov interpolacioni polinom  $(n+m)$ -tog stepena.

Napomenimo odmah da se ovakav pristup veoma retko koristi u praksi, iako na prvi pogled deluje atraktivno. Naime, sa povećanjem broja čvornih tačaka, raste stepen interpolacionog polinoma. Iz algebre je poznato da polinom  $n$ -tog stepena ima tačno  $n$  nula, pa polinomi visokog stepena teže ka oscilatornom ponašanju. Iako Lagranžov i Hermitov algoritam garantuju da će interpolacioni polinom proći kroz čvorne tačke, nema nikakvih pokazatelja o ponašanju polinoma između čvornih tačaka, a ono je najčešće oscilatorno. To bi zapravo

značilo, da krećući se od jedne čvorne tačke ka narednoj, robot napravi preskok pa se vrati u čvornu tačku, ili najpre podje u suprotnu stranu, pa onda promeni smer i vrati se u čvornu tačku. Svakako, ovo nije ponašanje kakvo bismo želeli da vidimo kod robota.

Zbog toga se pribegava drugačijem rešenju. Ukupan interval interpolacije deli se na podintervale, između čvornih tačaka. Na svakom podintervalu usvaja se interpolaciona funkcija u obliku polinoma nižeg stepena, a sistemu uslova, odnosno ograničenja, pored zadatih čvornih tačaka, dodaju se uslovi kontinualnosti brzine odnosno ubrzanja u čvornim tačkama. Drugim rečima, iako brzina i ubrzanje u čvornim tačkama nisu unapred određeni, zahteva se njihova neprekidnost, odnosno, vrednosti dobijene na osnovu prethodnog i narednog interpolacionog polinoma moraju biti jednakе. Ovakva vrsta interpolacije naziva se u matematici interpolacija splajnovima, a kada su u pitanju polinomi trećeg stepena, govorimo o interpolaciji kubnim splajnovima. Teorija splajnova izlazi izvan okvira ove knjige, a zainteresovani čitaoci svakako mogu pronaći dodatne informacije u odgovarajućoj matematičkoj literaturi.

### 5.3 PLANIRANJE CP KRETANJA

Kao što je već rečeno, pod CP kretanjem podrazumevamo kretanje po kontinualnim putanjama. Imajući u vidu da je za obavljanje zadatka važno kretanje vrha robota, prirodno je da se planiranje ovakvog kretanja obavlja u prostoru spoljašnjih koordinata.

Planiranje CP kretanja je složenije u odnosu na planiranje PTP kretanja iz više razloga. Najpre, kod PTP kretanja, putanje i trajektorije koje nisu bile od interesa birane su tako da budu jednostavne funkcije. Ovde to nije slučaj, putanja može biti proizvoljno složena u zavisnosti od tipa zadatka koji robot obavlja, pa prema tome i trajektorija može imati složenu zavisnost tokom vremena. Dalje, kao što ćemo videti u narednom poglavljju, za izvršavanje trajektorija najčešće je potrebna informacija o kretanju zglobova. To znači da se problem inverzne kinematike mora rešiti za svaku tačku trajektorije, što može biti složen, računski zahtevan, pa samim tim i dugotrajan proces.

Jedan pristup sintezi CP kretanja je da se trajektorija zada kao skup bliskih čvornih tačaka kroz koje vrh robota treba da prode, a da se zatim izvrši interpolacija ovih tačaka. Ovakav pristup ne razlikuje se mnogo od do sada izloženih postupaka za sintezu PTP trajektorija, osim što je generalno potrebno mnogo više čvornih tačaka. Interpolacija splajnovima može se i u ovom slučaju pokazati kao vrlo dobro i primenljivo rešenje.

Mi ćemo sada razmotriti drugačiji pristup, a to je analitičko zadavanje putanja i trajektorija vrha robota. Kao što je to već rečeno, u najopštijem slučaju, pozicija i orientacija vrha robota u prostoru može se opisati sa šest nezavisnih veličina, odnosno vektorom

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{3 \times 1} \\ \mathbf{o}_{3 \times 1} \end{bmatrix}_{6 \times 1}, \quad (5.53)$$

gde  $\mathbf{p}$  predstavlja podvektor koji sadrži tri parametra koja opisuju poziciju vrha robota u prostoru, dok  $\mathbf{o}$  predstavlja podvektor koji sadrži tri parametra koja predstavljaju orientaciju vrha robota.

U specifičnim slučajevima, vektor  $\mathbf{r}$  može imati i manje dimenzije od šest, kao na primer, kada nije potrebna potpuna orientacija, ili orientacija uopšte nije od interesa, odnosno u slučajevima ravanskog kretanja, itd. Mi ćemo na dalje razmatrati opšti slučaj, a problem

sinteze trajektorije razdvojićemo na problem definisanja pozicije, i problem zadavanja orijentacije, koje ćemo zasebno izučiti.

### 5.3.1 Parametrizovano zadavanje pozicije u prostoru

Kada se radi o definisanju pozicije u prostoru, tada je vektor pozicije vrha robota najčešće određen u pravouglom dekartovom koordinatnom sistemu

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (5.54)$$

gde su  $x$ ,  $y$  i  $z$  koordinate željene pozicije vrha izražene u odnosu na referentni koordinatni sistem. Moguće su naravno i druge vrste koordinatnih sistema, na primer, polarno-cilindrični, ili sferni koordinatni sistem, ali su dekartove pravougle koordinate najjasnije i intuitivno najlakše za rad, pa se zbog toga najčešće i koriste.

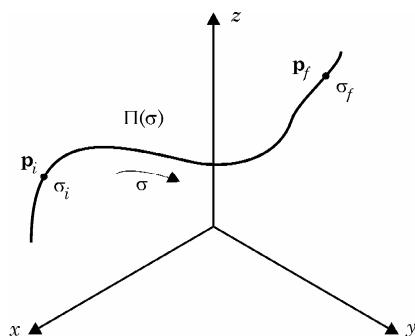
Imajući u vidu da želimo da izvršimo sintezu trajektorije u prostoru analitičkim putem, najpre moramo pronaći analitički izraz za putanju u prostoru. Primetimo da je putanja  $\Pi$  zapravo kontinualni skup tačaka u prostoru koji odgovaraju nekoj liniji u prostoru. Imajući to u vidu,  $\Pi$  je zapravo jednodimenzionalni skup, pa se može pronaći jedan parametar  $\sigma$ , tako da putanja bude opisana sa

$$\mathbf{p} = \Pi(\sigma), \quad (5.55)$$

odnosno,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(\sigma) \\ y(\sigma) \\ z(\sigma) \end{bmatrix}, \quad (5.56)$$

gde je  $\sigma$  neki geometrijski parametar koji opisuje putanju. Ovaj koncept prikazan je na Sl. 5.6.



Sl. 5.6. Parametarska definicija putanje u prostoru

Početna tačka putanje  $p_i$  određena je početnom vrednošću parametra  $\sigma_i$ , dok je krajnja

tačka putanje  $p_f$  određene krajnjom vrednošću parmetra  $\sigma_f$ . Primetimo još da je putanja orientisana, jer porast vrednosti parametra  $\sigma$  određuje smer kretanja duž putanje. Takođe, putanja može biti i zatvorena, kada je  $p_f = p_i$ , ili otvorena, kao što je to slučaj na Sl. 5.6.

Prema tome, promena parametra  $\sigma$ , od početne vrednosti  $\sigma_i$  do krajnje vrednosti  $\sigma_f$  u potpunosti definiše položaj vrha robota duž putanje. Ako parametru  $\sigma$ , odnosno njegovoj promeni, pridružimo i vremensku zavisnost  $\sigma = \sigma(t)$ , tada je u potpunosti definisana i trajektorija vrha robota.

Funkcionalna zavisnost  $\sigma = \sigma(t)$  definiše se preslikavanjem vremenskog intervala  $[T_i, T_f]$  za koji treba da se obavi kretanje duž putanje, na interval promene geometrijskog parametra koji definiše putanju od početne do krajnje tačke:

$$[T_i, T_f] \xrightarrow{\sigma = \sigma(t)} [\sigma_i, \sigma_f], \quad (5.57)$$

pri tome, veličina vremenskog intervala utiče na brzinu kretanja, odnosno, kraći vremenski interval znači brže kretanje, i obrnuto, dok oblik fukncije  $\sigma(t)$  definiše profil kretanja.

Za profil kretanja  $\sigma(t)$  možemo iskoristiti neku od funkcija koje smo već razmatrali kod sinteze PTP kretanja: trapezni ili trougaoni profil brzine, ili polinomne interpolacije odgovarajućeg stepena, itd.

Na ovaj način, problem sinteze trajektorije rešava se u dva koraka. U prvom je potrebno odrediti izraze za parametrizovanu trajektoriju u prostoru, dok se u drugom koraku geometrijskom parametru pridružuje željeni vremenski profil.

Razmotrimo sada malo podrobnije prirodu geometrijskog parametra  $\sigma$ . Već je rečeno da on određuje položaj tačke duž putanje  $\Pi$ , odnosno, duž krive u prostoru. Podsetimo se da kriva u prostoru može biti zadata eksplicitno svojim jednačinama, ili kao presek dve površi u prostoru. U svakom slučaju, uvek postoji mogućnost da se putanja parametrizuje. Od svih mogućih parametara kojima je moguće opisati putanju, kao najvažniji se izdvaja krivolinijska koordinata  $s$ , definisana kao pređeni put, ili dužina luka krive od neke fiksirane tačke usvojene za koordinatni početak, do posmatrane tačke.

Krivolinijska koordinata  $s$  najčešće se definiše preko svog diferencijalnog priraštaja

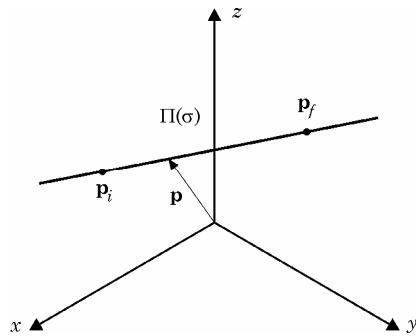
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \quad (5.58)$$

gde su  $dx$ ,  $dy$  i  $dz$  diferencijalni priraštaji krive duž koordinatnih osa.

Kod jednostavnijih putanja, krivolinijska koordinata  $s$  se prirodno nameće kao najpodesnija veličina za parametrizaciju. Kod složenijih putanja, krivolinijska koordinata može biti složena, ili transcedentna funkcija, pa se kao parametar usvaja neka druga, pogodna veličina.

Razmotrimo sada nekoliko primera određivanja parametrizovanih putanja. Uzmimo najpre najjednostavniji primer, kretanja po pravoj liniji u prostoru, kao što je to prikazano na Sl. 5.7.

Podsetimo se da se u analitičkoj geometriji prava u prostoru, koja prolazi kroz dve tačke zadate vektorima  $p_i$  i  $p_f$  može definisati kao



Sl. 5.7. Putanja u obliku prave linije u prostoru

$$p - p_i = \sigma(p_f - p_i), \quad (5.59)$$

gde jednačina izražava činjenicu da vektor povučen iz početne tačke  $p_i$  do bilo koje tačke na pravoj  $p$ , mora biti kolinearan vektoru između tačaka  $p_i$  i  $p_f$ , pri čemu je  $\sigma$  faktor kolinearnosti. Jednačina (5.59) se može preformulirati tako da odmah dobijemo parametrizovanu putanju oblika

$$p = p_i + \sigma(p_f - p_i), \quad (5.60)$$

ili, razvijeno po koordinatama

$$p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i + \sigma(x_f - x_i) \\ y_i + \sigma(y_f - y_i) \\ z_i + \sigma(z_f - z_i) \end{bmatrix}. \quad (5.61)$$

Ako su  $p_i$  i  $p_f$  početna, odnosno krajnja tačka putanje, tada je opseg promene parametra  $\sigma$  u intervalu  $[0,1]$ .

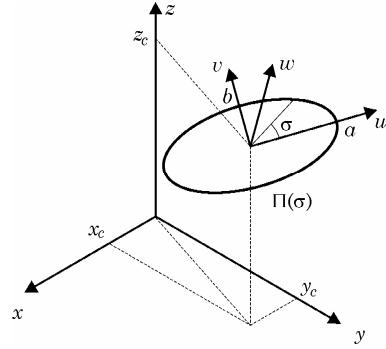
Primetimo da u ovom slučaju, parametar  $\sigma$  koji je uveden kao čisto geometrijski parametar, ima prirodu krivolinijske koordinate  $s$ . Zaista, imajući u vidu relaciju (5.58), i određivanjem diferencijala izraza (5.61), dobijamo

$$ds = \sqrt{(x_f - x_i)^2 + (y_f - y_i)^2 + (z_f - z_i)^2} \cdot d\sigma, \quad (5.62)$$

odnosno, piraštaj krivolinijske kooordinate, ili pređenog puta  $s$ , proporcionalan je piraštaju geometrijskog parametra  $\sigma$ .

Da bi problem sinteze trajektorije bio u potpunosti rešen, preostaje nam samo da izaberemo vremensku zavisnost, odnosno profil promene  $\sigma(t)$ . Kao što je već rečeno, za ove svrhu možemo iskoristiti na primer trapezni profil brzine, pri čemu će se, zbog prirode parametra  $\sigma$ , zaista dobiti trapezna promena brzine vrha robota.

Razmotrimo sada problem sinteze trajektorije u slučaju da želimo da se vrh robota kreće po nekoj elipsi u prostoru. Obzirom da je elipsa ravanska kriva, i problem određivanja parametarske reprenzentacije putanje rešićemo najpre u ravni koja sadrži elipsu, a zatim čemu tu ravan rotirati i translirati u prostoru na željeni način. Ova situacija prikazana je na Sl. 5.8.



Sl. 5.8. Izgled putanje oblika elipse u prostoru

Označimo sa  $u$ ,  $v$  i  $w$  koordinate koordinatnog sistema koji je vezan za elipsu, tako da se njegov koordinatni početak poklapa sa centrom elipse, a ose  $u$  i  $v$  određuju ravan u kojoj elipsa leži. Neka su poluose elipse određene sa  $a$  i  $b$ , tada se jednačina elipse može napisati kao:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos(\sigma) \\ b \sin(\sigma) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.63)$$

gde je  $\sigma$  parametar koji promenom u opsegu  $\sigma \in [0, 2\pi]$  opisuje celu elipsu.

Neka je početak vezanog koordinatnog sistema transliran, a njegove ose rotirane u odnosu na ose referentnog sistema. Tada se veza između dva koordinatna sistema može uspostaviti preko matrice homogene transformacije između koordinatnih sistema  $O\text{-}xyz$  i  $O\text{-}uvw$  ili, što je isto, u razvijenoj formi

$$P = p_c + R \cdot p_{uvw}, \quad (5.64)$$

gde je  $p_c = [x_c, y_c, z_c]^T$  položaj centra vezanog koordinatnog sistema, odnosno centra elipse, a

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}, \quad (5.65)$$

matrica rotacije koja izražava vezu između orientacije osa vezanog i referentnog koordinatnog sistema. Primetimo da su vektor  $p_c$  i matrica  $R$  konstantni.

Parametarska jednačina elipse u prostoru sada se može izraziti kao

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c + r_{11}a \cos(\sigma) + r_{12}b \sin(\sigma) \\ y_c + r_{21}a \cos(\sigma) + r_{22}b \sin(\sigma) \\ z_c + r_{31}a \cos(\sigma) + r_{32}b \sin(\sigma) \end{bmatrix}, \quad (5.66)$$

što zajedno sa profilom promene parametra  $\sigma(t)$  određuje i trajektoriju u prostoru.

Primetimo da u ovom slučaju parametar  $\sigma$  ima geometrijski smisao koji se ne može lako povezati sa krivolinijskom koordinatom  $s$ . Da bismo se u to uverili, potražimo diferencijalne priraštaje koordinata duž putanje, i iskoristimo izraz za priraštaj krivolinijske koordinate (5.58). Pri tome, imamo u vidu da su koeficijenti  $r_{ij}$  elementi rotacione matrice. Za rotacionu matricu  $R$  znamo da su njene kolone, odnosno vrste zapravo jedinični vektori. Takođe važi i da su kolone matrice uzajamno ortogonalne, a ortogonalnost važi i za vrste. Primenom ovih osobina dobija se izraz

$$ds = \sqrt{a^2 \sin^2(\sigma) + b^2 \cos^2(\sigma)} \cdot d\sigma. \quad (5.67)$$

Iz dobijenog izraza vidimo da postoji složena veza između geometrijskog parametra  $\sigma$  i krivolinijske koordinate  $s$  koja je određena eliptičkim integralom tipa (5.67), koji se može rešiti samo numerički.

Na ovom primeru možemo uočiti da je parametrizaciju putanje gotovo uvek moguće izvršiti nekim intuitivnim parametrom, a njegova veza sa krivolinijskom koordinatom može biti i veoma složena. Primetimo još, da ako bi kretanje bilo po kružnici, a ne elipsi, tada bi za

$$a = b = r, \quad (5.68)$$

(gde je da  $r$  označen poluprečnik kružnice) priraštaj krivolinijske koordinate postao

$$ds = \sqrt{r^2 \cos^2(\sigma) + r^2 \sin^2(\sigma)} \cdot d\sigma = r \cdot d\sigma, \quad (5.69)$$

pa bi geometrijski parametar imao prirodu pređenog puta.

Na način sličan prethodim primerima, mogli bismo da parametrizujemo praktično bilo koju prostornu putanju, a zatim usvajanjem profila promene parametra, da rešimo i problem sinteze trajektorije, odnosno pozicije vrha robota u prostoru. Da bi smo potpuno definisali kretanje vrha robota, preostaje nam još da razmotrimo način zadavanja orientacije vrha robota u prostoru.

### 5.3.2 Definisanje orientacije vrha robota u prostoru

Orientacija vrha robota u prostoru u potpunosti je određena sa tri nezavisna parametra, koje smo u izrazu (5.53) grupisali u vektor  $o_{3x1}$ . U ranijim poglavljima videli smo da postoje različiti načini za definisanje orientacije, na primer, preko Ojlerovih uglova ZYZ, odnosno ZYX tipa, ili preko uglova skretanja, propinjanja i valjanja. Prema tome, u opštem slučaju vektor koji definiše orientaciju vrha robota možemo zapisati u obliku

$$o = \begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}, \quad (5.70)$$

bez obzira na prirodu uglova  $\varphi$ ,  $\theta$  i  $\psi$ .

Da bi se definisala orientacija vrha robota u zadatku duž trajektorije, potrebno je zapravo odrediti vrednosti uglova orientacije tokom vremena. Kao i u slučaju pozicije, to se može izvesti u dva koraka, tako što se najpre odredi parametrizovana reprezentacija uglova orientacije, a zatim se parametru dodeli vremenski profil promene.

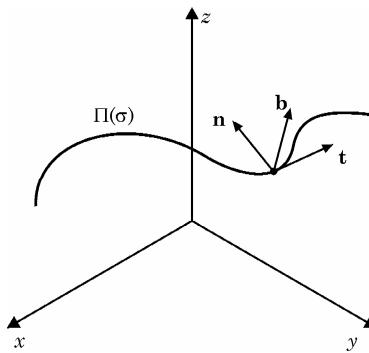
U jednostavnijim slučajevima planiranja orijentacije vrha robota, od interesa je samo orijentacija vrha u početnoj, odnosno krajnjoj tački trajektorije, dok orijentacija duž trajektorije nije od interesa. Tada možemo pristupiti interpolaciji uglova orijentacije na sledeći način

$$\boldsymbol{o} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_i + (\varphi_f - \varphi_i)\sigma \\ \theta_i + (\theta_f - \theta_i)\sigma \\ \psi_i + (\psi_f - \psi_i)\sigma \end{bmatrix}, \quad (5.71)$$

gde smo indeksom  $i$  označili vrednosti uglova orijentacije u početnoj, a indeksom  $f$  u završnoj tački putanje. Parametar  $\sigma$  menja se u intervalu  $[0,1]$ , i definisanjem njegovog vremenskog profila, zadatok sinteze orijentacije vrha robota duž trajektorije je rešen. Kao i ranije, za profil promene parametra  $\sigma$  možemo usvojiti neki od već proučenih profila.

Napomenim da je ovakav način planiranja orijentacije vrha robota pogodniji za primene kod PTP kretanja. Ako pozicija vrha robota treba da prati neku putanju u prostoru, onda je verovatnije da orijentacija vrha robota treba da bude definisana samom trajektorijom. Na primer, kod elektrolučnog zavarivanja, putanja vrha treba da prati šav koji se vari, a pri tome želimo da elektroda bude sve vreme upravna na šav. Slično je i kod robotske farbanja, gde putanja vrha zavisi od površine koja se farba, a orijentacija vrha treba da je ortogonalna u odnosu na tu površinu.

Prema tome, naš zadatok je da sada, na osnovu parametrizovane putanje vrha robota u prostoru, odredimo informacije o orijentaciji. Prisetimo se da se u diferencijalnoj geometriji svakoj tački prostorne krive mogu pridružiti tri ortogonalna jedinična vektora kao na Sl. 5.9.



Sl. 5.9. Prostorna kriva i prirodni triedar u jednoj tački krive

Tri vektora sa Sl. 5.9, vektor tangente  $t$ , vektor normale  $n$  i vektor binormale  $b$  formiraju takozvani prirodni triedar krive, odnosno koordinatni sistem desne orijentacije. Vektor tangente definiše pravac tangente u dатој таčки просторне криве. Vektor normale ortogonalan je na pravac tangente, a usmeren je ka centru krivine криве. Konačno, vektor binormale ortogonalan je na oba prethodna vektora.

Ako je prostorna kriva zadata parametarski tako da je parametar krivolinijska koordinata  $s$ ,

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(s), \quad (5.72)$$

tada se jedinični vektori prirodnog triedra mogu odrediti na sledeći način

$$t = p' = \frac{dp}{ds}, \quad (5.73)$$

$$n = \frac{p''}{|p''|}, \quad (5.74)$$

$$b = t \times n = \frac{p' \times p''}{|p' \times p''|}, \quad (5.75)$$

pri čemu se diferenciranje vrši po krivolinijskoj koordinati, oznaka  $\times$  predstavlja vektorski proizvod dva vektora, a  $|*|$  predstavlja oznaku za moduo vektora.

Ako je prostorna kriva zadata po nekom drugom, geometrijskom parametru  $\sigma$ , tada izrazi za jedinične vektore prirodnog triedra postaju nešto složeniji:

$$t = \frac{p'(\sigma)}{|p'(\sigma)|}, \quad (5.76)$$

$$n = \frac{(p'(\sigma) \times p''(\sigma)) \times p'(\sigma)}{|(p'(\sigma) \times p''(\sigma)) \times p'(\sigma)|}, \quad (5.77)$$

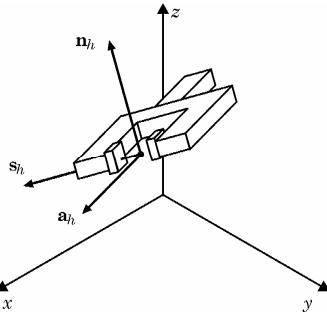
$$b = \frac{p'(\sigma) \times p''(\sigma)}{|p'(\sigma) \times p''(\sigma)|}, \quad (5.78)$$

pri čemu se diferenciranje sada vrši po parametru  $\sigma$ .

Jedinične vektore prirodnog triedra možemo iskoristiti za zadavanje orientacije vrha robota na sledeći način. Podestimo se najpre, da smo kod razmatranja kinematike robota uveli koncept matrice homogene transformacije, kojom možemo izraziti položaj i orientaciju vrha robota, kao

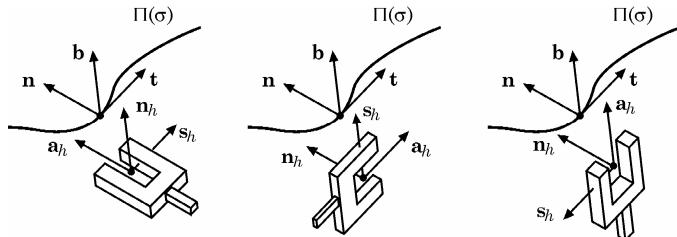
$$T = \left[ \begin{array}{ccc|c} n_h & s_h & a_h & p_h \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad (5.79)$$

gde vektori  $n_h$ ,  $s_h$  i  $a_h$  predstavljaju projekcije jediničnih vektora osa koordinatnog sistema vezanog za hvataljku na ose referentnog sistema, a vektor  $p_h$  označava poziciju vrha robota. Jedinični vektori koordinatnog sistema hvataljke prikazani su na Sl. 5.10.



Sl. 5.10. Jedinični vektori koordinatnog sistema hvataljke

Zadavanje orientacije hvataljke svodi se onda na uspostavljanje veze između osa koordinatnog sistema hvataljke i prirodnog triedra putanje. Neke od različitih mogućnosti za orientaciju hvataljke u odnosu na putanje možemo videti na Sl. 5.11.



Sl. 5.11. Različite orientacije hvataljke duž putanje u prostoru

Na slici su prikazani samo slučajevi kada su ose vezanog koordinatnog sistema hvataljke paralelne osama prirodnog triedra u posmatranoj tački putanje. U opštem slučaju, veza između koordinatnog sistema hvataljke i prirodnog triedra zavisi kako od prirode zadatka, tako i od oblika hvataljke, odnosno alata koji robot nosi, odnosno, od načina na koji je definisan koordinatni sistem hvataljke. Ta veza može biti predstavljena kao

$$[n_h \ | \ s_h \ | \ a_h] = [t \ | \ n \ | \ b] \cdot R_h, \quad (5.80)$$

pri čemu je  $R_h$  konstantna matrica rotacije. Na primer, za orientacije hvataljke sa Sl. 5.11, imamo, s leva na desno

$$R_h = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_h = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.81)$$

odnosno, matrice  $R_h$  definišu permutovanje jediničnih vektora prirodnog triedra, uz eventualnu promenu smera vektora, kao na primer vektora  $t$  u poslednjem izrazu. U opštem slučaju, elementi matrice  $R_h$  uspostavljaju vezu između osa dva koordinatna sistema.

Imajući u vidu da se jedinični vektori prirodnog triedra mogu odrediti iz izraza (5.73), (5.74) i (5.75) odnosno (5.76), (5.77) i (78), u potpunosti je određena orientacija vrha

hvataljke duž putanje. Kada se parametru pridruži i vremenski profil, pitanje orientacije hvataljke duž trajektorije u potpunosti je rešeno.

Ilustrujmo opisani koncept definisanja orientacije vrha robota duž putanje uz pomoć primera. Za početak, razmotrićemo jednostavnu putanju oblika kružnice u prostoru. Neka je kružnica zadata parametarskim jednačinama

$$p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y_c + r\cos(\sigma) \\ z_c + r\sin(\sigma) \end{bmatrix}, \quad (5.82)$$

iz kojih zaključujemo da kružnica leži u  $yz$  ravni, njen centar nalazi se u tački  $[0, y_c, z_c]^T$ , a poluprečnik iznosi  $r$ . Parametar  $\sigma$  ima prirodu ugla, i svojom promenom na intervalu  $\sigma \in [0, 2\pi]$  definiše celu kružnicu. Primetimo još da je, usled periodičnosti trigonometrijskih funkcija, putanja zatvorena.

Da bismo odredili jednačine jediničnih osa prirodnog trihedra, diferencirajmo najpre parametarsku jednačinu (5.82) dva puta, čime se dobija

$$p' = \begin{bmatrix} 0 \\ -r\sin(\sigma) \\ r\cos(\sigma) \end{bmatrix}, |p'| = r \quad (5.83)$$

odnosno,

$$p'' = \begin{bmatrix} 0 \\ -r\cos(\sigma) \\ -r\sin(\sigma) \end{bmatrix}, |p''| = r \quad (5.84)$$

Smenom izraza (5.83) u (5.76) možemo odrediti jednačinu jediničnog vektora tangente

$$t = [0 \ -\sin(\sigma) \ \cos(\sigma)]^T. \quad (5.85)$$

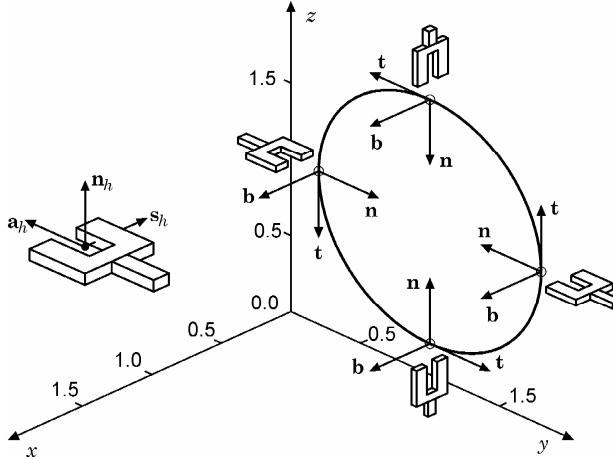
Slično, smenom izraza (5.83) i (5.84) u jednačinu jediničnog vektora binormale (5.78) dobijamo

$$b = [1 \ 0 \ 0]^T. \quad (5.86)$$

Vidimo da je jednični vektor binormale konstantan, i paralelan  $x$  osi, što je potpuno očekivano, imajući u vidu da je kružnica ravanska kriva koja leži u  $yz$  ravni.

Konačno, jednačina jediničnog vektora normale može se odrediti na osnovu izraza (5.77). U ovom primeru, zbog kretanja po kružnici, vektor normale ima isti pravac kao i vektor  $p''$ , pa se može odrediti i kao

$$n = \frac{p''}{|p''|} = [0 \ -\cos(\sigma) \ -\sin(\sigma)]^T. \quad (5.87)$$



Sl. 5.12. Putanja u obliku kružnice i orientacija vrha robota duž putanje

Izgled kružnice u prostoru, kao i orientacije prirodnih triedara u nekoliko tačaka na kružnici prikazane su na Sl. 5.12.

Kružnica je konstruisana za vrednosti prarametara  $r = 0.8$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ , i  $z_0 = 1$ , a prirodni triedri prikazani su u tačkama definisanim sa  $\sigma \in [0, \pi/2, \pi, 3\pi/2]$ . Na slici je takođe definisan koordinatni sistem vezan za vrh robota, kao i željena orientacija hvataljke u zadatku. Sa Sl. 5.12 možemo uočiti vezu između orientacije koordinatnog sistema hvataljke i prirodnog triedra

$$\begin{aligned} n_h &= t, \\ s_h &= -b, \\ a_h &= n, \end{aligned} \quad (5.88)$$

koja se može izraziti i preko matrice rotacije  $R_h$ , definisane jednačinom (5.80), pri čemu je

$$R_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.89)$$

Prema tome, orientacija vrha robota duž putanje određena je rotacionom matricom

$$R = [n_h \mid s_h \mid a_h] = [t \mid n \mid b] \cdot R_h, \quad (5.90)$$

odnosno,

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\sin(\sigma) & 0 & -\cos(\sigma) \\ \cos(\sigma) & 0 & -\sin(\sigma) \end{bmatrix}. \quad (5.91)$$

Izborom vremenske zavisnosti  $\sigma = \sigma(t)$ , odnosno profila kretanja, u potpunosti je izrazom (5.82) određena i trajektorija u prostoru, dok je orientacija vrha robota duž trajektorije

određena izrazom (5.91).

Razmotrimo sada jedan kompleksniji primer za definisanje orientacije vrha hvataljke duž parametrizovane putanje. Neka je sada zadatak takav da se vrh robota kreće duž helikoide, odnosno spiralne zavojnice zadate parametarskim jednačinama

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + r \cos(\sigma) \\ y_0 + r \sin(\sigma) \\ z_0 + \frac{h}{2\pi} \sigma \end{bmatrix}, \quad (5.92)$$

gde je  $r$  poluprečnik, a  $h$  korak zavojnice, dok  $x_0$  i  $y_0$  određuju položaj ose helikoide, a  $z_0$  početnu visinu. Osa zavojnice paralelna je  $z$  osi referentnog koodinatnog sistema. Parametar  $\sigma$  svojom promenom definiše zavojnicu, pri čemu promena od  $2\pi$  proizvodi jedan korak helikoide.

Primenimo sada jednačine (5.76), (5.77) i (5.78) da bi smo odredili jedinične vektore prirodnog triedra. Odredimo najpre pvi i drugi izvod vektora pozicije po parametru  $\sigma$

$$\mathbf{p}'(\sigma) = \begin{bmatrix} -r \sin(\sigma) \\ r \cos(\sigma) \\ \frac{h}{2\pi} \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{p}'| = \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}, \quad (5.93)$$

$$\mathbf{p}''(\sigma) = \begin{bmatrix} -r \cos(\sigma) \\ -r \sin(\sigma) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.94)$$

a zatim i potrebne vektorske proizvode

$$\mathbf{p}'(\sigma) \times \mathbf{p}''(\sigma) = \begin{bmatrix} \frac{h}{2\pi} r \sin(\sigma) \\ -\frac{h}{2\pi} r \cos(\sigma) \\ r^2 \end{bmatrix}, \quad (5.95)$$

odnosno

$$(\mathbf{p}'(\sigma) \times \mathbf{p}''(\sigma)) \times \mathbf{p}'(\sigma) = \left( r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2} \right) \cdot r \cdot \begin{bmatrix} -\cos(\sigma) \\ -\sin(\sigma) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.96)$$

Sada možemo odrediti i module vektora dobijenih izračunavanjem vektorskih proizvoda

$$|\mathbf{p}' \times \mathbf{p}''| = \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} \cdot r, \quad (5.97)$$

$$\|(p' \times p'') \times p''\| = r \left( r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2} \right). \quad (5.98)$$

Da bismo pojednostavili naredne izraze, uvedimo oznaku

$$c = \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}, \quad (5.99)$$

za koreni izraz koji se javlja u jednačinama.

Smenom dobijenih izraza u jednačine za jednične vektore prirodnog triedra krive (5.76), (5.77) i (5.78) dobijamo

$$t = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} -r \sin \sigma \\ r \cos \sigma \\ \frac{h}{2\pi} \end{bmatrix}, \quad (5.100)$$

$$n = \begin{bmatrix} -\cos \sigma \\ -\sin \sigma \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.101)$$

$$b = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} \frac{h}{2\pi} \sin(\sigma) \\ -\frac{h}{2\pi} \cos(\sigma) \\ r \end{bmatrix}. \quad (5.102)$$

Preostaje još da uspostavimo vezu između orijentacije koordinatnog sistema hvataljke i prirodnog triedra. Neka je zadatak robota takav da se jedinični vektori dva koordinatna sistema se poklapaju, odnosno da je rotaciona matrica

$$R_h = I_{3 \times 3}, \quad (5.103)$$

zapravo jedinična matrica. Drugim rečima, važi da je

$$\begin{aligned} n_h &= t, \\ s_h &= n, \\ a_h &= b. \end{aligned} \quad (5.104)$$

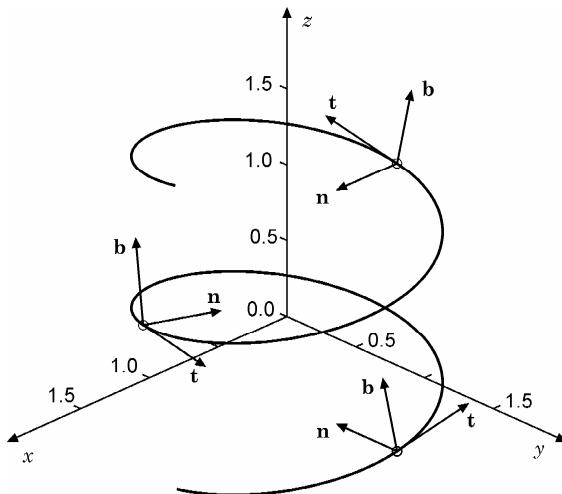
Tada je rotaciona matrica koja definiše orijentaciju vrha robota duž putanje data sa

$$R = [n_h \ s_h \ a_h] = [t \ n \ b], \quad (5.105)$$

odnosno,

$$R = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} -r \sin(\sigma) & -c \cos(\sigma) & \frac{h}{2\pi} \sin(\sigma) \\ r \cos(\sigma) & -c \sin(\sigma) & -\frac{h}{2\pi} \cos(\sigma) \\ \frac{h}{2\pi} & 0 & r \end{bmatrix}. \quad (5.106)$$

Da zaključimo, jednačina (5.92) predstavlja jednačinu putanje vrha robota, dok jednačina (5.106) određuje orientaciju vrha robota duž putanje na željeni način. Ove dve jednačine, zajedno sa profilom promene parametra  $\sigma$  u potpunosti određuju trajektoriju po kojoj se vrh robota kreće, odnosno, jednoznačno je definisana i pozicija i orientacija vrha robota duž trajektorije. Putanja oblika helikoide prikazana je na Sl. 5.13.



Sl. 5.13. Putanja oblika helikoide i prirodní triedri u nekoliko tačaka duž putanje

Zavojnica sa Sl. 5.13 konstruisana je za vrednosti parametara  $r = 0.8$ ,  $h = 1$ ,  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 1$  i  $z_0 = 0$ . Zajedno sa putanjom, prikazana je i orientacija prirodnog triedra u tri tačke putanje, određene vrednostima parametra  $\sigma = \pi/2$ ,  $\sigma = 15\pi/8$ , i  $\sigma = 3\pi$ .

## 5.4 LITERATURA

- [1] Sciacicco L. and Siciliano B.: **Modeling and Control of Robot Manipulators**, The McGraw-Hill Company, 1996.
- [2] Craig J.: **Introduction to Robotics: Mechanics & Control**, Addison-Wesley, 1986.
- [3] Angeles J.: **Fundamentals of Robotic Mechanical Systems, Theory, Methods and Algorithms**, Springer-Verlag, 2003.
- [4] Bruyninckx H. and De Schutter J.: **Introduction to Intelligent Robotics**, Katholieke Universiteit Leuven, 2001.
- [5] Fu K., Gonzales R., and Lee C.: **Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence**, McGraw-Hill Book Company, 1987.

Industrijska robotika

*Planiranje kretanja*

- [6] Rašić M.: **Prilog inteligentnom upravljanju redundantnim robotima**, magistarska teza, Elektronski Fakultet u Nišu, Niš, 2000.
- [7] Rade L., and Westergren B.: **Mathematics Handbook for Science and Engineering**, Studentlitteratur, Lund, 1995.
- [8] Bronštejn I.N., i Semendjajev K.A.: **Matematički priručnik za inženjere i studente**, Tehnička knjiga, Zagreb, 1964.

## 6 DINAMIČKA ANALIZA MANIPULACIONIH ROBOSTA

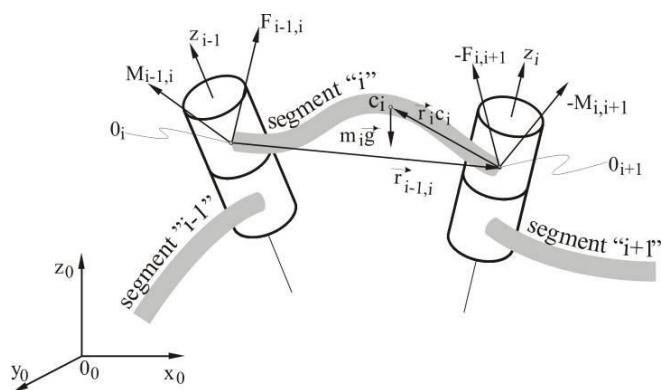
### 6.1 UVOD

Mehanička konfiguracija manipulacionih robota se može predstaviti sistemom krutih tela spojenih zglobovima koji nazivamo kinematskim lancem. Da bi ostvarili planirano kretanje hvataljke neophodno je da se odrede momenti u svim zglobovima koje u svakom trenutku motorima treba ostvarivati. Ovo je veoma složen zahtev jer su pogonski momenti rezultat različitih dinamičkih uticaja usled simultanog kretanja segmenata kinematskog lanca. Pored gravitacionih sila i momenata, čiji se intenziteti menjaju samo promenom položaja segmenata znatno složenije se određuju centrifugalne, Koriolisove i inercijalne sile i njihovi momenti. Osnovu za tačno određivanje, i nakon toga kompenzaciju, svih ovih uticaja predstavlja modeliranje dinamičkog ponašanja robotskih mehanizama. Obzirom na raznolikost mehaničkih struktura robota i putanja hvataljki koje mogu biti zahtevane, najcelisodnije je formirati opšti računarski algoritam za iterativno formiranje modela dinamičkog ponašanja pri ostvarivanju željene putanje bilo koje mehaničke konfiguracije robota.

U ovoj glavi će biti razmotrene osnove dinamičkog modeliranja robota, i predložen algoritam za njegovo formiranje.

### 6.2 STATIČKA ANALIZA

Razmotrimo najpre ravnotežu  $i$ -tog segmenta u okviru otvorenog kinematskog lanca koji se ne kreće već стоји u određenom položaju.



Sl. 6.1. Sile i momenti koji deluju na  $i$ -ti segment (statički slučaj)

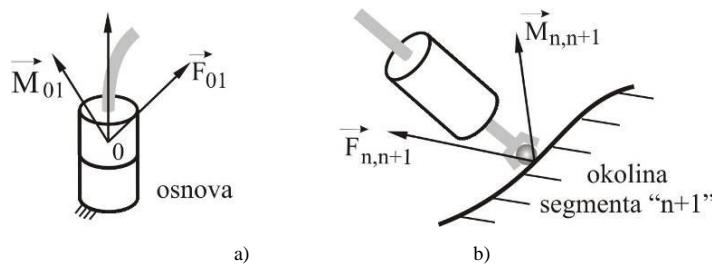
Kada robot miruje opterećenje u zglobovima mehanizma uzrokuju samo sile sopstvene težine segmenata. Važno je napomenuti da bilo koji zglob trpi opterećenje koje uzrokuju svi segmenti koji se u kinematskom lancu nalaze od njega dalje prema vrhu. Na Sl. 6.1 je šematski prikazan  $i$ -ti segment kinematskog lanca koji se nalazi između  $i-1$ -vog i  $i+1$ -vog segmenta. Na  $i$ -tom segmentu se nalazi  $i$ -ti i  $i+1$ -vi zglob koji ostvaruju vezu sa susednim segmentima. Da bi posmatrali ravnotežu  $i$ -tog segmenta oslobođimo se veza u zglobovima i zamenimo uticaj  $i-1$ -vog na  $i$ -ti segment momentom  $M_{i-1,i}$  i silom  $F_{i-1,i}$  a mometom  $M_{i,i+1}$  i silom  $F_{i,i+1}$  uticaj  $i$ -tog na  $i+1$ -vi segment. Momet  $M_{i,i+1}$  i sila  $F_{i,i+1}$  su na Sl. 6.1. prikazani sa znakom "-" ( $-M_{i,i+1}$  i  $-F_{i,i+1}$ ) obzirom da je uticaj  $i+1$ -vog segmenta na  $i$ -ti (na osnovu trećeg Njutnovog zakona akcije i reakcije) isti kao  $i$ -toga na  $i+1$ -vi, ali obrnutog smera. Osim navedenih uticaja susednih segmenata na  $i$ -ti segment još, u težištu  $C_i$ , deluje sila sopstvene težine  $m_i g$ .

Obzirom da je mehanizam u ravnoteži, ponašanje posmatranog segmenta se može opisati sa dve vektorske jednačine:  $\sum F_i = 0$  i  $\sum M_i = 0$ . Prema tome,

$$\sum F_i = 0: \quad F_{i-1,i} - F_{i,i+1} + m_i \cdot g = 0 \quad (6.1.)$$

$$\sum M_i = 0: \quad M_{i-1,i} - M_{i,i+1} - (r_{i-1,i} + r_{i,Ci}) \times F_{i-1,i} + (-r_{i,Ci}) \times (-F_{i,i+1}) = 0 \quad (6.2.)$$

gde su svi vektori izraženi u odnosu na bazni koordinatni sistem  $O_o-x_oy_oz_o$ . Momentna jednačina (6.2.) je napisana u odnosu na težište  $i$ -tog segmenta, dok  $r_{i-1,i}$  i  $r_{i,Ci}$  označavaju radijus vektore od  $i-1$ -vog do  $i$ -tog zgloba i od  $i-1$ -vog zgloba do težišta  $i$ -tog segmenta  $C_i$ , respektivno. Mometi i sile u zglobovima se još nazivaju sprezanjem ili kuplovanjem (engl. *coupling moment and force*) između segmenata. Tako, na primer (Sl. 6.2.), moment  $M_{i-1,i}$  i sila  $F_{i-1,i}$  predstavljaju moment i silu sprezanja  $i-1$ -vog i  $i$ -tog segmenta. U slučaju kada je  $i=1$  moment  $M_{0,1}$  i sila  $F_{0,1}$  se odnose na sprezanje između prvog segmenta i osnove (base) robota, dok u



Sl. 6.2. Sprezanje a) između robota i osnove i b) okoline i hvataljke

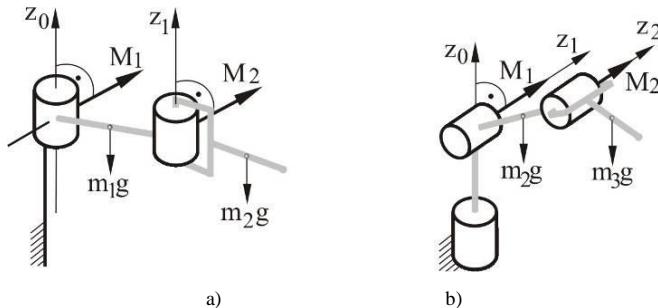
slučaju kada je  $i=n$  moment  $M_{n,n+1}$  i sila  $F_{n,n+1}$  predstavljaju moment i silu kojom poslednji segment kinematskog lanca (hvataljka, objekat ili alat koji robot nosi) deluje na okolinu. Indeksom  $n+1$  je označena okolina koja se uslovno može smatrati segmentom. Naravno, moment i sila kojom okolina deluje na hvataljku robota su  $-M_{n,n+1}$  i  $-F_{n,n+1}$ .

Radi lakšeg daljeg rada objedinimo moment  $M_{n,n+1}$  i silu  $F_{n,n+1}$  u jedinstven vektor dimenzije (6x1) koji ćemo skraćeno nazvati silom sprezanja (ili dejstvom okoline na robot) sa okolinom i obeležiti sa  $F_{ext}$

$$F_{ext} = \begin{bmatrix} F_{n,n+1} \\ M_{n,n+1} \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Jednačine (6.1) i (6.2) se mogu napisati za svih  $i=1, \dots, n$  segmenata, na osnovu čega imamo ukupno  $2n$  jednačina sa  $2n+2$  nepoznatih ( $n+1$  moment i  $n+1$  sila). Da bi sistem mogli da rešimo potrebno je unapred zadati (propisati) ili poznavati jednu silu i jedan moment. Obzirom da su u industriji zadaci poznati unapred, najprirodnije je da se zada (propiše) sila koje predstavlja željeno delovanje robota na okolinu jer nam je poznata na osnovu samog zadatka koji robot realizuje. Primera radi, ukoliko se robot kreće kroz slobodan prostor prenoseći objekat hvataljkom i ne dolazeći u kontakt sa okolinom opterećenje  $F_{ex}$  je jednak nuli ( $M_{n,n+1} = 0$  i  $F_{n,n+1} = 0$ ). Međutim, ukoliko robot tokom izvršenja radnog zadatka dolazi u kontakt sa okolinom (npr. linijskog elektrootpornog zavarivanja, obaranja ivica na radnom predmetu glodanjem ili brušenjem, pri poliranju, realizaciji montažnog zadatka ...) sila kojom hvataljka ili alat deluje na okolinu je poznata iz tehnoloških uslova procesa. Npr. prilikom elektrootpornog zavarivanja sila pritiska koju je potrebno ostvariti alatom na delove koji se spajaju i održavati tokom procesa zavisi od vrste materijala i debljine limova, i propisuje se tehnološkim postupkom. Prema tome, možemo smatrati da je  $F_{ext}$  u slučaju realizacije industrijskih zadataka poznato i da je iz sistema od  $2n$  jednačina moguće odrediti  $2n$  nepoznatih.

Razmotrimo sada vezu između sila i momenata sprezanja i pogonskih sila ili momenata (skraćeno pogona) u zglobovima robota. U opštem slučaju se vektor sprezanja (sile i momenti koji se javljaju u jednačinama (6.1) i (6.2)) razlikuje od vektora pogona. Ilustracije radi ćemo razmotriti dve tipične konfiguracije industrijskih robota: robot SCARA i antropomorfne (PUMA) konfiguracije.



Sl. 6.3. Gravitaciono opterećenje robota a) SCARA i b) antropomorfne konfiguracije

Prva dva segmenta minimalne konfiguracije SCARA robota se mogu kretati samo u horizontalnoj ravni, dok se poslednja dva segmenta antropomorfne konfiguracije mogu kretati samo u vertikalnoj ravni (Sl. 6.3). U slučaju SCARA robota gravitaciono opterećenje (Sl. 6.3.a) se u celosti prenosi na konstrukciju zgloba i nije potrebno dodatno angažovanje motora da bi se očuvao trenutni položaj. Kako god da se mehanička konfiguracija pomeri, ona

će u tom položaju ostati i posle isključivanja motora. Sasvim je obrnuta situacija kod robota antropomorfne konfiguracije (Sl. 6.3.b), gde kompletno gravitaciono opterećenje koje deluje na drugi i treći zglob mora da bude uravnoteženo dejstvom motora, dok položaj prvog zglobova omogućava da gravitaciono opterećenje u celosti prima konstrukcija zgloba.

Iz ovih primera se vidi da ukoliko je vektor momenta gravitacionih opterećenja kolinearan sa osom zglobova dato opterećenja se u potpunosti mora kompenzovati motorima, tj. opterećenje odgovara zahtevanom pogonskom momentu. Međutim, ukoliko je vektor momenta gravitacionih opterećenja upravan na osu zglobova dato opterećenja će u potpunosti primiti struktura samog zglobova i nije potrebno aktivirati motore da bi se održala trenutna pozicija. Ako je položaj vektora opterećenja između ta dva granična slučaja i nalazi se pod nekim uglom prema osi zglobova, deo opterećenja će primiti struktura zglobova, dok se deo mora kompenzovati motorima. Prema tome, motor mora da kompenzuje samo onu komponentu opterećenja (moment ili silu) koja je kolinearna sa osom zglobova i koju nazivamo pogonom. Potpuno istovetno razmatranje važi i za rotacione i za translatorne zglobove. Pogon (obeležimo ga označkom  $\tau$ ) u slučaju translatornog zglobova predstavlja silu i može se sračunati kao skalarni proizvod orta odgovarajuće ose zglobova i vektora sile

$$\tau_i = z_{i-1} \cdot F_{i-1,i} \quad (6.4)$$

U slučaju rotacionog zglobova  $\tau$  je moment i može se, analogno (6.4), sračunati kao skalarni proizvod orta odgovarajuće ose zglobova i vektora momenta opterećenja

$$\tau_i = z_{i-1} \cdot M_{i-1,i} \quad (6.5)$$

Treba primetiti da u oba prethodna slučaja trenje u zglobovima nije uzeto u obzir jer je tri-bološka situacija u samom zglobovu u suštini nepoznata i promenljiva tokom vremena. Pogonski momenti u zglobovima  $\tau_i$  se mogu objediniti u jedan vektor

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

koji nazivamo vektorom pogona i koji može sadržavati sile ili momente u zavisnosti od tipa zglobova.

### 6.2.1 Veza spoljašnjih sila koje deluju na robot i momenata u zglobovima

Od posebnog je interesa da se izvede zavisnost između spoljne sile  $F_{ext}$  kojom okolina deluje na robot i odgovarajućih pogonskih momenata koji tu silu uravnotežavaju. Prepostavimo da se robot ne kreće i da svojim vrhom na okolinu deluje silom  $F_{ext}$ . Tada ćemo sa  $\tau_F$  obeležiti momente u zglobovima mehaničke konfiguracije koji tu silu uravnotežavaju i naš zadatak je da se nađe veza između  $F_{ext}$  i  $\tau_F$ .

Da bi ovu relaciju izveli iskoristićemo princip virtuelnog rada. Da bi smo razumeli koncept virtuelnog rada, razmotrimo najpre tzv. virtuelne pomeraje. Pod virtualnim pomeranjima se podrazumevaju infinitezimalni pomeraji mehaničkog sistema koje dozvoljavaju veze. Za

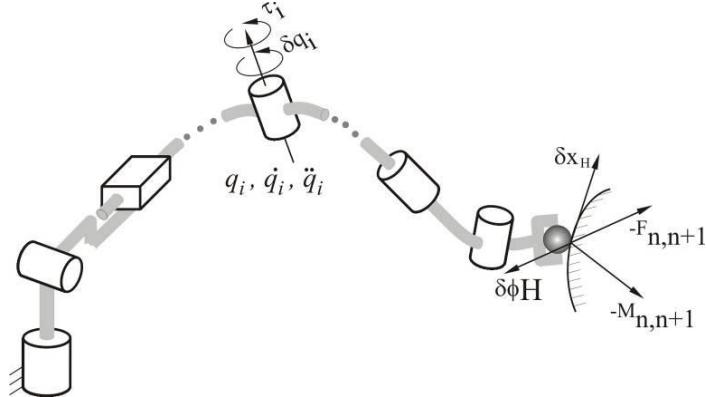
razliku od stvarnih, virtualni pomeraji treba samo da budu u saglasnosti sa ograničenjima koja nameću veze, dok se ostalim zakonima kretanja ne pokoravaju. U slučaju koji razmatramo (Sl. 6.4.) virtualna pomeranja u zglobovima  $\delta q_i$  izazivaju linearno  $\delta x_H$  i ugaono  $\delta\Phi_H$  virtualno pomeranje hvataljke. Takođe prepostavimo da je robotski mehanizam bez težine tako da nema gravitacionih opterećenja. U trenutku virtualnih pomeranja robot je u kontaktu sa okolinom tako da na njega deluju  $-M_{n,n+1}$  i  $-F_{n,n+1}$ , dok u zglobovima deluju pogonski momenti  $\tau_i$  koji ovo opterećenje uravnovežavaju. U tom slučaju je virtualni rad svih sila dat sa

$$\begin{aligned}\delta w = & \tau_{F1} \cdot \delta q_1 + \tau_{F2} \cdot \delta q_2 + \cdots + \tau_{Fn} \cdot \delta q_n + \\ & + (-F_{n,n+1}^T) \cdot \delta x_H + (-M_{n,n+1}^T) \cdot \delta\Phi_H\end{aligned}\quad (6.7)$$

Virtualni rad je jednak nuli ukoliko je sistem u ravnoteži. Ukoliko prethodnu jednačinu zapišemo u vektorskom obliku (linearno  $\delta x_H$  i ugaono  $\delta\Phi_H$  virtualno pomeranje hvataljke je objedinjeno u vektor  $\delta s$ ) sledi

$$\delta w = \tau_F^T \cdot \delta q - F_{ext}^T \cdot \delta s = 0 \quad (6.8)$$

Obzirom da  $\delta q$  i  $\delta s$  nisu nezavisni već da su povezani relacijom  $ds = J dq$  (primetimo da simbol  $d$  možemo da zamenimo simbolom  $\delta$ ) jednačinu (6.8) možemo



Sl. 6.4. Virtualna pomeranja hvataljke i zglobova

napisati u obliku

$$\delta w = \tau_F^T \cdot \delta q - F_{ext}^T \cdot J \cdot \delta q = (\tau_F - J^T \cdot F_{ext})^T \cdot \delta q = 0 \quad (6.9)$$

Obzirom da su virtualna pomeranja različita od nule  $\delta q \neq 0$ , izraz (6.9) može biti ispunjen samo ukoliko je izraz u zagradi jednak nuli, odakle sledi

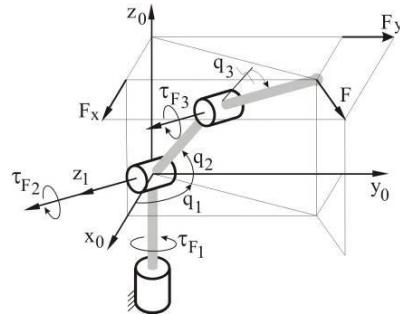
$$\tau_F = J^T \cdot F_{ext} \quad (6.10)$$

Ovo je veoma važna relacija koja povezuje силу којом robot deluje на окolinу са

momentima u zglobovima koji tu silu uravnotežavaju. U slučaju da se robot kreće i da je pri tome u kontaktu sa okolinom, na osnovu izraza (6.10) možemo odrediti koliko deo od ukupnog momenta u posmatranom zgobu se koristi za ostvarivanje kretanja, a koliki za uravnotežavanje sile kojom robot deluje na okolinu.

#### Primer 6.1:

Za minimalnu konfiguraciju (samo prva tri stepena slobode) antropomorfognog tipa prikazanu na Sl. 6.5. odrediti potrebne momente u zglobovima da se vrhom ostvari sila  $F$  data sa  $F = [F_x, F_y, F_z]^T = [10, 10, 0]^T \text{ N}$ .



Sl. 6.5. Sila kojom robot deluje na okolinu i odgovarajući momenti u zglobovima

Jakobijan koji odgovara ovoj konfiguraciji napisan u analitičkoj formi je dat sledećim izrazom

$$J = \begin{bmatrix} -a_2 S1C2 - a_3 S1C23 & -C1(a_2 S2 + a_3 C23) & -a_3 C1S23 \\ a_2 S1C2 + a_3 C1C23 & -S1(a_2 S2 + a_3 S23) & a_3 S1S23 \\ 0 & a_2 C2 + a_3 C23 & a_3 C23 \end{bmatrix}$$

pa se, prema (6.10), odgovarajući momenti u zglobovima mogu dobiti iz

$$\begin{bmatrix} \tau_{1F} \\ \tau_{2F} \\ \tau_{3F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2 S1C2 - a_3 S1C23 & a_2 S1C2 + a_3 C1C23 & 0 \\ -C1(a_2 S2 + a_3 C23) & -S1(a_2 S2 + a_3 S23) & a_2 C2 + a_3 C23 \\ -a_3 C1S23 & a_3 S1S23 & a_3 C23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Treba još jednom napomenuti da se, na ovaj način određeni pogoni  $\tau_F$  odnose samo na uravnoteženje dejstva spoljne sile  $F$ .

#### 6.2.2 Elipsoid sile

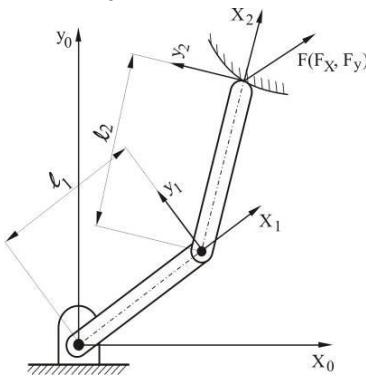
Da bismo ustanovili "prenosnu karakteristiku" mehanizma uporedimo sile koje proizvode jedinični momenti u zglobovima. Ako (6.10) uvrstimo u izraz  $\tau^T \tau = 1$  dobijamo

$$F^T J J^T F = 1 \quad (6.11)$$

Za datu poziciju manipulacionog robota izraz (6.11) predstavlja  $m$ -dimenzionalni elipsoid čiji

su sopstveni vektori međusobno ortogonalni i poklapaju se sa pravcima male i velike ose elipse čije su dužine jednake recipročnim vrednostima sopstvenih vrednosti  $JJ^T$ .

Obzirom da se vrednosti članova jakobijeve matrice menjaju tokom kretanja robota i elipsoid tokom kretanja menja svoj oblik i orientaciju. Za tačku u kojoj elipsoid poprimi oblik sfere kažemo da je transformacija *izotropna*. Prema tome, u izotropnoj tački se  $n$ -dimenzionalna jedinična sfera u prostoru momenata u zglobovima preslikava u  $m$ -dimenzionalnu sferu u prostoru sila koje deluju na hvataljku.



Sl. 6.6. Dejstvo ravanskog dvosegmentnog mehanizma silom  $F(F_x, F_y)$  na okolinu

Ilustrovaćemo ovo na primeru ravanskog dvosegmentnog robotskog manipulatora prikazanog na Sl. 6.6. Dužine segmenata su  $\ell_1 = \sqrt{2}$  i  $\ell_2 = 1$  m. U tački određenoj sa  $q_1 = 0$  i  $q_2 = \pi/2$  jakobijan ima vrednosti

$$J = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

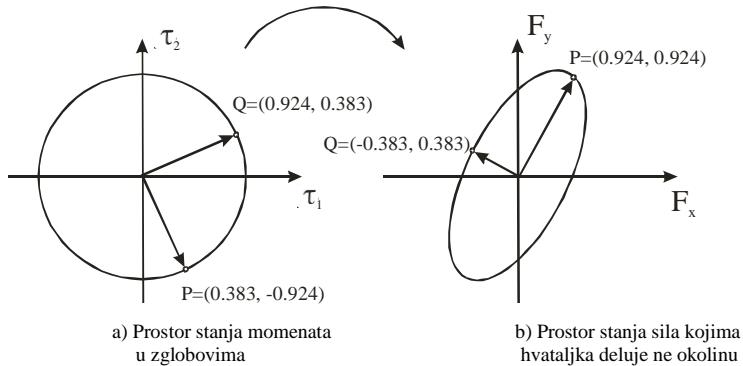
pa je

$$JJ^T = \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

Sopstvene vrednosti od  $JJ^T$  su  $\lambda_1 = (2 - \sqrt{2}) = 0.5858$  i  $\lambda_2 = (2 + \sqrt{2}) = 3.4142$ , a odgovarajući normalizovani sopstveni vektori  $(0.707, 0.707)$  i  $(-0.707, 0.707)$  koji u odnosu na ose koordinatnog sistema  $F_x$  i  $F_y$  zaklapaju ugao  $45^\circ$  i kolinearne su sa glavnim osama elipse. Ako (6.13) zamenimo u (6.11) dobijamo

$$2F_x^2 + 2\sqrt{2}F_x F_y + 2F_y^2 = 0.5858 \left( \frac{F_x}{\sqrt{2}} + \frac{F_y}{\sqrt{2}} \right)^2 + 3.4142 \left( \frac{F_x}{\sqrt{2}} - \frac{F_y}{\sqrt{2}} \right)^2 = 1$$

Na Sl. 6.7 je prikazan elipsoid (u ovom primeru je to elipsa). Sila interakcije sa okolinom



Sl. 6.7. Elipsoid sile

"proizvedena" dejstvom jediničnih momenata ( $\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2} = 1$ ) u zglobovima posmatranog robotskog mehanizma je  $(F_x, F_y) = (0.924, 0.924)$  N u pravcu velike ose (odgovarajući momenti su  $(\tau_1, \tau_2) = (0.383, -0.924)$  Nm) i  $(F_x, F_y) = (-0.383, 0.383)$  N u pravcu male ose elipse (odgovarajući momenti su  $(\tau_1, \tau_2) = (0.924, 0.383)$  Nm).

### 6.2.3 Popustljivost i krutost

Spoljne sile kojima okolina deluje na robot izazivaju promene pozicija u zglobovima mehaničke konfiguracije (segmenti se mogu smatrati krutim telima) i "povlačenje" vrha robota. Ova osobina ponekad može biti nepoželjna (npr. pri obradama radnih predmeta alatom koji robot nosi), ali i veoma važna radi sprečavanja havarije kao što je na primer pri neplaniranom sudaru objekta kojim robot manipuliše sa okolinom.

Neka je prostor zglobova  $n$  dimenzionalan, prostor hvataljke  $m$  dimenzionalan,  $\tau_i$  je opterećenje (moment ili sila) koje se prenosi preko  $i$ -tog zgloba, dok je  $\Delta q_i$  njegova defleksija koja usled toga nastaje. U slučaju malih pomeranja  $\tau_i$  i  $\Delta q_i$  se mogu povezati linearnom aproksimacijom

$$\tau_i = k_i \Delta q_i \quad (6.14)$$

gde se  $k_i$  naziva konstantom krutosti. Za celokupan mehanizam se skup izraza (6.14) može napisati u matričnoj formi

$$\tau = \Theta \Delta q \quad (6.15)$$

gde je  $\tau = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]^T$ ,  $\Delta q = [\Delta q_1, \Delta q_2, \dots, \Delta q_n]^T$ , dok je  $\Theta = diag[k_1, k_2, \dots, k_n]$  dijagonalna matrica dimenzije  $n \times n$ .

Za robe koji imaju strukturu kinematskog lanca pomeranja u zglobovima su sa pomeranjem hvataljke povezana jakobijanom

$$\Delta s = J \Delta q \quad (6.16)$$

dok je spoljna sila koja deluje na hvataljku sa momentima u zglobovima povezana izrazom

$$\tau = J^T F \quad (6.17)$$

Eliminacijom  $\tau$  i  $\Delta q$  iz (6.16) i (6.17) dobijamo

$$\Delta s = C F \quad (6.18)$$

gde je

$$C = J \Theta^{-1} J^T \quad (6.19)$$

matrica *popustljivosti* (engl. *compliance matrix*) dimenzije  $m \times m$ . Iz (6.19) se može videti da ukupna (kompozitna) krutost ne zavisi samo od krutosti svakog od pogona već i od jakobijana što znači da je popustljivost mehanizma zavisi od njegove trenutne poze.

Ako je  $m=n$  i jakobijeva matrica nije singularna i moguće je naći inverznu matricu popustljivosti. Ako obe strane izraza (6.18) pomnožimo sa  $C^{-1}$  dobijamo

$$F = K \Delta s \quad (6.20)$$

gde se

$$K = C^{-1} \quad (6.21)$$

naziva matricom *krutosti*.

Matrica krutosti takođe nije konstantna i zavisi od trenutne poze mehanizma. Krutost možemo karakterizirati poređenjem sila koje su potrebne da bi se realizovao jedinični ugib hvataljke. Ako (6.18) smenimo u  $(\Delta s)^T (\Delta s) = 1$  dobijamo

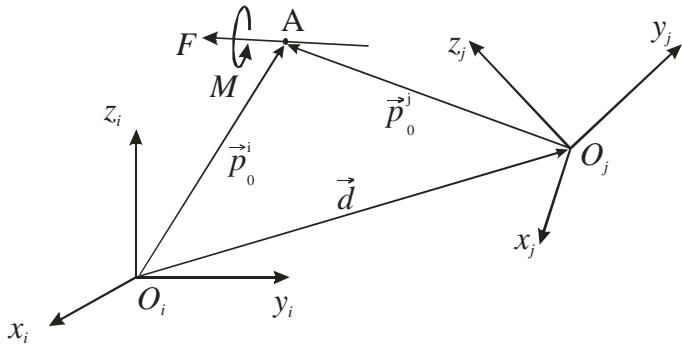
$$F^T C^T C F = 1 \quad (6.22)$$

Za određenu pozu robotskog manipulatora izraz (6.22) predstavlja  $m$ -dimenzionalni ellipsoid sile. Pošto je  $F^T C^T C F = 1$  simetrična, pozitivna i semidefinitna matrica, njeni sopstveni vektori su međusobno ortogonalni i poklapaju se sa pravcem osa elipsoida. Dužine osa elipsoida su jednakе recipročnim vrednostima kvadratnih korena sopstvenih vrednosti.

#### 6.2.4 Transformacija uticaja sila i momenata između različitih koordinatnih sistema

Kao što položaj tačke možemo izraziti u odnosu na različite koordinatne sisteme tako i uticaj sile i momenta možemo izraziti u odnosu na različite koordinatne sisteme. Na Sl. 6.8. prikazane su sila  $F$  i moment  $M$  koji deluju u istom pravcu, a njihovo delovanje posmatraćemo u odnosu na dva koordinatna sistema,  $O_i-x_iy_iz_i$  i  $O_j-x_jy_jz_j$ . Silu i moment možemo predstaviti kao jedinstveni šestodimenzionalni vektor generalisanih sila  $\mathfrak{F}$  u obliku

$$\mathfrak{I} = \begin{bmatrix} F \\ p_0 \times F + M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ \mathcal{M}_x \\ \mathcal{M}_y \\ \mathcal{M}_z \end{bmatrix} \quad (6.23)$$



Sl. 6.8. Transformacija sila i momenata između dva koordinatna sistema

U gornjem izrazu  $F$  predstavlja silu,  $\vec{p}_0$  je vektor pozicije bilo koje tačke (npr. tačke A) koja se nalazi na pravcu sile  $F$  u odnosu na izabrani koordinatni sistem (vektori pozicije  $\vec{p}_0^i$  i  $\vec{p}_0^j$  označavaju položaj tačke A u odnosu na koordinatne sisteme  $O_i-x_iy_iz_i$  i  $O_j-x_jy_jz_j$ , respektivno), proizvod  $p_0 \times F$  predstavlja moment koji sila ima u odnosu na koordinatni početak, a  $M$  je moment koji deluje oko pravca sile  $F$ . Sa Sl. 6.8. se vidi da koordinatni sistem  $O_j-x_jy_jz_j$  u odnosu na  $O_i-x_iy_iz_i$  određuje vektor pozicije  $d = [d_x \ d_y \ d_z]^T$  koordinatnog početka  $O_j$  u odnosu na  $O_i$  i matrica rotacije  $R_i^j$  koordinatnog sistema  $O_j-x_jy_jz_j$  u odnosu na  $O_i-x_iy_iz_i$ . Generalisana sila  $\mathfrak{I}$  izražena u odnosu na koordinatni sistem  $O_i-x_iy_iz_i$  je obeležena sa  $\mathfrak{I}^i$ , a u odnosu na sistem  $O_j-x_jy_jz_j$  sa  $\mathfrak{I}^j$ .  $\mathfrak{I}^i$  i  $\mathfrak{I}^j$  su povezani relacijom

$$\mathfrak{I}^i = T_i^j \mathfrak{I}^j \quad (6.24)$$

gde je  $T_i^j$  matrica dimenzije  $6 \times 6$  koju možemo napisati u sledećoj formi

$$T_i^j = \begin{bmatrix} R_i^j & 0 \\ W_i^j R_i^j & R_i^j \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

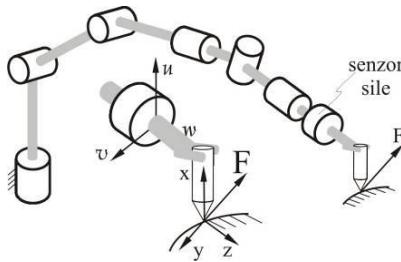
gde je

$$W_i^j = \begin{bmatrix} 0 & -d_z & d_y \\ d_z & 0 & -d_x \\ -d_y & d_x & 0 \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

kososimetrična matrica vektora  $\overrightarrow{O_iO_j}$  izraženog u koordinatnom sistemu  $O_i-x_iy_iz_i$ . Na taj način možemo generalisano silu izraženu u jednom, na jednostavan način, izraziti u drugom koordinatnom sistemu.

**Primer 6.2:**

Na Sl. 6.9 je prikazana hvataljka robota sa objektom koji je u kontaktu sa okolinom. Za merenje kontaktnih sila na vrhu objekta u zglobu hvataljke postavljen je senzor sile i momenta. Zadatak je da se odredi sila i moment koji stvarno deluju na vrh objekta ukoliko su nam poznati izmerene vrednosti sile i momenta u zglobu hvataljke.



Sl. 6.9 Transformacija sila i momenata koji deluju na vrh objekta na centar senzora koji se nalazi u zglobu hvataljke.

Drugim rečima, potrebno je poznate sile i momente izražene u koordinatnom sistemu  $O_{uvw}$  izraziti u koordinatnom sistemu  $O_{xyz}$ .

Ako pretpostavimo, bez gubitka opštosti, da su u trenutku posmatranja koordinatni sistemi paralelni i da je dislokacija vrha objekta od centra senzora data vektorom  $d = [d_x \ d_y \ d_z]^T$  tada za ovaj slučaj važi

$$R_{xyz}^{uvw} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_{xyz}^{uvw} = \begin{bmatrix} 0 & -d_z & d_y \\ d_z & 0 & -d_x \\ -d_y & d_x & 0 \end{bmatrix}$$

pa transformaciju  $T_{xyz}^{uvw}$  dobijamo u obliku

$$T_{xyz}^{uvw} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_z & d_y & 1 & 0 & 0 \\ d_z & 0 & -d_x & 0 & 1 & 0 \\ -d_y & d_x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

na osnovu čega dobijamo traženu vezu u obliku

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ \mathcal{M}_x \\ \mathcal{M}_y \\ \mathcal{M}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_z & d_y & 1 & 0 & 0 \\ d_z & 0 & -d_x & 0 & 1 & 0 \\ -d_y & d_x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_u \\ F_v \\ F_w \\ \mathcal{M}_u \\ \mathcal{M}_v \\ \mathcal{M}_w \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

Na ovaj način se mogu, na osnovu merenja u zglobovima, odrediti sile i momenti koji deluju na vrhu objekta koji robot drži.

### 6.3 DINAMIČKA ANALIZA

U dosadašnjem razmatranju je bilo prepostavljeno da se robot ne kreće i da se nalazi nepokretan u određenoj poziciji. Međutim, simultano kretanje svih segmenta proizvodi veoma složene uticaje koji su od izuzetnog značaja pri upravljanju robotima i koje ćemo u ovom odeljku razmotriti.

Diferencijalne jednačine kretanja mehanizma možemo formirati na osnovu Njutn-Ojlerovog i Lagranževog formalizma. Njutn-Ojlerova formulacija se zasniva na direktnoj primeni drugog Njutnovog zakona mehanike, pa jednačine sadrže sile i momente koje deluju na svaki pojedinačni segment, uključujući i sile i momente sprezanja u zglobovima. Osim toga sadrže i reakcije veza koje deluju između dva susedna segmenta koje je potrebno eliminisati da bi se dobitile relacije koje u eksplicitnoj formi povezuju momente u zglobovima sa kretanjem mehanizma. Pri formiranju jednačina Njutn-Ojlerovim metodom se ide od segmenta do segmenta na način koji se poklapa sa prirodnom predstavom o kinematskom lancu, što ovom formalizmu daje dodatnu jasnoću i omogućava lakše razumevanje efekata koji se javljaju.

Sa druge strane, u Lagranževoj formulaciji dinamičko ponašanje sistema kao celine je opisano pomoću rada i energije korišćenjem generalisanih koordinata. Sve sile koje ne vrše rad, kao i reakcije veza ne pojavljuju se u jednačinama. Rezultujuće jednačine su, u opštem slučaju, kompaktnije i obezbeđuju relacije između momenata u zglobovima i njihovih pomeranja u zatvorenoj formi.

Prvo ćemo prikazati formiranje dinamičkog modela na bazi Njutn-Ojlerovih a zatim Lagranževih jednačina.

#### 6.3.1 Njutn-Ojlerova formulacija jednačina kretanja

Razmotrimo jednačine kretanja jednog segmenta robotskog mehanizma. Kretanje svakog krutog tela (segmente mehanizma možemo smatrati krutim telima) se može razložiti na translatoryno kretanje bilo koje njegove tačke i rotaciju oko te tačke. Pogodno je za tu proizvoljnu tačku izabrati težište segmenta.

Na Sl. 6.10. je, slično statičkom slučaju sa Sl. 6.1., prikazan  $i$ -ti segment kinematskog lanca sa svim silama koje na njega deluju. U odnosu na Sl. 6.1. ovde se pojavljuju i inercijalna

sila i moment kao posledica kretanja segmenta. Ako sa  $C_i$  obeležimo težište  $i$ -tog segmenta, tada je  $v_{C_i}$  linearna brzina njegovog težišta izražena u odnosu na bazni koordinatni sistem  $O_o x_o y_o z_o$ . Inercijalna sila je data sa  $-m_i \ddot{v}_{C_i}$  gde je sa  $m_i$  označena masa segmenta, a sa  $\ddot{v}_{C_i}$  izvod po vremenu tj. ubrzanje težišta.

Analogno jednačini (6.1), i ovde se ravnoteža svih sila koje deluju na  $i$ -ti segment može izraziti kao

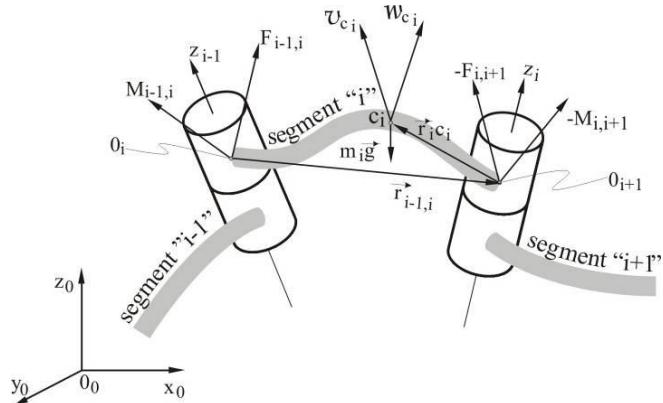
$$\sum \vec{F} = 0: \vec{F}_{i-1,i} - \vec{F}_{i,i+1} - m_i \cdot \ddot{v}_{C_i} + m_i \cdot \vec{g} = 0 \quad i = 1 \dots n \quad (6.28)$$

gde su sa  $\vec{F}_{i-1,i}$  i  $-\vec{F}_{i,i+1}$  označene sile kojima na  $i$ -ti segment deluju  $i-1$ -vi i  $i+1$ -vi segment, dok je sa  $\vec{g}$  obeležen vektor ubrzanja zemljine teže.

Na sličan način možemo napisati jednačinu ravnoteže momenata, analognu sa (6.2), za ovaj slučaj kao

$$\sum \vec{M} = 0: \vec{M}_{i-1,i} - \vec{M}_{i,i+1} + \vec{r}_{i,Ci} \times \vec{F}_{i,i+1} - \vec{r}_{i-1,Ci} \times \vec{F}_{i-1,i} - I_i \cdot \vec{\omega}_i - \vec{\omega}_i \times (I_i \cdot \vec{\omega}_i) = 0 \\ i = 1 \dots n \quad (6.29)$$

gde je sa  $I_i$  obeležen tenzor inercije  $i$ -tog segmenta,  $I_i \cdot \vec{\omega}_i$  predstavlja obrtni moment, dok  $\vec{\omega}_i \times (I_i \cdot \vec{\omega}_i)$  predstavlja žiroskopski moment.



Sl. 6.10. Sile i momenti koji deluju na  $i$ -ti segment (dinamički slučaj)

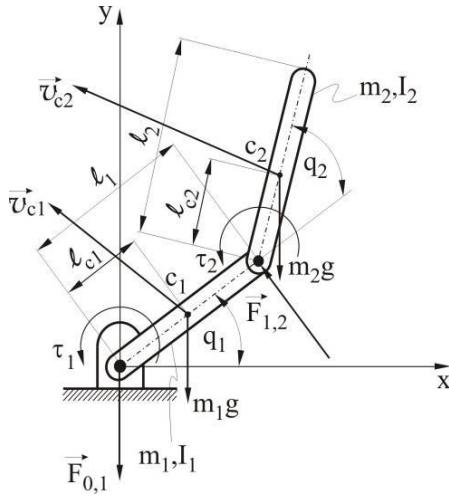
Jednačine (6.28) i (6.29) opisuju dinamičko ponašanje jednog segmenta u kinema-tičkom lancu. Obilazeći ga od  $i = 1 \dots n$  može se formirati sistem jednačina kojima se opisuje dinamičko ponašanje ukupnog sistema.

Međutim, ovako formiran sistem jednačina nije pogodan za dinamičku analizu i sintezu upravljanja. Pre svega, potrebno je obezbediti formu u kojoj su pogonski momenti ulazne veličine, a kao izlazne treba da se pojave veličine koje potpuno definišu poziciju mehanizma. Uglovi u zglobovima  $q_i$  konstituišu takav nezavisani skup. Prema tome, potrebno je dinamički model tako realizovati da se na osnovu ulaznih momenata mogu direktno dobiti pomeraji u zglobovima.

Ovakav prilaz čemo najbolje objasniti na primeru jednostavnog dvosegmentnog ravanskog mehanizma prikazanog na Sl. 6.11. koji je dovoljno jednostavan da jednačine ne budu isuviše složene, ali je dovoljno složen da sadrži sve efekte koji se mogu javiti.

### Primer 6.3.

Za dvosegmentni ravanski manipulacioni robot prikazan na Sl. 6.11. izvesti Njutn-Ojlerove jednačine kretanja i prikazati ih u formi pogodnoj za dinamičku analizu.



Sl. 6.11. Dvosegmentni ravanski mehanizam

Obzirom da je mehanizam ravanski, ugaona brzina težišta svakog od segmenata se može prikazati skalarnom veličinom  $\omega_i$ , dok se translatorna brzina može prikazati dvokomponentnim vektorom  $\vec{v}_{ci}$ . U slučaju ravanskog mehanizma tenzor inercije postaje skalarni moment inercije u odnosu na težište koji je obeležen sa  $I_i$ . Sve ostale neophodne oznake su date na Sl. 6.11.

Saglasno opštim jednačinama (6.28) i (6.29) Njutn-Ojlerove jednačine za prvi segment se mogu napisati na sledeći način

$$\begin{aligned}\vec{F}_{0,1} - \vec{F}_{1,2} + m_1 \cdot \vec{g} - m_1 \cdot \vec{v}_{c1} &= 0 \\ \vec{M}_{0,1} - \vec{M}_{1,2} + (\vec{r}_{1,c2} \times \vec{F}_{1,2}) - \vec{r}_{0,c1} \times \vec{F}_{0,1} - I_1 \cdot \vec{\omega}_1 &= 0\end{aligned}\quad (6.30)$$

Na sličan način, jednačine za drugi segment su

$$\begin{aligned}\vec{F}_{1,2} + m_2 \cdot \vec{g} - m_2 \cdot \vec{v}_{c2} &= 0 \\ \vec{M}_{1,2} + (\vec{r}_{1,c2} \times \vec{F}_{1,2}) - I_2 \cdot \vec{\omega}_2 &= 0\end{aligned}\quad (6.31)$$

Za ravanski mehanizam momenti  $M_{0,1}$  i  $M_{1,2}$  su upravljeni na ravan u kojoj se kreće mehanizam pa su momenti sprezanja ekvivalentni pogonskim momentima, te važi

$$M_{0,1} = \tau_1, \quad M_{1,2} = \tau_2 \quad (6.32)$$

Ako sada, izraze za momente ubacimo u (6.31), i eliminišemo reakcije veza tako što iz prve jednačine izrazimo  $\vec{F}_{1,2}$  i ubacimo u drugu, dobijamo

$$\tau_2 + \vec{r}_{l,c2} \times m_2 \vec{\dot{v}}_{c2} - \vec{r}_{l,c2} \times m_2 \vec{g} - I_2 \dot{\omega}_2 = 0 \quad (6.33)$$

Slično se može uraditi sa sistemom (6.30) na osnovu čega sledi

$$\tau_1 - \vec{r}_{0,c1} \times m_1 \vec{\dot{v}}_{c1} - \vec{r}_{0,1} \times m_2 \vec{\dot{v}}_{c2} + \vec{r}_{0,C1} \times m_1 \vec{g} + \vec{r}_{0,1} \times m_2 \vec{g} - I_1 \dot{\omega}_1 = 0 \quad (6.34)$$

Obzirom da u ovom slučaju za ugaone brzine možemo pisati

$$\omega_1 = \dot{q}_1, \quad \omega_2 = \dot{q}_2 \quad (6.35)$$

sledi da su linearne brzine težišta  $\vec{v}_{C1}$  i  $\vec{v}_{C2}$

$$\begin{aligned} \vec{v}_{c1} &= \begin{bmatrix} -l_{c1} \cdot \dot{q}_1 \cdot \sin q_1 \\ l_{c1} \cdot \dot{q}_1 \cdot \cos q_1 \end{bmatrix} \\ \vec{v}_{c2} &= \begin{bmatrix} [-l_1 \sin q_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)] \dot{q}_1 - l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \dot{q}_2 \\ [l_1 \cos q_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2)] \dot{q}_1 + l_{c2} \cdot \cos(q_1 + q_2) \dot{q}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.36)$$

Zamenom (6.35), (6.36) i njihovih izvoda u (6.33) i (6.34) dobijamo dinamičke jednačine u traženoj formi

$$\begin{aligned} \tau_1 &= H_{11}\ddot{q}_1 + H_{12} \cdot \ddot{q}_2 - h \cdot (\dot{q}_2)^2 - 2 \cdot h \cdot \dot{q}_1 \dot{q}_2 + G_1 \\ \tau_2 &= H_{22}\ddot{q}_2 + H_{12}\ddot{q}_1 + h \cdot (\dot{q}_1)^2 + G_2 \end{aligned} \quad (6.37)$$

gde je

$$H_{11} = m_1 \cdot l_{C1}^2 + I_1 + m_2 [l_1^2 + l_{C2}^2 + 2 \cdot l_1 l_{C2} \cdot \cos q_2] + I_2 \quad (6.38)$$

$$H_{22} = m_2 l_{C2}^2 + I_2 \quad (6.39)$$

$$H_{12} = m_2 l_1 l_{C2} \cos q_2 + m_2 l_{C2}^2 + I_2 \quad (6.40)$$

$$h = m_2 l_1 l_{C2} \cdot \sin q_2 \quad (6.41)$$

$$G_1 = m_1 l_{C1} g \cos q_1 + m_2 g \{ l_{C2} \cos(q_1 + q_2) + l_1 \cos q_1 \} \quad (6.42)$$

$$G_2 = m_2 l_{C2} g \cdot \cos(q_1 + q_2) \quad (6.43)$$

gde skalarna veličina  $g$  predstavlja ubrzanje zemljine teže usmereno naniže, tj. u negativnom pravcu y ose.

Izraz (6.37) se može u opštem obliku napisati kao

$$\tau = \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G} \quad (6.44)$$

ili u razvijenoj formi za primer dvosegmentnog mehanizma

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$$

Matrica  $H$  se naziva inercijalnom matricom, vektor  $h$  uključuje sve efekte nastale zbog brzinskih članova, dok vektor  $G$  predstavlja gravitaciono opterećenje.

U narednom delu ćemo detaljno razmotriti fizičko značenje pojedinih članova dinamičkog modela koji je u razvijenoj formi dat izrazima (6.37).

Razmotrimo, najpre, prvi član u (6.37). U slučaju da se drugi zglob ne pokreće ( $\ddot{q}_2 = \dot{q}_2 = 0$ ) i ako zanemarimo gravitaciono opterećenje tada prva jednačina sistema postaje

$$\tau_1 = H_{11} \ddot{q}_1 \quad (6.45)$$

odakle se može zaključiti da član  $H_{11}$  predstavlja inercijalnost kojom je opterećen prvi zglob zbog sopstvenog kretanja tj. kada se kreće samo prvi zglob, a drugi je ukočen ( $\ddot{q}_2 = \dot{q}_2 = 0$ ). Važno je napomenuti da inercijalnosti  $H_{11}$  doprinose oba segmenta svojom masom i momentom inercije, jer kretanjem prvog zgloba pokrećemo sve segmente koji se u kinematskom lancu nalaze dalje. Primetimo zatim, da prva dva člana u jednačini (6.38) predstavljaju momente inercija za osu obrtanja, što je u ovom slučaju osa prvog zgloba. Tako,  $m_1 l_{C1}^2 + I_1$  predstavlja ukupni moment inercije prvog segmenta za osu prvog zgloba sračunat prema Štajnerovim teoremama za sračunavanje momenta inercije za paralelne ose. Moment inercije drugog segmenta zavisi od trenutnog rastojanja težišta drugog segmenta od ose prvog zgloba, što je na Sl. 6.10. obeleženo sa  $L$ , a može se sračunati prema izrazu

$$L^2 = l_1^2 + l_{C2}^2 + 2 \cdot l_1 \cdot l_{c2} \cdot \cos q_2$$

pa je moment inercije drugog segmenta dat sa

$$m_2 \cdot [l_1^2 + l_{C2}^2 + 2 \cdot l_1 \cdot l_{c2} \cdot \cos q_2] + I_2 = m_2 \cdot L^2 + I_2$$

što odgovara drugom članu u (6.38). Veoma je važno da se primeti da inercijalnost koju "oseća" prvi zglob (u stvari, ovaj zaključak je opšti i važi za bilo koji zglob mehanizma) zavisi od trenutnog položaja mehanizma tj. od trenutne vrednosti uglova u zglobovima  $q_i$ . Naravno, inercijalnost je maksimalna kada je mehanizam potpuno ispružen ( $q_2 = 0$ ), a minimalna kada je drugi segment potpuno savijen ka osi prvog zgloba ( $q_2 = \pi$ ).

Da bi ispitali fizičku prirodu drugog člana u (6.37) prepostavimo da je  $\dot{q}_1 = \ddot{q}_2 = 0$  i  $\ddot{q}_1 = 0$ . Tada prva jednačina postaje

$$\tau_1 = H_{12} \ddot{q}_2 \quad (6.46)$$

gde smo opet zanemarili gravitaciono opterećenje. Iz (6.46) se može zaključiti da član  $H_{12}$  predstavlja inercijalne efekte kretanja drugog segmenta koji utiču na zglob prvog segmenta. Kada drugi segment ubrzava sila i moment reakcije drugog segmenta deluju na zglob prvog. Uticaj na prvi zglob se može predstaviti momentom sprezanja (obeležimo ga sa  $\tau_{SPR}$ ) koji je dat sledećim izrazom

$$\tau_{SPR} = -M_{1,2} - (r_{0,1} \times F_{1,2}) = -[I_2 + m_2(l_{C2}^2 + l_1 \cdot l_{C2} \cos q_2)]\ddot{q}_2$$

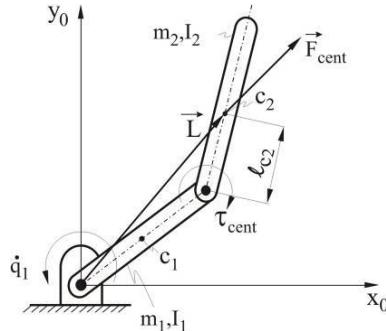
što se u potpunosti poklapa sa drugim članom u (6.37). Prema tome, možemo da kažemo da  $H_{12}$  predstavlja sprezanje između dva zgloba, tj. doprinos momentu u prvom zglobu,  $\tau_1$ , usleg ubrzanog kretanja drugog segmenta.

Analizirajmo sada treći član u (6.37) koji je proporcionalan kvadratu brzina u zglobovima. Zamislimo za trenutak, da za mehanizam u posmatranom trenutku važi  $\dot{q}_2 = 0$  i  $\ddot{q}_1 = \ddot{q}_2 = 0$ , tj. da postoji samo brzina u prvom zglobu koja će uzrokovati pojavu centrifugalne sile kao što je prikazano na Sl. 6.12. Prvac centrifugalne sile (silu obeležimo sa  $\vec{F}_{CENT}$ ) je kolinearan sa pravcem radijusa vektora  $\vec{r}_{0,C2}$ , a intenzitet je dat sa

$$|\vec{F}_{CENT}| = m_2 |\vec{r}_{0,C2}| (\dot{q}_1)^2. \quad (6.47)$$

Centrifugalna sila uzrokuje moment oko drugog zgloba dat sa

$$\tau_{CENT} = \vec{r}_{1,C2} \times \vec{F}_{CENT} = -m_2 l_1 l_{C2} (\dot{q}_1)^2 \sin q_2 \quad (6.48)$$



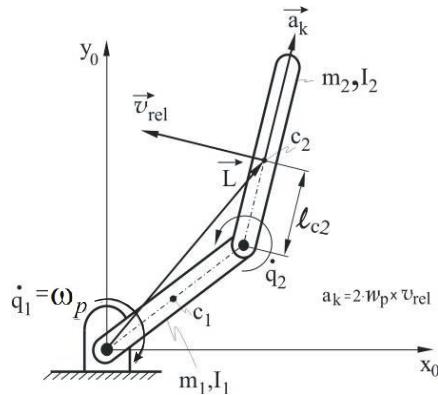
Sl. 6.12. Centrifugalna sila zbog kretanja u prvom zglobu

što odgovara trećem članu u (6.37), pa možemo da zaključimo da ovaj član predstavlja uticaj centrifugalne sile na drugi zglob usled kretanja prvog zgloba. Na sličan način se može pokazati da kada se kreće drugi zglob usled dejstva centrifugalne sile uzrokovane sa  $\dot{q}_2$  javlja se moment koji deluje na prvi zglob.

I na kraju ćemo razmotriti četvrti član u (6.37). Posmatrajmo slučaj kada se oba zgloba simultano pokreću brzinama  $\dot{q}_1$  i  $\dot{q}_2$ . Kretanje usled  $\dot{q}_1$  nazivamo prenosnim, dok je kretanje usled  $\dot{q}_2$  relativno. Tada je Koriolisovo ubrzavanje dato sa

$$\vec{a}_{KOR} = 2\vec{\omega}_P \times \vec{v}_{REL} \quad (6.49)$$

gde  $\vec{\omega}_P$  označava ugaonu brzinu prenosnog kretanja, a  $\vec{v}_{REL}$  linearnu brzinu



Sl. 6.13. Prenosno i relativno kretanje i Koriolisovo ubrzanje

težišta drugog segmenta usled kretanja uzrokovanoj sa  $\dot{q}_2$ . Pravac Koriolisovog ubrzanja je pravac relativne brzine zaokrenut za  $90^\circ$  u pravcu prenosnog kretanja (vidi Sl. 6.13). Koriolisova sila data je sa

$$\vec{F}_{KOR} = 2m \vec{\omega}_1 \times \vec{v}_{C2} = \begin{bmatrix} -2 \cdot m_2 \cdot l_{c2} \cdot \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 \cdot \cos(q_1 + q_2) \\ -2 \cdot m_2 \cdot l_{c2} \cdot \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 \cdot \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

dok je moment oko prvog zglobova uzrokovano ovom silom dat sa

$$\tau_{COR} = \vec{r}_{0,C2} \times \vec{F}_{COR} = 2 \cdot m_2 l_{c2} \cdot \sin q_2 \quad (6.51)$$

Važno je da pomenemo da pravac Koriolisove sile prolazi kroz drugi zglob i neće uzrokovati dodatno opterećenje u drugom zglobu.

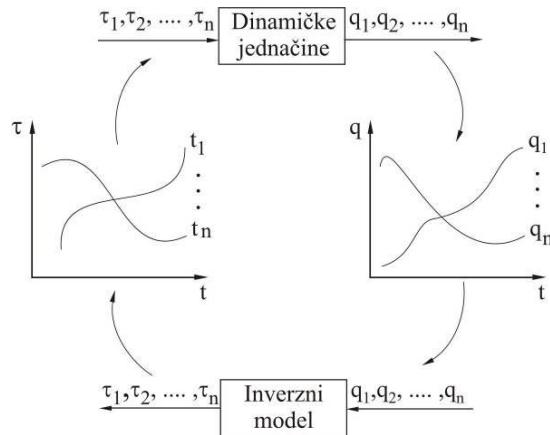
Na ovom primeru smo ilustrovali sve efekte koji se prilikom kretanja mehanizma robota mogu javiti. Jasno je da je dinamički model veoma složen dok se sa porastom broja stepeni slobode mehanizma složenost značajno uvećava. Stoga se kao imperativ nameće aplikacija ovako složenih modela na računar.

Da zaključimo, u modelu dinamike koji je u opštem obliku dat jednačinom (6.44), matrica  $H(q)$  predstavlja inercijalnu matricu sistema čiji elementi, za konkretnu konfiguraciju, zavise od položaja svih segmenata koji se nalaze u kinematskom lancu posle  $i$ -tog zglobova. Elementi na glavnoj dijagonali  $H_{ii}$  predstavljaju inercijalne efekte koje moment u  $i$ -tom zglobovu treba da savlada pri sopstvenom ubrzavanju. Tako, na primer,  $H_{11}$  predstavlja inercijalnost koju prvi zglob pri njegovom kretanju treba da savlada, ali treba uočiti da  $H_{11}$  zavisi od položaja svih ostalih segmenata koje zglob 1 nosi. Van dijagonalni članovi  $H_{ij}$  predstavljaju doprinos momentu u  $i$ -tom zglobovu usled kretanja  $j$ -tog zglobova. Na primer,  $H_{12}$  predstavlja doprinos momentu u prvom zglobovu usled kretanja drugog zglobova.

Vektor  $h$  objedinjuje momente nastale usled brzinskih efekata (Koriolisove i centrifugalne sile, ...), dok  $G$  predstavlja vektor momenata usled gravitacionih opterećenja.

### 6.3.2 Direktni i inverzni zadatak dinamike i rekurzivni dinamički model

Slično kao u slučaju kinematike, i u slučaju dinamike se mogu postaviti dva osnovna zadatka: direktni i inverzni dinamički zadatak (Sl. 6.14)



Sl. 6.14. Direktni i inverzni dinamički problem

Ukoliko su poznati pogonski momenti u zglobovima  $\tau_1(t), \tau_2(t), \dots, \tau_n(t)$  može se jednoznačno odrediti kretanje mehanizma opisano skupom generalisanih koordinata, recimo, kretanjima u zglobovima  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$ . Ovaj zadatak se naziva direktnim dinamičkim problemom.

Međutim, daleko je interesantniji i češće zastupljen zadatak određivanja pogonskih momenata  $\tau_1(t), \tau_2(t), \dots, \tau_n(t)$  takvih da se ostvari željeno kretanje u zglobovima  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$  a samim tim i željeno kretanje hvataljke. Ovaj zadatak se naziva inverznim dinamičkim problemom.

Osnovu za praktičnu primenu matematičkih metoda za formiranje dinamičkih modela na računaru predstavlja njihovo formiranje u rekurzivnoj formi.

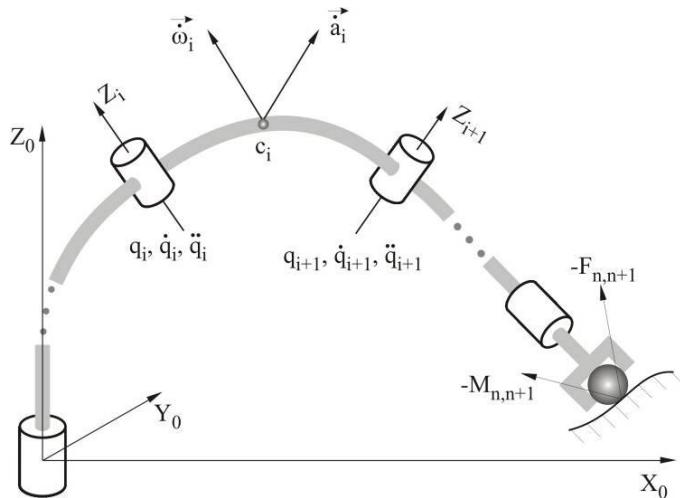
Ulagne veličine neophodne za formiranje dinamičkog modela su:

- Tip mehaničke konfiguracije (vrsta i raspored zglobova),
- Kinematski i dinamički parametri segmenata (dužine, mase i položaji težišta svih segmenata, momenti inercije, ...). U slučaju da robot u hvataljci nosi radni predmet, hvataljka se zajedno sa radnim predmetom smatra jedinstvenim krutim telom pa je potrebno sračunati parametre "modifikovanog" poslednjeg segmenta ( $m = m_H + m_{RP}$ ).
- Rešen inverzni kinematski zadatak, tj. trajektorije svih unutrašnjih koordinata, brzina i ubrzanja duž čitavog razmatranog pokreta.
- Podaci o brzini i ubrzanju baznog segmenta. Ukoliko je robot pričvršćen za tlo te veličine su jednake nuli, a ukoliko nije potrebno ih je specificirati.

Algoritam treba tako definisati da se svi parametri mehanizma zadaju u "lokalmnom" koordinatnom sistemu vezanom za segment. Sva potrebna preračunavanja koja zavise od

njegovog trenutnog položaja u odnosu na bazni koordinatni sistem treba da se izvršavaju automatski. Na Sl. 6.15. je ilustrovan rekurzivni računarski algoritam za formiranje dinamičkog modela na bazi Nutn-Ojlerovih jednačina.

Procedura formiranja dinamičkog modela se odvija u dve faze. U prvoj se određuju sve kinematske veličine (lineарне i угаоне brzine i ubrzanja težišta svih segmenata kinematskog lanca) potrebne za formiranje Njutn-Ojlerovih jednačina. Podsetimo se da je inverzni kinematski zadatak već rešen i da su poznate trajektorije pozicija, brzina i ubrzanja u svim zglobovima. Procedura počinje od prvog segmenta. Pošto su poznate trenutne vrednosti uglova, ugaonih brzina i ubrzanja u prvom zgobu ( $q_1$ ,  $\dot{q}_1$  i  $\ddot{q}_1$ ) linearne i ugaone brzine i ubrzanja težišta  $C_1$  se mogu odrediti.



Sl. 6.15. Rekurzivno formiranje dinamičkog modela

Pošto je sada u potpunosti poznato kretanje prvog segmenta (pored kretanja prvog zgoba ( $q_1$ ,  $\dot{q}_1$  i  $\ddot{q}_1$ ) sračunate su i linearna i ugaona brzina i ubrzanje težišta njegovog segmenta  $v_{C1}$ ,  $\omega_1$ ,  $a_{C1}$  i  $\omega-dot_1$ ) prelazi se na naredni segment, za koji je u ovom trenutku poznato samo kretanje drugog zgoba tj.  $q_2$ ,  $\dot{q}_2$  i  $\ddot{q}_2$ . Obzirom da je za drugi segment kretanje prvog segmenta prenosno, a kretanje drugog segmenta u odnosu na prvi relativno, sada se mogu odrediti brzina i ubrzanje težišta drugog segmenta.

Ova procedura se ponavlja od segmenta do segmenta dok se ne obide kompletan kinematski lanac i stigne do poslednjeg segmenta.

Na bazi sračunatih kinematskih veličina svih segmenata, u drugoj fazi se određuju potrebni momenti u zglobovima. Međutim, sada se polazi od poslednjeg segmenta i duž kinematskog lanca se ide ka baznom segmentu. Napišimo izraz (6.28) za poslednji ( $n$ -ti) segment u sledećem obliku

$$\vec{F}_{n-1,n} = \vec{F}_{n,n+1} + m_n \vec{v}_{Cn} - m_n \vec{g} \quad (6.52)$$

Podsetimo se da  $\vec{F}_{n,n+1}$  predstavlja silu kojom robot svojim poslednjim segmentom (hvataljkom) deluje na okolinu,  $\vec{v}_{Cn} = \vec{a}_{Cn}$  je ubrzanje težišta  $n$ -tog segmenta koje smo već sračunali u prethodnoj fazi, dok  $\vec{g}$  predstavlja vektor gravitacionog ubrzanja. Napomenimo da sila kojom robot deluje na okolinu ( $\vec{F}_{n,n+1}$ ) treba da bude specificirana duž čitave trajektorije koja se razmatra. Sada su sve veličine sa desne strane jednačine poznate pa nepoznatu силу sprezanja  $\vec{F}_{n-1,n}$  između  $n$ -1-vog i  $n$ -tог segmenta možemo odrediti.

Zatim se prelazi na naredni segment pa se na isti način odredi sila sprezanja  $\vec{F}_{n-2,n-1}$  između  $n$ -2-gog i  $n$ -1-vog segmenta.

Istim načinom (na osnovu jednačine (6.29)) možemo najpre odrediti moment sprezanja između  $n$ -1-vog i  $n$ -tог segmenta, a zatim se, kao u prethodnom slučaju, prelazi na prethodni segment i određuje moment  $\vec{M}_{n-2,n-1}$  između  $n$ -2-gog i  $n$ -1-vog segmenta, i tako dalje sve do baznog segmenta.

Prema tome, rekurzivna procedura za sračunavanje sila i momenata u zglobovima mehanizma se bazira na jednačinama

$$\begin{aligned}\vec{F}_{i-1,i} &= \vec{F}_{i,i+1} + m_i \vec{v}_{Ci} - m_i \vec{g} \\ \vec{M}_{i-1,i} &= \vec{M}_{i,i+1} - \vec{r}_{i,Ci} \times \vec{F}_{i,i+1} + \vec{r}_{i-1,Ci} \times \vec{F}_{i-1,i} + I_i \cdot \vec{\omega}_i - \vec{\omega}_i \times (I_i \cdot \vec{\omega}_i)\end{aligned}\quad (6.53)$$

idući od poslednjeg ka prvom segmentu.

Kada su sve sile  $\vec{F}_{n-1,n}$  i momenti  $\vec{M}_{n-1,n}$  određeni sračunavaju se pogonski momenti  $\tau_i$  prema (6.4) i (6.5). Važno je napomenuti da prikazana procedura važi samo za jedan trenutak vremena i da je treba ponavljati na svakom periodu semplovanja duž posmatranog pokreta.

### 6.3.3 Algoritam formiranja dinamičkog modela

Da bi objasnili rekurzivni algoritam za formiranje dinamičkog modela ponovićemo neophodne kinematske relacije u rekurzivnoj formi.

Dve osnovne vrste zglobova koje se koriste u kinematskim lancima manipulacionih robova su rotacioni i translatori zglob sa po jednim stepenom slobode.

Razmotrimo prvo jednostavniji slučaj kada je  $i+1$ -vi zglob prizmatičan. Obzirom da linearno kretanje koje generiše ovaj zglob ne uzrokuje promenu ugaone brzine i ubrzanja  $i+1$ -vog segmenta, važi

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_{i+1} &= \vec{\omega}_i \\ \vec{\varpi}_{i+1} &= \vec{\varpi}_i\end{aligned}\quad (6.54)$$

Za brzine i ubrzanja važe relacije

$$\begin{aligned}\vec{v}_{i+1} &= \vec{v}_i + \dot{q}_{i+1} \vec{z}_i + \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{i,i+1} \\ \vec{a}_{i+1} &= \vec{a}_i + \ddot{q}_{i+1} \vec{z}_i + \vec{\varpi}_i \times \vec{r}_{i,i+1} + 2\vec{\omega}_i \times \dot{q}_i \vec{z}_i + \vec{\omega}_i (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_{i,i+1})\end{aligned}\quad (6.55)$$

Ako je  $i+1$ -vi zglob rotacioni on doprinosi ugaonoj brzini i ubrzaju narednog segmenta pa važi

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_{i+1} &= \vec{\omega}_i + \dot{q}_{i+1} \vec{z}_i \\ \vec{\ddot{\omega}}_{i+1} &= \vec{\ddot{\omega}}_i + \ddot{q}_{i+1} \vec{z}_i + \vec{\omega}_i \times \dot{q}_i \vec{z}_i\end{aligned}\quad (6.56)$$

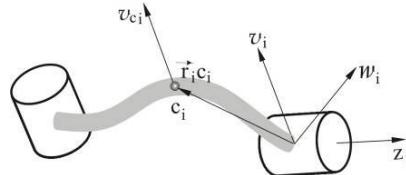
dok za linearne brzine i ubrzanja važi

$$\begin{aligned}\vec{v}_{i+1} &= \vec{v}_i + \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{i,i+1} \\ \vec{a}_{i+1} &= \vec{a}_i + \vec{\ddot{\omega}}_{i+1} \times \vec{r}_{i,i+1} + \vec{\omega}_{i+1} \times (\vec{\omega}_{i+1} \times \vec{r}_{i,i+1})\end{aligned}\quad (6.57)$$

Treba napomenuti da su Njutn-Ojlerove jednačine izražene u odnosu na ubrzanja težišta (vidi jednačine (6.53)), dok su gornji rekurzivni izrazi izraženi u odnosu na koordinatne sisteme koji se nalaze na svakom od segmenata (prema DH notaciji njihovi koordinatni počeci se nalaze na ortovima zglobova). Na Sl. 6.16 su prikazane linearna  $\vec{v}_i$  i ugaona brzina  $\vec{\omega}_i$  izražene u odnosu na lokalni koordinatni sistem segmenta. Linearna brzina težišta je tada data sa

$$\vec{v}_{Ci} = \vec{v}_i + \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{i,Ci} \quad (6.58)$$

Na taj način se mogu odrediti sve veličine neophodne za formiranje dinamičkog modela manipulacionog robota.

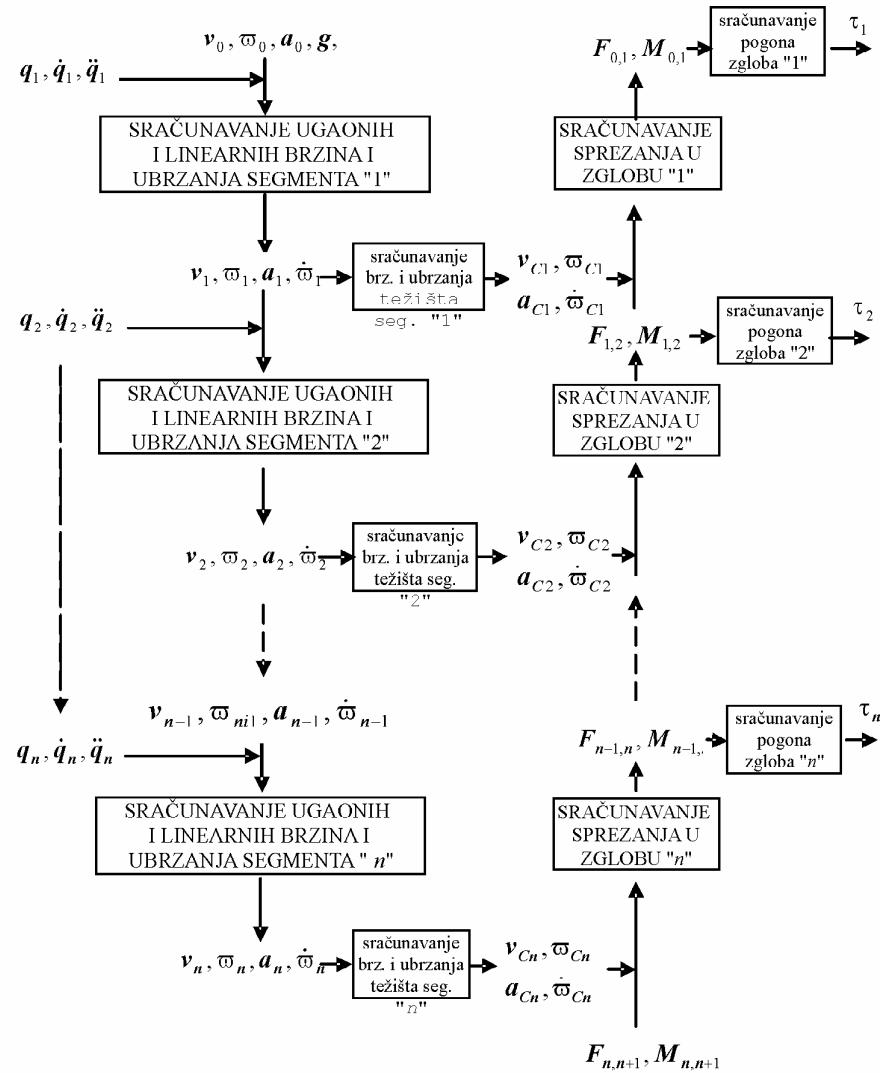


Sl. 6.16. Brzine u zglobu i težištu segmenta

Na Sl. 6.17 je šematski prikazan algoritam za rešavanje zadatka inverzne dinamike i računavanje pogonskih momenata u zglobovima mehanizma. Pretpostavlja se da su svi podaci o mehanizmu robota i trajektoriji zglobova poznati i zadati.

Proces počinje učitavanjem podataka o kretanju baze robota (segment 0). Ukoliko je baza robota nepokretna njene brzine i ubrzanja su jednaki nuli. Zatim se, na osnovu informacije o kretanju u zglobu 1 ( $q_1$ ,  $\dot{q}_1$ ,  $\ddot{q}_1$ ) i na osnovu jednačina (6.55), (6.56) i (6.57) računavaju brzine i ubrzanja ( $\vec{v}_1$ ,  $\vec{\omega}_1$ ,  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{\ddot{\omega}}_1$ ) segmenta 1, tj. njemu pripadajućeg koordinarnog sistema. Ove informacije se prosleđuju dalje, pa se na osnovu ovih podataka i informacija o kretanju u zglobu 2 ( $q_2$ ,  $\dot{q}_2$ ,  $\ddot{q}_2$ ) računava kretanje segmenta 2 ( $\vec{v}_2$ ,  $\vec{\omega}_2$ ,  $\vec{a}_2$ ,  $\vec{\ddot{\omega}}_2$ ). Procedura se nastavlja dalje, sve dok se ne stigne do poslednjeg segmenta u kinematskom lancu. U svakom koraku se dodatno, čim se podaci o kretanju  $i$ -tog segmenta računaju ( $\vec{v}_i$ ,  $\vec{\omega}_i$ ,  $\vec{a}_i$ ,  $\vec{\ddot{\omega}}_i$ ), na osnovu jednačine (6.58) računaju i brzine i ubrzanja njegovog težišta ( $\vec{v}_{Ci}$ ,  $\vec{\omega}_{Ci}$ ,  $\vec{a}_{Ci}$ ,  $\vec{\ddot{\omega}}_{Ci}$ ) radi kasnijeg korišćenja u algoritmu.

Pošto su kinematske veličine za sve segmente sračunate, započinje se sa sračunavanjem



Sl. 6.17. Algoritam sračunavanja pogonskih momenata

potrebnih pogonskih momenata u zglobovima mehanizma. Sračunavanje polazi, na osnovu jednačine (6.53), od poznate vrednosti sile i momenta ( $\vec{F}_{n,n+1}$ ,  $\vec{M}_{n,n+1}$ ) kojim poslednji segment (hvataljka) robota deluje na okolinu, a koja sledi iz tehnoloških uslova zadatka. (U

## Industrijska robotika

## Dinamika

slučaju da se robot kreće slobodnim prostorom i da nema kontakt sa okolinom,  $\vec{F}_{n,n+1}$  i  $\vec{M}_{n,n+1}$  su jednaki nuli.) Zatim se računavaju sile i momenti sprezanja u zglobovima  $\vec{F}_{i,i+1}$  i  $\vec{M}_{i,i+1}$  čijim projektovanjem na osu zgoba (jednačine (6.4) i (6.5)) dobijamo pogonski moment, tj. komponentu koja mora da se uravnoteži dejstvom motora u zgobu, i koju sama struktura zgoba ne može da primi.

$$\begin{aligned} G_1 &= g^T \left[ m_1 J_{L1}^{(1)} + m_2 J_{L1}^{(2)} \right] \\ G_2 &= g^T \left[ m_1 J_{L2}^{(1)} + m_2 J_{L2}^{(2)} \right] \end{aligned} \quad (6.80)$$

Zamenjujući (6.85), (6.86) i (6.87) u (6.80) dobijamo izraze za pogonske momente

$$\begin{aligned} \tau_1 &= H_{11}\ddot{q}_1 + H_{12}\cdot\ddot{q}_2 - h_{122}(\dot{q}_2)^2 - (h_{112} + h_{121})\cdot\dot{q}_1\dot{q}_2 + G_1 \\ \tau_2 &= H_{22}\ddot{q}_2 + H_{12}\ddot{q}_1 + h_{211}(\dot{q}_1)^2 + G_2 \end{aligned}$$

koji su identični sa izrazima (6.37) izvedenim na bazi Njutn-Ojlerovog formalizma za definisanje jednačina kretanja.

## LITERATURA

- An C., Atkinson C, and Hollerbach J.: **Model-Based Control of a Robot Manipulator**, The MIT Press, 1998.  
 Angeles J.: **Fundamentals of Robotic Mechanical Systems, Theory, Methods and Algorithms**, Springer-Verlag, 2003.  
 Asada H. and Slotine J.J.: **Robot Analysis and Control**, John Wiley and sons, 1985.  
 Ben-Zion Sandler, **Robotics- designing the Mechanisms for Automated machinery**, Prentice – Hall, Inc., 1991  
 Bruyninckx H. and De Schutter J.: **Introduction to Intelligent Robotics**, Katholieke Universiteit Leuven, 2001.  
 Craig J.: **Introduction to Robotics: Mechanics & Control**, Addison-Wesley, 1986.  
 Dorf. R and Bishop R.: **Modern Control Systems**, Addison-Wesley, 1995.  
 Eugene I. Rivin, **Mechanical design of robots**, McGraw-Hill, Inc., 1987  
 Fu K., Gonzales R., and Lee C.: **Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence**, McGraw-Hill Book Company, 1987.

---

## **9 PROGRAMIRANJE INDUSTRIJSKIH ROBOTA**

---

### **9.1 UVOD**

Posebno važan zadatak u okviru primene robota u praksi predstavlja njegovo programiranje. Programiranjem se nedvosmisleno određuje ponašanje robota u svim situacijama tokom realizacije zadatka tako da zadatak bude što uspešnije realizovan. Međutim, pošto robot deluje u "stvarnom svetu" i tokom realizacije zadatka mogu nastupiti i nepredviđeni ili neočekivani događaji. Programom treba da se specificira ponašanje robota i u takvim situacijama.

U ovom poglavlju će biti razmotrena problematika programiranja robota sa aspekta glavnih zadataka koji programiranjem treba da budu rešeni. Pored toga će biti reči i o očekivanim pravcima razvoja ove oblasti.

### **9.2 PROGRAMIRANJE I VRSTE PROGRAMSKIH JEZIKA**

Programiranjem se moraju specificirati sve akcije koje robot rokom realizacije zadatka treba da izvrši kao i da se odredi njegovo ponašanje u nepredviđenim situacijama.

Jedna od osnovnih podela načina programiranja robota je prema tome da li je za programiranje potreban programski jezik ili nije. Najjednostavniji način programiranja robota je "obučavanje pokazivanjem" tj. njegovim provođenjem putanjom koju treba da ostvari, njenim pamćenjem i naknadnom reprodukcijom. Najčešća primena ove vrste programiranja (mada polako izlazi iz upotrebe) je kod robota koji treba da ostvare putanje koje nije lako matematički opisati u svim detaljima, kao što je npr. bojenje prskanjem. Umesto na pravom robotu, "pokazivanje" trajektorija koje treba ostvariti se može realizovati pomoćnim uređajem koji geometrijski odgovara robotu, ali u zglobovima nema motore već samo senzore za detekciju vrednosti uglova. Pokretanje ovakvog mehanizma i njegovo provedenje željenom trajektorijom je značajno lakše nego kada bi se koristio pravi robot.

Drugi, suštinski drugačiji, način programiranja robota je korišćenjem jezika za programiranje. Obzirom da je broj zadataka koji se programiraju na ovaj način znatno veći od broja zadataka kod kojih je robot moguće programirati obučavanjem, nadalje ćemo razmatrati samo problematiku programiranja upotrebom programske jezike.

Dva su osnovna načina kako se programski jezik može formirati. Prvi je da se iskoristi potencijal koji pružaju neki od već postojećih viših programskih jezika za programiranje računara kao što su FORTRAN, PASCAL ili C, s tim što je potrebno da se dodaju neophodne rutine za pogon robota.

Drugi način je da se napravi poseban jezik za programiranje robota koji bolje odgovara problematici manipulacije objektima. Mnogi proizvođači robota su i realizovali programske

jezike za programiranje "svojih" robota tako da danas postoji veliki broj "fabričkih" programskih jezika koji zahtevaju određeni hardver i važe samo za određenu "vrstu" robota koje dотиčna fabrika proizvodi. Stoga korisnici robota uvek treba da imaju na umu da, u praksi, promena proizvođača od kojeg se robot nabavlja znači i promenu jezika za programiranje. Pored ostalih nepogodnosti (obuka za novi programski jezik, ...) to znači da programe koji su bili do tle korišćeni treba ponovo realizovati sa novim programskim jezikom koji koristi novi robot.

Postoji više načina na koje program može da se formira. Jedan način je da programer specificira i u programu napiše sve akcije koje robot treba da izvrši, čak i one koje ne moraju neizostavno da budu izvršene svaki put, već samo u slučaju kada se za to steknu odgovarajući uslovi (ovo se najčešće odnosi na situacije kada nastupi neka greška u realizaciji zadatka, a potrebno je da se uticaj greške eliminiše i realizacija zadatka nastavi). Kod robota starijih generacija ta specifikacija je bila tako detaljna da je u programskom kodu programer trebalo da specificira kretanje svakog pojedinačnog zglobova kao i redosled njihovog aktiviranja. Zatim su se pojavili programski jezici kod kojih se specificira putanja robotske hvataljke tokom realizacije zadatka, a kretanje zglobova automatski generiše programski sistem čime je programiranje, sa aspekta programera, postalo značajno olakšano ali treba reći da je programiranje i dalje ozbiljan i složen zadatak čija realizacija dugo traje. I dalje, programer treba da definiše sve pokrete veoma precizno, da vodi računa o odzivu sa senzora i akcijama koje na bazi ovih informacija treba realizovati. Međutim, iako određene sličnosti postoje, treba napomenuti da se programiranje robota ne može poistovetiti sa programiranjem računara. Osnovna razlika je u tome što je tokom izvršavanja programa robot u kontaktu sa realnim, a ne virtualnim okruženjem. Tako, na primer, određena sekvenca programa (tj. određena robotska akcija) može mnogo puta da bude realizovana besprekorno, da bi u jednom trenutku njena korektna realizacija bila onemogućena malom razlikom u dimenzijama objekta kojim robot rukuje. Prema tome, obzirom da akcije robota nisu u potpunosti (idealno) ponovljive, a da nije moguće da se obezbedi ni potpuno isto početno stanje okoline robota (scene u kojoj robot radi) na početku svakog ponovnog izvršavanja zadatka, mogu se javiti greške pri realizaciji zadatka. Stoga je potrebno da se pre industrijske implementacije programa što više ovakvih situacija otkrije i definiše odgovarajući način reagovanja robota, što se postiže detaljnim testiranjem programa. Prema tome, programiranje robota i testiranje razvijenog programa predstavlja dugotrajan i ozbiljan proces. Testiranje je otežano činjenicim da je pri svakom ponavljanju testirane sekvence neophodno fizički reinicijalizovati scenu.

Imajući na umu veliku šarolikost postojećih jezika za programiranje robota, njihovu podelu je najpogodnije uraditi, ne na bazi sintakse, već na osnovu nivoa apstrakcije na kojem se piše kod programa. Stoga robotske jezike možemo da podelimo na četiri osnovne grupe:

- jezici kojima se programiranje vrši na **nivou zglobova** zahtevaju da se programira pokretanje svakog zglobova pojedinačno kako bi se ostvarilo željeno kretanje hvataljke. Ovo su jezici najnižeg nivoa. Jedino je kod robota pravougle ili Dekartove konfiguracije ovo prirodan način programiranja. Predstavnici ove vrste jezika su Olivetti-jeva SIGLA i HELP kompanije DEA.
- jezicima **nivoa manipulacije** se opisuje položaj i orijentacija hvataljke robota tokom realizacije zadatka, dok kretanje pojedinačnih zglobova koji ovakvo kretanje hvataljke treba da obezbede sistem određuje automatski. Najpoznatiji jezici ove klase su VAL firme Unimation koji se koristi za programiranje

## Dinamika

## Industrijska robotika

PUMA robota. Najveći broj savremenih programskih jezika za robote pripada upravo ovoj grupi.

- kod jezika **nivoa objekata** se u program direktno unosi informacija o radnoj sceni na kojoj robot deluje tj. okolini robota. Zadatak se opisuje nizom uzastopnih položaja objekata (umesto položaja robotske hvataljke), a program sam generiše sve što je neophodno da se ovakvo kretanje ostvari. Osnovna prednost ovih jezika nad jezicima nivoa manipulacije je u tome što je pri rearanžiranju scene za određeni zadatak (promena položaja objekata) potrebno samo promeniti koordinate objekata dok sam program kojim se realizuje zadatak nije potrebno ponovo pisati. Osim toga, ovi jezici, u načelu, dozvoljavaju da jedan program bude primenljiv na različite robote bez izmena osnovnog dela programa. Predstavnici ove grupe jezika su AL (i jezici koji su se javili kasnije LM i SRL) gde su objekti prikazani sa jednim ili više koordinatnih sistema, kao i RAPT, AUTOPASS i LAMA gde su korišćeni mnogo složeniji geometrijski modeli.
- grupi jezika **nivoa zadatka** pripadaju sistemi koji bi trebalo da razumeju i izvrše zadatak opisan u najopštijoj formi (npr. montiraj ležaj u kućište motora), tako što bi sami planirali potrebne zahvate, njihov redosled, neophodne putanje hvataljke robota u okviru scene, i generisao odgovarajuće akcije reda izvršenja zadataka. Ne postoji kompletan sistem koji obezbeđuje programiranje robota na ovom nivou.

Druga podela programskih jezika je prema tome da li je neophodno da prilikom formiranja programskog koda programeru bude raspoloživ "pravi" robot ili ne. Ukoliko se u procesu programiranja koristi "pravi" robot (npr. da bi se hvataljka robota dovela u željenu poziciju u okviru "prave" scene i da se odgovarajući uglovi u zglobovima mehanizma zapamte), takav način se naziva *on-line* programiranjem. To praktično znači da robot treba da bude izuzet iz procesa proizvodnje tokom razvoja programa i stavljen na raspolažanje programeru. U slučajevima kada su roboti delovi složenih industrijskih automatizovanih sistema ovo veoma teško može, ili uopšte ne može da se obezbedi, pa tada programiranje mora da se realizuje bez korišćenja robota u toku razvoja programa. Pravi robot i prave radne predmete je jedino moguće i neophodno koristiti za završna podešavanja. Ovakav način programiranja bez korišćenja robota u toku razvoja programa se naziva *off-line* programiranjem. Pošto se pri formiranju programskog koda, umesto stvarnog i fizički prisustnog robota, koristi njegov vituelni model nameće se zaključak da bi bilo korisno da se i realna scena zameni virtuelnom. To ima za posledicu da je pri off-line programiranju moguće proveriti simulacijom proces robotizacije određenog zadatka pre nego što su svi elementi koji u njemu učestvuju fizički dostupni. Prema tome, kvalitetan sistem za off-line programiranje treba da ispuni nekoliko važnih uslova: CAD baza podataka robotskih manipulatora i raznih alata koje robot koristi, CAD baza podataka o radnim predmetima mora da je dostupna za korišćenje, mora da postoji mogućnost da se valjanost napisanog programa proveri simulacijom njegovog izvršavanja i da se na osnovu toga proces poboljša optimizacijom vremena trajanja ciklusa, podešavanjem rasporeda objekata koji učestvuju u procesu ili izmenom redosleda izvršavanja operacija. Važno je da se uoči da pri *off-line* programiranju čak nije neophodno da radni predmet stvarno postoji već je programiranje moguće realizovati koristeći CAD modele. To je veoma pogodno jer je poboljšanja konstrukcije radnog predmeta moguće predložiti još u fazi projektovanja, ukoliko se u toku simulacije ukaže potreba za izmenama.

Naravno, *offline* programiranje ima i određene mane. Programi razvijeni na ovaj način su u većoj meri nepouzdani i podložni pojavi grešaka. Najveći broj problema se javlja zbog nemogućnosti pouzdane simulacije senzora. Osim toga, nemoguće je eliminisati određeno odstupanje modela okoline robota i njegove stvarne okoline. Veoma je važno uočiti ta odstupanja kako bi bilo moguće preduzeti odgovarajuće korektivne akcije bez učešća čoveka.

### 9.3 OSNOVNI PROBLEMI PROGRAMIRANJA ROBOTA

Tri su osnovna izvora problema sa kojima se programeri robota danas susreću:

- Sasvim je izvesno da informacija o okolini u kojoj robot radi mora biti uključena u program, direktno ili indirektno. U mnogim programskim jezicima je informacija o okolini data posredno kroz vrednosti različitih parametara. Tako je npr. informacija o veličini predmeta koji robot prenosi sadržana u vrednosti parametra kojim se definiše otvor hvataljke, dok eksplisitne informacije o samom objektu nema.
- Drugi problem predstavlja opisivanje trodimenzionalnih pokreta robota (npr. prskalice sa bojom) i programiranje operacija koje su bazirane na senzorskim informacijama. Odgovarajuće vrednosti praga osetljivosti senzora, krutosti, ... je najčešće jedino moguće pouzdano odrediti probanjem. Osim toga, većina programskih jezika čak i ne obezbeđuje instrukcije za rad sa senzorima.
- Treći problem predstavlja oporavak od grešaka. Obzirom da sistem ima samo parcijalnu informaciju o okolini, veoma je teško realizovati sistem koji bi bio u stanju da reaguje na adekvatan način i samostalno se oporavi u slučaju da dođe do poremećaja u realizaciji zadatka, makar i kod grešaka koje se najčešće javljaju.

U tekstu koji sledi ćemo se detaljnije pozabaviti ovim problemima.

#### 9.3.1. Modeli okoline

Jezici kod kojih se informacije o objektima koji sačinjavaju okolinu robota ne pojavljuju nazivaju se eksplisitnim jezicima. Jezici koji sadrže informacije o okolini se nazivaju implicitnim jezicima. Ovde ćemo pomenuti i uporediti samo dva načina modeliranja okoline: pomoću koordinatnih sistema (jezik AL) i definisanjem površina objekata i njihovih međusobnih položaja (jezik RAPT).

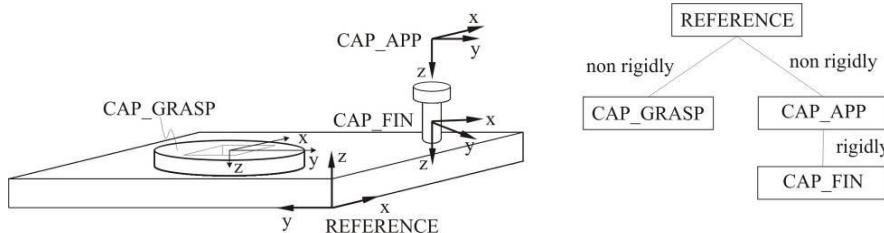
##### a) Modeliranje okoline u jeziku AL

AL je kompletan programski jezik koji omogućava upravljanje radom više robota različite konfiguracije koji istovremeno rade na istom zadatku, i komunikaciju sa različitim perifernim uređajima kao što je npr. sistem za mašinsku viziju.

Scena (raspored i položaj objekata na njoj) se opisuju nizom koordinatnih sistema. Na Sl. 9.1.a je dat primer dva objekta koji su definisani koordinatnim sistemima CAP\_GRASP, CAP\_APP i CAP\_FIN. Međusobni relativni položaj koordinatnih sistema je definisan na Sl. 9.1.b dok je njihov apsolutni položaj dat u odnosu na referentni koordinatni sistem koji je označen sa REFERENCE.

## Dinamika

## Industrijska robotika



Sl. 9.1. Izgled radnog mesta i njegov prikaz nizom koordinatnih sistema

Odgovarajuće instrukcije deklarativnog AL programa su date na Sl. 9.2. dok se u proceduralnom delu programa umesto kretanja robota opisuje niz kretanja

FRAME REFERENCE;

REFERENCE: -FRAME (NILROTN, VECTOR, (5.38, 34.1,.216)\*INCHES);

FRAME CAP\_GRASP;

AFFIH CAP\_GRASP TO REFERENCE AT TRANS

(ROT (YHAT, 180.\*DEGREES)\* ROT (ZHAT, -179.3\*DEGREES),

VECTOR(2.67,9.22,1.08)\*INCHES) NONRIGIDLY;

FRAME CAP\_APP;

AFFIH CAP\_GRASP TO REFERENCE AT TRANS

(ROT (YHAT, 180.\*DEGREES)\* ROT (ZHAT, -180\*DEGREES),

VECTOR(10.2,3.71,3.11)\*INCHES) NONRIGIDLY;

FRAME CAP\_FIN;

AFFIH CAP\_FIN TO CAP\_APP AT TRANS

(ROT (ZHAT, 45.\*DEGREES),3\* ZHAT) RIGIDLY;

SCALAR WIDTH;

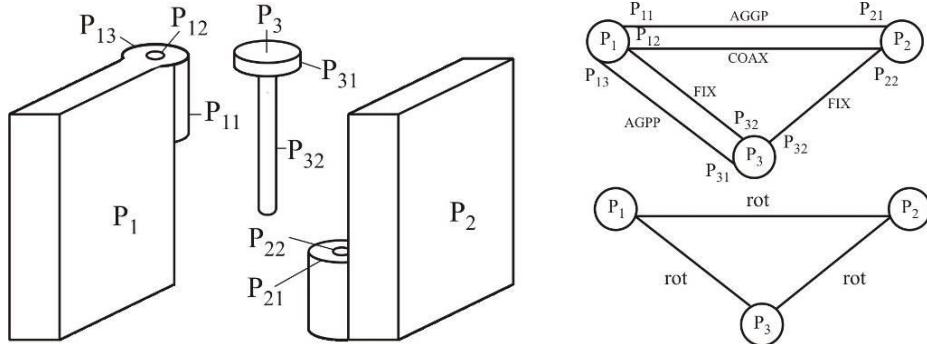
WIDTH : -2.4;

Sl. 9.2. Opis modela okoline u AL programu

Iako u veoma ograničenom obliku, ovakav opis okoline ima odredene prednosti. Pošto se u programu eksplicitno definišu položaji objekata, a ne pozicije hvataljke robota, ovakav program se može koristiti za realizaciju istog zadatka različitim robotima. Osim toga se, npr. isti montažni program može koristiti ukoliko se i model okoline promeni u smislu da objekti koji učestvuju u montaži promene svoje položaje u okviru radne scene. U tom slučaju je potrebno samo preračunati nove položaje objekata, dok ostatak programa ostaje neizmenjen.

### b) Modeliranje okoline u jeziku RAPT

Drugi primer modeliranja okoline se može naći u jeziku RAPT koji je baziran na sintaksi jezika APT koji je široko korišćen jezik za programiranje numerički upravljaljanih mašina. U jeziku RAPT se objekti opisuju tako što se specificiraju sve relevantne stranice (površine) objekata (one koje direktno učestvuju u realizaciji zadatka, vidi Sl. 9.3) i njihovi finalni relativni položaji.



Sl. 9.3. Objekat sa svojim sastavnim delovima i usvojeni geometrijski entiteti

against/head of pin, top of flange 1

fits/shaft of pin, hole of flange 1

fits/shaft of pin, hole of flange 2

against/bottom of flange 1, top of flange 2

Sl. 9.4. Relacije između delova montiranog objekta

Relativni položaji površina na različitim objektima koje dolaze u kontakt mogu biti definisani kao: upravan na (*perpendicular to*) i paralelan sa (*parallel to*). Elementarni geometrijski entiteti koje sistem prepoznaće su: ravan (*plane*), cilindar (*cylinder*) i sfera (*sphere*).

Pošto su svi pojedinačni objekti opisani na odgovarajući način, programer treba da definiše njihov međusobni položaj kada je objekt potpuno montiran. Za to mu na raspolaganju stoje sledeće relacije: pasuje u (*fits*), koaksijalan (*coaxial*), koplanaran (*coplanar*), ravan nasuprot ravni (*against plane to plane*, označeno kao *agpp* na Sl. 9.3), ravan nasuprot cilindru (*against plane to cylinder*), ravan nasuprot sferi (*against plane to sphere*), sfera nasuprot sfere (*against sphere to sphere*). Linearno (*linear*) znači da jedno telo može da se translatorno pomera u odnosu na drugo u jednom pravcu, rotaciono (*rot*) označava da jedno telo može da rotira oko jedne ose u odnosu na drugo, fiksirano (*fix*) označava da dva tela imaju nepromenljiv relativan položaj, linearno-linearno (*linlin*) znači da je mogućnost relativnog kretanja dva tela ograničena na ravan bez rotacije. Relativni odnosi pojedinih sastavnih delova ukupnog proizvoda na primeru šarke su prikazani na Sl. 9.3.a, a relativni odnosi geometrijskih entiteta i relativna pokretljivost pojedinih sastavnih delova na Sl. 9.3.b.

Treba napomenuti da RAPT omogućava formiranje podsklopova – trajnih ili privremenih koji u jednom trenutku postoje dok se kasnije može deklarisati da ne postoje. Kada su dva tela povezana u podsklop (možemo ih povezati i radi realizacije zajedničke akcije) oni realizuju isti pokret. Primera radi, ukoliko je neki objekat povezan sa hvataljkom robota, on će se kretati zajedno sa njom prateći njenu promenu položaja i orijentacije i zadržavajući uvek zadati relativni položaj. Osim toga, da bi se zadatak realizovao nije dovoljno samo da se definiše međusobni položaj sastavnih delova kada je objekt potpuno montiran, već programer treba da propiše redosled izvođenja pojedinih akcija kojima se stiže do konačno montiranog proizvoda.

I kod ovog jezika postoji nekoliko otvorenih i nerešenih problema. Pre svega treba

napomenuti da modeli tela nisu ograničeni i nije moguće proveriti da li će tokom izvršavanja zadatka doći do sudara. Zatim, RAPT ne podržava rad sa senzorima. Prepostavlja se da su sva kretanja ostvarena na nivou nominala i sve odluke se na tome baziraju. I na kraju, RAPT program može biti samo niz bezuslovnih komandi i nisu dozvoljena uslovna grananja.

### c) Budući trendovi u modeliranju okoline

Obzirom da su CAD sistemi našli svoje mesto u savremenom svetu i da će njihova uloga sve više rasti, logično se nameće zaključak da bi bilo svrshodno da se ovi sistemi u što većoj meri koriste pri programiranju robota. Međutim, u ovom trenutku postoje izvesni problemi koji stoje na tom putu.

Prvi problem koji treba razrešiti je da se obezbedi da se ponašanje objekata u okviru robotskog sistema simulira, a ne da se objekti samo animiraju. Naravno, ovo se odnosi na sve elemente sistema scene, kako one koji su aktivni (tj. koji su osnaženi motorima i na čije ponašanje možemo aktivno uticati, kao što su na primer roboti), tako i na one koji nisu. Primera radi, ako je objekat postavljen na strmu ravan, u slučaju isuviše velikog nagiba treba da se javi proklizavanje, na isti način na koji bi se to dogodilo u stvarnosti. Problem je što CAD sistemi "ne znaju" ništa o fizici. Ovakvi sistemi koji se koriste u robotici mogu da simuliraju robe, ali ne mogu da simuliraju ostatak sistema.

Osim toga, potrebno je da roboti bolje "razumeju" svoju okolinu. Skoro svaki zadatak zahteva računarsku interpretaciju objekata kojima se manipuliše. Obzirom da robot deluje u složenoj okolini u načelu su modeli objekata nepotpuni i nedovoljno tačni. Stepen složenosti modela zavisi od njegove namene. Potpuni opis objekata (geometrija + fizičke i mehaničke osobine) je sigurno nepotreban, jer pruža više informacija nego što nam je potrebno. Da bi objekat preneli robotom jedino je potrebno da se specificiraju površine gde treba da se izvrši hvatanje (to su najčešće naspramne i paralelne stranice) i ciljna pozicija. Međutim, u slučaju da se dogodi greška prilikom realizacije zadatka (npr. prilikom prenošenja objekat je ispašao iz hvataljke), ovaj model postaje nedovoljan da bi sistem samostalno ispravio grešku. Tada postaju važne i ostale informacije, kao na primer: o položaju težišta objekta, alternativnim pozicijama za hvatanje, kvalitetu površina (koeficijent trenja, osobine refleksije ukoliko se koristi vizija), a ukoliko postoji više mogućih načina hvatanja objekta potrebno je da se donese odluka o tome na koji način objekat treba da bude uhvaćen i na koji način da se takav hvat ostvari ukoliko nije moguće objekat direktno uhvatiti na željeni način (npr. ukoliko se predmet posle ispuštanja iz hvataljke otkotrlja na mesto na kojem nije direktno dohvatljiv).

#### 9.3.2. Opisivanje zadataka

Svaki robotski program predstavlja opis (spisak) akcija koje robot treba da ostvari da bi izvršio postavljeni zadatak. Prvi način na koji to može da bude urađeno je da se sve akcije specificiraju veoma detaljno, sa svim pojedinostima šta robot treba da uradi i gde da bude u svakom trenutku. Drugi način, koji se još naziva i planiranje zadataka, se sastoji u tome da se opiše gde se nalaze objekti i kako sa njima treba rukovati. Ovde se ne specificiraju akcije robota koje treba realizovati.

Mi ćemo se ovde osvrnuti samo na problematiku planiranja zadataka uz napomenu da ovi problemi još uvek nisu rešeni i da su i dalje predmet istraživanja. Problematiku možemo da

podelimo na tri glavne grupe:

- kako generisati putanje robota u okviru scene pri realizaciji zadatka, tako da ne dođe do sudara sa drugim objektima (planiranje trajektorija),
- kako odrediti pozicije za hvatanje objekta. Ovaj problem se usložnjava ukoliko se koristi kompleksna hvataljka (veštačka šaka) kojom je moguće realizovati više različitih hватова, pa je najpre potrebno odrediti vrstu hвата, a zatim je potrebno odrediti i mesto na objektu gde se takav hват može primeniti,
- kako generisati program za fina kretanja za čiju realizaciju je potrebno koristiti informacije sa senzora.

Kratko ćemo se osvrnuti na svaki od ovih problema.

#### a) Planiranje trajektorija

Uopšteno govoreći, kod planiranja trajektorija je moguće postaviti jedan od dva sledeća zadatka: gde objekat A može biti postavljen u oblasti R tako da ne dođe do sudara (kolizije) sa bilo kojim drugim objektom B koji se nalazi u R, i kako odrediti putanju pomeranja objekta A kroz oblas R od jedne do druge pozicije tako da tokom pomeranja ne dođe do sudara sa drugim objektima. Scena, za koju će biti izložen jedan od pristupa planiranja trajektorije, se smatra statičkom i dvodimenzionalnom, dok se objekti i prepreke aproksimiraju poligonalnim linijama.

Najčešće se rešavanju ovog problema prilazi tako što se objekat A smanjuje do veličine tačke, a prepreke se uvećavaju da bi se izvrшила kompenzacija originalne veličine objekta. Zatim se određuje skup svih mogućih pravolinjskih putanja između uvećanih objekata, a kao rešenje se bira najkraća.

Osnovna prednost ovog prilaza se ogleda u olakšanom sračunavanju preseka kontura objekata i prepreka tj. određivanju situacija kada dolazi do sudara objekta i prepreka. Mnogo se lakše odredi presek tačke sa objektom nego jedne konture objekta sa drugom. Osim toga, u slučaju dvodimenzionalnog problema, i ukoliko se razmatra samo translatorno kretanje objekta, na ovaj način se dolazi do optimalnog rešenja. Mana ovakvog prilaza je to što veličina objekta A treba da je poznata unapred i ne može se menjati. U slučaju različitih objekata koje treba pomeriti na istu lokaciju u okviru scena, kompletну proceduru treba ponoviti za svaki predmet. Druga mana je što ovakav prilaz daje rešenja koja su veoma blizu preprekama, što svakako nije poželjno.

Ukoliko je dozvoljeno da predmet tokom kretanja i rotira računarska složenost se značajno uvećava. Slična metodologija se može primeniti i u slučaju trodimenzionalnog problema mada dobijeno rešenje u ovom slučaju ne mora da bude optimalno.

Ovaj problem je rešavan i drugačijim prilazima, kao što je, na primer, eksplicitni opis slobodnog prostora između objekata na sceni. Slobodan prostor je opisan nizom generalisanih cilindara, a putanja je dobijena spajanjem njihovih centara. Iako ovakva putanja nije optimalna, pruža dodatnu sigurnost da neće doći do sudara jer se objekat kreće sredinom slobodnog prostora. Osim toga, ovaj način ima prednost da opis prostora i generisana putanja nisu zavisni od objekta koji se prenosi i mogu da se koriste za više njih.

Rešavanje zadatka obilaženja prepreka obavlja se na nivou upravljačkog sistema robota. Takođe se razmatra dvodimenzionalna scena, ali se identifikacija objekata vrši kamerom koja se nalazi iznad, tako da objekti mogu da budu na nepoznatim lokacijama. Oko svakog objekta na sceni se definiše potencijalno polje koje deluje na robotsku hvataljku odbojnom

## Dinamika

## Industrijska robotika

silom koja raste sa smanjivanjem rastojanja između objekta (prepreke) i hvataljke. Pre početka kretanja potrebno je zadati početnu P i krajnju K poziciju objekta. Ciljna lokacija na objekat deluje privlačnom silom. Sistem započinje kretanje od P ka K po pravoj liniji. Obzirom da se scena snima kamerom, stalno je dostupna informacija o rastojanju hvataljke i susednih objekata, pa se i odbojna sila može računati u svakom trenutku. Kretanje hvataljke je rezultanta delovanja odbojnih sila od objekata pored kojih hvataljka robota prolazi. Ovaj prilaz daje dobre rezultate čak i u slučaju pokretnih prepreka. Problemi mogu nastati ukoliko robot zakloni scenu, pošto sistem za viziju stalno mora da ima jasnu vidljivost kako bi mogao da bude određen međusobni položaj svih objekata.

Jasno je da je planiranje putanja na sceni, posebno ukoliko objekti (prepreke) nisu statički, još daleko od industrijski primenljivog rešenja. Čini se da bi najbolje rezultate dala kombinacija planiranja trajektorija na visokom hijerarhijskom nivou sa adekvatnim upravljanjem na niskom hijerarhijskom nivou.

### b) Hvatanje

Razvijeni metodi za određivanje mesta za hvatanje objekata se najčešće baziraju samo na geometrijskim karakteristikama predmeta. Složenost algoritma svakako zavisi od složenosti same hvataljke i njenih sposobnosti za realizaciju različitih hvatova, ali se u industrijskoj robotici najčešće koriste hvataljke jednostavne konstrukcije. Algoritam za nalaženje pozicija za hvatanje dvoprstom paralelnom hvataljkom bi mogao da ima sledeću formu:

- Eliminišite iz razmatranja sve površine koje će biti aktivne tokom realizacije zadatka tj. koje će biti u kontaktu sa drugim objektima,
- Razmotrite simetriju objekta,
- Naći dve približno paralelne površine dovoljne veličine za oslanjanje prstiju, a čije međusobno rastojanje omogućava da objekat bude obuhvaćen prstima i uhvaćen,
- Ako nije moguće pronaći dve površine koje ispunjavaju uslove pod 3. treba da se pokuša da se pronađe jedna površina i jedna ivica,
- Ako nije moguće ispuniti uslov 4. treba ponoviti proceduru i pokušati da se pronadu dve ivice, ili jedna ivica i jedna izvodnica ili dve ili više izvodnica.

Ukoliko postoji više potencijalnih hватова koji su određeni na osnovu geometrije objekta, izbor hвата koji ће biti primenjen se realizuje na osnovu dodatnih kriterijuma baziranih na dodatnim informacijama: znanju o zadatku, opštih ograničenja, ... Ovakav prilaz je posebno pogodan ukoliko isti objekat treba hvatati više od jednom. Kada se jednom odrede svi mogući hватovi za određenu hvataljku i određeni objekat, novi hват je moguće odrediti znatno brže selekcijom među postojećim hватovima.

Naravno, problematika hvatanja se znatno usložnjava ukoliko je predmet složenije geometrije ili isuviše težak, pa je za njegovu manipulaciju potrebno koristiti kooperativni rad dva ili više robova, a pogotovo ukoliko se radi o "nestandardnim" objektima (sunđerasti objekti, tkanine, lako lomljivi, ...).

### c) Fina kretanja

Kada objekti kojima robot manipuliše dođu u kontakt, obzirom da je nemoguće ostvariti apsolutno tačno međusobno pozicioniranje, mogu se pojaviti neočekivano velike kontaktne sile koje su veoma nepoželjne, jer mogu da spreče dalju realizaciju zadatka, ili da uzrokuju

lom nekog od objekata u kontaktu. U ovakvim slučajevima postaju veoma važna kretanja objekata u kontaktu kojima se obezbeđuje da situacija ne krene neželjenim tokom i da se realizacija zadatka nastavi. Ovakva kretanja se nazivaju finim kretanjima (*fine motion*), za razliku od kretanja kojima se ostvaruje prenošenje objekta u radnom prostoru (*gross motion*).

Osnova za uspešnu realizaciju ovakvih situacija je senzorska informacija o silama koje se javljaju na kontaktu, kao i podatljivo ponašanje samog objekta koji treba lako da se adaptira na pozicione netačnosti objekata u kontaktu. Veoma je pogodno ukoliko senzor kojim se mere sile istovremeno predstavlja i elemenat koji obezbeđuje podatljivo ponašanje objekta. Tipičan primer zadatka gde su fina ponašanja izuzetno važna je ubacivanje cilindričnog objekta u otvor (*peg-in-hole*) ukoliko među njima postoji veoma mali zazor. Sasvim je moguće da su zazori između objekta i otvora manji od rezolucije komandovanog kretanja robota.

Treba pomenuti da se rešavanju ovog problema prilazi na nekoliko načina. Jedan je učenje. Na osnovu pokušaja i ostvarenih rezultata u tim pokušajima sistem uči i poboljšava svoj stepen uspeha. Posle završenog obučavanja realizovani program se reproducuje, ali se ne može garantovati potpuni uspeh. Za druge radne predmete obučavanje treba ponoviti.

Drugi način je formiranje algoritma koji će realizovati fina kretanja samo na osnovu senzorskih informacija. Mana ovog prilaza je da u fazi testiranja programa treba proveriti što više delikatnih situacija, kao i da treba često vršiti kalibraciju jer se karakteristike senzora tokom vremena mogu menjati.

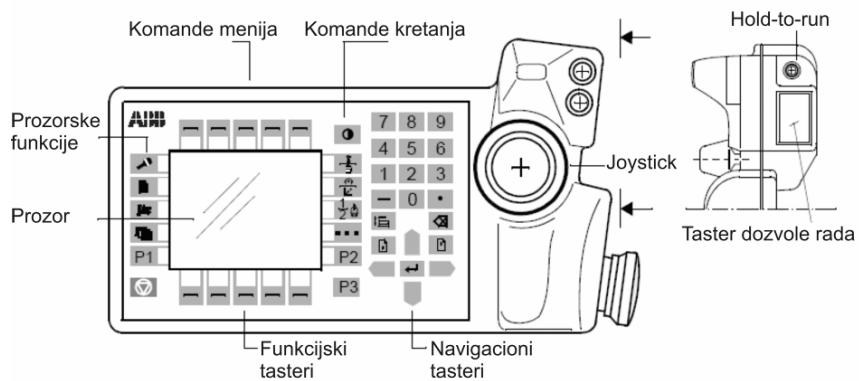
## 9.4 PRAKTIČNI PROBLEMI PROGRAMIRANJA ROBOTA

Pet koordinatnih sistema u robotici: koordinatni sistem radnog prostora, koordinatni sistem osnove robota, koordinatni sistem centra alata, koordinatni sistem osnove stola i koordinatni sistem radnog predmeta, predstavljaju osnovu za jednoznačno i pogodno opisivanje svakog zadatka. Posebno važno je da je robot dovoljno dobro projektovan i izrađen da se može predvideti položaj vrha robota kada se znaju unutrašnje koordinate. Tada, za prostorni zadatak na bazi CAD modela možemo sprovesti programiranje robota i na udaljenom mestu, na računaru koji ima softver dovoljno dobar da se može postići realistična simulacija robota, okruženja i zadatka, jednostavnim uvoženjem CAD modela robota, komponenti koje čine okruženje i CAD modela predmeta koji se obrađuje. Potom se programiranje obavlja jednostavnim izborom tipa pokreta, karakterističnih tačaka a ostalo se prepusta programu. Program pri tome ispituje ostvarivost zadatka u smislu geometrijskih (testiranje uslova kolizije) i dinamičkih ograničenja (da je trajektorija ostvariva za dato vreme). Tako testiran program može se dalje optimizovati. Konačno, program za dati zadatak uvozi se u kontroler robota, i robot počinje sa radom. Od izuzetne važnosti je da su parametri robota tako poznati da nema mogućnosti greške veće od granice potrebne za izvršenje zadatka.

### 9.4.1 Programiranje robota konzolom

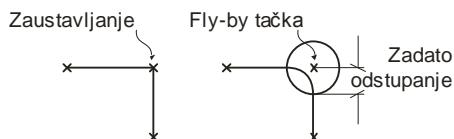
Programiranje konzolom (*teach pendant*) dugo je prisutno u robotici. Onda kada nije moguće razviti pouzdan model zadatka, kada je potrebno obaviti neke pokrete ručno, kao

što je kalibracija, koristi se konzola kojom se robot vodi od tačke do tačke u prostoru ili unutrašnjih ili češće, spoljašnjih koordinata, pamteći položaje tačaka u prostoru i njihov redosled. Potom, takođe kroz konzolu, mogu se postaviti i ostali parametri kretanja koji se odnose na način i brzinu kretanja između sukcesivnih tačaka. Ovakav način programiranja robota zahteva veliko praktično znanje o primeni robota, pa i dobar osećaj o tome da li robot može neki pokret obaviti u nekom delu radnog prostora uz dodatnu složenost zadatka. Tipična konzola za programiranje data je na Sl. 9.6.



Sl. 9.6. Konzola (teach pendant) za programiranje robota.

Kretanje robota programira se nizom manjih pokreta između pozicija u koje želimo robot da dođe ili da pored njih prođe. Završna pozicija robota zadaje se ili manuelnim pomeranjem robota (*jogging*) upotrebom palice na konzoli, ili se direktno zadaje, tastaturom. U neku tačku robot može doći ili tako da se u njoj zaustavi, ili tako da prođe kroz nju zadatom brzinom. U slučaju da treba samo da prođe pokraj tačke, vrednost odstupanja je određena parametrima kao što su brzina kretanja, veličina alata koji robot nosi, zadate orientacije itd.



Sl. 9.7. Primeri tačaka u kojima se robot zaustavlja i pored kojih prolazi.

Brzina kretanja robota zadaje se na jedan od sledećih načina:

- u spoljašnjim, kartezijanskim koordinatama u jedinicama mm/s,
- vremenom potrebnim da se dostigne programirana pozicija, (s), ili
- kao brzina reorientacije alata ili rotacije spoljašnjih osa kretanja( $^{\circ}/s$ ).

Na ovaj način mogu se korigovati mnogi nedostaci koji potiču od nedovoljno precizne izrade robota ili promena nastalih usled dugotrajnog korišćenja. Uračunavanjem kompenzacije u greškama pozicioniranja, recimo usled netačne geometrije, od tačke do tačke, programer robota može bitno popraviti kvalitet procesne operacije. Kod složenih

zadataka, ovakav način programiranja je mukotrpan i veoma teško se može predvideti konačan ishod. Po pravilu se završava riskantnom probnom vožnjom. Ukoliko je potrebno, programer mora da promeni parametre kretanja, obično vreme izvršenja podzadataka, da bi se trajektorije mogle ostvariti. Poseban problem, međutim, predstavlja potreba da se robot ubrza do krajnjih mogućih granica u datom zadatku da bi se zadatak obavio za što kraće vreme. To, kod složenih trajektorija, predstavlja problem koji se preko konzole, ne može rešiti. U tu svrhu razvijeni su složeni softverski alati koji omogućavaju off-line programiranje, uz kompletну podršku numeričkih alata i ekspertskega znanja.

Softverski alati za programiranje robota napredovali su do toga da korisnik i ne mora da poznaje tehnologiju robota do detalja. Umesto toga, dovoljno je da je korisnik upoznat sa performansama robota, jezikom za programiranje ili radom konzole za obučavanje, a posebno, da poznaje konkretnu aplikaciju robota (opsluživanje mašina, zavarivanje, farbanje i slično). Softver za programiranje robota danas obuhvata mnoge funkcionalnosti kao što su:

- hijerarhijska i modularna struktura.
- sadrži funkcije, procedure, rutine kao i globalne i lokalne podatke, aritmetičke i logičke izraze,
- unos podataka u vidu struktura i nizova, kao i CAD modela objekata
- korisnička imena promenljivih, rutina, ulaza i izlaza,
- sveobuhvatna kontrola izvršavanja programa, rukovanje interaptima i greškama,
- izvršavanje u pozadini

Skup instrukcija i funkcija koji čine operativni sistem kontrolera dat je u nastavku. Nove instrukcije mogu se generisati formiranjem makroa sačinjenim od niza standardnih instrukcija. Dodaci osnovnog softvera koji se koriste pri programiranju specijalizovanih aplikacija kao što je, na primer, farbanje, sadrže dodatne instrukcije koje ne samo da objedinjuju komande kretanja u forme karakteristične za farbanje, već sadrže i specijalizovane naredbe u kojima se nalazi ekspertsko znanje o farbanju, kao i komande za upravljanje alatom za farbanje.

Pored ovih osnovnih komandi jezika, softverska podrška robota obuhvata i komande koje se odnose na specifične aplikacije kao što su: zavarivanje (elektrolučno i tačkasto), lepljenje, bojenje, paletizacija i slično.

#### 9.4.2 Programiranje korišćenjem korisničkog softvera visokog nivoa

Korisnički softver prisutan je kod svakog proizvođača savremenih robota. Simulacijom robota i okruženja može se dobiti realistična slika radnog procesa, koja se može dopuniti uvođenjem CAD modela u raznim formatima (IGES, STEP, VRML, ACIS, CATIA). Time programer može za vrlo kratko vreme generisati tačan plan kretanja koji je neophodan za proveru mogućnosti realizacije planiranog zadatka i optimizaciju njegovog izvršavanja.

## 9.5 LITERATURA

An C., Atkinson C, and Hollerbach J.: **Model-Based Control of a Robot Manipulator**, The MIT Press, 1998.  
Angeles J.: **Fundamentals of Robotic Mechanical Systems, Theory, Methods and Algorithms**, Springer-

*Dinamika*

Verlag, 2003.

Asada H. and Slotine J.J.: **Robot Analysis and Control**, John Wiley and sons, 1985.

Ben-Zion Sandler, **Robotics- designing the Mechanisms for Automated machinery**, Prentice – Hall, Inc., 1991

Bruyninckx H. and De Schutter J.: **Introduction to Intelligent Robotics**, Katholieke Universiteit Leuven, 2001.

Craig J.: Introduction to Robotics: Mechanics & Control, Addison-Wesley, 1986.

Dorf. R and Bishop R.: **Modern Control Systems**, Addison-Wesley, 1995.

Eugene I. Rabin, **Mechanical design of robots**, McGraw-Hill, Inc., 1987

Fu K., Gonzales R., and Lee C.: **Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence**, McGraw-Hill Book Company, 1987.

Fu K., Gonzales R., and Lee C.: **Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence**, McGraw-Hill Book Company, 1987.

J.M.Selig, **Introductory Robotics**, Prentice – Hall, Inc., 1992

John Iovine, **PIC Robotics**, McGraw-Hill Companies, Inc., 2004

John M. Holland, **Designing Autonomous Mobile Robots**, Elsevier, Inc., 2004

Jorge Angeles, **Fundamentals of Robotic Mechanical Systems**, Springer-Verlag, New York, Inc., 2003

Lewin A.R.W. Edwards, Open-Source Robotics and Process Control Cookbook, Elsevier, Inc., 2005

Nwokah O., and Hurmuzlu Y., Editors, **The Mechanical Systems Design Handbook**, CRC Press, 2002.

Paul E. Sandin, **Robot mechanisms and mechanical devices**, McGraw-Hill, Inc., 2003

Rade L., and Westergren B.: **Mathematics Handbook for Science and Engineering**, Studentlitteratur, Lund, 1995.

Sciavicco L. and Siciliano B.: **Modeling and Control of Robot Manipulators**, The McGraw-Hill Company, 1996.

Thomas R. Kurfess **Robotics and Automation Handbook**, CRC Press LLC, 2005

Yoram Koren, **Robotics for Engineers** McGraw-Hill, 1985

Hollerbach, J.M., 'A Survey of Kinematic Calibration', The Robotics Review 1, Khatib, Craig, and Lozano-Perez, eds. MIT Press, pp. 207-242 (1989).

Kirchner, H., Gurumooriyh, B., Prinz, F., 'A Perturbation Approach to Robotic Calibration', In. Journal of Robotics Research, Vol. 6, No. 4, pp. 47-59 (1987)

Bernhardt, R., Albright, S.L., eds., Robot Calibration, Chapman and Hall, London, (1992)

Qian, G.Z., Kazerounain, K., 'Statistical Error Analysis and Calibration of Industrial Robots for Precision Manufacturing'. Int. Jo. Adv. Manufacturing Technology, Vol. 11, pp. 300-308 (1996)

Hayati, S., Mirmirani, M., 'Improving the Absolute Positioning Accuracy of Robot Manipulators', Jo. Robotic Systems, Vol. 2, No. 4, pp. 397-413 (1985)

Zak, G. Fenton, R.G., Benhabib, B. 'A Generalized Calibration Method for Robots in Manufacturing Applications', IEEE, 1988, pp. 266-272.

Zhuang, H., Roth, Z., Camera-Aided Robot Calibration, CRC Press, 1996.

Keck, B.W., Smith, R.K., Matone, R. 'Calibration and Accuracy for Precision Manufacturing', Handout for Stanford Robotics Class: ME319, Spring 1995

Fu, K.S. , Gonzalez, R.C., Lee, C.S.G., Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence, McGraw Hill (1987).

Nakamura, Y. Advanced Robotics - Redundancy and Control, Addison-Wesley (1991).

Whitney, D., Sharma, J.S., 'Comments on: An Exact Kinematic Model of the PUMA 600 Manipulator', IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, SMC-16, pp. 182-4 (1986)