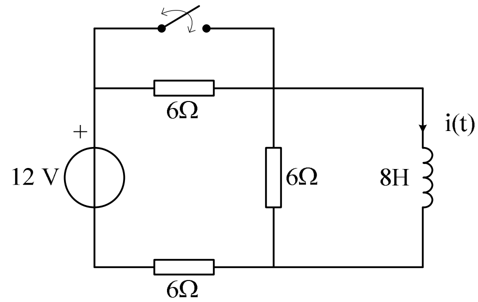
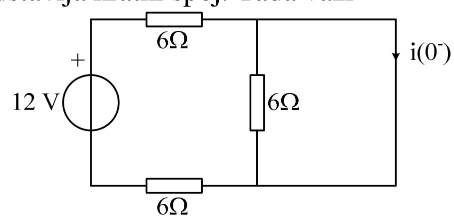
1. Kolo prikazano na slici nalazi se u stacionarnom stanju prije zatvaranja prekidača. Ulaz u kolo je napon izvora konstantnog napona od 12 V. Izlaz je struja kroz induktivitet i(t). Odrediti i(t) za t > 0.



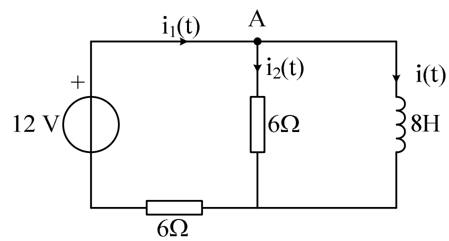
Rješenje:

U trenutku t = 0^- prekidač je otvoren i kolo je u ustaljenom stanju pošto je izvor jednosmjernog napona na ulazu, pa kalem predstavlja kratki spoj. Tada važi



$$i\left(0^-\right)=\frac{12}{6+6}=1\,\mathrm{A}$$

Nakon zatvaranja prekidača, kolo ima izgled



Ako se napiše KZS za čvor A

$$i_1(t)=i_2(t)+i(t)$$

zna se da važi

$$\left.\begin{aligned} u_2(t)&=6i_2(t)\\ u_L(t)&=L\frac{di(t)}{dt}\end{aligned}\right\}\rightarrow i_2(t)=\frac{1}{6}L\frac{di(t)}{dt}$$

Sada se može zapisati jednačina za KZN za konturu koju čini izvor sa otpornicima

$$6i_1(t)+6i_2(t)=u_s(t)\rightarrow 6\left(i_2(t)+i(t)\right)+6i_2(t)=u_s(t)\rightarrow 12i_2(t)+6i(t)=u_s(t)$$

ako se zamjeni raniji izraz za $i_2(t)$

$$12\frac{1}{6}L\frac{di(t)}{dt}+6i(t)=u_s(t)\rightarrow(2LD+6)i(t)=u_s(t)\rightarrow\left(D+\frac{3}{L}\right)i(t)=\frac{1}{2L}u_s(t)$$

što predstavlja RUI za kolo. Ako se zamjeni vrijednost napona izvora

$$\left(D+\frac{3}{L}\right)i(t)=\frac{1}{2L}12=\frac{6}{L}$$

Rješenje posmatrane diferencijalne jednačine traži se u obliku

$$i(t)=i_h(t)+i_p(t)$$

gdje je rješenje homogene diferencijalne jednačine oblika

$$i_h(t)=Ae^{s_1t}$$

a s_1 je korjen karakteristične jednačine

$$s+\frac{3}{L}=0 \rightarrow s_1=-\frac{3}{L}$$

pa važi

$$i_h(t)=Ae^{-\frac{3}{L}t}$$

Partikularno rješenje je oblika eksitacije, a to znači konstante, pa je

$$i_p(t)=B$$

zamjenom u diferencijalnu jednačinu

$$\left(D+\frac{3}{L}\right)i_p(t)=\frac{6}{L} \rightarrow \frac{3}{L}B=\frac{6}{L} \rightarrow B=2$$

pa je traženo rješenje oblika

$$i(t)=Ae^{s_1 t}+B=Ae^{-\frac{3}{L}t}+2$$

Preostala konstanta određuje se na osnovu poznatog početnog uslova, a to je

$$i(0^-)=i(0^+)=1=A+2 \rightarrow A=-1$$

pa je konačno rješenje

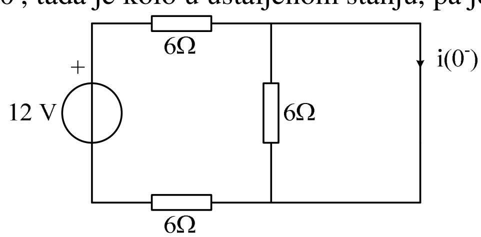
$$i(t)=-e^{-\frac{3}{L}t}+2$$

II način određivanja konstanti

Ako se posmatra rješenje RUI u obliku

$$i(t)=Ae^{-at}+B$$

Prvo se posmatra trenutak t = 0^-, tada je kolo u ustaljenom stanju, pa je kalem kratki spoj a kolo je

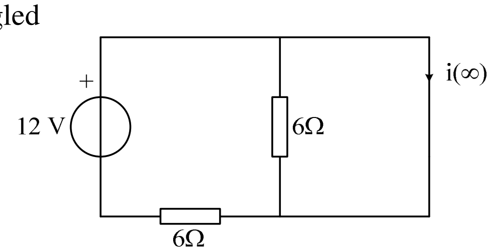


$$i(0^-)=\frac{12}{12}=1$$

a zna se da zbog neprekidnosti struje u kalemu važi

$$i(0^-)=i(0^+)=A+B=1$$

Kolo u trenutku t = ∞ ima izgled



Kolo je u ustaljenom stanju, pa važi

$$i(\infty)=\frac{12}{6}=2=B$$

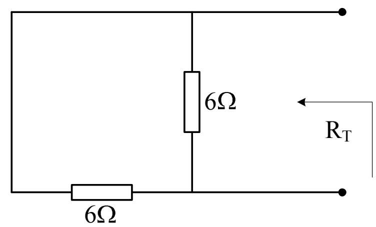
slijedi da važi

$$A=-1$$

Tražena konstanta *a* je prema definiciji

$$a = \frac{R_T}{L}$$

Posmatra se kolo nakon zatvaranja prekidača radi određivanja Teveninove otprnosti na mjestu grane koja sadrži induktivnost.



sada je

$$R_T = \frac{6 \cdot 6}{12} = 3\Omega$$

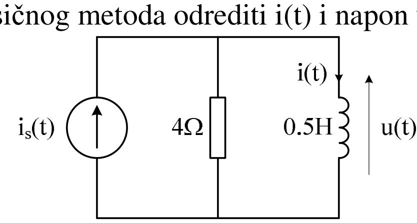
sada je tražena konstanta

$$a = \frac{R_T}{L} = \frac{3}{L} \to \tau = \frac{L}{3} = \frac{8}{3} = 2.67\ s$$

konačno rješenje je

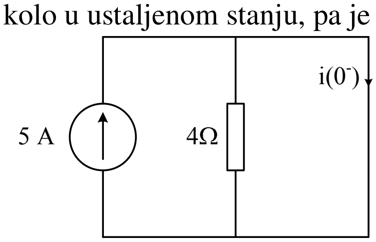
$$i(t) = -e^{-\frac{3}{L}t} + 2, \qquad t > 0$$

2. U kolu prikazanom na slici, struja strujnog izvora se u trenutku t = 0 mijenja sa vrijednosti 5 A na vrijednost 10 A. Primjenom klasičnog metoda odrediti i(t) i napon u(t) za t > 0.



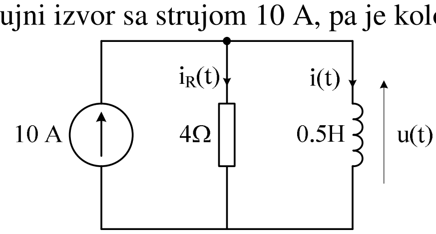
<u>Rješenje:</u>

Posmatra se trenutak t = 0$^-$, tada je kolo u ustaljenom stanju, pa je kalem kratki spoj i važi



$$i(0^-) = 5\,\text{A}$$

U trenutku t = 0$^+$ u kolu radi strujni izvor sa strujom 10 A, pa je kolo



Ako se napiše relacija za KZS za označeni čvor

$$i_R(t) + i(t) = 10$$

zna se da važi

$$i_R(t) = \frac{1}{R} u_R(t) = \frac{1}{R} u(t) = \frac{1}{R} L \frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{4} L \frac{di(t)}{dt}$$

zamjenom u prethodnu relaciju

$$\frac{1}{4}L\frac{di(t)}{dt}+i(t)=10\rightarrow\left(\frac{L}{4}D+1\right)i(t)=10\rightarrow\left(D+\frac{4}{L}\right)i(t)=\frac{4}{L}10$$

što predstavlja RUI za dato kolo. Rješenje je u obliku

$$i(t)=i_o(t)+i_p(t)$$

gdje je rješenje homogene diferencijalne jednačine u obliku

$$i_o(t)=Ae^{s_1t}$$

gdje je s_1 korjen karakteristične jednačine

$$s+\frac{4}{L}=0\rightarrow s_1=-\frac{4}{L}$$

pa je

$$i_o(t)=Ae^{-\frac{4}{L}t}$$

Partikularno rješenje je oblika eksitacije, pa važi

$$i_p(t)=B$$

zamjenom u RUI dobija se

$$\left(D+\frac{4}{L}\right)i_p(t)=\frac{4}{L}10\rightarrow\frac{4}{L}B=\frac{4}{L}10\rightarrow B=10$$

Sada je tražena struja

$$i(t)=Ae^{-\frac{4}{L}t}+B=Ae^{-\frac{4}{L}t}+10,\qquad t>0$$

Preostala konstanta određuje se na osnovu početnog uslova

$$i(0^-)=5\,\mathrm{A}$$

a na osnovu neprekidnosti struje kalema važi

$$i(0^-)=i(0^+)=A+10=5\rightarrow A=-5$$

pa je tražena struja

$$i(t)=-5e^{-\frac{4}{L}t}+10=-5e^{-8t}+10,\qquad t>0$$

a traženi napon na kalemu je

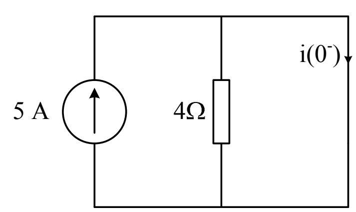
$$u(t)=L\frac{di(t)}{dt}=0.5\left(40e^{-8t}\right)=20e^{-8t},\qquad t>0$$

II način određivanja konstanti

Posmatra se oblik rješenja

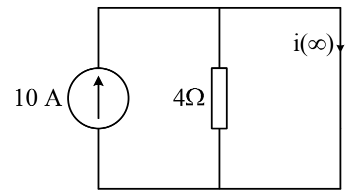
$$i(t)=Ae^{-at}+B,\qquad t>0$$

U trenutku t = 0^- kolo je u ustaljenom stanju sa strujnim izvorom od 5A, a kalem predstavlja kratki spoj pa važi



$$i(0^-)=5\,\mathrm{A}\rightarrow i(0^+)=5\,\mathrm{A}\rightarrow A+B=5$$

U trenutku t = ∞ kolo je u ustaljenom stanju sa strujnim izvorom od 10A, a kalem predstavlja kratki spoj pa važi



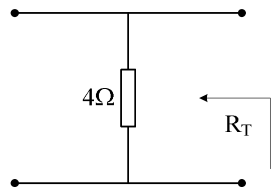
$i(\infty) = 10\,\mathrm{A} \rightarrow B = 10$

pa je

$A = -5$

Konstanta a se definiše kao

$$a = \frac{R_T}{L}$$



$R_T = 4\,\Omega$

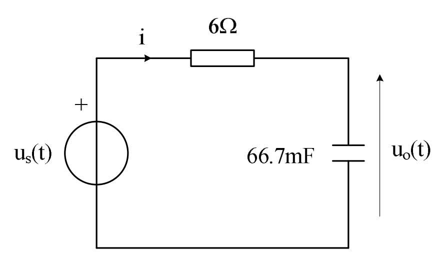
Sad je tražena struja

$$i(t) = -5e^{-\frac{4}{L}t} + 10 = -5e^{-8t} + 10, \qquad t > 0$$

a traženi napon na kalemu je

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} = 0.5\left(40e^{-8t}\right) = 20e^{-8t}, \qquad t > 0$$

3. Za kolo dato na slici ulaz je naponski izvor $v_s(t) = 8 - 15h(t)\,[\mathrm{V}]$. Izlaz je napon na kondenzatoru. Odrediti izlazni napon kola i vremensku konstantu τ.



<u>Rješenje:</u>

Ako se napiše KZN za konturu

$$-u_s(t) + 6i(t) + u_o(t) = 0$$

Zna se da je struja kondenzatora

$$i_C(t) = C\frac{du_o(t)}{dt} = i(t)$$

pa slijedi

$$-u_s(t) + 6C\frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = 0$$

transformacijom izraza dolazi se do

$$(6CD + 1)u_o(t) = u_s(t) \rightarrow \left(D + \frac{1}{6C}\right)u_o(t) = \frac{1}{6C}u_s(t)$$

Kako je izvor definisan kao

$$v_s(t) = 8 - 15h(t) = \begin{cases} 8, & t < 0 \\ -7, & t \geq 0 \end{cases}$$

Dakle, za t<0 $u_s(t) = 8$. To je jednosmjerni napon pa je struja u ustaljenom stanju i jednaka je nuli jer kondenzator predstavlja prekid. Napon na kondenzatoru u trenutku 0^- je prema tome jednak 8V.

$u_o(0^-) = 8\,\mathrm{V}$ -početni uslov

Za t>0, važi

$$u_s(t) = -7\,\mathrm{V}$$

Sada je relacija ulaz izlaz

$$\left(D + \frac{1}{6C}\right)u_o(t) = -\frac{7}{6C}$$

Rješenje ove diferencijalne jednačine traži se u obliku

$$u_o(t) = u_{oh}(t) + u_{op}(t)$$

gdje su

$u_{oh}(t) -$ riješenje homogene diferencijalne jednačine

$u_{op}(t) -$ partikularno riješenje

Prvo se posmatra homogena diferencijalna jednačina

$$\left(D + \frac{1}{6C}\right)u_o(t) = 0$$

karakteristična jednačina je

$$s + \frac{1}{6C} = 0$$

sa korjenom

$$s_1 = -\frac{1}{6C}$$

sada homogeno rješenje ima oblik

$$u_{oh}(t) = Ae^{s_1 t} = Ae^{-\frac{1}{6C}t}$$

Partikularno rješenje ima oblik pobude, a ona je konstantna pa važi

$$u_{op}(t) = B$$

ako se zamjeni u diferencijalnu jednačinu na početku

$$\left(D + \frac{1}{6C}\right)u_{op}(t) = -\frac{7}{6C} \rightarrow \left(D + \frac{1}{6C}\right)B = -\frac{7}{6C} \rightarrow B = -7$$

sada je konačno rješenje oblika

$$u_o(t) = Ae^{-\frac{1}{6C}t} - 7$$

Preostala konstanta određuje se iz zadatog početnog uslova

$$u_o(0^-) = u_o(0^+) = 8$$

$$u_o(0^+) = A - 7 = 8 \rightarrow A = 15$$

Sada je traženi napon

$$u_o(t) = 15e^{-\frac{1}{6C}t} - 7, \qquad t \geq 0$$

a može se pisati i kao

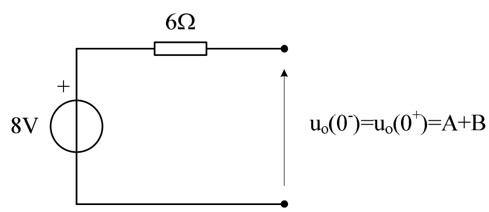
$$u_o(t)=\begin{cases} 8, & t<0 \\ 15e^{-\frac{1}{6C}t}-7, & t\geq 0\end{cases}$$

Napomena:

Ako se posmatra rješenje diferencijalne jednačine

$$u_o(t)=Ae^{-\frac{1}{6C}t}+B=Ae^{-at}+B$$

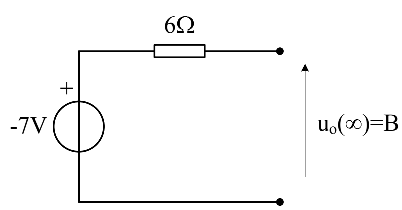
njene konstante mogu biti određene i na drugi način. Ako se posmatra kolo u trenutku 0^-, ono izgleda kao na slici



kao se zna

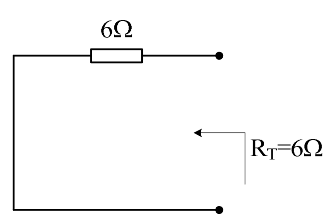
$$\left.\begin{array}{l} u_o(0^-)=8 \\ u_o(0^+)=A+B \end{array}\right\}\rightarrow A+B=8$$

Drugi krajnji trenutak koji se posmatra je t = ∞, tada će napon na kondenzatoru biti jednak naponu u ustaljenom stanju na kondezatoru nakon promjene ulaznog napona, pa je šema



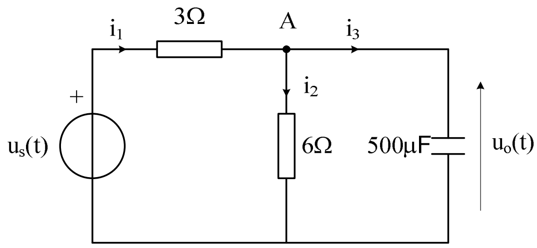
$$u_o(\infty)=Ae^{-\frac{1}{6C}\infty}+B=B=-7$$

Konstanta a za kolo određuje se iz vremenske konstante τ koja se računa pomoću kapacitivnosti kondenzatora C i Teveninovog otpora kola za granu u kojoj je kondenzator.



$$\frac{1}{a}=\tau=R_TC\rightarrow a=\frac{1}{R_TC}=\frac{1}{6\cdot 66.7\cdot 10^{-3}}=2.5\frac{1}{s}\rightarrow \tau=0.4\,s$$

4. Ulaz u kolo prikazano na slici je $u_s(t)$. Izlaz je napon na kondenzatoru $u_o(t)$. Odrediti napon $u_o(t)$ ako je $u_s(t) = 3+3h(t)$ V.

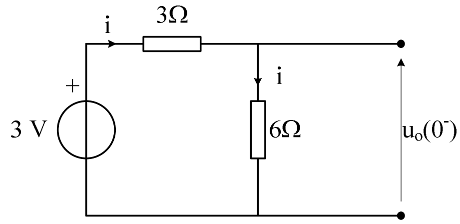


Rješenje:

Ako se napon izvora napiše u obliku

$$v_s(t)=3+3h(t)=\begin{cases}3, t<0\\ 6, t\geq 0\end{cases}$$

Tada je u trenutku t = 0^- u kolu ustaljeno stanje. Izvor je jednosmjerni sa naponom 3V, a kondenzator predstavlja otvorenu granu. Napon na krajevim kondenzatora je



$$u_o\left(0^-\right)=6i=6\frac{3}{9}=2 \text{ V}$$

Time je definisan početni uslov.

Potrebno je napisati relaciju ulaz-izlaz. Posmatra se kolo za t ≥ 0. Ako se napiše KZS za čvor A.

$$i_1(t)=i_2(t)+i_3(t)$$

zna se da važi

$$i_3(t)=i_C(t)=C\frac{du_o(t)}{dt}$$

$$i_2(t)=\frac{1}{6}u_o(t)$$

dobija se

$$i_1(t)=\frac{1}{6}u_o(t)+C\frac{du_o(t)}{dt}$$

Ako se napiše KZN za konturu koju čine izvor i otpornici

$$3i_1(t)+6i_2(t)=u_s(t)$$

ako se zamjene izrazi za struje u posljednju relaciju onda je

$$3\left(\frac{1}{6}u_o(t)+C\frac{du_o(t)}{dt}\right)+6\frac{1}{6}u_o(t)=u_s(t)\rightarrow\left(3CD+\frac{3}{2}\right)u_o(t)=u_s(t)\rightarrow\left(D+\frac{1}{2C}\right)u_o(t)=\frac{1}{3C}u_s(t)$$

Ako se posmatra relacija za t≥0 može se pisati

$$\left(D+\frac{1}{2C}\right)u_o(t)=\frac{1}{3C}6=\frac{2}{C}$$

Posmatrana diferencijalna jednačina ima rješenje oblika

$$u_o(t)=u_{oh}(t)+u_{op}(t)$$

gdje su

$u_{oh}(t)$ – riješenje homogene diferencijalne jednačine

$u_{op}(t)$ – partikularno riješenje

gdje homogeno rješenje ima oblik

$$u_{oh}(t) = Ae^{s_1 t}$$

gdje je s_1 korjen karakteristične jednačine

$$s + \frac{1}{2C} = 0 \rightarrow s_1 = -\frac{1}{2C}$$

Partikularno rješenje ima oblik pobude, a ona je konstantna pa važi

$$u_{op}(t) = B$$

Ako se partikularno rješenje zamjeni u RUI

$$\left(D + \frac{1}{2C}\right)u_p(t) = \frac{2}{C} \rightarrow \frac{1}{2C}B = \frac{2}{C} \rightarrow B = 4$$

Sada je rješenje oblika

$$u_o(t) = Ae^{-\frac{1}{2C}t} + 4$$

Nedostajuća konstanta određuje se iz početnih uslova

$$u_o(0^-) = u_o(0^+) = A + 4 = 2 \rightarrow A = -2$$

Sada se može pisati konačno rješenje

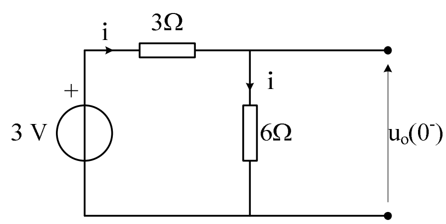
$$u_o(t) = \begin{cases} 2, & t < 0 \\ -2e^{-\frac{1}{2C}t} + 4, & t \geq 0 \end{cases}$$

II način određivanja konstanti

Ako se zna da je rješenje oblika

$$u_o(t) = Ae^{-\frac{1}{2C}t} + B = Ae^{-at} + B, \qquad t > 0$$

Prvo se posmatra trenutak t = 0^-, tada je šema



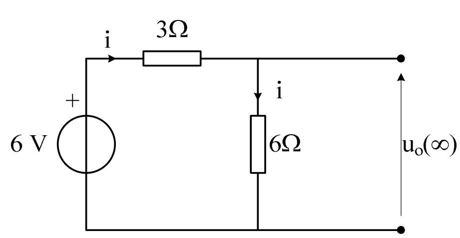
a kako je i ranije dobijeno važi

$$u_o(0^-) = 6i = 6\frac{3}{9} = 2 \text{ V}$$

a kako zbog uslova neprekidnosti napona na kondenzatoru važi

$$u_o(0^-) = u_o(0^+) = A + B = 2$$

Drugi trenutak koji se posmatra je t = ∞, tada je šema



Režim u kolu je ustaljen, pa važi

$$u_o(\infty) = 6i = 6\frac{6}{9} = 4 = B$$

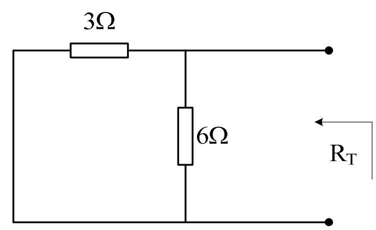
odatle slijedi

$$A = -2$$

što je i ranije dobijeno.

Vremenska konstanta kola je

$$\tau = \frac{1}{a} = R_T C$$



Sa slike Teveninova otpornost je

$$R_T = \frac{3 \cdot 6}{3+6} = 2\Omega$$

slijedi

$$a = \frac{1}{R_T C} = \frac{1}{2C} = 1000 s^{-1} \rightarrow \tau = \frac{1}{a} = 1ms$$

Napomena Za kolo sa kalemom vremenska konstanta je

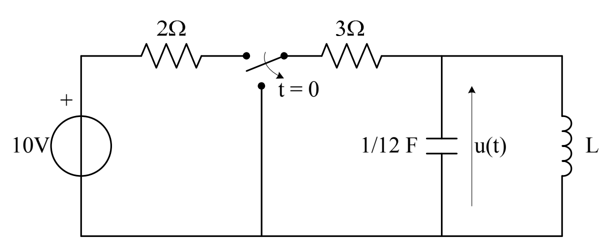
$$\tau = \frac{1}{a} = \frac{L}{R_T}$$

5. Kolo prikazano na slici je u stacionarnom stanju u trenutku t=0⁻. Odrediti u(t) za t>0 ako je:

a) L=4 H

b) L=3 H

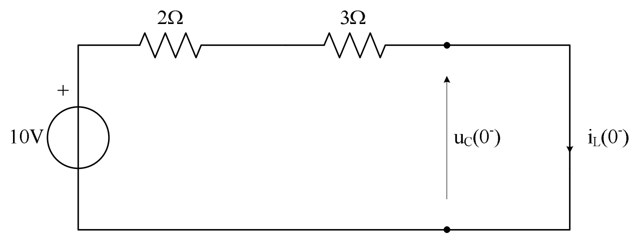
c) L=2.4 H



Rješenje:

a) L=4 H

Prije otvaranja prekidača kolo je u stacionarnom stanju i izgleda kao na slici

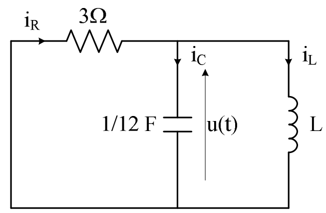


Dakle, kondenzator u kolu u stacionarnom stanju predstavlja prekid a kalem kratak spoj, pa važi

$i_L(0^-) = \frac{10}{2+3} = 2\,\text{A}$

$u_C(0^-) = 0\,\text{V}$

U trenutku t = 0 dolazi do zatvaranja prekidača, a time i isključivanja izvora iz kola, pa je kolo



Prema KZS može se pisati

$i_R = i_C + i_L$

Sa slike se vidi

$i_R = \frac{1}{3}u_r = -\frac{1}{3}u \qquad i_C = C\frac{du}{dt} \qquad u_L = L\frac{di_L}{dt}$

Zamjenom prethodnih relacija u jednačinu iz KZS

$-\frac{1}{3}u = C\frac{du}{dt} + i_L \to i_L = -C\frac{du}{dt} - \frac{1}{3}u \qquad (*)$

Ako se napiše jednačina prema KZN za konturu koja sadrži kondnzator i induktivnost

$u_L = u \to L\frac{di_L}{dt} = u$

zamjenom prethodno dobijenog izraza za struju kroz kalem

$LD\left(-CDu - \frac{1}{3}u\right) = u \to \left(LCD^2 + \frac{L}{3}D + 1\right)u = 0 \to \left(D^2 + \frac{1}{3C}D + \frac{1}{LC}\right)u(t) = 0$

ili ako se zamjeni vrijednost za C diferencijalna jednačina ima oblik

$\left(D^2 + 4D + \frac{12}{L}\right)u(t) = 0$

Posmatrana diferencijalna jednačina je homogena, pa je njena karakteristična jednačina

$s^2 + 4s + \frac{12}{L} = 0$

U dijelu zadatka pod a) L=4 H pa slijedi

$s^2 + 4s + 3 = 0 \to s_1 = -1 \qquad s_2 = -3$

pa rješenje ima oblik

$u(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} = Ae^{-t} + Be^{-3t}$

Potrebno je još odrediti integracione konstante na osnovu zadatih početnih uslova a to su

$u_C(0^-) = 0\,\text{V} \qquad i_L(0^-) = 2\,\text{A}$

Usljed neprekidnosti napona na kondenzatoru i struje kalema važi

$u_C(0^-) = u_C(0^+) = 0\,\text{V} \qquad i_L(0^-) = i_L(0^+) = 2\,\text{A}$

pa se može pisati

$u_C(0^+) = A + B = 0$

Početni uslov za struju kalema potrebno je transformisati jer se traži napon na kondenzatoru, pa ako se zna da važi iz relacije (*)

$i_L(0^+) = -Cu'(0^+) - \frac{1}{3}u(0^+) \to u'(0^+) = -\frac{1}{C}i_L(0^+) - \frac{1}{3}u(0^+) = -12\cdot 2 = -24$

a na osnovu oblika riješenja slijedi da je

$u'(t) = -Ae^{-t} - 3Be^{-3t} \to u'(0^+) = -A - 3B = -24$

Riješivši dobijeni sistem dvije jednačine sa dvije nepoznate, gdje su nepoznate integracione konstante, dolazi se do

$A = -12 \qquad\qquad B = 12$

pa je traženi napon

$u(t) = 12e^{-t} - 12e^{-3t} = 12\left(e^{-3t} - e^{-t}\right), \qquad t \geq 0$

b) L=3 H pa je karakteristična jednačina

$s^2 + 4s + 4 = 0 \to s_1 = s_2 = -2$

pa rješenje ima oblik

$u(t) = (A + Bt)e^{s_1 t} = (A + Bt)e^{-2t}$

Postupak određivanja integracionih konstanti je analogan prethodnom slučaju

$u_C(0^-) = 0\,\text{V} \qquad i_L(0^-) = 2\,\text{A}$

Usljed neprekidnosti napona na kondenzatoru i struje kalema važi

$u_C(0^-) = u_C(0^+) = 0\,\text{V} \qquad\qquad i_L(0^-) = i_L(0^+) = 2\,\text{A}$

pa se može pisati

$u_C(0^+) = A = 0$

$u'(0^+) = -24$

a na osnovu oblika riješenja slijedi da je

$u'(t) = Be^{-2t} - 2(A + Bt)e^{-2t} \to u'(0^+) = B - 2A = -24 \to B = -24$

pa je traženi napon

$u(t) = -24te^{-2t}, \qquad t \geq 0$

c) L=2.4 H pa je karakteristična jednačina

$s^2 + 4s + 5 = 0 \to s_{1/2} = -2 \pm j$

pa rješenje ima oblik

$u(t) = e^{-2t}(A\cos t + B\sin t)$

Postupak određivanja integracionih konstanti je analogan prethodnom slučaju

$u_C(0^-) = 0\,\text{V} \qquad i_L(0^-) = 2\,\text{A}$

Usljed neprekidnosti napona na kondenzatoru i struje kalema važi

$u_C(0^-) = u_C(0^+) = 0\,\text{V} \qquad\qquad i_L(0^-) = i_L(0^+) = 2\,\text{A}$

pa se može pisati

$u_C(0^+) = A = 0$

$u'(0^+) = -24$

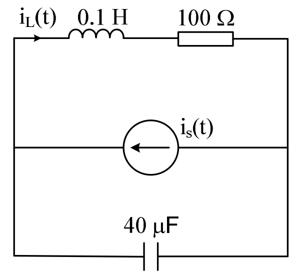
a na osnovu oblika rješenja slijedi da je

$u'(t) = -2e^{-2t}(A\cos t + B\sin t) + e^{-2t}(-A\sin t + B\cos t) \to u'(0^+) = -2A + B = -24 \to B = -24$

pa je traženi napon

$u(t) = -24e^{-2t}\sin t, \qquad t \geq 0$

6. U kolu prikazanom na slici odrediti struju $i_L(t)$ za t > 0 rješavanjem kola u vremenskom domenu, ako je struja izvora $i_s(t) = 3(1-2h(t))$.

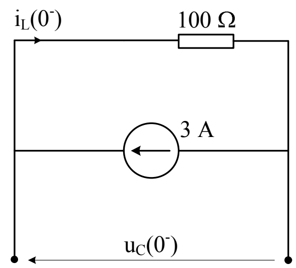


Rješenje:

Struja generatora može se napisati kao

$$i_s(t) = \begin{cases} 3, & t < 0 \\ -3, & t \geq 0 \end{cases}$$

Ako se posmatra trenutak t = 0⁻, kolo je u ustaljenom stanju, pa kalem predstavlja kratki spoj, a kondenzator prekid, pa kolo izgleda kao na slici

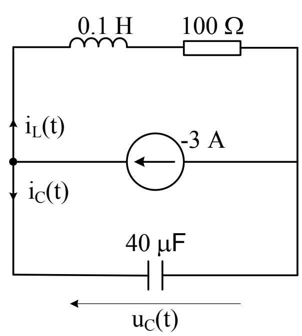


pa važi

$$i_L(0^-) = 3\,\mathrm{A}$$

$$u_C(0^-) = 100\, i_L(0^-) = 300\,\mathrm{V}$$

Ako se posmatra kolo za $t \geq 0$



Ako se napišu jednačine prema KZS za označeni čvor

$$i_L(t) + i_C(t) = -3 \rightarrow i_C(t) = -3 - i_L(t) \qquad (*)$$

Zna se da važi

$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} \qquad (**)$$

Ako se napiše jednačina za KZN za RLC konturu,

$$u_C(t) = u_L(t) + u_R(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t)$$

ako se prethodni izraz za napon kondenzatora zamjeni u relaciju (**) a potom dobijeno zamjeni u relaciju (*) dobija se

$$CD(LD+R)i_L(t)=-3-i_L(t)\rightarrow(LCD^2+RCD+1)i_L(t)=-3\rightarrow\left(D^2+\frac{R}{L}D+\frac{1}{LC}\right)i_L(t)=-\frac{3}{LC}$$

što predstavlja RUI za dato kolo. Rrješenje RUI traži se u obliku

$$i_L(t)=i_{Lo}(t)+i_{Lp}(t)$$

Rješenje homogene diferencijalne jednačine dobija se polazeći od karakteristične jednačine

$$s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}=0\rightarrow s^2+1000s+250000=0\rightarrow(s+500)^2=0$$

korjeni su

$$s_1=s_2=-500$$

pa je homogeno rješenje oblika

$$i_{Lo}(t)=(A+Bt)e^{-500t}$$

Partikularno rješenje je oblika eksitacije pa važi

$$i_{Lp}(t)=C_p=const.$$

zamjenom u RUI dobija se

$$\left(D^2+\frac{R}{L}D+\frac{1}{LC}\right)i_L(t)=-\frac{3}{LC}\rightarrow\frac{1}{LC}C_p=-\frac{3}{LC}\rightarrow C_p=-3$$

Sada je konačno rješenje oblika

$$i_L(t)=(A+Bt)e^{-500t}-3,\qquad t\geq 0$$

Preostale konstante određuju se na osnovu poznatih početnih uslova.

$$i_L(0^-)=i_L(0^+)=A-3=3\rightarrow A=6$$

drugi početni uslov

$$u_C(0^-)=u_C(0^+)=u_L(0^+)+Ri_L(0^+)=Li_L'(0^+)+Ri_L(0^+)\rightarrow i_L'(0^+)=\frac{1}{L}\left(u_C(0^-)-Ri_L(0^+)\right)=0$$

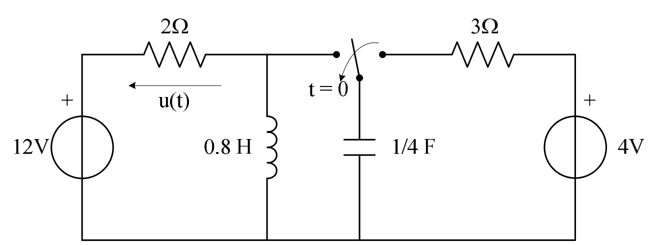
a to znači

$$i_L'(t)=Be^{-500t}-500(A+Bt)e^{-500t}\rightarrow i_L'(0^+)=B-500A=B-3000=0\rightarrow B=3000$$

slijedi da je tražena struja kalema

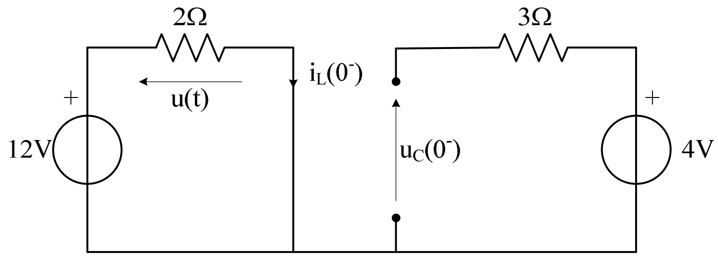
$$i_L(t)=(6+3000t)e^{-500t}-3,\qquad t\geq 0$$

7.Odrediti $u(t)$ za $t>0$ ako je kolo u stacionarnom stanju u trenutku $t=0^-$.



Rješenje:

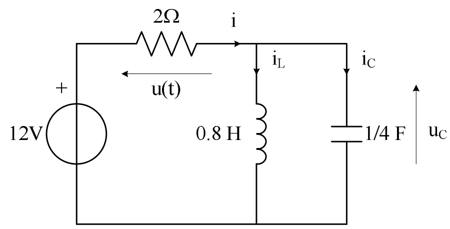
Posmatra se kolo u trenutku $t=0^-$, tada je prekidač u desnom položaju, a kolo je u stacionarnom stanju, pa kondenzator predstavlja prekid, a kalem kratki spoj, a šema je



sa šeme se vidi

$$i_L\left(0^-\right)=\frac{12}{2}=6\text{A} \qquad\qquad \text{u}_\text{C}\left(0^-\right)=4\text{V}$$

Sada se posmatra kolo nakon zatvaranja prekidača u drugi položaj, tj. kada važi *t*>0, pa je šema



Lako je primjetiti da je prebacivanjem prekidača u drugi položaj, desni izvor ostao odvojen od ostatka kola. Sa šeme se vidi da važi, prema KZN za konturu koju čine kondenzator izvor i otpornik

$$u_C=12-u \qquad\qquad (*)$$

a zna se da važi

$$u_L=L\frac{di_L}{dt} \qquad\qquad i_C=C\frac{du_C}{dt}$$

Prema KZS može se pisati

$$i=i_L+i_C$$

a zna se da važi

$$i=\frac{1}{2}u$$

pa zamjenom u prethodnu relaciju dobija se

$$\frac{1}{2}u=i_L+CDu_C\rightarrow i_L=\frac{1}{2}u-CD\left(12-u\right) \qquad\qquad (**)$$

Ako se napiše jednačina prema KZN za konturu koju čine kondenzator i kalem

$$u_L=u_C\rightarrow LDi_L=12-u\rightarrow LD\left(\frac{1}{2}u-CD\left(12-u\right)\right)=12-u\rightarrow\left(LCD^2+\frac{1}{2}LD+1\right)u\left(t\right)=12$$

i dolazi se do

$$\left(D^2+\frac{1}{2C}D+\frac{1}{LC}\right)u\left(t\right)=\frac{1}{LC}12$$

Rješenje jednačine traži se u obliku

$$u\left(t\right)=u_o\left(t\right)+u_p\left(t\right)$$

Rješenje homogene diferencijalne jednačine u_o(t) traži se na osnovu karakteristične jednačine

$$s^2+\frac{1}{2C}s+\frac{1}{LC}=0\rightarrow s^2+2s+5=0\rightarrow s_{1/2}=-1\pm j2$$

pa se rješenje traži u obliku

$$u_o\left(t\right)=e^{-t}\left(A\cos 2t+B\sin 2t\right)$$

Partikularno rješenje traži se u obliku odgovarajuće eksitacije, koja je konstantna u ovom slučaju pa je

$u_p(t) = C_p = const.$

Zamjenom u diferencijalnu jednačinu

$$\left(D^2 + \frac{1}{2C}D + \frac{1}{LC}\right)u_p(t) = \frac{1}{LC}12 \to \frac{1}{LC}C_p = \frac{1}{LC}12 \to C_p = 12$$

pa je oblik konačnog riješenja

$$u(t) = e^{-t}\left(A\cos 2t + B\sin 2t\right) + C_p = e^{-t}\left(A\cos 2t + B\sin 2t\right) + 12$$

Preostale integracione konstante nalaze se preko početnih uslova

$$i_L\left(0^-\right) = \frac{12}{2} = 6\text{A} \qquad \text{u}_\text{C}\left(0^-\right) = 4\text{V}$$

Uzimajući u obzir da se određuje napon u(t), potrebno je početne uslove preurediti tako da odgovaraju traženom naponu. Ono što je poznato da važi na osnovu neprekidnosti napona na kondenzatoru i struje u kalemu

$$i_L\left(0^-\right) = i_L\left(0^+\right) = 6\text{A} \qquad \text{u}_\text{C}\left(0^-\right) = \text{u}_\text{C}\left(0^+\right) = 4\text{V}$$

Na osnovu relacije (*) važi

$$\text{u}_\text{C}\left(0^+\right) = 12 - u\left(0^+\right) = 4 \to u\left(0^+\right) = 8$$

Na osnovu relacije (**) važi

$$i_L\left(0^+\right) = \frac{1}{2}u\left(0^+\right) + Cu'\left(0^+\right) \to u'\left(0^+\right) = \frac{1}{C}i_L\left(0^+\right) - \frac{1}{2C}u\left(0^+\right) = 4\cdot 6 - 2\cdot 8 = 8$$

Sada se može pisati

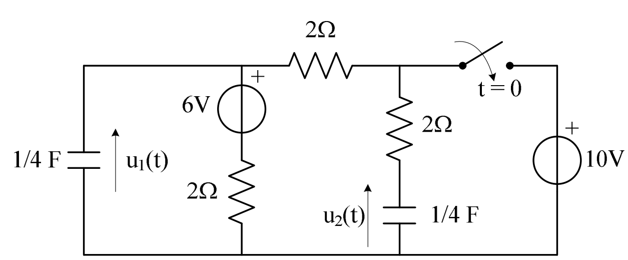
$$u\left(0^+\right) = A + 12 = 8 \to A = -4$$

$$u'(t) = -e^{-t}\left(A\cos 2t + B\sin 2t\right) + e^{-t}\left(-2A\sin 2t + 2B\cos 2t\right) \to u'\left(0^+\right) = -A + 2B = 8 \to B = 2$$

Sada je traženi napon

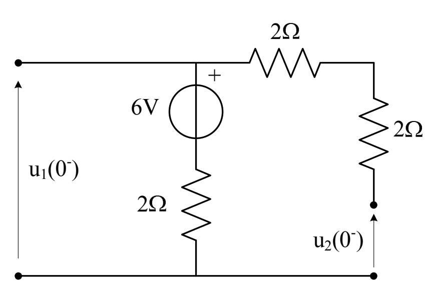
$$u(t) = e^{-t}\left(-4\cos 2t + 2\sin 2t\right) + 12, \qquad t \ge 0$$

8. Odrediti u_1 i u_2 za $t>0$ ako je kolo u stacionarnom stanju za $t=0^-$.



<u>Rješenje:</u>

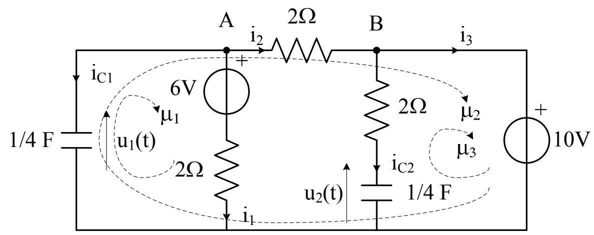
Kako je kolo u trenutku t = 0$^-$ u stacionarnom stanju, a prekidač otvoren, šema je



Kondenzatori u stacionarnom stanju predstavljaju prekid, pa važi

$$u_1\left(0^-\right) = u_2\left(0^-\right) = 6\text{V}$$

Sada se posmatra kolo za t > 0, šema je



Poznato je da važi

$$i_{C1} = C_1 \frac{du_1(t)}{dt} \qquad i_{C2} = C_2 \frac{du_2(t)}{dt}$$

Ako se napiše KZS za čvor A

$$i_{C1} + i_1 + i_2 = 0 \qquad (*)$$

Iz KZN za konturu μ_1

$$u_1 = 6 + 2i_1 \rightarrow i_1 = \frac{u_1 - 6}{2} \qquad (**)$$

Zamjenom relacije (**) u (*)

$$i_2 = -i_{C1} - i_1 = -C_1 \frac{du_1}{dt} - \frac{1}{2} u_1 + 3$$

Ako se napiše relacija za KZN za konturu μ_2

$$u_1 = 2i_2 + 10$$

Zamjenom prethodno dobijenog izraza za i_2 u posljednju relaciju

$$u_1 = 2\left(-C_1 D u_1 - \frac{1}{2} u_1 + 3\right) + 10 \rightarrow (2C_1 D + 2) u_1 = 16 \rightarrow \left(D + \frac{1}{C_1}\right) u_1 = \frac{1}{C_1} 8$$

Riješavanjem diferencijalne jednačine dobija se rješenje oblika

$$u_1(t) = u_{1o}(t) + u_{1p}(t)$$

gdje se homogeno rješenje dobija na osnovu karakteristične jednačine

$$s + \frac{1}{C_1} = 0 \rightarrow s + 4 = 0 \rightarrow s_1 = -4$$

pa je rješenje homogene diferencijalne jednačine oblika

$$u_{1o}(t) = Ae^{s_1 t} = Ae^{-4t}$$

Partikularno rješenje ima karakter pobude, a ona je konstanta pa važi

$$u_{1p}(t) = B = const.$$

Zamjenom u polaznu diferencijalnu jednačinu dobija se

$$\left(D + \frac{1}{C_1}\right) u_{1p} = \frac{1}{C_1} 8 \rightarrow \frac{1}{C_1} B = \frac{1}{C_1} 8 \rightarrow B = 8$$

Sada je konačno rješenje oblika

$$u_1(t) = Ae^{-4t} + B = Ae^{-4t} + 8$$

Preostala konstanta određuje se na osnovu poznatih početnih uslova

$$u_1(0^-) = 6\text{V}$$

a usljed neprekidnosti napona kondenzatora važi

$$u_1(0^-) = u_1(0^+) = A + 8 = 6 \rightarrow A = -2$$

Sada je traženi napon u_1

$$u_1(t) = -2e^{-4t} + 8, \qquad t \geq 0$$

Sada je potrebno naći napon $u_2(t)$

Ako se napiše relacija za KZN za konturu μ_3

$$10 = 2i_C + u_2 = 2C_2 \frac{du_2}{dt} + u_2 \rightarrow \left(2C_2 D + 1\right) u_2 = 10 \rightarrow \left(D + \frac{1}{2C_2}\right) u_2 = \frac{1}{2C_2} 10$$

Riješavanjem diferencijalne jednačine dobija se rješenje oblika

$$u_2\left(t\right) = u_{2o}\left(t\right) + u_{2p}\left(t\right)$$

gdje se homogeno rješenje dobija na osnovu karakteristične jednačine

$$s + \frac{1}{2C_2} = 0 \rightarrow s + 2 = 0 \rightarrow s_1 = -2$$

pa je rješenje homogene diferencijalne jednačine oblika

$$u_{2o}\left(t\right) = Ae^{s_1 t} = Ae^{-2t}$$

Partikularno rješenje ima karakter pobude, a ona je konstanta pa važi

$$u_{2p}\left(t\right) = B = const.$$

Zamjenom u polaznu diferencijalnu jednačinu dobija se

$$\left(D + \frac{1}{2C_1}\right) u_{1p} = \frac{1}{2C_1} 10 \rightarrow \frac{1}{2C_1} B = \frac{1}{2C_1} 10 \rightarrow B = 10$$

Sada je konačno rješenje oblika

$$u_2\left(t\right) = Ae^{-2t} + B = Ae^{-2t} + 10$$

Preostala konstanta određuje se na osnovu poznatih početnih uslova

$$u_2\left(0^-\right) = 6\text{V}$$

a usljed neprekidnosti napona kondenzatora važi

$$u_2\left(0^-\right) = u_2\left(0^+\right) = A + 10 = 6 \rightarrow A = -4$$

Sada je traženi napon u_2

$$u_2\left(t\right) = -4e^{-4t} + 10, \qquad t \geq 0$$