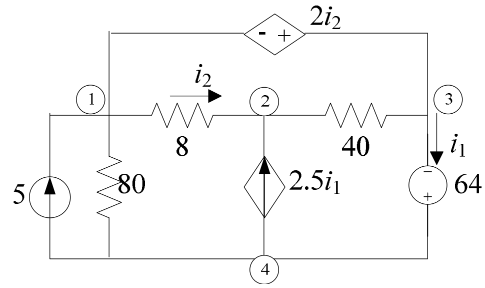
1. Koristeći topološke matrice, metodom nezavisnih kontura odrediti struje $i_1$ i $i_2$. U kom režimu rade pojedini izvori u kolu?



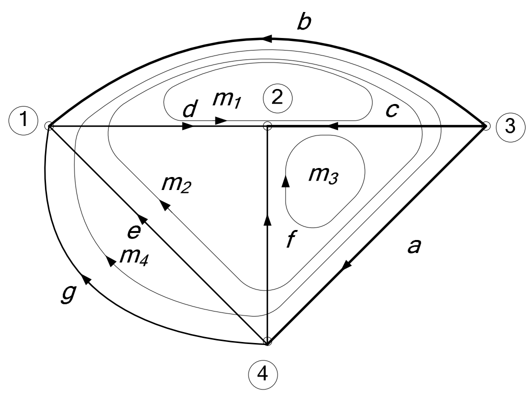

**Rješenje**

$c = 4$

$b = 7$

$n = c - 1 = 3$ - 3 grane stabla

$m = b - n = 4$ - 4 grane kostabla




T={$a$, $b$, $c$}, $L$={$d$, $e$, $f$,$g$}.

$$\underset{\sim}{i} = \underset{\sim}{B}_f{}^t \underset{\sim}{i}_L$$

$$\underset{\sim}{B}_f = \begin{array}{c} \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc:cccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:cccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\underset{\sim}{i} = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} i_d \\ i_e \\ i_f \\ i_g \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} i_e + i_f + i_g \\ i_d - i_e - i_g \\ -i_d - i_f \\ \hdashline i_d \\ i_e \\ i_f \\ i_g \end{array}\right]$$

Dakle, dobija se

$i_a = i_e + i_f + i_g$ (*)

$i_b = i_d - i_e - i_g$ (**)

$i_c = -i_d - i_f$ (***)

Sa šeme se vidi da važi

$i_d = i_2$

$i_f = 2.5 i_1$

$i_g = 5$

Iz relacije (***) slijedi

$i_c = -i_2 - 2.5 i_1$

Iz jednačine prema KZN za konturu $\mu_1$ dobija se

$$i_c = \frac{1}{40}\left(2i_2 + 8i_2\right) = \frac{1}{4} i_2$$

zamjenom u prethodnu jednačinu

$$\frac{1}{4} i_2 = -i_2 - 2.5 i_1 \rightarrow i_1 = -\frac{1}{2} i_2 \qquad (\#)$$

Iz jednačine (*) i poznatih relacija za kolo slijedi

$$i_a = i_1 = i_e + 2.5 i_1 + 5 \rightarrow i_e = -1.5 i_1 - 5$$

Iz kola se vidi da važi

$$i_e = \frac{1}{80} u_e = \frac{1}{80}\left(64 + 2i_2\right) = \frac{4}{5} + \frac{1}{40} i_2$$

Izjednačujući posljednje dvije relacije (lijeve strane su im jednake) dobija se

$$-1.5 i_1 - 5 = \frac{4}{5} + \frac{1}{40} i_2 \rightarrow \frac{3}{2} i_1 + \frac{1}{40} i_2 + \frac{29}{5} = 0 \qquad (\#\#)$$

Zamjenivši relaciju (#) u (##) dobija se

$$-\frac{3}{2}\frac{1}{2} i_2 + \frac{1}{40} i_2 = -\frac{29}{5}$$

$$-\frac{29}{40} i_2 = -\frac{29}{5} \rightarrow i_2 = 8\,\mathrm{A} \rightarrow i_1 = -4\,\mathrm{A}$$

Napon na krajevima strujnog generatora je $-u_g$ i sa šeme važi

$$u_g = u_e = 64 + 2i_2 = 80\,\mathrm{V}$$

Struja naponskog generatora je već poznata i to je $i_1$.

Struja SKNI je $-i_b$ a ona je

$$i_b = i_2 - i_e - i_g = i_2 - \frac{1}{80} u_e - 5 = 8 - 1 - 5 = 2\,\mathrm{A}$$

Napon SKSI je $-u_f$

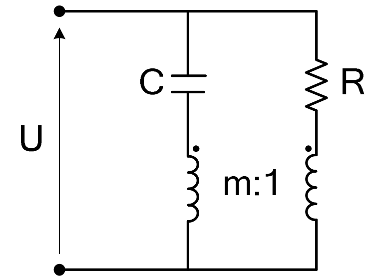
Sa šeme važi

$$u_f = u_e + u_d = 80 + 8i_2 = 80 + 8 \cdot 8 = 144\,\mathrm{V}$$

Da bi se odredio režim rada, potrebno je odrediti snage:

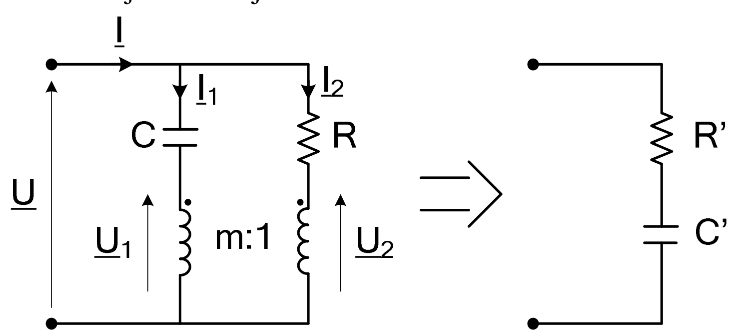
- strujni izvor 5A: $-u_e I$=(-80)5=-400W<0 – potrošač
- naponski izvor 64V: $U i_1$=64(-4)=-256W<0 – potrošač
- SKNI: $2i_2(-i_b)$ =-32W<0 – potrošač
- SKSI: $2.5i_1(-u_f)$=(-10)(-144)=1440W>0 – izvor

2. Dato je kolo sa idealnim transformatorom kao na slici. Odnos broja namotaja primarnog i sekundarnog kalema je m. Odrediti kapacitivnost C' i otpornost R' koji vezani na red mogu zamjeniti dato kolo.

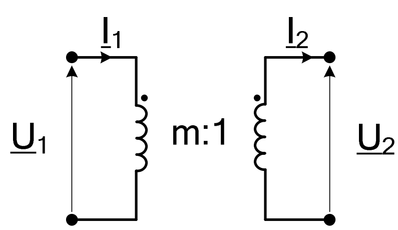



**R**

Prvo je potrebno označiti smjerove struje




U cilju određivanja traženih veličina, potrebno je prvo odrediti ulaznu impedansu, kako bi se na osnovu nje zaključilo koliki treba da budu C' i R'. Prema definiciji idealnog transformatora sa nesaglasnim krajevima




važi

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = m \qquad \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \frac{1}{m}$$

kako je na šemi problema struja $\underline{I}_2$ suprotno usmjerena to za dato kolo važi

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = m \qquad \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = -\frac{1}{m}$$

Ulazna impedansa je:

$$\underline{Z}_{ul} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$

struja $\underline{I}$ je

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{I}_1 - m\underline{I}_1 = (1-m)\underline{I}_1 \quad \rightarrow \quad \underline{I}_1 = \frac{1}{1-m}\underline{I} \qquad \underline{I}_2 = -\frac{m}{1-m}\underline{I}$$

Ako se napišu jednačine prema KZN za dvije konture

$$\underline{U} = \frac{1}{j\omega C}\underline{I}_1 + \underline{U}_1$$

$$\underline{U} = R\underline{I}_2 + \underline{U}_2$$

Uvrstivši zavisnost između napona primara i sekundara idealnog transformatora

$$\underline{U} = \frac{1}{j\omega C}\frac{1}{1-m}\underline{I} + \underline{U}_1 \rightarrow \underline{U}_1 = \underline{U} - \frac{1}{j\omega C}\frac{1}{1-m}\underline{I} \qquad (*)$$

$$\underline{U} = -R\frac{m}{1-m}\underline{I} + \frac{1}{m}\underline{U}_1 \qquad (**)$$

zamjenivši relaciju (*) u (**)

$$\underline{U} = -R\frac{m}{1-m}\underline{I} + \frac{1}{m}\underline{U} - \frac{1}{m}\frac{1}{j\omega C}\frac{1}{1-m}\underline{I}$$

$$\frac{m-1}{m}\underline{U} = \left(-R\frac{m}{1-m} + j\frac{1}{\omega C}\frac{1}{m(1-m)}\right)\underline{I}$$

$$\underline{U} = -\frac{m}{1-m}\left(-R\frac{m}{1-m} + j\frac{1}{\omega C}\frac{1}{m(1-m)}\right)\underline{I} = \left(\frac{Rm^2}{(1-m)^2} - j\frac{1}{\omega C(1-m)^2}\right)\underline{I}$$

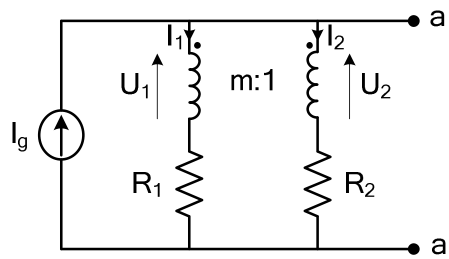
Dakle tražena ulazna impedansa je

$$\underline{Z}_{ul} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{Rm^2}{(1-m)^2} - j\frac{1}{\omega C(1-m)^2} = R' + \frac{1}{j\omega C'}$$

pa važi

$$R' = \frac{Rm^2}{(1-m)^2} \qquad C' = C(1-m)^2$$

3. Za kolo prema šemi:
a) Odrediti impedansu prijemnika kog treba umetnuti između krajeva aa’ tako da njegova snaga bude maksimalna.
b) Izračunati maksimalnu snagu.




**R**

a)

Uslov maksimalne snage je ispunjen kada je impedansa prijemnika jednaka Teveninovoj impedansi određenoj za posmatrani prijemnik. A maksimalna snaga se dobija iz poznatih parametara Teveninovog kola za prijemnik. Teveninova ems jednaka je naponu između krajeva aa’. Iy uslova idealnog transformatora važi

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = m \qquad \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = -\frac{1}{m}$$

Iz KZS za kolo važi

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{I}_1 - m\underline{I}_1 = (1-m)\underline{I}_1$$

odakle slijedi da važi

$$\underline{I}_1 = \frac{1}{1-m}\underline{I} \qquad \underline{I}_2 = -\frac{m}{1-m}\underline{I}$$

Iz KZN za konturu koja obuhvata oba otpornika

$$\underline{U}_1 + R_1\underline{I}_1 = \underline{U}_2 + R_2\underline{I}_2$$

zamjenom relacija koje važe za IT

$$\underline{U}_1 + R_1\frac{1}{1-m}\underline{I} = \frac{1}{m}\underline{U}_1 - R_2\frac{m}{1-m}\underline{I}$$

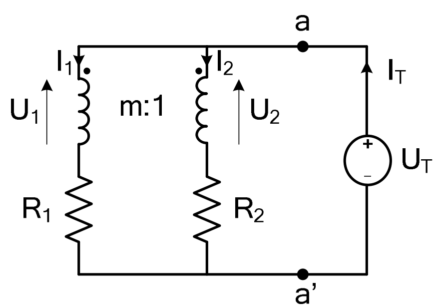
$$\frac{m-1}{m}\underline{U}_1 = -\left(R_1 + mR_2\right)\frac{1}{1-m}\underline{I}$$

$$\underline{U}_1 = \frac{m\left(R_1 + mR_2\right)}{\left(1-m\right)^2}\underline{I}$$

sada je tražena Teveninova ems

$$\underline{E}_T = \underline{U}_1 + R_1 I_1 = \frac{m\left(R_1 + mR_2\right)}{\left(1-m\right)^2}\underline{I} + R_1\frac{1}{1-m}\underline{I} = \frac{m\left(R_1 + mR_2\right) + R_1 - mR_1}{\left(1-m\right)^2}\underline{I} = \frac{R_1 + m^2R_2}{\left(1-m\right)^2}\underline{I}$$

Sada je potrebno odrediti Teveninovu impedansu pa se priključuje testni generator, a svi nezavisni generatori u kolu ugase




Može se uočiti analogija sa prethodnim kolom i njegovim rješavanjem, samo je umjesto struje strujnog generatora I, sad u kolu aktuelna struja $I_T$. Kako je to jedina razlika, onda se može odmah pisati konačni oblik za napon (Teveninovu ems) dobijen u prvom dijelu zadatka

$$\underline{U}_T = \frac{R_1 + m^2R_2}{\left(1-m\right)^2}\underline{I}_T \rightarrow \underline{Z}_T = \frac{\underline{U}_T}{\underline{I}_T} = \frac{R_1 + m^2R_2}{\left(1-m\right)^2}$$

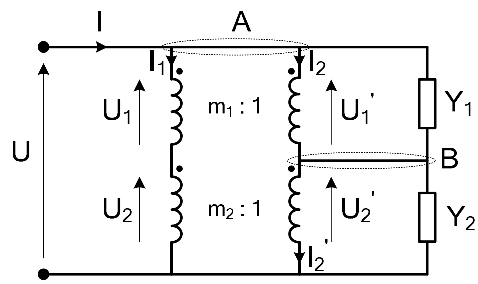
Kako se prema uslovu zadatka traži impedansa prijemnika tako da se u njemu troši maksimalna snaga onda važi:

$$\underline{Z}_p = \underline{Z}_T^{\,*} = \frac{R_1 + m^2R_2}{\left(1-m\right)^2} = R_p$$

b) Maksimalna snaga je

$$P_{\max} = \frac{E_T^{\,2}}{4R_p} = \frac{\left(\frac{R_1 + m^2R_2}{\left(1-m\right)^2}\underline{I}\right)^2}{4\frac{R_1 + m^2R_2}{\left(1-m\right)^2}} = \frac{R_1 + m^2R_2}{4\left(1-m\right)^2}I^2$$

4. Odrediti ulaznu admitansu kola prema šemi.




**R**

Ulazna admitansa dobija se na osnovu

$$\underline{Y}_{ul} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}$$

Lako je uočiti da važi

$$\underline{U} = \underline{U}_1^{'} + \underline{U}_2^{'}$$

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = m_1\underline{U}_1^{'} + m_2\underline{U}_2^{'}$$

odavde se dobija da važi

$$\underline{U}_1^{'} = \frac{m_2 - 1}{m_2 - m_1}\underline{U} \qquad \underline{U}_2^{'} = \frac{1 - m_1}{m_2 - m_1}\underline{U} \qquad (*)$$

Ako se napiše KZS za čvor A:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{Y}_1\underline{U}_1^{'} \rightarrow \underline{I} = (1 - m_1)\underline{I}_1 + \underline{Y}_1\underline{U}_1^{'} \qquad (**)$$

a za čvor B:

$$\underline{I}_2 + \underline{Y}_1\underline{U}_1^{'} = \underline{I}_2^{'} + \underline{Y}_2\underline{U}_2^{'} \rightarrow -m_1\underline{I}_1 + \underline{Y}_1\underline{U}_1^{'} = -m_2\underline{I}_1 + \underline{Y}_2\underline{U}_2^{'} \rightarrow (-m_1 + m_2)\underline{I}_1 = -\underline{Y}_1\underline{U}_1^{'} + \underline{Y}_2\underline{U}_2^{'}$$

Zamjenom relacije (*) u posljednju relaciju

$$\underline{I}_1 = \frac{1}{m_2 - m_1}\left(-\underline{Y}_1\frac{m_2 - 1}{m_2 - m_1} + \underline{Y}_2\frac{1 - m_1}{m_2 - m_1}\right)\underline{U} = \left(\underline{Y}_1\frac{1 - m_2}{(m_2 - m_1)^2} + \underline{Y}_2\frac{1 - m_1}{(m_2 - m_1)^2}\right)\underline{U}$$

Zamjenom posljednje relacije i relacije (*) u relaciju (**)

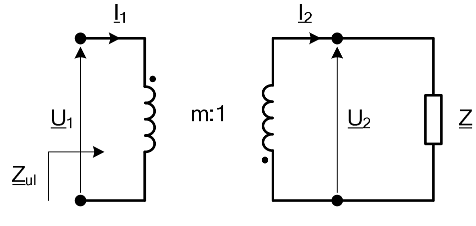
$$\underline{I} = (1 - m_1)\left(\underline{Y}_1\frac{1 - m_2}{(m_2 - m_1)^2} + \underline{Y}_2\frac{1 - m_1}{(m_2 - m_1)^2}\right)\underline{U} + \underline{Y}_1\frac{m_2 - 1}{m_2 - m_1}\underline{U} = \left[\frac{(1 - m_2)^2}{(m_1 - m_2)^2}\underline{Y}_1 + \frac{(1 - m_1)^2}{(m_1 - m_2)^2}\underline{Y}_2\right]\underline{U}$$

Dakle, tražena ulazna admitansa je:

$$\underline{Y}_{ul} = \left(\frac{1 - m_2}{m_1 - m_2}\right)^2\underline{Y}_1 + \left(\frac{1 - m_1}{m_1 - m_2}\right)^2\underline{Y}_2$$

5. Odrediti ulaznu impedansu sa strane primara za idealni transformator sa sekundarom zatvorenim impedansom.

**R**




Prema definiciji, za IT sa saglasnim krajevima sa strujama i naponima prema slici gore, važi

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = -m \qquad \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = -\frac{1}{m}$$

Kako je sekundar zatvoren impedansom to važi

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}\underline{I}_2$$

Tražena ulazna impedansa se dobija prema relaciji

$$\underline{Z}_{ul} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}$$

Ako se iskoriste relacije idealnog transformatora, važi

$$\underline{Z}_{ul} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{-m\underline{U}_2}{-\frac{1}{m}\underline{I}_2} = m^2 \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = m^2 \underline{Z}$$

Dakle, početna šema može se pojednostaviti :