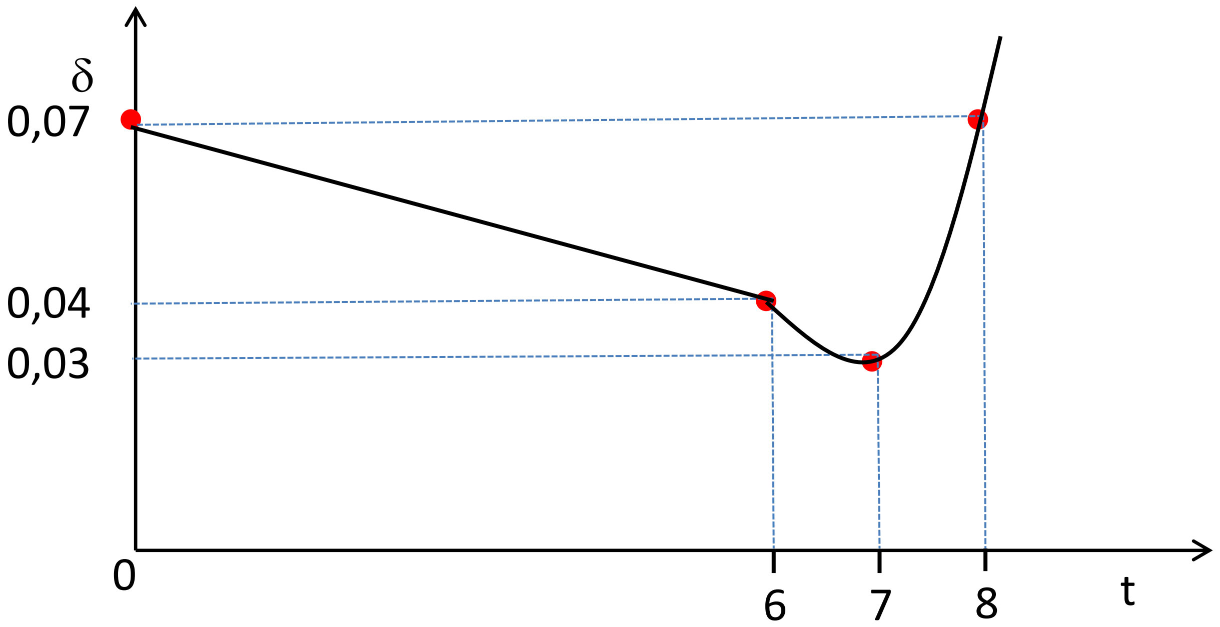
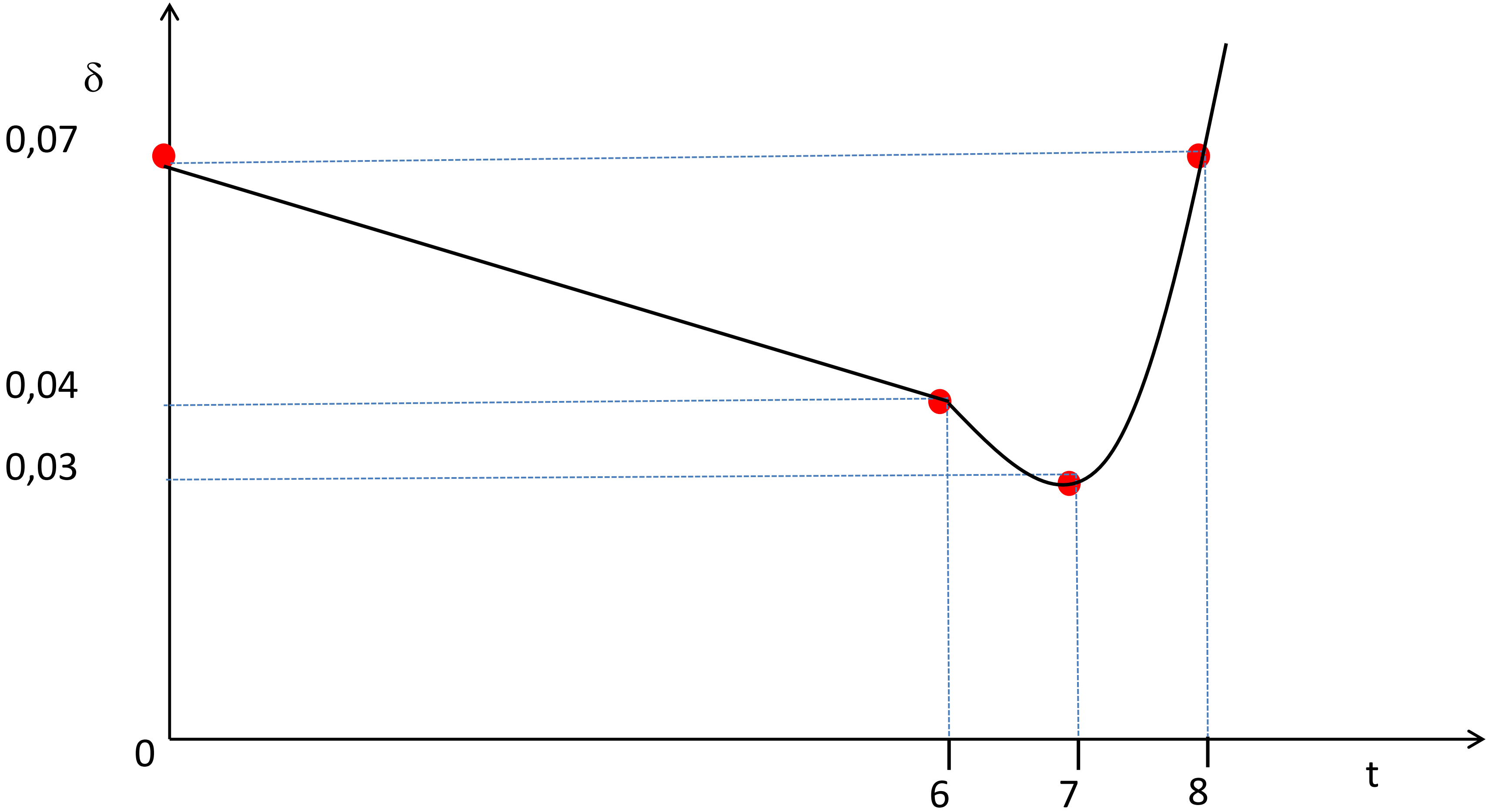
1. Zadatak

Poznato je da je funkcija $\delta(t)$ neprekidna funkcija i da je intervalu [0,6] linearna funkcija, a za $t>6$ je kvadratna funkcija. Ako je $\delta(0)=0,07$; $\delta(6)=0,04$; $\delta(7)=0,03$ i $\delta(8)=0,07$; odrediti funkciju sadašnje vrijednosti. Ukoliko je polovinom šeste i polovinom sedme godine osoba uplatila po 4.000€, koliko će imati na kraju 10-te godine?

1. Zadatak. Rešenje



$$\delta(t) = \begin{cases} at + b, t \in [0,6] \\ ct^2 + dt + e, t > 6 \end{cases}$$



$$\delta(t)=\begin{cases} at+b, t\in[0,6] \\ ct^2+dt+e, t>6 \end{cases}$$

Slika

$$\delta(t)=\begin{cases} at+b, t\in[0,6] \\ ct^2+dt+e, t>6 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}\delta(0)=0,07\\ \delta(6)=0,04\end{matrix}\right. \Rightarrow \begin{matrix} b=0,07 \\ 6a+b=0,04 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} b=0,07 \\ a=-0,005 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \delta(t)=-0,005t+0,07,\ t\in[0,6]$$

$$\begin{matrix}\delta(6)=0,04 \\ \delta(7)=0,03 \\ \delta(8)=0,07\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 36c+6d+e=0,04 \\ 49c+7d+e=0,03 \\ 64c+8d+e=0,07 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$c=0,025;\ d=-0,335;\ e=1,15$$

$$\delta(t)=0,025t^2-0,335t+1,15 \ za \quad t>6$$

Slika

$$\delta(t)=\begin{cases}-0,005t+0,07; & t\in[0,6]\\ 0,025t^2-0,335t+1,15; & t>6\end{cases}$$

$$v(t)=e^{-\int_0^t \delta(s)ds}$$

$$Za\, t\in[0,6]$$

$$v(t)=e^{-\int_0^t \delta(s)ds}=e^{-\int_0^t (-0,005s+0,07)ds}=e^{-\left.\left(-0,005\frac{s^2}{2}+0,07s\right)\right|_0^t}$$

Slika

$$= e^{-(-0,005\frac{t^2}{2}+0,07t)} = e^{0,005\frac{t^2}{2}-0,07t}$$

$$Za\, t > 6$$

$$v(t) = e^{-\int_0^t \delta(s)ds} = e^{-\left(\int_0^6 \delta(s)ds+\int_6^t \delta(s)ds\right)}$$

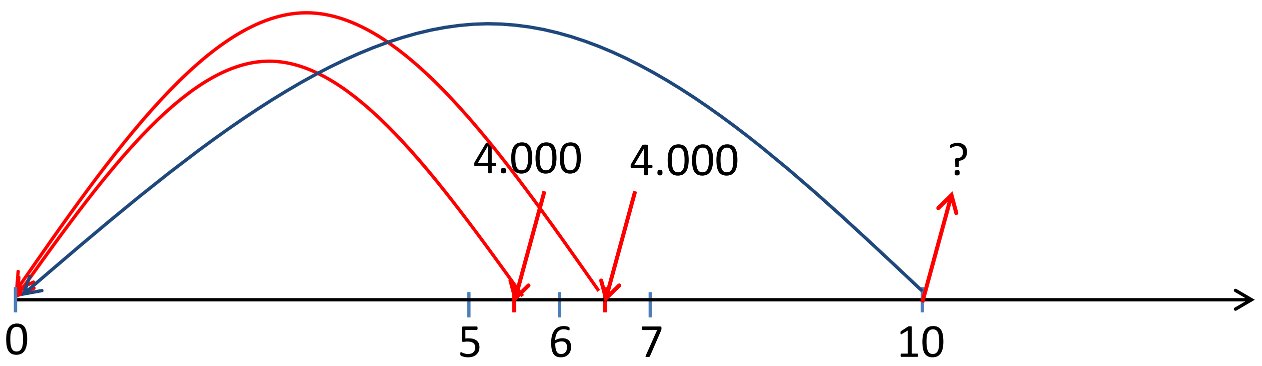
$$= e^{-\left(\int_0^6 (-0,005s+0,07)ds+\int_6^t (0,025s^2-0,335s+1,15)ds\right)}$$

$$= e^{-\left((-0,005\frac{s^2}{2}+0,07s)\Big|_0^6+(0,025\frac{s^3}{3}-0,335\frac{s^2}{2}+1,15s)\Big|_6^t\right)}$$

$$= e^{-\left((-0,005\cdot\frac{6^2}{2}+0,07\cdot 6)+(0,025\frac{t^3}{3}-0,335\frac{t^2}{2}+1,15t)-(0,025\cdot\frac{6^3}{3}-0,335\cdot\frac{6^2}{2}+1,15\cdot 6) \right)}$$

$$= e^{-\left(0,025\frac{t^3}{3}-0,335\frac{t^2}{2}+1,15t-2,34 \right)}$$

$$\Rightarrow v(t) = \begin{cases} e^{0,005\frac{t^2}{2}-0,07t} & ; \quad t \in [0,6] \\ e^{-\left(0,025\frac{t^3}{3}-0,335\frac{t^2}{2}+1,15t-2,16 \right)} & ; \quad t > 6 \end{cases}$$



$$t = 0$$

$$4.000 \cdot v(5,5) + 4.000 \cdot v(6,5) = K_{10} \cdot v(10)$$

$$2.935,62 + 2.362,28 = K_{10} \cdot 0,397192856$$

$$K_{10} = 13.338,36$$

2. Zadatak

Investitor razmatra 2 projekta:

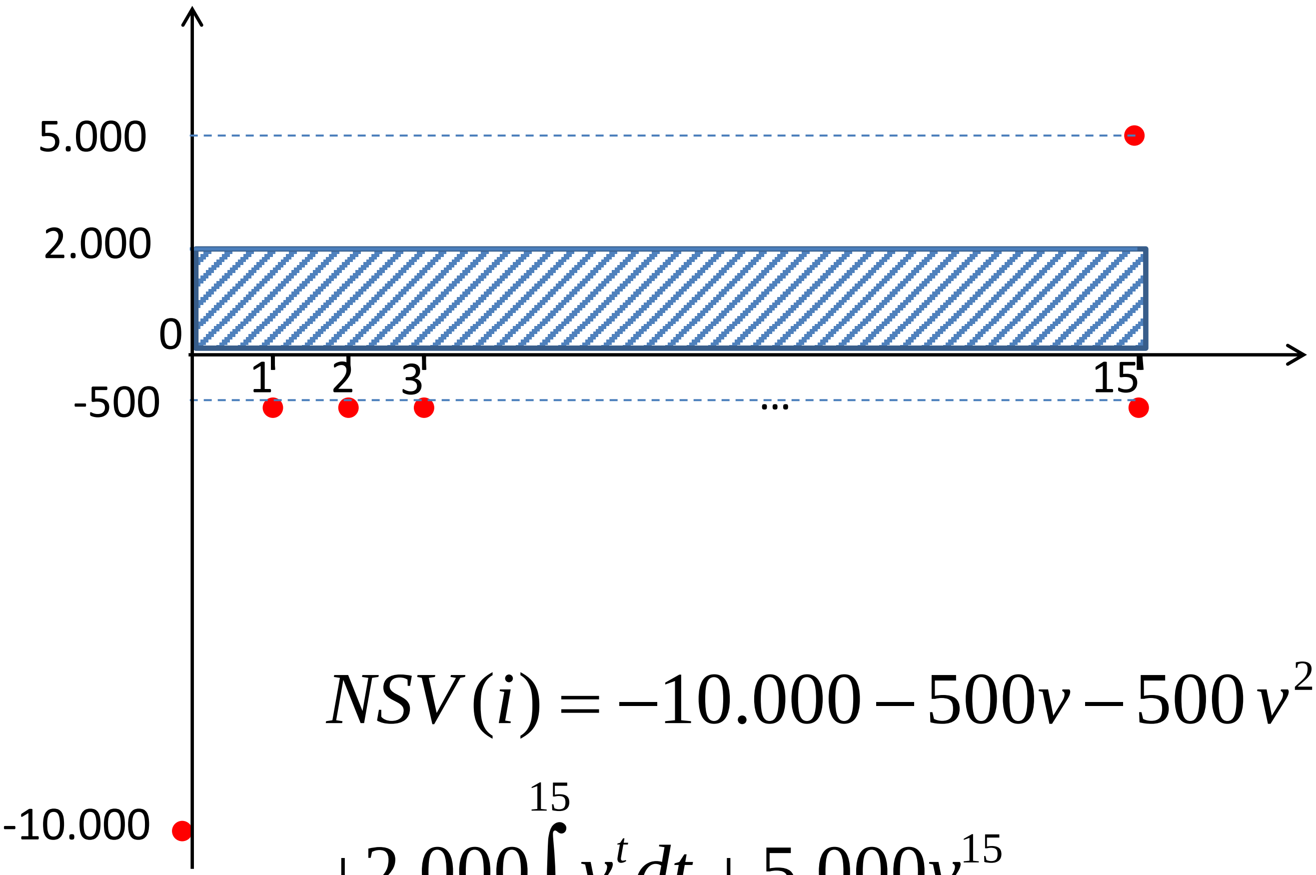
Prvi, kome su početni troškovi 10.000 € kao i krajem svake godine po 500€, u toku 15 godina koliko i traje projekat. Prihodi su neprekidni, 2.000€ godišnje u toku trajanja projekta, a likvidaciona vrijednost je 5.000€.

Drugi, kome su početni troškovi 15.000 €, a prihod na kraju 15-te godine je 28.000€.

a) Naći IRR u oba slučaja i dati tumačenje.
b) Ako je kamatna stopa 2%, za koji projekat će se investitor odlučiti

2. Zadatak. Rešenje

Prvi projekat:



$$NSV(i) = -10.000 - 500v - 500\,v^2 - \ldots - 500v^{15}$$

$$+2.000\int_0^{15} v^t dt + 5.000v^{15}$$

$$NSV(i) = -10.000 - 500v\frac{v^{15}-1}{v-1} + +2.000\frac{v^t\Big|_0^{15}}{\ln v} + 5.000v^{15}$$

$$NSV(i) = -10.000 - 500v\frac{v^{15}-1}{v-1} + +2.000\frac{v^{15}-1}{\ln v} + 5.000v^{15}$$

Metoda pokušaja

$$NSV(0) = 17.500$$

$$NSV(20) = -1.755,57$$

$$\left.\begin{array}{l} NSV(15\%) = 242,21 \\ NSV(16\%) = -227,17 \end{array}\right\} \Rightarrow IRR \in (15\%, 16\%)$$

Tačniji IRR nalazimo interpolacijom

$NSV(15\%) = 242,21 \qquad NSV(16\%) = -227,17$

Jednačina prave kroz dvije tačke A(x_0, y_0), B(x_1, y_1)

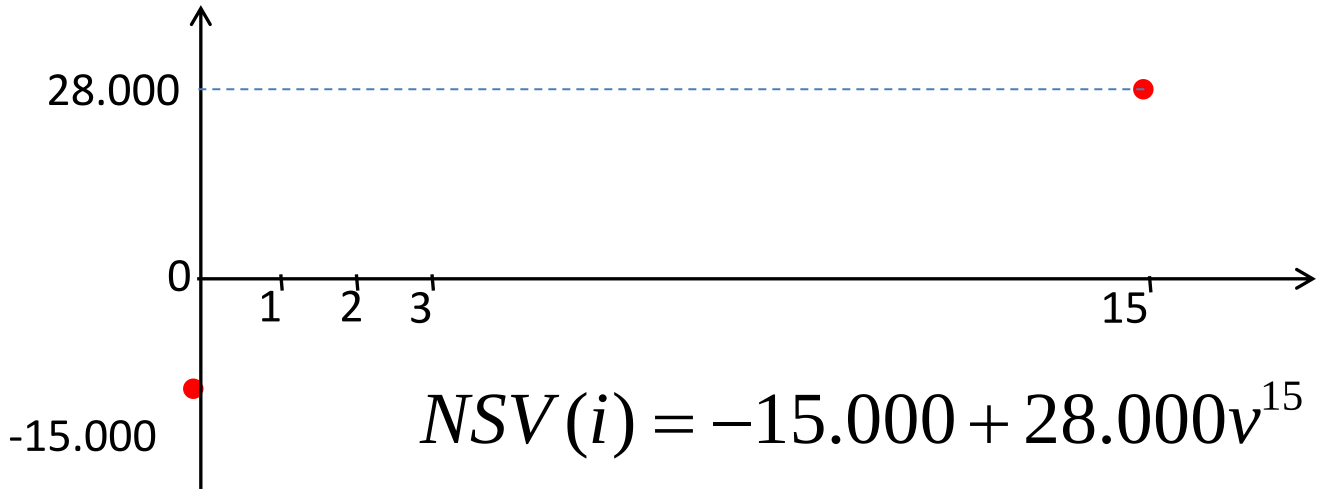
$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$\frac{y - 242,21}{-227,17 - 242,21} = \frac{x - 15\%}{16\% - 15\%}$$

Prava siječe Ox osu kada je y = 0, pa je

$$\frac{0 - 242,21}{-496,38} = \frac{x - 15\%}{1\%} \Rightarrow x = 15,52\% \Rightarrow IRR = 15,52\%$$

Drugi projekat (početni troškovi 15.000 €, a prihod na kraju 15-te godine je 28.000€):



$$NSV(i) = -15.000 + 28.000v^{15}$$

$$NSV(i) = 0 \quad \Rightarrow -15.000 + 28.000v^{15} = 0$$

$$\Rightarrow v^{15} = \frac{15.000}{28.000} \quad \Rightarrow v = \sqrt[15]{\frac{15}{28}} \quad \Rightarrow v = 0,959243537$$

$$\Rightarrow q = 1,042488 \quad \Rightarrow i = 4,25 \ (= IRR)$$

b)

$$NSV_1(2\%) = 13.245,11$$

$$NSV_2(2\%) = 5.804,41$$

Odabraće prvi projekat.

NAPOMENA:

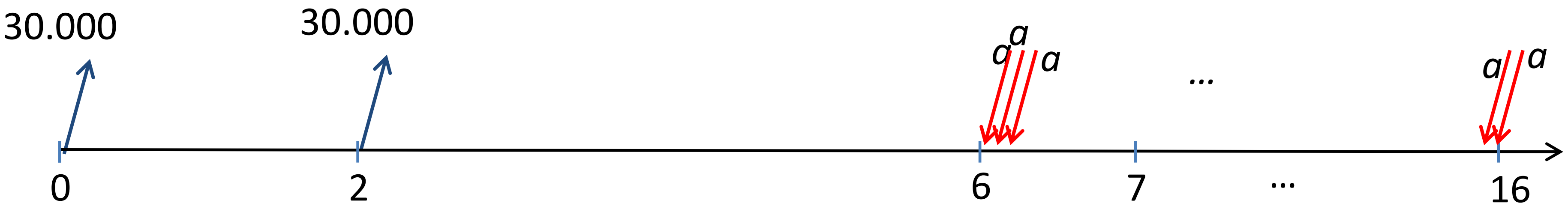
Ponekad se traži dobitak ili gubitak na kraju transakcije za zadatu kamatnu stopu. To je $NSV(i) \cdot q^T$. U konkretnom slučaju

$$A_1(15) = NSV_1(2\%) = 13.245,11 \cdot 1,02^{15} = 17.826,17$$

$$A_2(15) = NSV_2(2\%) = 5.804,41 \cdot 1,02^{15} = 7.811,97$$

3. Zadatak

Osoba je pozajmila iz banke 30.000€, a kroz 2 godine još toliko. Zajam se vraća jednakim dekurzivnim mjesečnim anuitetima od kraja 6-te do kraja 16-te godine, uz 9% (pa)d. Osoba je uz plaćeni 12-ti anuitet, uplatila još 3.000€. Reprogramirati ostatak plana otplate, tj. odrediti visinu preostalih mjesečnih anuiteta ako je kamatna stopa povećana i iznosi 10% (od trenutka uplate dodatnih 3.000€!).

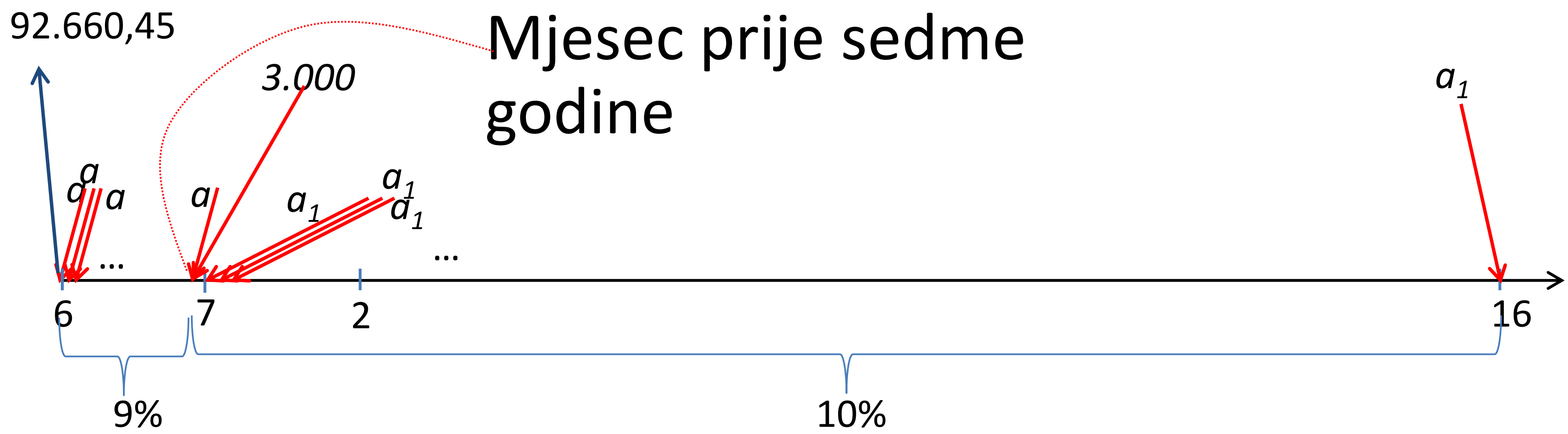


$$q = 1,09 \quad \Rightarrow q_1 = \sqrt[12]{1,09}$$

$$K_6 = 30.000 \cdot q^6 + 30.000 \cdot q^4 = 92.660,45$$

$$a = K_6 \cdot q_1^{120} \frac{q_1 - 1}{q_1^{121} - 1} = 92660,45 \cdot q_1^{120} \frac{q_1 - 1}{q_1^{121} - 1} = 1.141,99$$

Anticipativno!



$$q_3 = 1{,}1 \Rightarrow q_4 = \sqrt[12]{1{,}1}$$

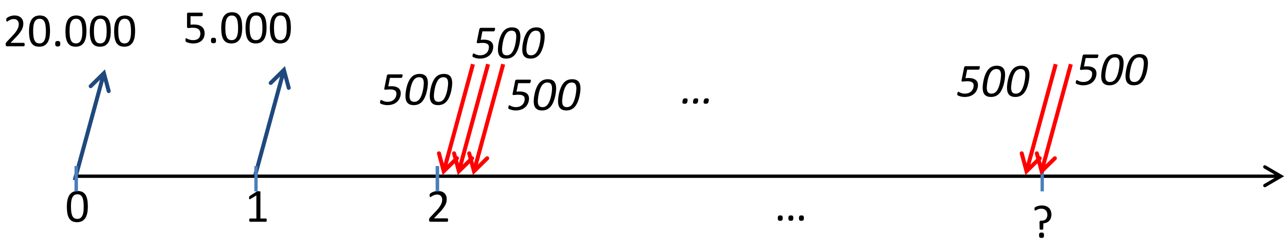
$$K_{6/11} = K_6 \cdot q_1^{11} - a \cdot \frac{q^{12} - 1}{q - 1} = 92.660{,}45 \cdot q_1^{11} - 1.141{,}99 \cdot \frac{q_1^{12} - 1}{q_1 - 1}$$

$$K_{6/11} = 86.016{,}79 \quad \Rightarrow K'_{6/11} = 86.016{,}79 - 3.000 = 83.016{,}79$$

$$a_1 = K'_{6/11} \cdot q_4^{109} \frac{q_4 - 1}{q_4^{109} - 1} = 1.142{,}82$$

4. Zadatak

Osoba je pozajmila iz banke 20.000€, a nakon godinu dana još 5.000€. Zajam se vraća jednakim mjesečnim anuitetima po 500€, uz 9% (pa)d., počev od kraja druge godine. Odrediti koliko anuiteta treba da vrati osoba, kao i visinu nepotpunog anuiteta.



$$q = 1,09$$

$$\Rightarrow q_1 = \sqrt[12]{1,09}$$

Označimo sa n broj anuiteta

$$K_2 = 20.000 \cdot q^2 + 5.000 \cdot q \quad = 29.212$$

$$a = K_2 \cdot q_1^{\,n-1} \frac{q_1 - 1}{q_1^{\,n} - 1} \Rightarrow 500 = 29.212 \cdot q_1^{\,n-1} \frac{q_1 - 1}{q_1^{\,n} - 1}$$

Anticipativno!

$$\Rightarrow 500\cdot({q_1}^n-1)=29.212\cdot {q_1}^{n-1}\cdot(q_1-1)$$

$$\Rightarrow 500\cdot {q_1}^n-500=29.212\cdot\frac{{q_1}^n}{q_1}\cdot(q_1-1)$$

$$\Rightarrow 500\cdot {q_1}^n-29.212\cdot\frac{{q_1}^n}{q_1}\cdot(q_1-1)=500$$

$$\Rightarrow {q_1}^n\cdot\left(500-29.212\cdot\frac{(q_1-1)}{q_1}\right)=500$$

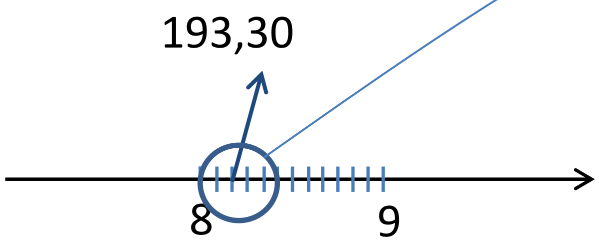
$$\Rightarrow {q_1}^n=1,718412387\quad\Rightarrow \ln {q_1}^n=\ln 1,718412387$$

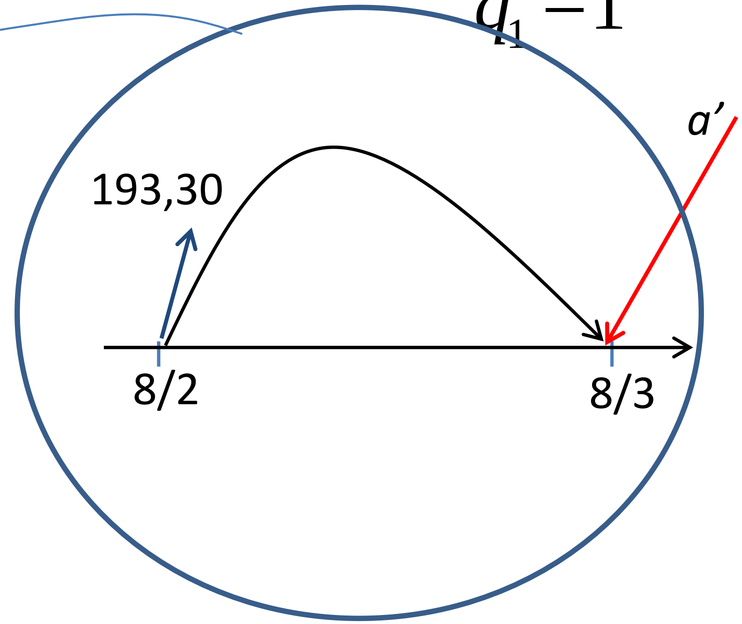
$$\Rightarrow n=\frac{\ln 1,718412387}{\ln q_1}\quad\Rightarrow n=75,38$$

Biće 75 anuiteta po 500€ i jedan nepotpuni (<500€).
Poslednji potpuni (75-ti) je nakon 8 godina i 2 mjeseca, tj. Nakon 74 mjeseca od druge godine!

$$K_{8/2} = K_2 \cdot q_1^{74} - a \cdot \frac{q_1^{75} - 1}{q_1 - 1} = 29.212 \cdot q_1^{74} - 500 \cdot \frac{q_1^{75} - 1}{q_1 - 1}$$

$$K_{8/2} = 193,30$$





$$a' = K_{8/2} \cdot q_1 = 193,30 \cdot q_1 = 194.69$$

Dakle, vratiće 75 anuiteta po 500€ i jedan nepotpuni anuitet od 194,69€