OSNOVNI POJMOVI TEORIJE VJEROVATNOĆE

Teorija vjerovatnoće se bavi izučavanjem eksperimenata sa slučajnim ishodima (rezultatima eksperimenta).

Uvedimo oznake: Ω - skup svih mogućih ishoda nekog eksperimenta

ω - elementi skupa Ω (ishodi ili elementarni događaji).

DEFINICIJA: $A \subseteq \Omega$ je slučajni događaj.

Svaki podskup A skupa Ω je događaj.

Događaj A se realizuje ako se ostvari neki ishod ω koji pripada podskupu A.

Nemoguć događaj je događaj koji se nikada ne ostvaruje. Njemu odgovarajući skup povoljnih ishoda je prazan skup $\varnothing$.

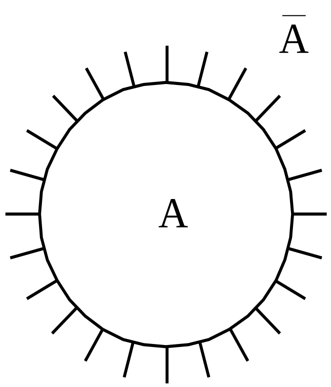
Siguran događaj je događaj koji se uvijek ostvaruje. Njemu odgovara Ω.

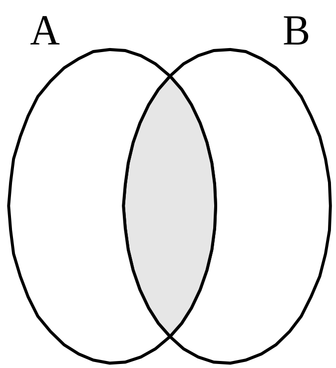
OSNOVNE OPERACIJE NAD DOGAĐAJIMA

SUPROTAN DOGAĐAJ $\overline{A}$ (komplement skupa A) – događaj koji se realizuje samo ukoliko se A ne realizuje.

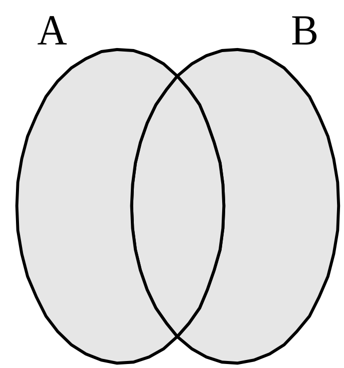
PRESJEK DOGAĐAJA $A \cap B$ (često ćemo pisati samo AB) – događaj koji se ostvaruje ako se ostvare i A i B

UNIJA DOGAĐAJA $A \cup B$ (ostvaruje se ako se ostvari bar jedan od događaja A, B).





$A \cap B$



$A \cup B$

OSNOVNI POJMOVI TEORIJE VJEROVATNOĆE

Relacija među događajima

DISJUNKCIJA (ISKLJUČIVANJE) DOGAĐAJA - događaji su disjunktni (isključuju se) ako ne mogu istovremeno da se ostvare.

$$A \cap B = \emptyset$$

Za uniju disjunktnih događaja često ćemo pisati $A + B$

IMPLIKACIJA DOGAĐAJA - A implicira (povlači) B ako se pri pri realizaciji događaja A uvijek realizuje i događaj B.

DEFINICIJA VJEROVATNOĆE

Klasična (Laplasova) definicija vjerovatnoće događaja A:

$$\boxed{\mathrm{p(A)} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}}$$

M – broj povoljnih ishoda

N – broj svih mogućih ishoda

Primjer: ***Kolika je vjerovatnoća da pri bacanju novčića padne grb?***

$$\Omega = \{P, G\}$$

$$A = \{G\}$$

$$\mathrm{p(A)} = \frac{1}{2}$$

KOMBINATORIKA

DEFINICIJA: Neka je dat skup $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

1. **Kombinacije bez ponavljanja klase k od n elemenata** su bilo koji podskupovi sa k elemenata od n datih.

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2. **Varijacije bez ponavljanja klase k od n elemenata** su uređeni podskupovi k elemenata od n datih.

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

$$V_n^0 = 1$$

3. **Permutacije bez ponavljanja od n elemenata** su varijacije (bez ponavljanja) gdje je k = n.

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

OSNOVNI KOMBINATORNI MODELI

1. Ako imamo r konačnih skupova A_1 ,..., A_r koji imaju n_1, ..., n_r elemenata respektivno i ako se bira r elemenata, iz svakog po jedan, predmete (njih r) je moguće odabrati na $N = n_1 ... n_r$ načina.

2. Izbor sa vraćanjem

Ako biramo jedan po jedan element iz skupa $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ i izabrani element registrujemo, a zatim vratimo, tada je broj mogućih izbora n^r (varijacija sa ponavljanjem - poredak je bitan).

3.**Izbor bez vraćanja**

a) Ako imamo situaciju iz 2., ali bez vraćanja elemenata, tada je broj mogućih izbora: $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$ (varijacije bez ponavljanja).

b) Ako tih r elemenata biramo iz skupa A (koji ima n elemenata) odjednom, tada je riječ o kombinacijama bez ponavljanja, jer poredak izvlačenja nije bitan, tj. njihov broj je $\binom{n}{r}$.

OSOBINE VJEROVATNOĆE

TEOREMA.

1. $0 \leq p(A) \leq 1$
2. $p(\Omega) = 1, \quad p(\varnothing) = 0$
3. Za $A \cap B = \varnothing$ je $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

   Za A, B, ... , C koji su međusobno disjunktni važi

   $p(A \cup B \cup \ldots \cup C) = p(A) + p(B) + \ldots + p(C)$

4. Ako je $A \subseteq B$ tada je $p(A) \leq p(B)$
5. $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
6. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
7. $p(A \cup B) \leq p(A) + p(B)$

USLOVNA VJEROVATNOĆA

NEZAVISNOST DOGAĐAJA

Uslovna vjerovatnoća događaja A, pod uslovom da se desio događaj B, je broj, koji označavamo sa $p(A/B)$ definisan sa

$$\boxed{p(A/B)=\frac{p(AB)}{p(B)}}$$

uz uslov da je $p(B)>0$ i da su A i B događaji iz istog prostora događaja.

Iz definicije dobijamo tzv. **formulu množenja vjerovatnoća:**

$$p(AB)=p(B)\cdot p(A/B)=p(A)\cdot p(B/A)$$

Njeno uopštenje na slučaj n događaja je:

$$p(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=p(A_1)\cdot p(A_2/A_1)\cdot p(A_3/A_1A_2)\cdot\ldots\cdot p(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1})$$

Događaji A i B su **nezavisni** ako je $\boxed{p(AB)=p(A)\cdot p(B)}$

FORMULA POTPUNE VJEROVATNOĆE

BAJESOVA FORMULA

Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ međusobno disjunktni događaji sa pozitivnim vjerovatnoćama. Ako je njihova unija Ω, tada za njih kažemo da obrazuju potpun sistem događaja (razbijanje sigurnog događaja).

TEOREMA: Za $B \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$ važi tzv. formula potpune vjerovatnoće:

$$\boxed{p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) \cdot p(B / A_i)}$$

DOKAZ: Kako je po pretpostavci $B \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$ to je $B = BA_1 + \ldots + BA_n$

Primjenjujući osobinu aditivnosti i formulu množenja vjerovatnoća imamo:

$$\boxed{p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(BA_i) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) \cdot p(B / A_i)}$$

BERNULIJEVA ŠEMA

Neka se izvodi niz od n nezavisnih eksperimenata za koje važi da se svaki od njih završava sa jednim od dva moguća ishoda; uspjehom, sa vjerovatnoćom p i neuspjehom, sa vjerovatnoćom q=1-p.

Ako je A_k, k=0,1,...,n događaj, da se tačno k od n izvedenih eksperimenata završi uspješno, tada je:

$$\boxed{p(A_k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}}$$

SLUČAJNE VELIČINE

Preslikavanje $X : \Omega \rightarrow R$ je ***slučajna veličina.***

Slučajna veličina X je ***diskretnog tipa*** ako skup ishoda ω slika na konačan ili prebrojiv skup vrijednosti (realizacija te slučajne veličine) $R_x = \{x_1, x_2, \ldots\}$

Diskretne slučajne veličine kod kojih je R_x konačan skup vrijednosti su ***proste slučajne veličine.***

Slučajna veličina diskretnog tipa je određena ako poznajemo skup njenih vrijednosti Rx i vjerovatnoće sa kojima ona uzima te vrijednosti,

$p_i = p\{\omega : X(\omega) = x_i\}$ i=1,2,...

Raspodjela slučajne veličine se označava sa

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots \end{pmatrix}$$

MATEMATIČKO OČEKIVANJE

Neka je X diskretna slučajna veličina sa konačnim skupom realizacija i raspodjelom:

$$X\!:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Matematičko očekivanje (srednja vrijdnost) slučajne veličine je broj, koji označavamo sa EX, definisan sa:

$$EX = x_1\ p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum x_i p_i$$

Disperzija (varijansa) slučajne veličine X, u oznaci DX, se definiše sa:

$$\mathrm{DX} = \mathrm{E}(\mathrm{X} - \mathrm{EX})^2$$

Kvadratni korijen iz disperzije se zove ***standardna devijacija ili standardno odstupanje, u oznaci σ(X).***

Neprekidne slučajne veličine

- Očekivanje u neprekidnom slučaju

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$F(x) = p(X \prec x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) dt$$

- F\`(x)=f(x)

OSIGURANJE ŽIVOTA

UVODNE NAPOMENE

Aktuarska matematika je grana matematike koja se primjenjuje u osiguranju.

Osiguranje je ekonomska institucija čiji je cilj nadoknada štete, fizičkom ili pravnom licu ili društvu, prouzrokovane elementarnim nepogodama, nesrećnim slučajem i dr.

Polisa osiguranja je isprava kojom se osiguravač obavezuje da će osiguraniku isplatiti ugovorenu sumu, tj. to je isprava o zaključenom ugovoru o osiguranju.

Premija je iznos koji osiguranik plaća osiguravajućem društvu za određeno osiguranje.

OSIGURANJE ŽIVOTA

UVODNE NAPOMENE

Sa aspekta predmeta osiguranje može biti:

- Osiguranje imovine
- Osiguranje lica koje se vrši kao osiguranje života i osiguranje za slučaj nezgode

Predmet razmatranja će biti osiguranje života.

Aktuarske osnove tarifa

U osiguranju lica ih čine:

- Tablice smrtnosti
- Obračunska kamatna stopa
- Troškovi sprovođenja osiguranja

Tablice smrtnosti

Konstruišu se na dva načina:

- Direktnom i/ili
- Indirektnom metodom

Tablice sastavljene po direktnoj metodi predstavljaju red izumiranja jedne stvarne generacije. Ova je metoda dopuna indirektnoj, po kojoj se statističkom procedurom, uzima uzorak iz grupa lica razne starosti, pa se za raspodjelu na populaciji proglašava raspodjela na uzorku. Tablice sastavljene po noj predstavljaju red izumiranja jedne fiktivne grupe lica.

Određivanje vjerovatnoće smrti

Svaki član grupe iz uzorka, po indirektnoj metodi, prati se u toku godine. Jedinica vremena može biti godina starosti (vrijeme od jednog do drugog rođendana), godina osiguranja (vrijeme od dana stupanja u odnos osiguranja do istog dana naredne godine) ili kalendarska godina.

Opšte tablice smrtnosti osiguranih lica formirane su na osnovu vjerovatnoće smrti cjelokupnog stanovništva, a tablice smrtnosti osiguranih lica, kao materijal iz koga će se odrediti tražena vjerovatnoća, uzimaju samo osigurana lica.

Vjerovatnoća smrti je količnik broja realizovanih smrtnih slučajeva dx grupe lica iste starosti, u toku jedne godine, i cjelokupnog broja lx lica koji sačinjavaju grupu.

Konačno

$$qx = dx/lx,$$

gdje je $dx=l_x-l_{x+1}$.

Izravnavanje tablica smrtnosti je postupak prerade i zamjene drugim vrijednostima onih vrijednosti koje u nizu dovode do naglih promjena, kako bi niz dobio veću pravilnost.

To je posebno izraženo kad se posmatra nedovoljno veliki broj osoba, ali i usled drugih nedostataka metode i materijala.

Najčešće se koriste Tablice smrtnosti 17 engleskih društava, jugoslovenske iz 1952-54. i iz 1980-82 god.

Kamatna stopa

Pretpostavljamo da je konstantna i nešto niža od aktuelne kamatne stopa na tržištu novca. Izbor stope je važan zbog kalkulativnih i finansijskih razloga. Ona je kod nas obično 5%, a na zapadu od 3-4%.

Osiguranje života je dugoročan posao pa se sredstva prikupljena na ime premija plasiraju na finansijskom tržištu.Označimo sa Bn veličinu fonda za osiguranje neophodnu za isplate osiguranih suma u određenom trenutku, a sa A- iznos osiguravajućeg fonda na početku roka osiguranja (sadašnja vrijednost). Važi:

$$A=Bn/(1+i)^n$$

Troškovi sprovođenja osiguranja

- Troškovi pribavljanja osiguranja (akvizicioni troškovi α), koji postoje jednokratno i odmjeravaju se proporcionalno osiguranoj sumi
- Inkaso troškovi (β troškovi)- troškovi naplate osiguranja (u procentima bruto premije)
- Tekući upravni (administrativni) troškovi (γ troškovi)- obračunavaju se na sumu osiguranja i uključuju sve unutrašnje administrativne troškove koji se neposredno ne odnose na zaključivanje osiguranja.

  Bruto premija = neto (tehnička) pr. + troškovi

Neto premija kod osig. života

- Vjerovatnoća života i smrti jednog lica
- Komutativni brojevi (određuju se pomoću broja živih-lx i umrlih lica- dx):

  Dx, Nx, Sx, Cx, Mx, Rx
- Osiguranje lične rente
- Osiguranje kapitala
- Osiguranje premijama
- Primjeri

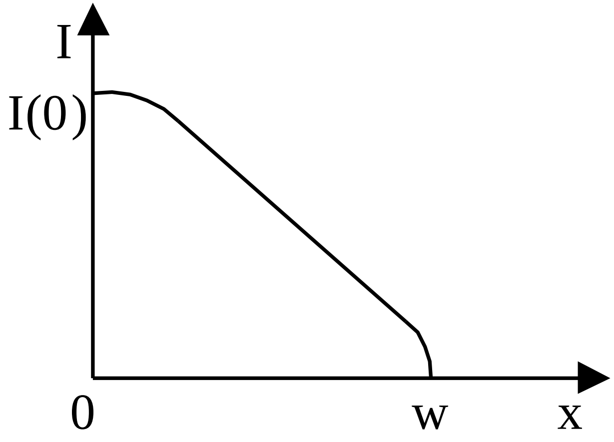
BIOMETRIJSKE FUNKCIJE

Funkciju, koja starosnom dobu pridružuje broj živih lica tog starosnog doba, označavamo sa l i zovemo **FUNKCIJA DOŽIVLJENJA.**

$$\boxed{l : N \cap [0, w] \rightarrow N \cap [0, l(x_0)]}$$

w - oznaka za najdublju starost

$l(x_0)$- broj članova polazne grupe osoba starih x_0 godina



BIOMETRIJSKE FUNKCIJE

$$\boxed{p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}}$$

vjerovatnoća da će lice staro x godina doživjeti narednu (x+1)-vu godinu

$$\boxed{q_x = 1 - p_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}}$$

vjerovatnoća da lice staro x godina neće doživjeti narednu (x+1)-vu godinu

$$\boxed{{}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}}$$

vjerovatnoća da će lice staro x godina doživjeti x+n godina

$$\boxed{{}_n q_x = 1 - {}_n p_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}}$$

vjerovatnoća da lice staro x godina neće doživjeti x+n godina

INTEZITET SMRTNOSTI

INTENZITET SMRTNOSTI μ_x je trenutna stopa smrtnosti lica starih x godina).

$$\boxed{\mu_x = -\frac{l_x'}{l_x}}$$

Ukoliko nije dat analitički izraz za funkciju l_x, pošto znamo njenu vrijednost iz tablica smrtnosti, možemo odrediti približnu vrijednost intenziteta smrtnosti μ_x:

$$\boxed{\mu_x \sim \frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{2 \cdot l_x}}$$

$$\boxed{primijetimo: \quad \mu_x \sim \frac{l_{x-1} - l_x + l_x - l_{x+1}}{2 \cdot l_x}}$$

SREDNJE TRAJANJE ŽIVOTA

- Neka je T - numerička funkcija koja slučajno izabranoj osobi pridružuje trajanje života od x-te godine do smtri (broj godina života još preostaje osobi koja ima x godina).

- Srednje trajanje života se definiše kao očekivanje pomenute neprekidne slučajne veličine T.

- Funkcija raspodjele slučajne veličine T je:

$$F(t) = p(T < t)$$

vjerovatnoća da će lice staro x godina umrijeti do (x+t) godine

$$F(t) = {}_t q_x$$

Gustina raspodjele je : $f(t) = F'(t) = ({}_t q_x)'$

Očekivanje od T je : $$ET = \int_0^{w-x} t \cdot ({}_t q_x)' \, dt$$

SREDNJE TRAJANJE ŽIVOTA

Kako je izvod po t funkcije gustine: $\left[\frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}\right]' = \frac{-l'_{x+t}}{l_x}$

Poslije primjene parcijalne integracije (u=t, dv=$\frac{-l'_{x+t}}{l_x}dt$) dobijamo (l_w=0):

$$\boxed{ET = \frac{1}{l_x}\int_0^{w-x} l_{x+t}\,dt = \int_0^{w-x} {}_t p_x\,dt}$$

Ukoliko nije dat analitički izraz za funkciju doživljenja, srednje trajanje života je:

$$\boxed{ET \sim \frac{1}{2} + \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots + l_{w-1}}{l_x}}$$

VJEROVATNO TRAJANJE ŽIVOTA

Vjerovatno trajanje života se definiše kao broj k, kojeg određujemo iz relacije:

$$\boxed{l_{x+k} = \frac{l_x}{2}, \ \text{tj.} \ {}_k p_x = \frac{1}{2}}$$

Kako funkcija ${}_t p_x$ opada od 1 do 0 kada t raste od 0 do w-x to će takvo $k \in (0, w - x)$ postojati. I vjerovatnoća suprotnog događaja je 0,5.

U opštem slučaju k se određuje interpolacijom uz upotrebu mortalitetnih tablica.