1 Natkrića

Neka su X i $\tilde{X}$ topološki prostori i $p : \tilde{X} \to X$ neprekidno preslikavanje.

Definition 1. *Za preslikavanje $p : \tilde{X} \to X$ se kaže da je natkriće ako za svaku tačku $x \in X$ postoji otvoren skup U u X takav da $x \in U$ i $p^{-1}(U)$ je disjunktna unija otvorenih skupova u $\tilde{X}$ od kojih je svaki homeomorfan skupu U preko preslikavanja p.*

Dakle,

$$(\forall x \in X)\ (\exists U \subset X)\ x \in U \text{ tako da je } p^{-1}(U) = \cup_{j \in J} V_j,$$

$$V_i \cap V_j = \emptyset, i \neq j \text{ i } p_{|V_j} : V_j \to U \text{ je homeomorfizam.}$$

Za prostor X se kaže da je baza natkrića, a za prostor $\tilde{X}$ da je prostor natkrića.

Pojam natkrića je uopštenje preslikavanja $e : \mathbb{R} \to S^1$ koji je korišćeno pri odredjivanju fundamentalne grupe kružnice.

Example 1. *Posmatrajmo kružnicu $S^1 \subset \mathbb{R}^2$. Preslikavanje $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = e(t) = (cos2\pi t, sin2\pi t)$ je natkriće. Zaista, neka $x_0 \in S^1$, tada je $x_0 = (cos2\pi t_0, sin2\pi t_0)$ za neko $t_0 \in \mathbb{R}$. Posmatrajmo otvoren skup $U = S^1 \setminus \{x_0\}$. Tada je $p^{-1}(U) = \cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ gdje je*

$$V_j = \{t \in \mathbb{R} : t_0 + j - \frac{1}{2} < t < t_0 + j + \frac{1}{2}\}.$$

Svaki od otvorenih skupova V_j se homeomorfno slika na U preko preslikavanja p. Ovo pokazuje da je $p : \mathbb{R} \to S^1$ natkriće.

Example 2. *Pokazaćemo da preslikavanje $f : (-2, 2) \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$ dato sa $f(t) = (cos2\pi t, sin2\pi t) \subset \mathbb{R}^2$ nije natkriće. Naime, za tačku $x_0 = (1, 0) = (cos0, sin0)$ ne postoji okolina U koja zadovoljava uslove iz definicije natkrića. Ako bi takva okolina U postojala tada bi za neko δ, $0 < \delta < \frac{1}{2}$ važilo da je $U_\delta \subset U$ gdje je*

$$U_\delta = \{(cos2\pi t, sin2\pi t) : -\delta < t < \delta\}.$$

Kako je U_δ otvoren skup tada bi i $f^{-1}(U_\delta)$ bila unija otvorenih, disjunktnih skupova u $(-2, 2)$ od kojih je svaki homeomorfan sa U_δ preko p. Povezane komponente za $p^{-1}(U_\delta)$ su skupovi $(-2, -2+\delta)$, $(-1-\delta, -1+\delta)$, $(-\delta, \delta)$, $(1-\delta, 1+\delta)$ i $(2-\delta, 2)$. Medjutim, primijetimo da se nijedan od skupova $(-2, -2 + \delta)$, $(2 - \delta, 2)$ ne slika homemorno na U_δ preko f.

1.1 Realni projektivni prostor

U $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ definiše se relacija ekvivalencije $\approx$ sa

$(x_1, \ldots, x_{n+1}) \approx (y_1, \ldots, y_{n+1})$ ako i samo ako $x_i = \lambda y_i,$ za $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ 1 \leq i \leq n+1.$

Neka je $\mathbb{R}P^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\approx$ količnički skup. Posmatrajmo prirodnu projekciju $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^n$ definisanu sa $p(x_1, \ldots, x_{n+1}) = [(x_1, \ldots, x_{n+1})]$. Neka je skup $\mathbb{R}P^n$ snabdjeven količničkom topologijom, odnosno $U \subset \mathbb{R}P^n$ je otvoren ako i samo ako je $p^{-1}(U)$ otvoren skup u $\mathbb{R}^{n+1}$. Prostor $\mathbb{R}P^n$ snabdjeven ovakvom topologijom naziva se realnim projektivnom prostorom.

Relani projektivni prostor se može definisati i na drugi način. Posmatra se sfera $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. i na njoj se definiše relacija ekvivalencije:

$$(x_1, \ldots, x_{n+1}) \approx (y_1, \ldots, y_{n+1}) \text{ ako i samo ako } y_i = x_i \ 1 \leq i \leq n+1$$

$$\text{ili } x_i = y_i,\ 1 \leq i \leq n+1.$$

Ako na količničkom skupu $S^n/\approx$ uvedemo količničku topologiju dobijamo prostor koji je homeomorfan sa $\mathbb{R}P^n$. Dakle, drugi način da se definiše realni projektivni prostor je $\mathbb{R}P^n = S^n/\approx$.

Lemma 1. *Prirodna projekcija $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ je natkriće.*

Proof. Neka $\mathbf{x} \in \mathbb{R}P^n$, tada je $\mathbf{x} = \{x, -x\}$ gdje $x \in S^n$. Neka je V okolina tačke x u S^n takva da je $V \cap (-V) = \emptyset$. Tada je $U = p(V) = p(-V)$ otvoren skup u $\mathbb{R}P^n$, s obzirom da je $p^{-1}(U) = V \cup (-V)$. Kako su očigledno $p_{|V} : V \to U$ i $p_{|(-V)} : (-V) \to U$ homeomorfizmi to je $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ natkriće. $\square$

1.2 Osobine natkrića

Proposition 1. *Svako natkriće $p : \tilde{X} \to X$ je otvoreno preslikavanje.*

Proof. Treba da pokažemo da je $p(V)$ otvoren skup u X za svaki otvoreni skup V u $\tilde{X}$. Neka je $V \subset \tilde{X}$ otvoren skup i neka $x \in p(V) \subset X$. Tada je $x = p(v)$ za neko $v \in V$. Neka je dalje $U \subset X$ otvoren skup iz definicije natkrića takav da $x \in U$. To znači da je $p^{-1}(U) = \cup_{j \in J} V_j$, $V_i \cap V_j = \emptyset$ i $p_{|V_j} : V_j \to U$ je homemorfizam za svako $j \in J$. Tada v pripada nekom od skupova V_j, recimo

$v \in V_{j_0}$. Neka je $W_x = p(V \cap V_{j_0})$. Kako je V otvoren skup u $\tilde{X}$ slijedi sa je $V \cap V_{j_0}$ otvoren skup u V_{j_0}, a kako je $p_{|V_{j_0}} : V_{j_0} \to U$ homeomorfizam, to je W_x otvoren skup u U. Jasno da $x \in W_x$ i da je $W_x \subset p(V)$. Na ovaj način dobijamo da je $p(V) = \cup_{x \in p(V)} W_x$, što implicira da je $p(V)$ otvoren skup. □

Odavde direktno slijedi:

Corollary 1. *Natkriće $p : \tilde{X} \to X$ je homemorfizam ako i samo ako je bijekcija.*

Proof. Tvrdjenje slijedi iz zapažanja da je neprekidna bijekcija homeomorfizam ako i samo ako svaki otvoren skup slika u otvoren skup. □

Neka je $p : \tilde{X} \to X$ natkriće i neka je $f : Z \to X$ neprekidno preslikavanje, gdje je Z neki topološki prostor. Za neprekidno preslikavanje $\tilde{f} : \tilde{X} \to Z$ se kaže da je *podizanje* za f ako je $p \circ \tilde{f} = f$.

Lemma 2. *Neka je $p : \tilde{X} \to X$ natkriće. Neka je Z povezan topološki prostor i neka su $f, g : Z \to \tilde{X}$ neprekidna preslikavanja takva da je $p \circ f = p \circ g$ i $f(z) = g(z)$ za neko $z \in Z$. Tada je $f \equiv g$.*

Proof. Neka je $Z_0 = \{z \in Z | f(z) = g(z)\}$. Po pretpostavci je $Z \neq \emptyset$. Pokazaćemo da je Z_0 i otvoren i zatvoren skup, pa će, s obzirom da je Z povezan slijediti da je $Z_0 = Z$. Neka $z \in Z$, tada je $x = p(f(z)) \in X$, pa postoji okolina U iz definicije natkrića takva da $x \in U$. To znači da je $p^{-1}(U) = \cup_{j \in J} V_j$, $V_i \cap V_j = \emptyset$, $i \neq j$ i $p_{|V_j} : V_j \to U$ je homeomorfizam za sve $j \in J$. Neki od skupova V_j sadrži $f(z)$, označimo taj skup sa V_{j_0}. Kako je $p(g(z)) = p(f(z))$ jedan od ovih skupova takodje sadrži i $g(z)$, označimo taj skup sa V_{j_1}. Neka je $W_z = f^{-1}(V_{j_0}) \cap g^{-1}(V_{j_1})$. Slijedi da je W_z otvoren skup u Z i $z \in W_z$.

Razmotrimo slučaj kada $z \in Z_0$. Tada je $f(z) = g(z)$ i prema tome je $V_{j_0} = V_{j_1}$. Slijedi da $f, g : W_z \to V_{j_0}$. Kako je $p \circ f = p \circ g$ i $p_{|V_{j_0}} : V_{j_0} \to U$ je homeomorfizam, to slijedi da se f i g poklapaju na W_z. Zato je $W_z \subset Z_0$, što znači da je Z_0 otvoren skup.

Razmotrimo sada slučaj kada $z \in Z \setminus Z_0$. Kako je sada $f(z) \neq g(z)$ slijedi da je $V_{j_0} \cap V_{j_1} = \emptyset$. Kako je $f(W_z) \subset V_{j_0}$ i $g(W_z) \subset V_{j_1}$ slijedi da je $f(z^{'}) \neq g(z^{'})$ za sve $z^{'} \in W_z$. Zato je $W_z \subset Z \setminus Z_0$. Dakle, pokazali smo da za svako $z \in Z \setminus Z_0$ postoji otvoren skup W_z takav da $z \in W_z$ i $W_z \subset Z \setminus Z_0$. Slijedi da je $Z \setminus Z_0$ otvoren skup, što znači da je Z_0 zatvoren. □

Navodimo bez dokaza sledeće dvije teoreme, koje su analogon teoremama koje smo formulisali prilikom odredjivanja fundamentalne grupe kružnice.

Theorem 1. (Teorema o podizanju puta kod natkrića.) *Neka je* $p : \tilde{X} \to X$ *natkriće,* $\alpha : [0,1] \to X$ *put u* X *i neka je* $\tilde{x} \in \tilde{X}$ *tačka takva da je* $p(\tilde{x}) = \alpha(0)$*. Tada postoji jedinstveni put* $\tilde{\alpha} : [0.1] \to \tilde{X}$ *takav da je* $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}$ *i* $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$*.*

Theorem 2. (Teorema o podizanju homotopije kod natkrića.) *Neka je* $p : \tilde{X} \to X$ *natkriće, neka je* $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ *neprekidno preslikavanje i neka je* $\tilde{x} \in \tilde{X}$ *tačka takva da je* $p(\tilde{x}) = F(0,0)$*. Tada postoji jedinstveno neprekidno preslikavanje* $\tilde{F} : [0.1] \times [0,1] \to \tilde{X}$ *takvo da je* $\tilde{F}(0,0) = \tilde{x}$ *i* $p \circ \tilde{F} = F$*.*