1 Natkrića-nastavak

U ovoj lekciji ćemo izvesti neka svojstva natkrića koja omogućavaju da se natkrića primjenjuju pri izračunavanju fundamentalne grupe.

Theorem 1. *Neka je $p : \tilde{X} \to X$ natkriće i neka su $\alpha : [0,1] \to X$ i $\beta : [0,1] \to X$ ekvivalentni putevi tj. $\alpha \approx \beta$ (rel $\{0,1\}$). Neka su $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : [0,1] \to \tilde{X}$ podizanja za α i β takva da je $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$. Tada je $\tilde{\alpha} \approx \tilde{\beta}$ (rel $\{0,1\}$).*

Proof. Neka je $x_0 = \alpha(0) = \beta(0)$ i $x_1 = \alpha(1) = \beta(1)$. Kako je $\alpha \approx \beta$ (rel $\{0,1\}$) to postoji homotopija $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ tako da je $F(s,0) = \alpha(s)$, $F(s,1) = \beta(s)$ i $F(0,t), F(1,t)$ ne zavise od $t \in [0,1]$. Iz teoreme o podizanju homotopije kod natkrića slijedi da postoji neprekidno preslikavanje $G : [0,1] \times [0,1] \to \tilde{X}$ takvo da je $p \circ G = F$ i $G(0,0) = \tilde{\alpha}(0)$. Tada je $p(G(0,t)) = p(G(0,0)) = p(\tilde{\alpha(0)}) = \alpha(0) = x_0$ i $p(G(1,t)) = F(1,t) = F(1,0) = \alpha(0) = x_1$.
Posmatramo put $t \to G(0,t)$ u $\tilde{X}$ i i posmatramo konstantan put $t \to \tilde{\alpha}(0)$. Ova dva puta se poklapaju u $t = 0$ i imaju istu projekciju na X. Iz Leme 2 sa prethodnog časa slijedi da se ovi putevi poklapaju to jest $G(0,t) \equiv \tilde{\alpha}(0)$, odnosno $G(0,t)$ ne zavisi od t. Analogno, putevi $t \to G(1,t)$ i konstantan put $t \to G(1,0)$ se poklapaju u $t = 0$ i imaju istu projekciju na X odakle slijedi da je $G(1,t) \equiv G(1,0)$, odnosno $G(1,t)$ ne zavisi od t. Kako važi :

$$p(G(s,0)) = F(s,0) = \alpha(s) = p(\tilde{\alpha}(s)) \ i \ G(0,0) = \tilde{\alpha}(0),$$

to je $G(0,t) = \tilde{\alpha}(t)$. Dalje je

$$p(G(s,1)) = F(s,1) = \beta(s) = p(\tilde{\beta}(s)) \text{ i } G(0,1) = \tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0),$$

to je $G(s,1) = \tilde{\beta}(s)$. Slijedi da je $\tilde{\alpha} \approx \tilde{\beta}$ (rel {0,1}). □

Kao posljedicu ovog tvrdjenja imamo sledeću važnu teoremu:

Theorem 2. *Neka je $p : \tilde{X} \to X$ natkriće i $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$. Tada je homomorfizam*

$$p_* : \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi(X, p(x_0)) \tag{1}$$

monomorfizam.

Proof. Neka $[\tilde{\alpha}_0], [\tilde{\alpha}_1] \in \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ tako da je $p_*([\tilde{\alpha}_0]) = p_*([\tilde{\alpha}_1])$, odnosno $[p \circ \tilde{\alpha}_0] = [p \circ \tilde{\alpha}_1]$. To znači da je $p \circ \tilde{\alpha}_0 \approx p \circ \tilde{\alpha}_1$ (rel $\{0, 1\}$). Kako je $\tilde{\alpha}_0(0) = \tilde{\alpha}_1(0)$ na osnovu Teoreme 1 slijedi da je $\tilde{\alpha}_0 \approx \tilde{\alpha}_1$ (rel $\{0, 1\}$), to jest $[\tilde{\alpha}_0] = [\tilde{\alpha}_1]$, što implicira da je p_* monomorfizam. $\square$

Navodimo i nekoliko posljedica prethodnih tvrdjenja.

Corollary 1. *Neka je $p : \tilde{X} \to X$ natkriće, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ i neka je α petlja u X u tački $p(\tilde{x}_0)$. Tada $[\alpha] \in p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ ako i samo ako postoji petlja $\tilde{\alpha}$ u $\tilde{X}$ u tački $\tilde{x}_0$ takva da je $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$.*

Proof. Ako postoji petlja $\tilde{\alpha}$ u $\tilde{X}$ u tački $\tilde{x}_0$ takva da je $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$, tada je $p_*([\tilde{\alpha}]) = [p \circ \tilde{\alpha}] = [\alpha]$ to jest $[\alpha] \in p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Obratno, neka $[\alpha] \in p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$, tada postoji petlja $\tilde{\beta}$ u $\tilde{X}$ u tački $\tilde{x}_0$ takva da je $[\alpha] = p_*([\tilde{\beta}]) = [p \circ \tilde{\beta}]$. To znači da je $\alpha \approx p \circ \tilde{\beta}$ (rel$\{0, 1\}$). Iz teoreme o podizanju puta kod natkrića slijedi da postoji jedinstveni put $\tilde{\alpha}$ u $\tilde{X}$ takav da je $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ i $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$. Kako iz Teoreme 1 slijedi da je $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1) = \tilde{x}_0$, dobijamo da je $\tilde{\alpha}$ tražena petlja. $\square$

Corollary 2. *Neka je $p : \tilde{X} \to X$ natkriće, neka su $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \tilde{X}$ tačke takve da je $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1)$ i neka je $\tilde{\alpha} : [0, 1] \to \tilde{X}$ put u $\tilde{X}$ takav da je $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$ i $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{x}_1$. Ako $[p \circ \tilde{\alpha}] \in p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ onda je $\tilde{\alpha}$ petlja u $\tilde{X}$ odnosno $\tilde{x}_0 = \tilde{x}_1$.*

Proof. Iz prethodne posljedice slijedi da postoji petlja $\tilde{\beta}$ u $\tilde{X}$ u tački $\tilde{x}_0$ takva da je $p \circ \tilde{\beta} = p \circ \tilde{\alpha}$ i $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$. Dobijamo da su $\tilde{\alpha}$ i $\tilde{\beta}$ podizanja za $p \circ \tilde{\alpha}$ sa istim početkom, pa je $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$, odnosno $\tilde{\alpha}$ je petlja u $\tilde{x}_0 = \tilde{x}_1$. $\square$

Corollary 3. *Neka je $p : \tilde{X} \to X$ natkriće i neka su $\alpha : [0, 1] \to X$ i $\beta : [0, 1] \to X$ putevi u X takvi da je $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ i $\alpha(1) = \beta(1) = x_1$. Neka su $\tilde{\alpha}$ i $\tilde{\beta}$ podizanja za α i β takva da je $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = \tilde{x}_0$ gdje je $p(\tilde{x}(0)) = x_0$. Tada je $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ ako i samo ako $[\alpha] \cdot [\beta]^{-1} \in p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.*

Proof. Ako je $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ onda je $\tilde{\alpha} * \bar{\tilde{\beta}}$ petlja u $\tilde{X}$ u tački $\tilde{x}_0$ i $p_*[\tilde{\alpha} * \bar{\tilde{\beta}}] = [p \circ (\tilde{\alpha} * \bar{\tilde{\beta}})] = [\alpha * \bar{\beta}] = [\alpha] \cdot [\beta]^{-1}$. Zato je $[\alpha] \cdot [\beta]^{-1} \in p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.

Obrnuto, neka su $\tilde{\alpha}$ i $\tilde{\beta}$ putevi u $\tilde{X}$ takvi daje $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$, zatim $p \circ \tilde{\beta} = \beta$ i $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = \tilde{x}_0$ i $[\alpha] \cdot [\beta]^{-1} \in p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Neka je $\gamma = \alpha * \bar{\beta}$ - to je petlja u $p(\tilde{x}_0)$. Na osnovu pretpostavke $[\gamma] \in p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Iz prve od prethodnih posljedica slijedi da postoji petlja $\tilde{\gamma}$ u $\tilde{X}$ u tački $\tilde{x}_0$ takva da je $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Neka su $\hat{\alpha} : [0, 1] \to \tilde{X}$ i $\hat{\beta} : [0, 1] \to \tilde{X}$ putevi u $\tilde{X}$ definisani sa

$$\hat{\alpha} = \tilde{\gamma}(\frac{t}{2}), \quad \hat{\beta} = \tilde{\gamma}(1 - \frac{t}{2}), \quad t \in [0, 1].$$

Tada je

$$\tilde{\alpha}(0) = \hat{\alpha}(0) = \hat{\beta}(0) = \tilde{\beta}(0),$$

a kako postoji jednistveno podizanje sa zadatim početkom, slijedi da je $\tilde{\alpha} = \hat{\alpha}$ i $\tilde{\beta} = \hat{\beta}$. Dobijamo da je

$$\tilde{\alpha}(1) = \hat{\alpha}(1) = \tilde{\gamma}(\frac{1}{2}) = \hat{\beta}(1) = \tilde{\beta}(1),$$

što je i trebalo pokazati. □

Koristeći prethodna tvrdjenja dokazuje se sledeće:

Theorem 3. *Neka je $p : \tilde{X} \to X$ natkriće, pri čemu je prostor $\tilde{X}$ linearno povezan, a prostor X je prosto povezan. Tada je natkriće $p : \tilde{X} \to X$ homeomorfizam.*

Proof. Iz definicije natkrića znamo da je p surjektivno, neprekidno i otvoreno preslikavnje. Dokazujemo je je p injektivno odakle će slijediti da ja p homeomorfizam. Neka su tačke $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \tilde{X}$ takve da je $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1)$. Kako je X linearno povezan, to postoji put $\tilde{\alpha} : [0,1] \to X$ takav da je $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$ i $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{x}_1$. Tada je $p \circ \tilde{\alpha}$ petlja u X u tački $x_0 = p(\tilde{x}_0)$. Kako je X prosto povezan grupa $\pi(X, x_0)$ je trivijalna, pa je $[p \circ \tilde{\alpha}] = [\varepsilon_{x_0}]$. Iz treće od prethodnih posljedica slijedi da je $\tilde{\alpha}$ petlja u $\tilde{X}$ u tački $\tilde{x}_0$, pa je $\tilde{x}_0 = \tilde{x}_1$, što je i trebalo dokazati. □

1.1 Broj listova natkrića

Neka je $p : \tilde{X} \to X$ natkriće pri čemu je prostor $\tilde{X}$ povezan.

Proposition 1. *Skupovi $p^{-1}(x_0)$ i $p^{-1}(y_0)$ su iste kardinalnosti za proizvoljne $x_0, y_0 \in X$.*

Proof. Neka $x_0, x_1 \in X$ i neka je $f : [0,1] \to X$ put koji spaja x_0 i y_0 to jest $f(0) = x_0$ i $f(1) = y_0$. Neka je dalje U_t okolina iz definicije natkrića za tačku $f(t)$. Tada familija otvorenih skopuva $\{U_t\}$ pokriva put $f(I)$, a kako je $f(I)$ kompaktan skup, to postoji konačno mnogo ovih okolina koje pokrivaju $f(I)$. Neka su to $U_{t_1}, \ldots, U_{t_n}$, pri čemu pretpostavljamo da $f(0) \in U_{t_1}$, $f(1) \in U_{t_n}$ i $U_{t_i} \cap U_{t_{i+1}} \neq \emptyset$, $1 \leq i \leq n-1$. Neka je

$$p^{-1}(U_{t_i}) = \cup_{j^i \in J_i} V_{j^i}, \;\; V_{j_1^i} \cap V_{j_2^i} = \emptyset, \;\; p|V_{j^i} : V_{j^i} \to U_i \text{ homeomorfizam.}$$

Tada je $|p^{-1}(x)| = |p^{-1}(y)| = |J_i|$ za sve $x, y \in U_{t_i}$. Očigledno je i da važi sledeće: ako $x \in U_{t_i} \cap U_{t_{i+1}}$ tada je $|p^{-1}(x)| = |J_i| = |J_{i+1}|$.

Dakle, izaberimo tačke $x_i \in U_{t_i} \cap U_{t_{i+1}}$, $1 \leq i \leq n-1$. Kako $x_0, x_{t_1} \in U_{t_1}$ to slijedi $|p^{-1}(x_0)| = |p^{-1}(x_1)|$. Kako $x_1, x_2 \in U_{t_2}$ to je $|p^{-1}(x_1)| = |p^{-1}(x_2)|$. Nastavljajući postupak dobijamo da je $|p^{-1}(x_0)| = |p^{-1}(x_{n-1})|$. Kako $x_{n-1}, y_0 \in U_{t_n}$ zaključujemo da je $|p^{-1}(x_0)| = |p^{-1}(y_0)|$.

$\square$

Dakle broj $|p^{-1}(x)|$ ne zavisi od tačke $x \in X$.

Definition 1. *Neka je $p : \tilde{X} \to X$ natkriće, pri čemu je prostor $\tilde{X}$ povezan i $x \in X$. Broj $|p^{-1}(x)|$ naziva a se brojem listova natkrića*

Ako je broj $|p^{-1}(x)|$ konačan, odnosno jednak nekom broju k, za natkriće se kaže da je konačno-listno ili preciznije da je k-listno natkriće. U protivnom se kaže da je natkriće beskonačno-listno.