1 Natkrića-nastavak-2

U ovoj lekciji nastavljamo da se bavimo pojmom broja listova natkrića. U tom smislu dokazaćemo teoremu koja daje vezu izmedju broja listova natkrića i odnosa fundamentalne grupe prostora natkrića i fundamentalne grupe baze natkrića. Prije toga podsjetimo se da je indeks podgrupe H u grupi G jednak broju elemenata u lijevom, odnosno desnom kosetu grupe G po podgrupi H. Drugim riječima to je broj lijevih $\{Hg | g \in G\}$ odnosno desnih $\{gH | g \in G\}$ klasa grupe G po podgrupi H. Indeks podgrupe H u grupi G obilježava se sa $[G : H]$.

Theorem 1. *Neka je $p : \tilde{X} \to X$ natkriće pri čemu su prostori X i $\tilde{X}$ linearno povezani, neka je $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ i $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Tada je indeks podgrupe $p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ u grupi $\pi(X, x_0)$ jednak broju listova ovog natkrića.*

Proof. Neka $\tilde{x}_i \in p^{-1}(x_0)$ i neka je $\tilde{\alpha}_i : [0, 1] \to \tilde{X}$ put koji spaja $\tilde{x}_0$ i $\tilde{x}_i$ to jest $\tilde{\alpha}_i(0) = \tilde{x}_0$ i $\tilde{\alpha}_i(1) = \tilde{x}_i$. Tada je $\alpha_i = p \circ \tilde{\alpha}_i$ petlja u X u tački x_0, pa $[\alpha_i] \in \pi(X, x_0) = G$.

Neka je $H = p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$, neka je $J = |p^{-1}(x_0)$ i posmatrajmo skup klasa $D = \{[\alpha_i] \cdot H : i \in J\}$.

Prvo ćemo dokazati da su svi elementi iz D medjusobno različiti. Pretpostavimo da je $[\alpha_i] \cdot H = [\alpha_j] \cdot H$ za neke $i, j \in J$. Tada je

$$[\alpha_i] = [\alpha_j] \cdot [\alpha] \tag{1}$$

za neko $[\alpha] \in H$. Na osnovu Posljedice 1 sa prošlog časa, postoji petlja $\tilde{\alpha}$ u $\tilde{X}$ u tački $\tilde{x}_0$ takva da je $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$. Posmatrajmo put $\tilde{\beta}$ u $\tilde{X}$ definisan sa $\tilde{\beta} = \bar{\tilde{\alpha}}_i * \tilde{\alpha} * \tilde{\alpha}_j$, on povezuje tačke $\tilde{x}_i$ i $\tilde{x}_j$. Imamo da je

$$p \circ \tilde{\beta} = \bar{\alpha}_i * \alpha * \alpha_j \approx \varepsilon_{x_0},$$

jer je $[\bar{\alpha}_i] \cdot [\alpha_j] \cdot [\alpha] = [\varepsilon_{x_0}]$ na osnovu (1). S druge strane ako posmatramo konstantnu petlju $\tilde{\varepsilon}_{\tilde{x}_i}$ u tački $\tilde{x}_i$, dobijamo da su $\tilde{\beta}$ i $\tilde{\varepsilon}_{\tilde{x}_i}$ dvije petlje sa istim početkom o obije se projektuju u konstantnu petlju ε_{x_0}. Slijedi da je $\tilde{\beta} = \tilde{\varepsilon}_{\tilde{x}_i}$, što dalje znači da je $\tilde{\alpha}_i = \tilde{\alpha} * \tilde{\alpha}_j$. Na taj način se i njihovi krajevi poklapaju, odnosno $\tilde{x}_i = \tilde{x}_j$, zato je $\tilde{\alpha}_i = \tilde{\alpha}_j$, pa je i $[\alpha_i] = [\alpha_j]$.

Sada ćemo doakzati da skup D obuhvata sve desne kosete grupe G po podgrupi H. Neka $g \in G$ i posmatramo klasu gH. Tada je $g = [\beta]$ za neku petlju β u X u tački x_0. Neka je $\tilde{\beta}$ podizanje za β takvo da je $\tilde{\beta}(0) = \tilde{x}_0$. Tada $\tilde{\beta}(1) \in p^{-1}(x_0)$, to jest $\tilde{\beta}(1) = \tilde{x}_i$. Dobijamo da je $\bar{\tilde{\alpha}}_i * \tilde{\beta}$ petlja u $\tilde{X}$ u tački $\tilde{x}_0$, odnosno $[\bar{\tilde{\alpha}}_i * \tilde{\beta}] \in \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Zato je $[\bar{\alpha}_i * \tilde{\beta}] \in p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$, odnosno

$$[\alpha_i]^{-1} \cdot [\beta] \in H \text{ to jest } [\beta] \in [\alpha_i] \cdot H,$$

što je i trebalo dokazati. Dakle skup D se poklapa sa skupom desnih koseta grupe G po podgrupi H, pa je

$$|D| = |J| = [G : H],$$

čime je tvrdjenje dokazano. □

Prethodna teorema ima široku primjenu pri odredjivanju fundamentalne grupe prostora. Ilustrovaćemo to kroz nekoliko primjera.

1. Neka je $p : \tilde{X} \to X$ n-listno natkriće pri čemu su prostori X i $\tilde{X}$ linearno povezani. Ako je $\pi(X, x_0) \cong \mathbb{Z}$ odrediti fundamentalnu grupu $\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, gdje je $x_0 = p(\tilde{x}_0)$.

   Rješenje. Znamo da je $p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ podgrupa grupe $\pi(X, x_0)$, a to je po uslovu ciklična aditivna grupa cijelih briojeva $\mathbb{Z}$. Poznato je da je svaka podgrupa ciklične grupe ciklična, pa slijedi da je $p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ generisana nekim brojem $k \in \mathbb{Z}$, odnosno $p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = k\mathbb{Z}$. S druge strane, kako se radi o n-listnom natkriću, to je $[\pi(X, x_0) : p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))] = [\mathbb{Z} : k\mathbb{Z}] = n$, odnosno $n = k$. Dakle $\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cong p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = nZ \cong \mathbb{Z}$.

2. Neka je $p : \tilde{X} \to X$ 2-listno natkriće pri čemu su prostori X i $\tilde{X}$ linearno povezani. Ako je $\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = 1$ odrediti fundamentalnu grupu $\pi(X, x_0)$, gdje je $x_0 = p(\tilde{x}_0)$.

   Rješenje. Kako je $[\pi(X, x_0) : p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))] = 2$ i grupa $p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \cong \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = 1$, slijedi da grupa $\pi(X, x_0)$ ima dva elementa. Poznato je da je svaka grupa koja ima dva elementa izomorfna grupi $\mathbb{Z}_2$, pa slijedi da je $\pi(X, x_0) \cong \mathbb{Z}_2$.

3. Odrediti fundamnetalnu grupu $\pi(\mathbb{R}P^n, x)$ realnog projektvinog prostora $\mathbb{R}P^n$, gdje je $n \geq 2$.

   Rješenje. U ranijim lekcijama smo vidjeli da postoji 2-listno natkriće $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$. Kako je sfera S^n prosto povezana za $n \geq 2$, odnosno $\pi(S^n, x) = 1$ za $n \geq$, to na osnovu prethodnog zadatka zaključujemo da je $\pi(\mathbb{R}P^n, x) \cong \mathbb{Z}_2$ za $n \geq 2$.

1.1 Klasifikacija natkrića

Definition 1. *Za natkrića $p : \tilde{X} \to X$ i $q : \tilde{Y} \to Y$ se kaže da su (topološki) ekvivalentna ako postoje homeomorfizmi $f : X \to Y$ i $g : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ takvi da je $q \circ f = g \circ p$.*

Drugim riječima sledeći dijagram je komutativan:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{f} & \tilde{Y} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle p} & & \Big\downarrow{\scriptstyle q} \\ X & \xrightarrow{g} & Y. \end{array}$$

Uglavno se razmatra slučaj izomorfnih natkrića nad istom bazom. Zato navodimo i sledeću definiciju.

Definition 2. *Za natkrića $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$ i $p_2 : \tilde{X}_2 \to X$ se kaže da su (topološki) ekvivalentna ako postoji homeomorfizam $h : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ takav da je $p_2 \circ h = p_1$.*

Koristeći prethodno može se izvesti kriterijum koji ustanovljuje kada su dva natkrića nad istom bazom ekvivalentna. Prije toga formulisaćemo tvrdjenja koja ćemo koristiti pri dokazivanju tog kriterijuma.

Podsjetimo se da se za dvije podgrupe H_0 i H_1 grupe G kaže da su konjugovane ako postoji element $g \in G$ takav da je $H_1 = gHg^{-1}$. Preslikavanje $\varphi : G \to G$ dato sa $\varphi(g^{'}) = gg^{'}g^{-1}$ je automorfizam koji se naziva unutrašnjim automorfizmom grupe G. Na taj način se može reći da su podgrupe H_0 i H_1 konjugovane ukoliko postoji unutrašnji automorfizam φ grupe G takav da je $\varphi(H_0) = H_1$. Očigledno je da u ovom slučaju važi da je $H_0 = g^{-1}H_1g$ odnosno $\varphi^{-1}(H_1) = H_0$.

Proposition 1. *Neka je $p : \tilde{X} \to X$ natkriće pri čemu je prostor $\tilde{X}$ linearno povezan. Neka su tačke $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \tilde{X}$ takve da je $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1) = x_0$ i neka je $H_0 = p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$, $H_1 = p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$. Tada su podgrupe $H_0, H_1 < \pi(X, x_0)$ konjugovane u $\pi(X, x_0)$. Štaviše, ako je H podgrupa u $\pi(X, x_0)$ koja je konjugovana sa H_0 tada postoji tačka $\tilde{x} \in \tilde{X}$ takva da je $p(\tilde{x}) = \tilde{x}_0$ i $p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x})) = H$.*

Proof. Kako je $\tilde{X}$ linearno povezan, to postoji put $\tilde{f} : [0,1] \to \tilde{X}$ u $\tilde{X}$ takav da je $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ i $\tilde{f}(1) = \tilde{x}_1$. Neka je $\tilde{\alpha}$ petlja u $\tilde{X}$ u tački x_1. Tada je $\tilde{f} * \tilde{\alpha} * \bar{\tilde{f}}$ petlja u $\tilde{X}$ u tački $\tilde{x}_0$.

Neka je $f = p \circ \tilde{f}$. Kako je $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1) = x_0$ slijedi da je f petlja u X u tački x_0. Posmatrajmo unutrašnji automorfizam $\varphi : \pi(X, x_0) \to \pi(X, x_0)$ definisan sa $\varphi[\beta] = [f] \cdot [\beta] \cdot [f]^{-1} = [f * \beta * \bar{f}]$. Kako je $p \circ (\tilde{f} * \tilde{\alpha} * \bar{\tilde{f}}) = f * (p \circ \tilde{\alpha}) * \bar{f}$ i $p \circ \tilde{\alpha}$ je petlja u X u tački x_0. to slijedi da je

$$p_*([\tilde{f} * \tilde{\alpha} * \bar{\tilde{f}}]) = [f] \cdot [p \circ \tilde{\alpha}] \cdot [f]^{-1} = \varphi([p \circ \tilde{\alpha}]) = \varphi(p_*([\tilde{\alpha}])).$$

Kako $[\tilde{f} * \tilde{\alpha} * \bar{\tilde{f}}]) \in \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, ovo znači da $\varphi(p_*([\tilde{\alpha}])) \in p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ za svako $[\tilde{\alpha}] \in \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$, odnosno da je $\varphi(H_1) \subset H_0$.

Ako posmatramo unutrašnji automorfizam $\varphi^{-1} : \pi(X, x_0) \to \pi(X, x_0)$ koji je dat sa $\varphi^{-1}([\beta]) = [f]^{-1} \cdot [\beta] \cdot [f]$, na analogan način se dokazuje da je $\varphi^{-1}(H_0) \subset H_1$. Dakle, zaključujemo da je $\varphi(H_1) = H_0$, odnosno da su podgrupe H_0 i H_1 konjugovane u $\pi(X, x_0)$.

Neka je sada H podgrupa u $\pi(X, x_0)$ koja je konjugovana sa H_0. To znači da postoji petlja α u X u tački x_0 tako da je $H = [\alpha] \cdot H_0 \cdot [\alpha]^{-1}$. Iz teoreme o podizanju puta slijedi da postoji jedinstven put $\tilde{\alpha} : [0,1] \to \tilde{X}$ takav da je $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ i $\alpha(0) = \tilde{x}_0$. Neka je $x_1 = \tilde{\alpha}(1)$. Tada je na osnovu prethodnog

$$p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) = [\alpha] \cdot H_0 \cdot [\alpha]^{-1} = H,$$

što je i trebalo pokazati.

□

Sledeću teoremu navodimo bez dokaza.

Theorem 2. *Neka je $p : \tilde{X} \to X$ natkriće i $f : Z \to X$ neprekidno preslikavanje, gdje je Z povezan topološki prostor. Neka važi*

$$f_*(\pi(Z, z_0)) \subset p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)),$$

gdje su tačke $z_0 \in Z$ i $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ takve da je $f(z_0) = p(\tilde{x}_0)$. Tada postoji jedinstveno neprekidno preslikavanje $\tilde{f} : Z \to \tilde{X}$ takvo da je $p \circ \tilde{f} = f$ i $\tilde{f}(z_0) = \tilde{x}_0$.

Kasnije će nam biti od koristi sledeća očigledan posljedica.

Corollary 1. *Neka je $p : \tilde{X} \to X$ natkriće i $f : \tilde{X} \to X$ neprekidno preslikavanje, pri čemu je $\tilde{X}$ povezan topološki prostor. Ako je $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{X}$ neprekidno preslikavanje takvo da je $p \circ \tilde{f} = f$ i $\tilde{f}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$ za neku tačku $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ tada je $\tilde{f}$ identičko preslikavanje prostora $\tilde{X}$.*

Prvo tvrdjenje u smislu karakterizacije ekvivalentnih natkrića je sledeće.

Theorem 3. *Neka su* $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$ *i* $p_2 : \tilde{X}_2 \to X$ *natkrića, pri čemu su prostori* $\tilde{X}_1$ *i* $\tilde{X}_2$ *povezani, dok je prostor* X *povezan i linearno povezan. Neka su* $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$ *i* $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ *tačke takve da je* $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$. *Tada postoji homeomorfizam* $h : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ *takav da je* $p_2 \circ h = p_1$ *i* $h(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ *ako i samo ako je* $p_*(\pi(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = p_*(\pi(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$.

Proof. Ako takav homeomorfizam h postoji tada on indukuje izomorfizam $h_* : \pi(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \to \pi(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ i $p_{1*} = p_{2*} \circ h_*$. Zato je

$$p_{1*}(\pi(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = p_{2*}(h_*(\pi(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1))) = p_{2*}(\pi(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)),$$

čime je jedan smjer tvrdjenja dokazan.

Obrnuto, neka važi $p_*(\pi(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = p_*(\pi(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$. Posmatramo natkriće $p_2 : \tilde{X}_2 \to X$ i neprekidno preslikavanje $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$, tada na osnovu Teoreme 2 postoji jedinstveno neprekidno preslikavanje $h : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ takvo da je $p_2 \circ h = p_1$ i $h(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$. Analogno ako posmatramo natkriće $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$ i neprekidno preslikavanje $p_2 : \tilde{X}_2 \to X$ to na osnovu Teoreme 2 postoji jedinstveno neprekidno preslikavanje $g : \tilde{X}_2 \to \tilde{X}_1$ takvo da je $p_1 \circ g = p_2$ i $g(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_1$. Tada je $p_1 \circ g \circ h = p_2 \circ h = p_1$ i $(g \circ h)(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_1$. Na osnovu Posljedice 1 slijedi da je $g \circ h$ identičko preslikavanje za $\tilde{X}_1$. Na isti način, kako je $p_2 \circ h \circ g = p_1 \circ g = p_2$ i $(h \circ g)(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_2$ zaključujemo da je $h \circ g$ identičko preslikavanje za $\tilde{X}_2$. Dakle $h : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ je homeomorfizam čije je inverzno prelikavanje g i važi $p_2 \circ h = p_1$, čime je i drugi smjer tvrdjenja dokazan. □

Koristeći prethodno dobijamo važan kriterijum za karakterizaciju ekvivalentnih natkrića.

Theorem 4. *Neka su* $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$ *i* $p_2 : \tilde{X}_2 \to X$ *natkrića, pri čemu su prostori* $\tilde{X}_1$ *i* $\tilde{X}_2$ *povezani, dok je prosto* X *povezan i linearno povezan. Neka su* $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$ *i* $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ *tačke takve da je* $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$. *Data natkrića su ekvivalentna ako i samo ako su podgrupe* $p_{1*}(\pi(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1))$ *i* $p_{2*}(\pi(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$ *konjugovane u* $\pi(X, x_0)$, *gdje je* $x_0 = p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$.

Proof. Pretpostavimo da su data natkrića ekvivalentna i neka je $h : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ homeomorfizam takav da je $p_2 \circ h = p_1$. Tada je

$$p_{1*}(\pi(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = p_{2*}(\pi(\tilde{X}_2, h(\tilde{x}_1))).$$

Primijetimo da je $p_2(\tilde{x}_2) = p_1(\tilde{x}_1) = p_2(h(\tilde{x}_1))$, pa su na sonovu Propozicije 1 podgrupe $p_{2*}(\pi(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$ i $p_{2*}(\pi(\tilde{X}_2, h(\tilde{x}_2)))$ konjugovane u $\pi(X, x_0)$. Slijedi da su podgrupe $p_{1*}(\pi(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1))$ i $p_{2*}(\pi(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$ konjugovane u $\pi(X, x_0)$.

Obrnuto neka su podgrupe $p_{1*}(\pi(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1))$ i $p_{2*}(\pi(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$ konjugovane u $\pi(X, x_0)$. Tada iz Propozicije 1 slijedi da postoji tačka $\tilde{x} \in \tilde{X}_2$ takva da je $p_2(\tilde{x}) = p_2(\tilde{x}_2) = p_1(\tilde{x}_1)$ i

$$p_{1*}(\pi(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = p_{2*}(\pi(\tilde{X}_2, \tilde{x})).$$

Sada na osnovu Teoreme 3 zaključujemo da postoji homeomorfizam $h : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ takav da je $p_2 \circ h = p_1$ i $h(\tilde{x}_1) = \tilde{x}$, odnosno ova dva natkrića su ekvivalentna, što je i trebalo pokazati. $\square$