1 Natkrića - nastavak-3

Navodimo bez dokaza sledeću teoremu koja tvrdi da, pod odredjenim pretpostavkama, za svaku podgrupu H fundamentalne grupe prostora X postoji natkriće $p : \tilde{X} \to X$ takvo da je $\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cong H$.

Napomenimo da se za topološki prostor X kaže da je lokalno linearno povezan ako za svaku tačku $x \in X$ i za svaki otvoren skup V takav da $x \in V$ postoji linearno povezan skup U takav da $x \in U \subset V$. Za topološki prostor se kaže da je semi-lokalno prosto povezan ako svaka taška $x \in X$ ima okolinu U takvu da je svaka petlja u U homotopna po X konstantnoj petlji. Dakle, svaka petlja iz U može se u X deformisati u konstantnu petlju. Ovo ne znači da se svaka petlja iz U može u samom U deformisati u konstantnu petlju to jest U ne mora da bude prosto povezan.

Theorem 1. *Neka je X linearno povezan, lokalno linearno povezan i semi-lokalno prosto povezan topološki prostor. Tada za svaku podgrupu $H \leq \pi(X, x_0)$ postoji natkriće $p : \tilde{X}_H \to X$ takvo da je $p_*(\pi(\tilde{X}_H.\tilde{x}_0)) = H$ za neku tačku $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}_H$.*

Imamo očiglednu posljedicu:

Corollary 1. *Ako je X linearno povezan, lokalno linearno pvezan i semi-lokalno prosto povezan topološki prostor. tada postoji natkriće $p : \tilde{X} \to X$ takvo da je prostor $\tilde{X}$ prosto povezan to jest $\pi(\tilde{X}, \tilde{x}) = 1$.*

Iz teoreme o klasifikaciji natkrića direktno slijedi sledeće:

Corollary 2. *Neka su $p_0 : \tilde{X}_0 \to X$ i $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$ natkrića takva da su prostori $\tilde{X}_0$ i $\tilde{X}_1$ prosto povezani. Tada su prostori $\tilde{X}_0$ i $\tilde{X}_1$ homeomorfni.*

Zato se natkrića kod kojih je prostor natkrića prosto povezan posebno izdvajaju.

Definition 1. *Za natkriće $p : \tilde{X} \to X$ gdje je prostor $\tilde{X}$ prosto povezan se kaže da je univerzalno natkriće prostora X.*

2 Zadaci

1. Neka je X linearno povezan, lokalno linearno pvezan i semi-lolkalno prosto povezan topološki prostor i neka su H_0 i H_1 podgrupe $\pi(X, x_0)$ za neko

fiksirano $x_0 \in X$ takve da je H_0 podgrupa od H_1. Neka je $p_i : X_{H_i} \to X$, $i = 0, 1$ natkrića koja odgovaraju podgrupama H_i, $i = 0, 1$. Dokazati da postoji natkriće $f : X_{H_0} \to X_{H_1}$ takvo da je $p_1 \circ f = p_0$.

Rješenje. Neka $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ tako da je $p_0(\tilde{x}_0) = p_1(\tilde{x}_1) = x_0$. Po uslovu zadatka imamo da je $p_{i*}(\pi(\tilde{X}_{H_i}, \tilde{x}_i)) = H_i$, $i = 0, 1$. Kako je $H_0 \leq H_1$ na osnovu Teoreme 2 sa prošlog predavanja postoji neprekidno preslikavanje $f : \tilde{X}_{H_0} \to \tilde{X}_{H_1}$ takvo da je $p_1 \circ f = p_0$. Treba dokazati da je ovo preslikavanje natkriće.

Neka $\tilde{x} \in \tilde{X}_{H_1}$ i $x = p_1(\tilde{x})$. Neka je U okolina tačke $x \in X$ koja zadovaoljava uslove oba natkrića p_0 i p_1 odnosno $p_0^{-1}(U) = \cup_{j \in J} V_J$ and $p_1^{-1}(U) = \cup_{l \in L} W_l$, gdje je $V_{j_1} \cap V_{j_2} = \emptyset$, $W_{l_1} \cap W_{l_2} = \emptyset$ i $p_{0|V_j} : V_j \to U$, $p_{0|W_l} : W_l \to U$ su homeomorfizmi. Neka je $C(\tilde{x}) = \{V_j : V_j \cap f^{-1}(\tilde{x}) \neq \emptyset\}$. Kako je $p_1 \circ f = p_0$ to slijedi da je $p_1(f(V_j)) = p_0(V_j) = U$, zato je $f(V_j) \subset p_1^{-1}(U)$. Kako je V_j povezan to slijedi da je $f(V_1)$ povezan što implicira da je $f(V_j) = W_l$ za neko $l \in L$. S obzirom da su $p_0 : V_j \to U$ i $p_j : W_l \to U$ homeomorfizmi slijedi da je $f : V_j \to W_l$ homeomorfizam.

Posmatramo okolinu W_{l_0} tako da $\tilde{x} \in W_{l_0}$. Važi sledeće: ako $V_j \in \mathbb{C}(\tilde{x})$ to $\tilde{x} \in f(V_j)$, pa je $f(V_j) \cap W_{l_0} \neq \emptyset$. Iz prethodnog zaključujemo da je $f(V_j) = W_{l_0}$. Slijedi da je

$$\bigcup_{V_j \in C(\tilde{x})} V_j \subset f^{-1}(W_{l_0}).$$

Dalje, ako $y \in f^{-1}(W_{l_0})$ to je $p_1(f(y)) = p_0(y) \in U$, pa $y \in V_j$ za neko $j \in J$. Tada je $p_1(f(V_j)) = p_0(V_j) = U$ pa dobijamo homeomorfizam $f : V_j \to W_{l_0}$. Slijedi da je $V_j \cap f^{-1}(\tilde{x}) \neq \emptyset$, odnosno $V_j \in C(\tilde{x})$. Dakle

$$f^{-1}(W_{l_0}) = \bigcup_{V_j \in C(\tilde{x})} V_j.$$

Ovi skupovi V_j su dusjunktni i $f : V_j \to W_{l_0}$ su homeomorfizmi, pa dobijamo da smo za proizvoljnu tačku $\tilde{x} \in \tilde{X}_{H_1}$ našli okolinu W_{l_0} koja zadovoljava uslove natkrića za preslikavanje f to jest preslikavanje $f : \tilde{X}_{H_0} \to \tilde{X}_{H_1}$ je natkriće.

2. Odrediti, do na ekvivalentnost, sva natkrića kružnice S^1.

   Rješenje. Neka je $x_0 = (1, 0) \in S^1$. Na osnovu teoreme o klasifikaciji natkrića klase ekvivalentnih natkrića su u bijekciji sa klasama konjugovanih podgrupa fundamentalne grupe $\pi(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$. Kako je grupa $\mathbb{Z}$

Abelova, to su dvije podgrupe u $\pi(S^1, x_0)$ konjugovane ako i samo ako se poklapaju. Kako je $\mathbb{Z}$ ciklična grupe njene podgrupe su takodje ciklične, donosno oblika $k\mathbb{Z}$ za neko $k \geq 0$. Podgrupi $k\mathbb{Z}$, $k > 0$ odgovara natkriće $p_k : S^1 \to S^1$, $p(z) = z^k$. Ovo je jasno jer je p_k natkriće sa k listova, pa je indeks podgrupe $p_*(\pi(S^1))$ u $\pi(S^1)$ jednak k, što znači da je $p_*(\pi(S^1)) = k\mathbb{Z}$. Ako je $k = 0$, radi se o natkriću čija je fundamentalna grupa trivijalna, odnosno o univerzalnom natkriću. Jasno je da je $e : \mathbb{R} \to S^1$, $e(t) = e^{2\pi i t}$ takvo natkriće. Dakle do na ekvivalentnosti sva natkrića kružnice su e i p_k, $k > 0$.

3. Odrediti klase ekvivalentnih 2-listnih natkrića torusa $T^2 = S^1 \times S^1$.

   Rješenje. Na osnovu teoreme o klasifikaciji natkrića klase ekvivalentnih natkrića su u bijekciji sa klasama konjugovanih podgrupa fundamentalne grupe $\pi(T^2) = \pi(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ čiji je indeks 2. Očigledno da su $2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ dvije podgrupe u $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ indeksa 2. NJima odgovaraju natkrića $p : S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1$, $p(z_1, z_2) = (z_1^2, z_2)$ i $q : S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1$, $q(z_1, z_2) = (z_1, z_2^2)$.

   Ostalo je da opišemo sve podgrupe u $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ indeksa 2.

   Neka je $H < \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ podgrupa indeksa 2. Tada je $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/H \cong \mathbb{Z}_2$, pa postoji epimorfizam $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ čije je jezgro podgrupa H. Grupa $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ima dva genaratora i to su $(1, 0)$ i $(0, 1)$. Ako je $h(1, 0) = 1$, $h(0, 1) = 0$ onda je $H = 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, a ako je $h(1, 0) = 0$, $h(0, 1) = 1$ onda je $H = \mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$, što smo već analizirali. Ostaje slučaj kada je $h(1, 0) = h(0, 1) = 1$ i tada je $H = \{(m, n) \in \mathbb{Z} | m + n \text{ je paran broj}\}$. Zaključujemo da postoji još jedno natkriće koje odgovara ovoj podgrupi H. Dakle, ukupno postoje tri natkrića.

4. Odrediti klase ekvivalentnih natkrića realnog projektivnog prostora $\mathbb{R}P^n$, $n \geq 2$.

   Rješenje. U prethodnoj lekciji smo odredili $\pi(\mathbb{R}P^n, x_0) \cong \mathbb{Z}_2$. Klase ekvivalentnih natkrića su u bijekciji sa klasama konjugovanih podgrupa grupe $\pi(\mathbb{R}P^n, x_0) \cong \mathbb{Z}_2$. Jedine podgrupe grupe $\mathbb{Z}_2$ su $\mathbb{Z}_2$ i trivijalna podgrupa. Ovim podgrupama odgovaraju natkrića $i_d : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^n$ i $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ i to su sva natkrića nad $\mathbb{R}P^n$. Obratite pažnju, kako je sfera S^n prosto povezana slijedi da je natkriće p univerzalno natkriće.

5. Pokazati da je svako neprekidno preslikavanje $f : \mathbb{R}P^2 \to S^1$ homotopno konstntnom preslikavanju.

Rješenje. Neka je $f : \mathbb{R}P^n \to S^1$ neprekidno preslikavanje. Ono indukuje homomorfizam $f_* : \pi(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2 \to \pi(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Kako grupa $\mathbb{Z}$ nema elemenata konačnog poretka, slijedi da je f_* trivijalni homomorfizam. Ako posmatramo univerzalno natkriće $e : \mathbb{R} \to S^1$, to iz Teoreme 1 sa prethodne lekcije, slijedi da postoji neprekidno preslikavanje $\tilde{f} : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}$ takvo da je $e \circ \tilde{f} = f$. Prostor $\mathbb{R}$ je kontraktibilan, odnosno može da se deformiše u tačku. To znači da je preslikavanje $\tilde{f} : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}$ homotopno konstantnom preslikavanju preko neke homotopije F. Tada će $p \circ F$ da bude homotopija izmedju f i konstantnog preslikavanja.