1 Više homotopske grupe

Fundamentalna grupa $\pi(X, x_0)$ topološkog prostora X u tački x_0 je definisana kao skup klasa ekvivalencije svih petlji u X u tački x_0, gdje je relacija ekvivalencije relacija homotopnosti u odnosu na skup $\{0, 1\}$. Petlja u tački x_0 je neprekidno preslikavanje $f : [0, 1] \to X$ takvo da je $f(0) = f(1) = x_0$, odnosno preslikavanje f ne razlikuje tačke 0 i 1. To znači da f možemo posmatrati kao neprekidno preslikavanje iz količničkog prostora $[0, 1]/\{0, 1\}$ u X. Kako je količnički prostor $[0, 1]/\{0, 1\}$ homeomorfan kružnici S^1, to znači da dobijamo preslikavanje $f : S^1 \to X$, $f(1, 0) = x_0$.

Ovaj postupak se može uopštiti na sfere veće dimenzije. Neka $s_0 \in S^n$ i posmatramo skup $C(S^n, s_0; X, x_0)$ svih neprekidnih preslikavanja $f : S^n \to X$, $f(s_0) = x_0$. Za ovakva preslikavanja se kaže da su sferoidi u tački x_0. Na ovom skupu uvodimo relaciju homotopnosti: $f \approx g$ ako i samo ako postoji neprekidno preslikavanje $F : S^n \times I \to X$ takvo da je $F(s, 0) = f(s)$, $F(s, 1) = g(s)$ i $F(s_0, t) = x_0$ za sve $t \in [0, 1]$. Direktno se provjerava da je $\approx$ relacija ekvivalencije na skupu $C(S^n, s_0; X, x_0)$. Neka je

$$\pi_n(X, x_0) = C(S^n, s_0; X, x_0)/ \approx,$$

količnički skup. Pokazaćemo da se na skupu $\pi_n(X, x_0)$ može definisati množenje koje će ovom skupu da daje strukturu grupe. U tu svrhu nam je potreban sledeći topološki rezultat.

1.1 $D^n/S^{n-1} \cong S^n$

Navodimo bez dokaza dvije teoreme klasične topologije.

Theorem 1. *Neka je X kompaktan Hausdorfov prostor i $p \in X$. Ako je prostor Y homeomorfan prostoru $X \setminus \{p\}$ onda je X homeomorfan jednotačkatoj kompaktifikaciji prostora Y.*

Theorem 2. *Neka je X kompaktan Hausdorfov prostor i $A \subset X$ zatvoren podskup. Tada je količnički prostor X/A takodje kompaktan Hausdorfov prostor.*

Navedene teoreme koristimo za dokaz nama potrebnog rezultata.

Corollary 1. *Količnički prostor D^n/S^{n-1} je homemorfan sferi S^n, $n \geq 1$.*

Proof. Neka je $X = D^n$ i $A = S^{n-1}$, tada je X kompaktan Hausdorfov prostor čiji je A zatvoren podskup. Na osnovu Teoreme 2 slijedi da je količnički prostor $Z = D^n/S^{n-1}$ kompaktan Hausdorfov topološki prostor. Neka je $z_0 \in Z$ tačka koja odgovara sferi S^{n-1}. Tada je $Z \setminus \{z_0\}$ unutrašnjost diska D^n, odnosno $Z \setminus \{z_0\}$ je homeomorfno sa $\mathbb{R}^n$, recimo preko homemorfizma $Z \setminus \{z_0\} \to \mathbb{R}^n$, $z \to \frac{1}{\|z\|+1}$. Na osnovu Teoreme 1 slijedi da je Z homeomorfno jednotačkastoj kompaktifikaciji za $\mathbb{R}^n$ a to je sfera S^n. Ovim je tvrdjenje dokazano. $\square$

Uočimo sledeću važnu posljedicu.

Corollary 2. *Svako neprekidno preslikavanje $f : D^n \to X$ za koje važi da je $f(S^{n-1}) = x_0$ za neko $x_0 \in X$, indukuje neprekidno preslikavanje $\bar{f} : S^n \to X$. Ovo presliikavanje tačku $s_0 \in S^n = D^n/S^{n-1}$ koja odgovara sferi S^{n-1} slika u tačku x_0.*

Proof. Neka je $h : S^n \to D^n/S^{n-1}$ homeomorfizam dat Poslljedicom 1. Posmatramo presliakvanje $\bar{f} : S^n \to X$ dato sa $\bar{f} = f \circ h$. Preslikavanje $\bar{f}$ je neprekidno i $f(s_0) = x_0$. $\square$

Neka $f, g : S^n \to X$ i $f(s_0) = x_0$. Hoćemo da definišemo množenje to jest sferoid $h = f * g : S^n \to X$, $h(s_0) = x_0$. Sa tim ciljem podijelimo sferu $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\}$ na dvije polusfere

$$S^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n | x_{n+1} \geq 0\}, \quad S^n_- = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n | x_{n+1} \leq 0\}$$

Tada je presjek ove dvije polusfere ekvator sfere S^n odnosno

$$S^n_+ \cap S^n_+ = S^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}.$$

Primijetimo da je svaka od polusfera S^n_+ i S^n_- homeomorfna diskovima D^n_+ i D^n_-. Ova dva diska imaju zajedničku granicu, a to je je zajednički ekvator S^{n-1} za ove dvije polusfere. Posmatrajmo sfere $S^n_1 = D^n_+/S^{n-1}$ i $S^n_2 = D^n_-/S^{n-1}$. One imamu jednu zajedničku tačku s_0 koja odgovara sferi S^{n-1}. Sferoide f i g posmatramo kao preslikavanja $f : S^n_1 \to X$ i $g : S^n_2 \to X$.

Preslikavanje $h = f * g : S^n \to X$ konstruišemo na sledeći način. Neka $s \in S^n$. Razlikujemo tri slučaja:

1. ako $s \in S^n_+$ i $s \notin S^n_-$, tački s po gornjem postupku pridružujemo tačku $s_1 \in S^n_1$ i definišemo $h(s) = f(s_1)$;

2. ako $s \in S^n_-$ i $s \notin S^n_+$, tački s po gornjem postupku pridružujemo tačku $s_2 \in S^n_2$ i definišemo $h(s) = g(s_2)$;

3. ako $s \in S^n_+ \cap S^n_-$, tački s po gornjem postupku pridružujemo tačku $s_0 \in S^n_1 \cap S^n_2$ i definišemo $h(s) = f(s_0) = g(s_0) = x_0$.

Direktno se vidi da je dobijeno preslikavanje h neprekidno. Važi sledeće:

Lemma 1. *Ako su sferoidi f i f_1 homotopni i sferoidi g i g_1 su homotopni, tada su homotopni i sferoidi $h = f * g$ i $h_1 = f_1 * g_1$.*

Slijedi da množenje sferoida indukuje množenje u $\pi_n(X, x_0)$ sa

$$[f] \cdot [g] = [f * g].$$

Theorem 3. *Skup $\pi_n(X, x_0)$ sa ovako definisanim množenjem ima strukturu grupe.*

Definition 1. *Grupa $\pi_n(X, x_0)$ se naziva n-tom homotopskom grupom prostora X.*

Grupa $\pi_n(X, x_0)$ se može definisati na još jedan ekvivalentan način i u tom slučaju je definicija množenja kao i dokaz Teoreme 3 jednostavniji. Neka je I^n - n-dimenzioni kub to jest $I^n = [0,1] \times \ldots [0,1]$, proizvod n kopija intervala $[0,1]$. Granica kuba I^n je

$$\partial I^n = \{(t_1, \ldots, t_n) \in I^n : \text{ bar jedna koordinata } t_i = 0 \text{ ili } 1\}.$$

Kako je jasno disk I^n homeomorfan sa D^n i granica ∂I^n homeomorfna sa S^{n-1} to je

$$I^n / \partial I^n \cong S^n.$$

Koristeći Posljedicu 2 ovo znači da se svako neprekidno preslikavanje $f : I^n \to X$ za koje je $f(\partial I^n) = x_0$ može posmatrati kao preslikavanje $f : S^n \to X$ za koje je $f(s_0) = x_0$, gdje je s_0 tačka koja odgovara granici ∂I^n. Dakle $\pi_n(X, x_0)$ se može definisati kao skup klasa neprekidnih preslikavanja $f : I^n \to X$, $f(\partial I^n) = x_0$ u odnosu na relaciju homotopnosti: $f \approx g$ ako i samo ako postoji homotopija $H : I^n \times I \to X$ takva da je

$$H(z, 0) = f(z),\ H(z, 1) = g(z),\ H(z, t) = x_0,\ \text{za sve } z \in \partial I^n,\ t \in I.$$

Neka $f, g : I^n \to X$, $f(\partial I^n) = x_0$. Definisano je množenje $h = f * g : I^n \to X$ sa

$$h(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n), & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n), & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases} \tag{1}$$

U slučaju $n = 1$ imamo da je $I^1 = [0, 1]$, $\partial I^1 = \{0, 1\}$ i preslikavanje $f : I^1 \to X$ za koje je $f(\partial I^1) = x_0$ je petlja u x_0. Primijetimo da je u ovom slučaju formulom (1) dato mnozenje petlji kako je ranije definisano. Na isti način kao kod fundamentalne grupe se dokazuju Lema 1 i Teorema 3 u slučaju kada je množenje definisano preko kubova. Jasno je da se grupa $\pi_1(X, x_0)$ poklapa sa fundamentalnom grupom prostora X u tački x_0.

Na analogan način kao u slučaju fundamentalne grupe se dokazuju i sledeća tvrdjenja.

Proposition 1. *1) Ako postoji put u X koji spaja tačke $x_0, x_1 \in X$ tada su grupe $\pi_n(X, x_0)$ i $\pi_n(X, x_1)$ izomorfne za svako $n \geq 1$.*

2) Ako je $\phi : X \to Y$ homotopska ekvivalencija ovih prostora tada je preslikavanje $\phi_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, \phi(x_0))$ izomorfizam, gdje je $\phi([f]) = [\phi \circ f]$ za svako $n \geq 1$

3) $\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0)$ za svako $n \geq 1$.

Bez dokaza navodimo i sledeće svojstvo viših homotopskih grupa.

Theorem 4. *Homotopske grupe $\pi_n(X, x_0)$ su Abelove za $n \geq 2$.*

Ovo tvrdjenje ne važi za $n = 1$ odnosno za fundamentalnu grupu, kao što će nam kasniji primjeri pokazati.

Remark 1. Napomenimo da za $n = 0$ može takodje da se posmatra skup $\pi_0(X, x_0)$, ali se na njemu ne može definisati množenje. Naime, za $n = 0$ imamo da je $S^0 = \{-1, 1\}$ i ako je $s_0 = 1$, tada je neprekidno preslikavanje $f : S^0 \to X$ odredjeno tačkom $x \in X$ takvom da je $f(-1) = x$. U ovom slučaju preslikavanja $f, g : S^0 \to X$ su homotopna ako postoji $H : S^0 \times I \to X$, $H(s, 0) = f(s)$, $H(s, 1) = g(s)$ i $H(1, t) = x_0$ za svako $t \in I$. Slijedi da je preslikavanje $t \to H(-1, t)$ put u X i $H(-1, 0) = f(-1) = x$, $H(-1, 1) = g(-1) = y$. Dakle, f i g su homotopni ako i samo ako se tačke $x = f(-1)$ i $y = g(-1)$ mogu spojiti putem u X. Na taj način dobijamo da su elementi skupa $\pi_0(X, x_0)$ u bijekciji sa komponentama linerane povezanosti prostora X, odnosno broj elemenata skupa $\pi_0(X, x_0)$ jednak je broju komponenti linearne povezanosti prostora X.

Example 1. *Pokazaćemo da je* $\pi_n(S^n, 1) = 0$ *za* $n \geq 2$*. Podsjetimo se da postoji natkriće* $e : \mathbb{R} \to S^1$ *i da se svako neprekidno preslikavanje* $f : S^n \to S^1$ *za* $n \geq 2$ *može podići do neprekidnog preslikavanja* $\tilde{f} : S^n \to \mathbb{R}$*. Ovo slijedi iz ranije formulisanog kriterijuma o postojanju podizanja i činjenice da je sfera* S^n *prosto povezana za* $n \geq 2$*. Kako je prostor* $\mathbb{R}$ *kotraktibilan slijedi da je preslikavanje* $\tilde{f}$ *homotopno konstantnom preslikavanju* ε_0*. Tada je* $f = e \circ \tilde{f}$ *homotopno konstantnom preslikavanju* $\varepsilon_1 = e \circ \varepsilon_0$*. Odavde slijedi da je* $\pi_n(S^1, 1) = 0$ *za* $n \geq 2$*.*

Isti argument se može direktno primijeniti da se dokaže:

Example 2. *Ako je univerzalno natkirće* $\tilde{X}$ *prostora* X *kontraktibilan prostor, tada je* $\pi_n(X, x_0) = 0$ *za* $n \geq 2$*.*