1 Relativne homotopske grupe

U ovoj lekciji se uvodi pojam relativne homotopske grupe za par prostora. Pokazuje se da se takvom paru može pridružiti dugi tačan homotopski niz koji povezuje absolutne i relativne homotopske grupe i koji ima široku primjenu u računanju homotopskih grupa.

Neka je dat topološki prostor X, tačka $x_0 \in X$ i potprostor $A \subset X$ takav da $x_0 \in A$. U ovom slučaju imamo inkluziju $i : (A, x_0) \to (X, x_0)$. Ova inkluzija indukuje homomorfizam homotopskih grupa

$$i_* : \pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0), \quad n \geq 1$$

i ovaj homomorfizam u opštem slučaju nije injektivan.

Neka homotopska klasa $[\alpha] \in \pi_n(A.x_0)$ pripada jezgru homomorfizma i_*. To znači da je sferoid $\alpha : S^n \to A$, $\alpha(s_0) = x_0$ homotopan konstantnom sferoidu. Iz prethodne lekcije znamo da ovaj sferoid možemo posmatrati kao preslikavanje $\alpha : I^n \to A$ gdje je $\alpha(\partial I^n) = x_0$, pa postoji neprekidno preslikavanje

$$H : I^n \times I \to X$$

takvo da je

$$H(x, 0) = \alpha(x) \in A, \quad H(x, 1) = \varepsilon_{x_0}(x) = x_0, \quad H(\partial I^n, t) = x_0 - \text{ ne zavisi od } t. \tag{1}$$

Uočimo da je $I^n \times I = I^{n+1}$, pa je $\partial I^{n+1} = (\partial I^n \times I) \cup (I^n \times \partial I)$. Iz (1) slijedi da je $H(\partial I^{n+1}) \subset A$. Neka je podskup $J^n \subset I^{n+1}$ dat sa

$$J^n = (I^n \times \{1\}) \cup (\partial I^n \times I).$$

Iz (1) slijedi da je $H(J^n) = x_0$. Primijetimo da se J^n može zapisati kao $\partial I^{n+1} \setminus \overset{\circ}{I^n}$, odnosno dobija se tako što se iz granice ∂I^{n+1}, što predstavlja granicu kocke, ukloni unutrašnjost "donje" n-dimenzione strane. Iz ovog zapažanja slijedi da je skup J^n kontraktibilan.

Slijedi da homotopiju H možemo posmatrati kao preslikavanje

$$H : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \to (X, A, x_0), \quad H(\partial I^{n+1}) \subset A, \quad H(J^n) = x_0.$$

Kako je I^{n+1} homeomorfno disku D^{n+1} , dok je ∂I^{n+1} je homeomorfno sferi S^n, a J^n homotoski ekvivalentno tački, preslikavanje H se sa stanovišta teorije homotopije može posmatrati i kao preslikavanje

$$H : (D^{n+1}, S^n, s_0) \to (X, A, x_0), \quad H(S^n) \subset A, \quad H(s_0) = x_0.$$

Ovo je motivacija za uvodjenje sledećih pojmova. Za neprekidno preslikavanje $f : (D^{n+1}, S^n, s_0) \to (X, A, x_0)$, odnosno $f : D^{n+1} \to X$ tako da je $f(S^n) \subset A$ i $f(s_0) = x_0$ se kaže da je relativni sferoid trojke (X, A, x_0). Za dva relativna sferoida $f, g : (D^{n+1}, S^n, s_0) \to (X, A, x_0)$ se kaže da su homotopna ako postoji neprekidno preslikavanje $H : D^{n+1} \times I \to X$ takvo da je

$$H(x, 0) = f(x),\ H(x, 1) = g(x),\ H(S^n, t) \subset A,\ H(s_0, t) = x_0, \text{ za svako } t \in I.$$

Za preslikavanje H se kaže da je homotopija relativnih sferoida ili homotopija trojki. Na skupu svih relativnih sferoida $C((D^{n+1}, S^n, s_0); (X, A, x_0))$ se definiše relacija homotopnosti: dva relativna sferoida su u relaciji ako i samo ako su homotopna. Direktno se pokazuje:

Lemma 1. *Relacija homotopnosti na skupu* $C((D^{n+1}, S^n, s_0); (X, A, x_0))$ *je relacija ekvivalencije.*

Klasa ekvivalencije ove relacije homotopnosti označava se sa

$$\pi_{n+1}(X, A, x_0), \quad n \geq 0.$$

Na skupu $\pi_{n+1}(X, A, x_0)$ za $n \geq 1$ se može definisati množenje na sličan način kao što je to uradjeno kod viših homotopskih grupa. Naime, ako su $f, g : (D^{n+1}, S^n, s_0) = (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \to (X, A, x_0)$ relativni sferoidi, njihovo množenje $h = f * g$ se definiše "uobičajenom" formulom:

$$h(t_1, \ldots, t_{n+1}) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}), & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_{n+1}), & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases} \tag{2}$$

Direktno se vidi da je h relativni sferoid, a takodje i da se ovo množenje prenosi na homotopske klase u $\pi_{n+1}(X, A, x_0)$, $n \geq 1$ odnosno $[f] \cdot [g] = [f * g]$. Skup $\pi_n(X, A, x_0)$ u odnosu na ovako definisano množenje ima strukturu grupe, u kojoj je jedinični element homotopska klasa konstantnog preslikavanja.

Definition 1. *Neka je* $x_0 \in A \subset X$. *Grupa*

$$\pi_{n+1}(X, A, x_0), \quad n \geq 1,$$

naziva se $(n + 1)$*-tom relativnom homotoskom grupom trojke* (X, A, x_0).

Remark 1. Primijetimo da se formulom (2) ne može na skupu $\pi_1(X, A, x_0)$ definisati množenje. U ovom slučaju je $(I^1, \partial I^1, J^0)$ je dato sa $([0,1], \{0,1\}, 1)$ i formula (2) se svodi na

$$h(t_1) = \begin{cases} f(2t_1), & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1), & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

Imamo da $h : [0,1] \to X$, zatim $h(0) = f(0) \in A$, $h(1) = g(1) \in A$ to jest $h(\{0,1\}) \subset A$, ali ne možemo da tvrdimo da je u opštem slučaju $h(J^0 = `1) = x_0$. Naime, $h(1) = g(1) = a \in A$ i to može da bude bilo koji element. Dakl,e ako A ima elemenata koji su različiti od x_0, ne mora da bude $h(J^0) = x_0$, odnosno h nije relativni sferoid trojke (X, A, x_0).

Remark 2. Napomenimo da se množenje na $\pi_{n+1}(X, A, x_0)$ može definisati nadovezivanjem preko i-te koordinate gdje je $1 \leq i \leq n$ i $n \geq 2$, odnosno

$$h(t_1, \ldots, t_{n+1}) = \begin{cases} f(t_1, \ldots, 2t_i, \ldots, t_{n+1}), & 0 \leq t_i \leq \frac{1}{2} \\ g(t_1, \ldots, 2t_i - 1, \ldots, t_{n+1}), & \frac{1}{2} \leq t_i \leq 1 \end{cases}$$

Argument koji pokazuje da se na $\pi_1(X, A, x_0)$ ne može definisati množenje, takodje pokazuje i da se množenje u $\pi_{n+1}(X, A, x_0)$ ne može definisati preko $(n+1)$-ve koordinate.

Množenje relativnih sferoida dato formulom (2) se može geometrijski lako prikazati. Naime, ako $f, g : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \to (X, A, x_0)$, to zalijepimo dva kuba I^{n+1} po strani I^n koja nije odstranjena pri formiranju J^n i to tako da su odstranjene strane iz ova dva kuba susjedne odnosno imaju zajedničku granicu I^{n-1}. Dobijamo novi kub I^{n+1} (u topološkom smislu) i za njega formiramo J^n tako što odstranimo onu stranu I^n koja je formirana od odstranjenih strana iz prethodna dva kuba.

Preslikavanje $h : I^{n+1} \to X$ definišemo tako da se poklapa sa f na gornjem polukubu za I^{n+1} i da se poklapa sa g na donjem polukubu za I^{n+1}. Preslikavanje h je dobro definisano jer zajednička strana ova dva polukuba pripada J^n (odnosno nije odstranjena) u prvobitnim kubovima od kojih je novi kub I^{n+1} sačinjen. Na taj način i f i g ovu stranu slikaju u x_0. Jasno da $f(\partial I^{n+1}) \subset A$ i takodje direktno iz konstruksije slijedi da $h(J^n) = x_0$. Dakle, h je relativni sferoid.

Znači relativni sferoidi trojke (X, A, x_0) se mogu posmatrati kao preslikavanja $(D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$ ili kao preslikavanja $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ i oba ova pristupa se koriste ravnopravno u zavisnostui od konteksta.

1.1 Dugi tačan homotopski niz para (X, A)

U prvom dijelu ove lekcije smo naglasili da homomorfizamo koji inkluzija $i : (A, x_0) \to (X, x_0)$ indukuje u homotopskim grupama nije u opštem slučaju injektivan. Relativne homotopske grupe su upravo uvedene sa motivacijom da mjere odstupanje ovog homomorfizma od monomorfizma.

Neka je data trojka (X, A, x_0). Tada se prirodno nameću tri homomorfizma i_*, j_* i ∂_* izmedju odgovarajući homotopskih grupa.

1. $i_* : \pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0)$ je indukovan inkluzijom $i : A \to X$.

2. Neka $[f] \in \pi_n(X, x_0)$, tada $f : S^n \to X$, $f(s_0) = x_0$. Kako je $S^n \cong D^n/S^{n-1}$ sferoid f se može posmatrati kao preslikavanje $\bar{f} : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, x_0, x_0) \subset (X, A, x_0)$, što je relativni sferoid trojke (X, A, x_0). Dakle, dobijamo preslikavanje $j_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0)$, $j_*([f]) = [\bar{f}]$. Direktno se provjerava da je preslikavanje j_* homomorfizam.

3. Neka $[f] \in \pi_n(X, A, x_0)$, tada $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$ pa restrikcijom na S^{n-1} indukuje preslikavanje $\tilde{f} : (S^{n-1}, s_0) \to (A, x_0)$. Na ovaj način dobijamo preslikavanje $\partial_* : \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0)$ za koje se direktno provjerava da je homomorfizam.

Na ovaj način dobijamo sledeći niz grupa i homomorfizami:

$$\ldots \xrightarrow{\partial_*} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1}(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \ldots \tag{3}$$

$$\xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial_*} \pi(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X, x_0).$$

Primijetimo da u ovom nizu poslednja tri člana $\pi_1(X, A, x_0)$, $\pi_0(A, x_0)$ i $\pi_0(X, x_0)$ nijesu grupe, već samo skupovi. U ovim skupovima imamo uočenu klasu koja odgovara elelmentu x_0.

Radi dalje analize ovog niza uvešćemo neke algebarske pojmove. Neka su $f : G_1 \to G_2$ i $g : G_2 \to G_3$ homomorfizmi grupa. Za niz

$$G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_3$$

se kaže da je tačan u G_2 ako je $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ (ovo su podgrupe u G_2). Tačnost implicira da je $g \circ f : G_1 \to G_3$ trivijalno preslikavanje ali i da za svaki element $x_2 \in G_2$ za koji je $g(x_2) = e$ postoji $x_1 \in G_1$ tako da je $f(x_1) = x_2$.

Važi uopšteno, za niz grupa i homomorfizama

$$G_1 \to G_2 \to \ldots \to G_{n-1} \to G_n$$

se kaže da je tačan ako je tačan u svakom članu G_i, $2 \leq i \leq n-1$.

Example 1.

1. *Homomorfizam $f : G \to H$ je injektivan ako i samo ako je niz $1 \xrightarrow{1} G \xrightarrow{f} H$ tačan. Ovo jasno slijedi iz činjenice da je niz tačan ako i samo ako je $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Im}(1) = 1$, odnosno ako i samo ako je f injektivan.*

2. *Homomorfizam $f : G \to H$ je surjektivan ako i samo ako je niz $G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{e} 1$ tačan. Ovo slijedi iz činjenice da je niz tačan ako i samo ako je $\operatorname{Im}(f) = H = \operatorname{Ker}(e)$, odnosno ako i samo ako je f surjektivan.*

3. *Homomorfizam $f : G \to H$ je izomorfizam ako i samo ako je niz $1 \xrightarrow{1} G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{e} 1$ tačan. Ovo direktno slijedi iz prva dva slučaja.*

4. *Grupa G je trivijalna ako i samo ako je niz $1 \xrightarrow{1} G \xrightarrow{e} 1$ tačan. Jasno jer je niz tačan ako i samo ako je $1 = \operatorname{Im}(1) = \operatorname{Ker}(e) = G$.*

Example 2. *Pretpostavimo da je dat tačan niz*

$$1 \xrightarrow{1} G_1 \xrightarrow{f_2} G_2 \xrightarrow{f_3} G_3 \xrightarrow{e} 1.$$

Slijedi da je $1 = \operatorname{Im}(1) = \operatorname{Ker}(f_2)$ i da je $\operatorname{Im}(f_3) = \operatorname{Ker}(e) = G_3$. Na osnovu teoreme o homomorfizmu grupa važi $G_1 \cong \operatorname{Im}(f_2)/\operatorname{Ker}(f_2) \cong \operatorname{Im}(f_2)$. Zato je $\operatorname{Ker}(f_3) \cong G_1$. Dalje je $G_2 \cong \operatorname{Im}(f_3)/\operatorname{Ker}(f_3) = G_3/G_1$. Dakle tačnost ovog niza implicira da je

$$G_2 \cong G_3/G_1.$$

U tom smislu ćemo za niz (3) dokazati da važi:

Theorem 1. *Homotopski niz para (X, A)*

$$\ldots \xrightarrow{\partial_*} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1}(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

$$\xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial_*} \pi(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X, x_0).$$

je tačan.

Proof. Grupe ovog niza su $\pi_n(A, x_0)$, $\pi_n(X, x_0)$ i $\pi_n(X, A, x_0)$ i treba da dokažemo tažnost niza u svakoj od ovih grupa, odnosno $\operatorname{Im}\partial_* = \operatorname{Ker} i_*$, $\operatorname{Im} i_* = \operatorname{Ker} j_*$ i $\operatorname{Im} j_* = \operatorname{Ker}\partial_*$.

Tačnost u članu $\pi_n(A, x_0)$.

1. $\operatorname{Im}(\partial_*) \subset \operatorname{Ker}(i_*)$: Neka $[f] \in \operatorname{Im}\partial_*$. Iz definicije homomorfizma ∂_* sliijedi da postoji $[H] \in \pi_{n+1}(X, A, x_0)$, $H : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \to (X, A, x_0)$ i $f = H_{|\partial I^{n+1}}$. Podsjetimo se da je $I^{n+1} = I^n \times I$ i $J^n = \partial I^{n+1} \setminus \overset{\circ}{I^n} \times \{0\}$. Kako je $H(J^n) = x_0$ to preslikavanje $i \circ f$ možemo posmatrati kao preslikavanje $i \circ f : I^n = I^n \times \{0\} \to X$ tako da je $f(\partial I^n) = x_0$. Slijedi da da $H : I^n \times I \to X$ predstavlja homotopiju u X za $i \circ f$ jer je $H(x, 0) = (i \circ f)(x)$. Kako je $I^n \times \{1\} \subset J^n$ to je $H(x, 1) = x_0$. Osim toga takodje važi da je $\partial I^n \times I \subset J^n$, pa je $H(\partial I^n \times I) = x_0$. Dakle H je homotopija u X izmedju $i \circ f$ i konstantnog preslikavanja, pa slijedi da je $i_*[f] = [i \circ f] = 1$ odnosno $[f] \in \operatorname{Ker} i_*$.

2. $\operatorname{Ker}(i_*) \subset \operatorname{Im}(\partial_*)$. Dokaz je analogan uvodnom motivacionom dijelu ove lekcije. Neka $[f] \in \operatorname{Ker}(i_*)$, to znači da je preslikavanje $i \circ f : I^n \to X$, $f(\partial I^n) = x_0$ homotopno konstantnom preslikavanju u X. Neka je $H : I^n \times I \to X$ odgovarajuća homotopija odnosno, $H(x, 0) = (i \circ f)(x)$, $H(x, 1) = x_0$ i $H(\partial I^n \times I) = x_0$. Primijetimo da se H može posmatrati kao preslikavanje $H : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \to (X, x_0, x_0) \subset (X, A, x_0)$, odnosno kao relativni sferoid. Zato $[H] \in \pi_{n+1}(X, A, x_0)$ i pri tome važi $\partial_*([H]) = [H_{|\partial I^{n+1}}] = [f] \in \pi_n(A, x_0)$. Slijedi da $[f] \in \operatorname{Im}(\partial_*)$.

Tačnost u članu $\pi_n(X, x_0)$.

1. $\operatorname{Im}(i_*) \subset \operatorname{Ker}(j_*)$. Neka $[f] \in \operatorname{Im}(i_*)$, tada je $f = i \circ \bar{f}$ za $\bar{f} : S^n \to A$, $\bar{f}(s_0) = x_0$. Dalje, na osnovu definicije homomorfizam j_* koristeći da je $S^n \cong D^n/S^{n-1}$. klasa $j_*([f]) \in \pi_n(X, A, x_0)$ je data sferoidom trojki $\tilde{f} : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (A, x_0, x_0) \subset (X, A, x_0)$. Dokazaćemo da je svaki sferoid trojki $\tilde{f}$ takav da je $\tilde{f}(D^n) \subset A$ homotopan konstantnom sferoidu. Naime, neka je $h_t : D^n \to D^n$ dato sa $h_t(x) = tx + (1 - t)s_0$, gdje je $0 \leq t \leq 1$ i neka je $H : D^n \times I \to A \subset X$ dato sa $H(x) = \tilde{f}(h_t(x))$. Tada je $H(x, 0) = \tilde{f}(s_0) = x_0$ i $H(x, 1) = \tilde{f}(x)$. Pri tome je $H(S^{n-1} \times I) \subset A$ i $H(s_0, t) = \tilde{f}(s_0) = x_0$. Dakle H je homotopija trojki izmedju konstantnog preslikavanja x_0 i sferoida $\tilde{f}$. Slijedi da je $[\tilde{f}] = 1 \in \pi_n(X, A, x_0)$ to jest $[f] \in \operatorname{Ker}(j_*)$.

2. $\operatorname{Ker}(j_*) \subset \operatorname{Im}(i_*)$. Neka $[f] \in \operatorname{Ker}(j_*)$, tada je $f : D^n \to X$, $f(S^{n-1}) = x_0$ i ako se f posmatra kao preslikavanje trojki $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$ ono je homotopno konstantnom preslikavanju. Iz dokaza prethodnog dijela slijedi da je

tada f homotopno preslikavanju $g : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (A, x_0, x_0)$. Relativni sferoid g zadaje preslikavanje $\bar{g} : S^n \cong D^n/S^{n-1} \to A$, $\bar{g}(s_0) = x_0$. Zaključujemo da je f homotopno sa preslikavanjem $\bar{g}$. Zato je $[f] = [\bar{g}] \in \pi_n(A, x_0)$, pa je $[f] \in \mathrm{Im}(i_*)$.

Tačnost u članu $\pi_n(X, A, x_0)$.

1. $\mathrm{Im}(j_*) \subset \mathrm{Ker}(\partial_*)$. Ako $[f] \in \mathrm{Im}(j_*)$ to po definiciji homomorfizma j_* imamo da je $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, x_0, x_0)$. Zato je klasa $\partial_*([f])$ predstavljena preslikavanjem $\bar{f} : S^{n-1} \to x_0$, pa je $\partial_*([f]) = 1$ odnosno $[f] \in \mathrm{Ker}(\partial_*)$.

2. $\mathrm{Ker}(\partial_*) \subset \mathrm{Im}(j_*)$. Neka $H : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ i $[H] \in \mathrm{Ker}(\partial_*)$. Na osnovu definicije homomorfizma ∂_* ovo znači da je preslikavanje $h = H_{|\partial I^n}$ homotopno konstantnom preslikavanju u A. Kako je $H(J^{n-1}) = x_0$, pri čemu je $J^{n-1} = \partial I^n \setminus (\overset{\circ}{I^{n-1}} \times \{0\})$, preslikavanje h je oblika

$$h : (I^{n-1} \times \{0\}, \partial I^{n-1} \times \{0\}) \to (A, x_0).$$

Neka je $H^{'}$ homotopija izmedju h i konstantnog preslikavanja, odnosno $H^{'} : I^{n-1} \times \{0\} \times I \to A$, $H^{'}_{|I^{n-1}\times\{0\}\times\{0\}} = h$, $H^{'}_{|I^{n-1}\times\{0\}\times\{1\}} = x_0$ i $H^{'}(\partial I^{n-1} \times \{0\} \times I) = x_0$.

Neka je $J^n = I^n \times \{1\} \cup \partial I^n \times I$ i posmatrajmo preslikavanje

$$H^{"} : J^n \to X$$

koje se na $I^n \times \{1\}$ poklapa sa H, zatim se na $I^{n-1} \times \{0\} \times I$ poklapa sa homotopijom $H^{'}$ dok preostali dio za $\partial I^n \times I$ slika u tačku x_0. Jasno da je $J^n \subset I^{n+1}$ i nije teško pokazati da je J^n jaki deformacioni retrakt za I^{n+1} odnosno postoji retrakcija $r : I^{n+1} \to J^n$ koja je homotopska ekvivalencija (biće uradjeno kao dodatni zadatak). Posmatrajmo preslikavanje $K : I^{n+1} \to X$ dato sa $K = H^{"} \circ r$. Tada je $K_{|J^n} = H^{"}$. Iz konstrukcije preslikavanja K slijedi da se K može posmatrati kao homotopija $K : I^n \times I \to X$ pri čemu je $K_{|I^n\times\{1\}} = H$, dok je $k = K_{|I^n\times\{0\}} : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$. Primijetimo da je k sferorid u X i na ovaj način dobijamo da je H homotopno sa k kroz homotopiju trojki K. Slijedi da je $[H] = j_*([k])$, odnosno $[H] \in \mathrm{Im}(j_*)$. □