1 Ćelijski prostori

U ovoj lekciji se uvodi pojam ćelijskog prostora koji predstavlja topološki prostor koji se može dobiti odogovarajućim lijepljenjem diskova različitih dimenzija. Ove prostore je u matematiku uveo britanski matematičar J. C. Whitehead za potrebe homotopske teorije, a kasnije su našli široku primjenu u mnogim oblastima matematike.

Definition 1. *Ćelijski prostor (ili ćelijski kompleks ili CW-kompleks) je Hausdorfov topološki prostor X koji može biti predstavljen kao unija medjusobno disjunktnih skupova e_i^k, $i \in I$, $k \geq 0$, to jest $X = \cup_{k=0}^{\infty} \cup_{i\in I} e_i^k$, koji se nazivaju ćelijama. Pri tome važi da za svaku ćeliju e_i^k postoji neprekidno preslikavanje $\varphi_i : D^k \to X$, naziva se karakterističnim preslikavanjem, takvo da je $\varphi_{i\,|\mathring{D}^k} : \mathring{D}^k \to e_i^k$ homeomorfizam. Dodatno se zahtijeva da su ispunjene sledeće dvije aksiome:*

(C) granica bilo koje ćelije $\partial e_i^k = \bar{e}_i^k \setminus e_i^k$ sadrži se u uniji konačno mnogo ćelija čije su dimenzije $< k$;

(W) podskup $Y \subset X$ je zatvoren ako i samo ako je za svaku ćeliju e_i^k presjek $Y \cap \overline{e_i^k}$ zatvoren u $\overline{e_i^k}$.

Za disjunktnu uniju $X = \cup_{k=0}^{\infty} \cup_{i\in I} e_i^k$ se često kaže i da je ćelijsko razbijanje prostora X, a za e_i^k da je k-dimenziona ćelija. Jasno da su nula-dimenzione ćelije e_i^0 tačke.

Unija svih ćelija čija je dimenzija $\leq n$ u ćelijskom prostoru X, naziva se n-tim skeletom i obilježava sa sk_nX ili X_n.

Lemma 1. *Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1. *$A \subset X$ je zatvoren;*
2. *$A \cap sk_nX$ je zatvoren podkup za bilo koje n;*
3. *$\varphi_i^{-1}(A)$ je zatvoren u D^k za karakteristično preslikavanje $\varphi_i : D^k \to X$ bilo koje ćelije e_i^k.*

Proof. 1. $\Rightarrow$ 2. Neka je A zatvoren. Kako je za proizvoljnu ćeliju $\overline{e_j^m} \subset e_j^m \cup (\cup_{l<m} e_s^l)$ - konačna unija i $sk_nX = \cup_{k\leq n, i\in I} e_i^k$ to za $m > n$ imamo da je $\overline{e_j^m} \cap$

$sk_nX = \emptyset$. Zato je $(A \cap sk_nX) \cap \overline{e_j^n} = \emptyset$, a to je zatvoren skup u $\overline{e_j^m}$. Ako je $m \leq n$ to je $\overline{e_j^m} \cap sk_nX = \overline{e_j^m}$, pa slijedi da je $(A \cap sk_nX) \cap \overline{e_j^m} = A \cap \overline{e_j^m}$ a to je po uslovu zatvoren podskup u $\overline{e_j^m}$. Dakle, $A \cap sk_nX$ je zatvoren skup.

2. $\Rightarrow$ 3. Neka je $A \cap sk_nX$ je zatvoren podkup za proizvoljno n. Kako je $\varphi_i : D^k \to X$ neprekidno preslikavanje i $\varphi_{i_{|\overset{\circ}{D^k}}} : \overset{\circ}{D^k} \to e_i^k$ homeomorfizam, to slijedi da je $\varphi_i(D^k) \subset \overline{e_i^k} \subset sk_kX$. Zaključujemo da je $\varphi^{-1}(A) = \varphi^{-1}(A \cap sk_kX)$, a to će na osnovu pretpostavke biti zatvoren skup.

3. $\Rightarrow$ 1. Neka je $\varphi_i^{-1}(A)$ je zatvoren u D^k za karakteristično preslikavanje proizvoljne ćelije e_i^k. Kako je $\varphi_i(D^k) \subset \overline{e_i^k}$ slijedi da je $\varphi_i^{-1}(A) = \varphi_i^{-1}(A \cap \overline{e_i^k})$. Osim toga preslikavanje $\varphi_i^{-1} : \varphi_i^{-1}(A) \cap \overset{\circ}{D^k} \to A \cap e_i^k$ je homeomorfizam. Treba da dokažemo da je skup $A \cap \overline{e_i^k}$ zatvoren. Neka niz $(x_n) \subset A \cap \overline{e_i^k}$ i x_n konvergira ka tački x_0. Kako tada $x_0 \in \overline{e_i^k}$ i $\overline{e_i^k} \subset e_i^m \cup (\cup_{l<k} e_s^l)$, pri čemu je ova unija konačna, to slijedi da beskonačno mnogo članova ovog niza pripadaju jednoj od ovih ćelija. Zato ne umanjujući opštost možemo pretpostaviti da $(x_n) \subset A \cap e_i^k$. Tada postoji niz tačaka $(y_n) \subset \varphi_i^{-1}(A) \cap \overset{\circ}{D^k}$ takav da $\varphi_i(y_n) = x_n$. Kako je $(y_n) \subset D^k$ i D^k je kompaktan, to niz (y_n) ima konvergentan podniz, obilježimo ga isto za (y_n). Neka je $\lim y_n = y_0$. Kako je $\varphi_i^{-1}(A)$ zatvoren slijedi da $y_0 \in \varphi_i^{-1}(A)$. Zato je $\varphi_i(y_0) = \varphi_i(\lim y_n) = \lim \varphi_i(y_n) = \lim x_n = x_0$. Slijedi da $x_0 \in \varphi_i(\varphi_i^{-1}(A)) \subset A$. Dakle, $x_0 \in A \cap \overline{e_i^k}$, čimo je dokazano da je $A \cap \overline{e_i^k}$ zatvoren.

$\square$

Iz Leme 1 slijedi:

Corollary 1. *Neka je X ćelijski prostor i Y proizvoljan topološki prostor. Preslikavanje $f : X \to Y$ je neprekidno ako i samo ako su restrikcije $f_{|sk_nX} : sk_nX \to Y$ neprekidna preslikavanja za svako $n \geq 0$.*

Remark 1. Slova "C" i "W" u definiciji ćelijskog prostora potiču od engleskih riječi "closure" i "weak topology". Svojstvo ćelijskog koje se dato slovom "W" znači da je topologija na X najmanja topologija u odnosu na koju su sva karakteristična preslikavanja neprekidna.

Ćelijski potprostor ćelijskog prostora X je zatvoreni podskup u X koji se može dobiti kao unija nekih ćelija u X. Primijetimo da je u skelet sk_nX ćelijski potprostor u X za sve $n \geq 0$.

Za ćelijski prostor X se kaže da je konačan ako se sastoji od konačno mnogo ćelija, dok se kaže da je lokalno konačan ako svaka njegova tačka ima okolinu koja pripada nekom konačnom ćelijskom potprostoru u X.

Za preslikavanje $f : X \to Y$ izmedju ćelijskih prostora X i Y se kaže da je ćelijsko preslikavanje ako je $f(sk_n X) \subset sk_n Y$ za sve $n \geq 0$.

1.1 Primjeri ćelijskih prostora

1. Sfera S^n ima više prirodnih ćelijskih razbijanja. Jedno se dobija kada sferu razložimo na dvije otvorene polusfere e^n_+, e^n_- i ekvator koji im je zajednički. Polusfere su homeomorfne otvorenom disku $\overset{\circ}{D}{}^n$ dok je ekvator homeomorfan sferi S^{n-1}. Zatim ponavljamo isti postupak, sferu S^{n-1} razložimo na dvije kopije otvorenog diska $\overset{\circ}{D}{}^{n-1}$ i sferu S^{n-2}. Nastavljajući ovaj postupak dobijamo razbijanje sfere na $2n + 2$ ćelije $e^n_\pm, e^{n-1}_\pm, \ldots, e^1_\pm, e^0_\pm$. Ćelija $e^k_\pm$ se ekplicitno opisuje sa

$$e^k_\pm = \{(x_0, \ldots, x_n) \in S^n : x_{k+1} = \ldots = x_n = 0,\ \pm x_k > 0\}. \tag{1}$$

Takodje važi da je $\overline{e^k_\pm}$ homeomorfna sa D^k, pa su karakteristična preslikavanja data ovim homeomorfizmima.

2. Drugo ćelijsko razbijanje sfere S^n se sastoji od dvije ćelije: tačke $e^0 = (1, 0 \ldots, 0)$ i skupa $e^n = S^n \setminus e^0$. Skup e^n je jasno homemorfan otvorenom disku $\overset{\circ}{D}{}^n$ i to može da se vidi i pomoću stereografske projekcije sfere iz tačke e^0. Naime, ovom stereografskom projekcijom se dobija homeomorfizam izmedju e^n i $\mathbb{R}^n \cong \overset{\circ}{D}{}^n$. Za karakteristično preslikavanje koje odgovara ćeliji e^n može se posmatrati preslikavanje $D^n \to S^n$ koje granicu S^{n-1} diska D^n slika u tačku. Primjer takvog preslikavanja $D^n \to S^n$ je preslikavanje

$$(x_1, \ldots, x_n) \to \begin{cases} (-cos\pi r, \frac{x_1}{r} sin\pi r, \ldots, \frac{x_n}{r} sin\pi r), & \text{ako je } r \neq 0, \\ (-1, 0 \ldots, 0), & \text{ako je } r = 0 \end{cases}$$

gdje je $r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Zaista, ako $(x_1, \ldots, x_n) \in S^{n-1}$ tada je $r = 1$, pa se tačka $(x_1, \ldots, x_n)$ slika u tačku $(-1, 0, \ldots, 0)$.

3. Realni projektivni prostor $\mathbb{R}P^n$ se može posmatrati kao količnički prostor sfere S^n po relaciji ekvivalencije $x \approx y$ ako i samo ako je $y = \pm x$, odnosno dvije tačke su u relaciji ako i samo ako se poklapaju ili su dijametralno suprotne. Na ovaj način imamo prirodnu projekciju $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$, $p(x) = \{x, -x\}$. Slijedi da, ako

razbijemo sferu S^n na $(2n+2)$ ćelije $e^n_\pm$, $e^n_\pm, \ldots, e^1_\pm, e^0_\pm$, kao što je to uradjeno u prvom primjeru, onda svake dvije ćelije $e^k_\pm$, $0 \leq k \leq n$ pri projekciji p imaju istu sliku, odnosno $p(e^k_\pm) = e^k$. Kako je topologija na $\mathbb{R}P^n$ količnička topologija i ćelije $e^k_\pm$ su homeomorfne sa $\overset{\circ}{D^k}$ slijedi da su skupovi $e^k \subset \mathbb{R}P^n$ homeomorfni sa $\overset{\circ}{D^k}$. Na ovaj način dobijamo ćelijsko razbijanje prostora $\mathbb{R}P^n$ na $n+1$ ćeliju, po jednu ćeliju e^k u svakoj dimenziji k, gdje je $0 \leq k \leq n+1$. Primijetimo da iz (1) slijedi da se ćelija e^k može eksplicitno zapisati kao

$$e^k = \{[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] : x_k \neq 0, x_{k+1} = \ldots = x_n = 0\}.$$

Odvade slijedi da je $e^k = \mathbb{R}P^k \setminus \mathbb{R}P^{k-1}$. Ovdje je inkluzija $\mathbb{R}P^{k-1} \subset \mathbb{R}P^k$ odredjena inkluzijom $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ koja je definsana sa $(x_1, \ldots, x_k) \to (x_1, \ldots, x_k, 0)$. Na ovaj način dobijamo lanac inkluzija $* = \mathbb{R}P^0 \subset \mathbb{R}P^1 \subset \ldots \subset \mathbb{R}P^n$. Karakteristična preslikavanja ovakvog ćelijskog razbijanja za $\mathbb{R}P^n$ su data sa $\varphi_k : D^k \to \mathbb{R}P^n$, $\varphi_k = p_k \circ i_k$, gdje je $p_k : D^k \subset S^k \to \mathbb{R}P^k$ prirodna projekcija, a $i_k : \mathbb{R}P^k \to \mathbb{R}P^n$ opisana inkluzija.

4. **Kompleksni projektivni prostor $\mathbb{C}P^n$.** To je kompleksni analog realnog projektivnog prostora $\mathbb{R}P^n$. Posmatra se $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ i na njemu uvodi relacija ekvivalnecije $(z_0, \ldots, z_n) \approx (w_0, \ldots, w_n)$ ako i samo ako postoji $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tako da je $w_i = \lambda z_i$, $0 \leq i \leq n$. Drugim riječima dvije tačke su u relaciji ako i samo ako pripadaju istoj kompleksnoj pravoj koja prolazi kroz koordinatni početak. Definiše se

$$\mathbb{C}P^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \approx .$$

Kompleksni projektivni prostor se može takodje opisati polazeći od sfere. Kako je $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}$, pri poistovjećivanju $z_i = (x_i, y_i)$ to se sfera $S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$ može zapisati kao

$$S^{2n+1} = \{(z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_0|^2 + |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 = 1\}.$$

Kompleksna prava kroz koordinatni početak je skup tačaka oblika $\{\lambda(z^0_0, z^0_1, \ldots, z^0_n), \lambda \in \mathbb{C}\}$ za neku fiksiranu tačku $(z^0_0, z^0_1, \ldots, z^0_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Jasno da uvijek možemo pretpostaviti da je $|z^0_0|^2 + |z^0_1|^2 + \ldots + |z^0_n|^2 = 1$. Presjek ove prave sa sferom S^{2n+1} je skup onih tačaka prave za koje je $|\lambda| = 1$, odnosno kružnica S^1. Zato se na sferi S^{2n+1} definiše relacija ekvivalencije tako da su dvije tačke z i w u relaciji ako i samo ako postoji $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ tako da je $w = \lambda z$. Tada se $\mathbb{C}P^n$ definiše kao količnički prostor sfere S^{2n+1} po ovoj relaciji.

Pokazuje se da su ove dvije definicije kompleksnog projektivnog prostora ekvivalentne, odnosno da daju isti topološki prostor.

Pri opisu ćelijskog razbijanja za $\mathbb{C}P^n$ postupamo slično kao u slučaju $\mathbb{R}P^n$. Neka je

$$D^{2n} = \{(z_0, z_1, \ldots, z_n) \in S^{2n+1} : z_n \in \mathbb{R},\ z_n \geq 0\}.$$

Ovo je zaista disk D^{2n} jer ako $(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ pripada ovom skupu, to je $z_i = (x_i, y_i)$, $0 \leq i \leq n-1$ i $z_n = (x_n, 0)$, $x_n \geq 0$. Slijedi da je $(z_0, z_1, \ldots, z_n) = (x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots, x_n, 0) \in S^{2n+1}$, gdje je $x_n \geq 0$, odnosno ove tačke opisuju "gornju" zatvorenu polusferu za S^{2n}, a to je disk D^{2n}. Pri ovoj korespondenciji skup tačaka za koje je $z_n = 0$ daje granicu diska D^{2n} odnosno sferu S^{2n-1}.

Važno je primijetiti sledeće: ako tačka $(z_0, z_1, \ldots, z_n) \in S^{2n+1}$ i $z_n \notin \mathbb{R}$, to uzmimo $\lambda = \frac{\overline{z_n}}{|z_n|}$. Tada je $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ i $\lambda(z_0, \ldots, z_n) = (w_0, \ldots, w_n)$, gdje je $w_n = \frac{z_n \overline{z_n}}{|z_n|} \in \mathbb{R}$ i $w_n > 0$. Drugim riječima, $\lambda \cdot D^{2n} = S^{2n+1}$ kada λ prolazi kroz S^1. Uočimo da ako dvije tačke z i w pripadaju unutrašnjosti diska D^{2n} to ne može biti $w = \lambda z$ za $\lambda \in S^1$ jer su obje koordinate w_n i z_n realni brojevi.

Nastavimo postupak, posmatramo sferu S^{2n-1} koja je granica za D^{2n}, ona je data uslovom $z_n = 0$. Zatim uočimo disk

$$D^{2n-1} = \{(z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}) \in S^{2n-1} : z_{n-1} \in \mathbb{R},\ z_{n-1} \geq 0\}.$$

Ponovo zaključujemo da je $\lambda \cdot D^{2n-2} = S^{2n-1}$ i da na unutrašnjosti diska D^{2n-2} nema tačaka koje su u relaciji. Ponavljajući ovaj postupak dobijamo otvorene diskove $\overset{\circ}{D}{}^{2n}, \overset{\circ}{D}{}^{2n-2}, \ldots, \overset{\circ}{D}{}^{2}, D^0$ tako da skupovi $\lambda \cdot \overset{\circ}{D}{}^{2n}, \lambda \cdot \overset{\circ}{D}{}^{2n-2}, \ldots, \lambda \cdot \overset{\circ}{D}{}^{2}$, $\lambda \cdot D^0$ pokrivaju sferu S^{2n+1}. Slijedi da se pri projekciji $p : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ svaki od ovih otvorenih diskova $\overset{\circ}{D}{}^{2k}$ homeomorfno slika na skup e^{2k},

$$e^{2k} = \{[z_0 : z_1 : \ldots : z_n] \in \mathbb{C}P^n : z_k \neq 0, z_{k+1} = \ldots = z_n = 0\}.$$

Na ovaj način dobijamo ćelijsko razbijanje za $\mathbb{C}P^n$ on n ćelija dato sa po jednom ćelijom u svakoj parnoj dimenziji $2k \leq 2n$, to jest $e^{2n}, e^{2n-2}, \ldots, e^2, e^0$. Karakteristična preslikavanja se kao i u realnom slučaju zadaju kompozicijom $D^k \xrightarrow{p_k} \mathbb{C}P^k \xrightarrow{i_k} \mathbb{C}P^n$.

1.2 Borsukov par.

Par prostora (X, A) je takav par u kome je A potprostor topološkog prostora X. Preslikavanje parova $f : (X, A) \to (Y, B)$ je neprekidno preslikavanje $f : X \to Y$ takvo da je $f(A) \subset B$.

Za par (X, A) se kaže da je Borsukov par (ili da ima svojstvo produženja homotopije) ako za proizvoljno neprekidno preslikavanje $f : X \to Z$, gdje je Z proizvoljan topološki prostor, i za proizvoljnu homotopiju $F : A \times I \to Z$ takvu da je $F(a, 0) = f(a)$ (to jest $F_0 = f_{|A}$) postoji homotopija $\tilde{F} : X \times I \to Z$ takva da je $\tilde{F}(x, 0) = f(x)$ (to jest $\tilde{F}_0 = f$) i $\tilde{F}(a, t) = F(a, t)$ (to jest $\tilde{F}_{|A\times I} = F$).

Theorem 1. *Ako je (X, A) Borsukov par i potprostor A je kontraktibilan, tada je projekcija $p : X \to X/A$ homotopska ekvivalencija.*

Proof. Kako je A kontraktibilan, to postoje preslikavannja $i : * \to A$ i $j : A \to *$, takva da je $j \circ i : A \to A$, $(i \circ j)(a) = *$ homotopno identičkom preslikavanju $id_A : A \to A$. Primijetimo da preslikavanje id_A možemo proširiti do preslikavanja $id_X : X \to X$. Neka je $F : A \times I \to A$ homotopija izmedju id_A i $j \circ i$, pri čemu je $F_0 = id_A$. Kako je (X, A) Borsukov par, postoji homotopija $\tilde{F} : X \times I \to A$ takva da je $\tilde{F}_0 = id_X$ i $\tilde{F}_{|A\times I} = F$. Odavde slijedi da je $\tilde{F}(a, t) \in A$, a to dalje znači da $p(F(a, t))$ tačka u X/A koja odgovara potprostoru A.

Neka je $\tilde{F}_1 = \tilde{F}_{|X\times\{1\}} : X \to X$. Slijedi da je $\tilde{F}_1(a) = F_1(a) = F(a, 1) = *$, odnosno $\tilde{F}_1(A) = *$. Zato $\tilde{F}_1$ indukuje preslikavanje $g : X/A \to X$ definisano sa $g(x) = \tilde{F}_1(x)$, ako je x tačka različita od tačke koja odgovara potprostoru A, dok za tačku x koja odgovara A imamo da je $g(x) = *$. Pokazaćemo da je preslikavanje g homotopski inverzno preslikavanju p odakle će da slijedi da je p homotopska ekvivalencija. Zaista, $g \circ p : X \to X$ i jasno važi $g \circ p = \tilde{F}_1$. Kako je $\tilde{F}_1$ homtopno sa $\tilde{F}_0 = id_X$ slijedi da je $g \circ p$ homotopno sa id_X.

Dalje je $p\circ g : X/A \to X/A$ i $p(g(x)) = p(\tilde{F}_1(x))$, odnosno $p\circ g = p\circ \tilde{F}_1$. Kako je $\tilde{F}(a, t) \subset A$ to preslikavanje $\tilde{F}_t = \tilde{F}_{|X\times\{t\}}$ indukuje preslikavanje $\hat{F}_t : X/A \to X/A$. Na ovaj način dobijamo homotopna preslikavanje $\hat{F}_1$ i $\hat{F}_0 = id_{X/A}$. Kako je $p\circ \tilde{F}_1 = \hat{F}_1$, to zaključujemo da je preslikavanje $p\circ g$ homotopno preslikavanju $id_{X/A}$ što završava dokaz. □

Za par (X, A) se kaže da je ćelijski par ako je X ćelijski prostor i A njegov ćelijski potprostor. Navodimo bez dokaza sledeće:

Theorem 2. *Ako je (X, A) ćelijski par, tada je (X, A) i Borsukov par.*

Iz Teoreme 1 i Teoreme 2 slijedi:

Corollary 2. *Ako je (X, A) ćelijski par u kome je potprostor A kontraktibilan, onda je količnički prostor X/A homotopski ekvivalentan sa X.*

Koristeći prethodno može se dokazati i sledeće važno tvrdjenje, koje je u literaturi poznato pod nazivom Teorema o ćelijskoj aproksimaciji.

Theorem 3. *Bilo koje neprekidno preslikavanje $f : X \to Y$ ćelijskih prostora X i Y je homotopno ćelijskom preslikavanju izmedju ovih prostora. Važi više, ako je f već ćelijsko preslikavanje na ćelijskom potprostoru $A \subset X$ to pomenuta homotopija može biti izabrana u odnosu na A.*

Prva primjena Teoreme 3 odnosi se na sfere.

Corollary 3. *Bilo koje neprekidno preslikavanje $f : S^k \to S^n$ gdje je $k < n$ je homotopno preslikavanju koje S^k slika u tačku.*

Proof. Iz Teoreme 3 slijedi da je f homotopno ćelijskom preslikavanju $g : S^k \to S^n$. Na osnovu definicije ćelijskog preslikavanja imamo da je $g(sk_k S^k) \subset sk_k S^n$. Kao što smo vidjeli, sfera S^n ima ćelijsko razbijanje koje se sastoji od jedne ćelije dimenzije 0 i jedne ćelije dimenzije n. Ovo znači da je $sk_k S^n$ tačka ako je $k < n$ i da je $sk_n S^n = S^n$. Slijedi da je $g(S^k) = *$, što je trebalo pokazati. $\square$