1 Lokalno trivijalna raslojenja

Lokalno trivijalna raslojenja su uopštenja pojma natkrića. Preciznije, natkriće $p : \tilde{X} \to X$ se karakteriše time da svaka tačka $x \in X$ ima okolinu U takvu da je $p^{-1}(U) = \cup_{j \in J} V_j$, gdje su V_j medjusobno disjunktni skupovi takvi da je $p_{|V_j} : V_j \to U$ homeomorfizam. Ovo se može zapisati kao $p^{-1}(U) \cong U \times J$, odnosno skup $p^{-1}(U)$ je homeomorfan skupu $U \times J$, gdje je J diskretan skup. Ako uslov da je J diskretan skup zamijenimo uslovom da J može biti proizvoljan topološki prostor dobijamo lokalno trivijalna raslojenja.

Definition 1. *Lokalno trivijalno raslojenje je četvorka (E, B, F, p), gdje su E, B i F topološki prostori, $p : E \to B$ je preslikavanje takvo da svaka tačka $x \in B$ ima okolinu U za koju postoji homeomorfizam $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times F$ i pri tome važi $p = pr_1 \circ \varphi$, gdje je $pr_1 : U \times F \to U$ projekcija $p(u, f) = u$.*

Drugim riječima u definiciji raslojenja se zahtijeva da je sledeći dijagram komutativan:

$$
\begin{tikzcd}
p^{-1}(U) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\varphi"] & U \\
U \times F \arrow[ur, "pr_1"'] &
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

Za prostor E se kaže da je prostor raslojenja ili totalni prostor, dok se za prostore B i F kaže da su, redom, baza i sloj raslojenja. Često se i samo preslikavanje $p : E \to B$ naziva lokalno trivijalnim raslojenjem. Ako je $x \in B$ tada se skup $p^{-1}(x)$ naziva slojem nad tačkom x. Iz definicije direktno slijedi da je $p^{-1}(x)$ homeomorfno sa F za bilo koju tačku $x \in B$.

Rasojenje (E, B, F, p) se često označava sa $E \xrightarrow{F} B$.

Primjeri.

1. Neka su B i F topološki prostori i $E = B \times F$. Neka je $p : E \to B$ projekcija to jest $p(b, f) = b$. Direktno se provjerara da je četvorka (E, B, F, p) lokalno trivijalno raslojenje, za okolinu U proizvoljne tačke $x \in E$ možemo uzeti prostor B. Za ovakvo raslojenje se kaže da je trivijalno raslojenje.

2. Neka je $p : \tilde{X} \to X$ natkriće. Tada za svaku tačku $x \in X$ postoji okolina U takva da je $p^{-1}(U) \cong U \times J$, gdje je J diskretan skup. Uzimajući da je $E = \tilde{X}$, $B = X$ i $F = J$ dobijamo da je svako natkriće raslojenje sa diskretnim slojem.

3. Neka je $E = S^{2n+1} = \{(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_0|^2 + \ldots + |z_n|^2 = 1\}$, $B = \mathbb{C}P^n$ - kompleksni projektivni prostor definisan u prethodnoj lekciji i $p : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ definisano sa $p(z_0, \ldots, z_n) = [(z_0, \ldots, z_n)]$. Neka $\mathbf{z} = [(z_0, \ldots, z_n)] \in \mathbb{C}P^n$ i kako je barem jedna od koordinata z_i različita od 0, ne umenjujući opštost pretpostavimo da je $z_0 \neq 0$. Posmatramo skup $U_0 \subset \mathbb{C}P^n$ dat sa $U_0 = \{[(z_0, \ldots, z_n)] \in \mathbb{C}P^n : z_0 \neq 0\}$. Kako je $p^{-1}(U_0) = \{(z_0, \ldots, z_n) \in S^{2n+1} : z_0 \neq 0\}$, to je $p^{-1}(U_0)$ otvoren skup u S^{2n+1}, a kako $\mathbb{C}P^n$ ima količničku topologiju u odnosu na preslikavanje p slijedi da je U_0 otvoren skup u $\mathbb{C}P^n$.

Primijetimo da klasa $[(z_0, \ldots, z_n)] \in U_0$ ima tačno jednog predstavnika takvog da je $z_0 \in \mathbb{R}_{>0}$. Zaista, za $\lambda = \frac{\bar{z}_0}{|z_0|}$ imamo da $|\lambda| = 1$ i $\lambda[(z_0, \ldots, z_n)] = [(|z_0|, \frac{\bar{z}_0 z_1}{|z_0|}, \ldots, \frac{\bar{z}_0 z_n}{|z_0|})]$ i prva koordinata $|z_0| \in \mathbb{R}_{>0}$. Ovo je jedinstveni predstavnik klase $[(z_0, \ldots, z_n)]$ čija je prva koordinata pozitivan realan broj. Naime, ako je $(z_0^{'}, \ldots, z_n^{'})$ drugi predstavnik ove klase tada je $z_0^{'} = \lambda |z_0|$ za $|\lambda| = 1$, a ovo je pozitivan realan broj ako i samo ako je $\lambda = 1$. Slijedi da je $(z_0, \ldots, z_n) = (z_0^{'}, \ldots, z_n^{'})$, pa zaključujemo da je skup U_0 homeomorfan sa skupom $\{(|z_0|, \frac{(\bar{z}_0 z_1}{|z_0|}, \ldots, \frac{\bar{z}_0 z_n}{|z_0|})\}$, gdje je $(z_0, \ldots, z_n) \in S^{2n+1}$ i $z_0 \neq 0$. Na ovaj način dobijamo homeomorfizam $\varphi : p^{-1}(U_0) \to U_0 \times S^1$ koji je dat sa

$$\varphi : p^{-1}(U_0) = \{\lambda(|z_0|, \frac{\bar{z}_0 z_1}{|z_0|}, \ldots, \frac{\bar{z}_0 z_n}{|z_0|}),\ |\lambda| = 1.\} \to U_0 \times S^1,$$

$$\varphi(\lambda(|z_0|, \frac{\bar{z}_0 z_1}{|z_0|}, \ldots, \frac{\bar{z}_0 z_n}{|z_0|})) = ((|z_0|, \frac{\bar{z}_0 z_1}{|z_0|}, \ldots, \frac{\bar{z}_0 z_n}{|z_0|}), \lambda).$$

Kako je $pr_1(\varphi(\lambda(|z_0|, \frac{\bar{z}_0 z_1}{|z_0|}, \ldots, \frac{\bar{z}_0 z_n}{|z_0|})) = (|z_0|, \frac{\bar{z}_0 z_1}{|z_0|}, \ldots, \frac{\bar{z}_0 z_n}{|z_0|}) = p((|z_0|, \frac{\bar{z}_0 z_1}{|z_0|}, \ldots, \frac{\bar{z}_0 z_n}{|z_0|}))$, slijedi da je $(S^{2n+1}, \mathbb{C}P^n, S^1, p)$ raslojenje sa slojem S^1.

Ovo raslojenje se naziva *raslojenjem Hopfa*.

U slučaju kada je $n = 1$, dobijamo raslojenje $(S^3, \mathbb{C}P^1, S^1, p)$.

Lemma 1. *Kompleksni projektivni prostor $\mathbb{C}P^1$ je homeomorfan sferi S^2*

Proof. Neka je, kao maloprije, $U_0 = \{[(z_0, z_1) \in \mathbb{C}P^1 : z_0 \neq 0\}$. Tada je $\mathbb{C}P^1 \setminus U_0 = \{[(0, 1)]\}$ i takodje imamo homeomorfizam

$$h : U_0 \to \mathbb{C},\ \ h([(z_0, z_1)]) = \frac{z_0}{z_1}.$$

S druge strane stereografska projekcija daje homeomorfizam

$$g : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2,$$

gdje tačka N predstavlja sjeverni pol. Dobijamo homeomorfizam

$$g^{-1} \circ h : U_0 \to S^2 \setminus \{N\}.$$

Kako su prostori $\mathbb{C}P^1$ i S^2 Hausdorfove jednotačkaste kompaktifikacije za U_0 i $S^2 \setminus \{N\}$ redom, slijedi da se homeomorfizam $g^{-1} \circ h$ može proširiti do homeomorfizma izmedju $\mathbb{C}P^1$ i S^2. $\square$

Na ovaj način dobijamo da postoji raslojenje (S^3, S^2, S^1, p) , to jest $S^3 \xrightarrow{S^1} S^2$ za koje se takodje kaže da je raslojenje Hopfa.

Raslojenja analogno natkrićima imaju, pod nekim dodatnim uslovima svojstvo podizanja homotopije. U tom smislu navodimo bez dokaza sledeću teoremu.

Theorem 1. *Neka je (E, B, F, p) lokalno trivijalno raslojenje i neka je $f : Z \to E$ neprekidno preslikavanje, pri čemu je Z ćelijski prostor. Neka je dalje $F : Z \times I \to B$ homotopija preslikavanja $p \circ f$ to jest $F(z, 0) = p(f(z))$. Tada postoji jedinstvena homotopija $\tilde{F} : Z \times I \to E$ takva da je $p \circ \tilde{F} = F$ i $\tilde{F}(z, 0) = f(z)$.*

1.1 Homotopski niz raslojenja

Neka je $p : E \to B$ lokalno trivijalno raslojenje sa slojem F. Fiksirajmo tačke $e_0 \in E$ i $b_0 \in B$ takve da je $b_0 = p(e_0)$. Tada je $p^{-1}(b_0) \cong F$ i to je sloj nad tačkom b_0. Dobijamo preslikavanje parova

$$p : (E, F) \to (B, b_0).$$

Ovo preslikavanje indukuje homomorfizam $p_* : \pi_n(E, F, e_0) \to \pi_n(B, b_0)$. Dokazaćemo sledeću važnu teoremu.

Theorem 2. *Homomorfizam $p_* : \pi_n(E, F, e_0) \to \pi_n(B, b_0)$ je izomorfizam za sve $n \geq 1$.*

Proof. Prvo ćemo pokazati da je p_* monomorfizam. Neka je $p_*([\tilde{f}]) = 0$ za neko $[\tilde{f}] \in \pi_n(E, F, e_0)$, gdje je $\tilde{f} : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (E, F, e_0)$ relativni sferoid. Kako je $p_*([\tilde{f}]) = [p \circ \tilde{f}] = 0$, to je sferoid $f = p \circ \tilde{f} : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (B, b_0)$ homotopan konstantnom sferoidu u B. Neka je $F : D^n \times I \to B$ homotopija takva da je $F(d, 0) = f(d)$ i $F(d, 1) = b_0$. Znači imamo preslikavanje $\tilde{f} : D^n \to E$, pri čemu je D^n ćelijski prostor i homotopiju F preslikavanja $f = p \circ \tilde{f}$. Na osnovu Teoreme 1 slijedi da postoji homotopija $\tilde{F} : D^n \times I \to E$ takva da je $p \circ \tilde{F} = F$ i $f(d, 0) = \tilde{f}$. Neka je $\tilde{f}_1 = F(\cdot, 1)$, tada je $p \circ \tilde{f}_1 = F(\cdot, 1) = b_0$. Zato je $\tilde{f}_1(D^n) \subset p^{-1}(b_0) = F$. Dakle za relativni sferoid $\tilde{f}_1 : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (E, B, b_0)$ važi $\tilde{f}_1(D^n) \subset F$, pa iz lekcije o relativnim homotopskim grupama slijedi da je $\tilde{f}_1$ homotopan kroz homotopiju trojki konstantnom sferoidu. Kako je relativni sferoid $\tilde{f}$ homotopan sa $\tilde{f}_1$ slijedi da je i $\tilde{f}$ homotopan konstantnom sferoidu, odnosno $[\tilde{f}] = 0$.

Sada ćemo dokazati da je $p_* : \pi_n(E, F, e_0) \to \pi_n(B, b_0)$ epimorfizam. Neka $[f] \in \pi_n(B, b_0)$ i posmatrajmo sferoid f kao $f : (I^n, \partial I^n) \to (B, b_0)$. Dalje, $I^n = I^{n-1} \times I$, pa $f : I^{n-1} \times I \to B$ možemo posmatrati kao homotopiju preslikavanja $f_{|_{I^{n-1}}}$. Kako je $f(\partial I^n) = b_0$, to je $f(\partial I^{n-1}, I) = b_0$ i $f(I^{n-1}, 0) = f(I^{n-1}, 1) = b_0$.

Posmatramo konstantno preslikavanje $c : Z = I^{n-1} \times \{0\} \to E$ u tačku $e_0 \in E$, gdje je $p(e_0) = b_0$. Tada je $p \circ c = f_{|Z}$. Kako je Z ćelijski prostor, to se prema Teoremi 1 homotopija f za $f_{|Z}$ može podići do homotopije $\tilde{f} : I^{n-1} \times I = I^n \to E$ takve da je $p \circ \tilde{f} = f$ i $\tilde{f}(\cdot, 0) = e_0$.

Kako je $f(\partial I^n) = b_0$ slijedi da je $\tilde{f}(\partial I^n) \subset p^{-1}(b_0) = F$. Uočimo takodje da je skup $J_{n-1} = \partial I^n \setminus \overset{\circ}{I^{n-1}} = (I^{n-1} \times \{0\}) \cup (\partial I^n \times I)$ homotopski ekvivalentan sa $I^{n-1} \times \{0\}$. To znači da preslikavanje $\tilde{f}$ možemo posmatrati kao preslikavanje $\tilde{f} : I^{n-1} \times I \to E$ tako da je $f(I^{n-1} \times \{0\}) \cup (\partial I^n \times I) = e_0$, odnosno kao relativni sferoid $\tilde{f} : (I^n, \partial I^n, J_{n-1}) \to E, F, e_0)$. Kako je $p \circ \tilde{f} = f$ slijedi da je $p_*[\tilde{f}] = [f]$, pa je p_* epimorfizam. $\square$

Sada koristeći teoremu kojom smo dokazali da se svakom paru (X, A) može pridružiti tačan homotopski niz direktno slijedi i da se analogno može uraditi i za lokalno trivijalna raslojenja. Naime ako fiksiramo tačku $e_0 \in E$ i $b_0 = p(e_0)$ onda je $F = p^{-1}(b_0) \subset E$, pa možemo posmatrati par (E, F) i za njega napisati dugi tačan homotopski niz. Na osnovu Teoreme 2 slijedi da je $\pi_n(E, F, e_0) \cong \pi_n(B, b_0)$ i na taj način dobijamo sledeće tvrdjenje.

Theorem 3. *Neka je $p : E \to B$ lokalno trivijalno raslojenje sa slojem F, pri čemu je baza B linearno povezan prostor. Tada je niz*

$$\dots \xrightarrow{\partial_*} \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1}(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \dots \tag{2}$$

$$\dots \xrightarrow{i_*} \pi_1(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\partial_*} \pi_0(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E, e_0).$$

tačan.

Napomenimo da iz dokaza Teoreme 2 slijedi da je homomorfizam $\partial_* : \pi_n(B, b_0) \to \pi_{n-1}(F, e_0)$ zadat na sledeći način. Neka je klasa $[f] \in \pi_n(B, b_0)$ data sferoidom $f : (I^n, \partial I^n) \to (B, b_0)$. Posmatrajmo f kao homotopiju $f : I^{n-1} \times I \to (B, b_0)$ koja se sastoji iz preslikavnja $f_t : I^{n-1} \to B$. Pri tome važi da je $f_t(\partial I^{n-1}) = b_0$ i da su preslikavanja f_0 i f_1 konstantna preslikavanja u tačku b_0. Ova homotopija se može podići do homotopije $\tilde{f} : I^{n-1} \times I \to E$ koja je data preslikavanjima $\tilde{f}_t : I^{n-1} \to E$ pri čemu je $\tilde{f}_0$ konstantno preslikavanje u tačku e_0. Preslikavanje $\tilde{f}_1$ ne mora da bude konstantno preslikavanje, ali će sigurno da važi $\tilde{f}_1(I^{n-1}) \subset F$ jer je $p \circ \tilde{f}_1 = f_1$. Takodje možemo smatrati da $\tilde{f}_1(\partial I^{n-1}) = e_0$ jer je $\partial I^n = (\mathring{I}^{n-1} \times \{1\}) \cup ((\partial I^{n-1} \times \{0\}) \times I)$, a ovo je homotopski ekvivalentno sa unijom kubova $I^{n-1} \times \{0\}$ i $I^{n-1} \times \{1\}$ koji su zalijepljeni po granici. Kako je $\tilde{f}(I^{n-1} \times \{1\}) = \tilde{f}_0(I^{n-1}) = e_0$ slijedi da je $e_0 = \tilde{f}(\partial(I^{n-1} \times \{1\})) = \tilde{f}_1(\partial I^{n-1})$. Na ovaj način dobijamo sferoid $\tilde{f}_1 : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \to (F, e_0)$ i ovaj sferoid predstavlja element $\partial_*[f] \in \pi_{n-1}(F, e_0)$.

Primjeri i zadaci.

1. Posmatrajmo natkriće $p : \mathbb{R} \to S^1$. Ovo je istovremeno raslojenje čiji je sloj diskretni prostor Z cijelih brojeva, odnosno dobijamo raslojenje $(\mathbb{R}, S^1, Z, p)$. Tačan homotopski niz ovog raslojenja je

$$\ldots \to \pi_n(Z) \to \pi_n(\mathbb{R}) \to \pi_n(S^1) \to \pi_{n-1}(Z) \to \ldots$$

kako je $\mathbb{R}$ kotraktibilan, to je $pi_n(\mathbb{R}) = 0$ za sve $n \geq 0$. Kako je prostor Z diskretan, to je $\pi_n(Z) = 0$ za sve $n \geq 1$ jer je svako neprekidno prslikavanje $f : S^n \to Z$ u diskretan topološki prostor konstantno preslikavanje. Iz tačnosti navedenog niza slijedi da je $\pi_n(S^1) = 0$ za $n \geq 2$.

2. Neka je $p : S^3 \to S^2$ raslojenje Hopfa sa slojem S^1. Posmatrajmo sledeći fragment tačnog homotopskog niza ovog raslojenja:

$$\pi_3(S^1) \to \pi_3(S^3) \to \pi_3(S^2) \to \pi_2(S^1) \to \pi_2(S^3) \to \pi_2(S^2) \to \pi_1(S^1) \to \pi_1(S^3).$$

Kako je $\pi_n(S^1) = 0$ za $n \geq 2$ i na osnovu prethodne lekcije je $\pi_1(S^3) = \pi_2(S^3) = 0$, to ovaj niz ima vid

$$0 \to \pi_3(S^3) \to \pi_3(S^2) \to 0 \to 0 \to \pi_2(S^2) \to \mathbb{Z} \to 0.$$

Iz tačnosti ovog niza zaključujemo da je $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$ i $\pi_3(S^3) \cong \pi_3(S^2)$.

3. Neka je $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ natkriće. Pokazati da je indukovani homomorfizam $p_* : \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_n(X, x_0)$ izomorfizam za $n \geq 2$.

Rješenje. Natkriće možemo posmatrati kao raslojenje sa diskretnim slojem J to jest kao raslojenje $(\tilde{X}, X, J, p)$. Kako je prostor J diskretan to važi da je $\pi_n(J, \tilde{x}_0) = 0$ za sve $n \geq 1$. Tačan homotopski niz ovog raslojenja je

$$\dots \pi_n(J, \tilde{x}_0) \to \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \stackrel{p_*}{\to} \pi_n(X, x_0) \to \pi_{n-1}(J, \tilde{x}_0) \to \dots$$

odakle slijedi da je $p_* : \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_n(X, x_0)$ izomorfizam za $n \geq 2$.

Uočimo da odavde slijed, koristeći natkriće- raslojenje $(S^n, \mathbb{R}P^n, Z_2, p)$, da je $\pi_n(\mathbb{R}P^n) \cong \pi_n(S^n)$ za $n \geq 2$

4. Dokazati da je $\pi_k(\mathbb{C}P^n) = 0$ za $3 \leq k \leq 2n$.

Rješenje. Posmatramo raslojenje Hopfa $p : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ sa slojem S^1. Njegov tačan homotopski niz je oblika

$$\dots \pi_k(S^1) \to \pi_k(\mathbb{C}P^n) \to \pi_k(S^{2n+1}) \to \pi_{k-1}(S^1) \to \dots$$

Kako je $\pi_k(S^1) = 0$ za $k \geq 2$, to iz tačnosti ovog niza slijedi da je $\pi_k(\mathbb{C}P^n) \cong \pi_k(S^{2n+1})$ za $k \geq 3$. Dalje znamo da je $\pi_k(S^{2n+1}) = 0$ za $k \leq 2n$. Odavde slijedi da je $\pi_k(\mathbb{C}P^n) = 0$ za $3 \leq k \leq 2n$.