

1 Čelijski prostori

U ovoj lekciji se uvodi pojam čelijskog prostora koji predstavlja topološki prostor koji se može dobiti odogovarajućim lijepljenjem diskova različitih dimenzija. Ove prostore je u matematiku uveo britanski matematičar J. C. Whitehead za potrebe homotopske teorije, a kasnije su našli široku primjenu u mnogim oblastima matematike.

Definition 1. Čelijski prostor (ili čelijski kompleks ili CW-kompleks) je Hausdorfov topološki prostor X koji može biti predstavljen kao unija medjusobno disjunktih skupova e_i^k , $i \in I$, $k \geq 0$, to jest $X = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{i \in I} e_i^k$, koji se nazivaju čelijama. Pri tome važi da za svaku čeliju e_i^k postoji neprekidno preslikavanje $\varphi_i : D^k \rightarrow X$, naziva se karakterističnim preslikavanjem, takvo da je $\varphi_i|_{D^k} : D^k \rightarrow e_i^k$ homeomorfizam. Dodatno se zahtijeva da su ispunjene sledeće dvije aksiome:

- (C) granica bilo koje ćelije $\partial e_i^k = \overline{e_i^k} \setminus e_i^k$ sadrži se u uniji konačno mnogo ćelija čije su dimenzije $< k$;
- (W) podskup $Y \subset X$ je zatvoren ako i samo ako je za svaku čeliju e_i^k presjek $Y \cap \overline{e_i^k}$ zatvoren u $\overline{e_i^k}$.

Za disjunktну uniju $X = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{i \in I} e_i^k$ se često kaže i da je čelijsko razbijanje prostora X , a za e_i^k da je k -dimenziona ćelija. Jasno da su nula-dimenzione ćelije e_i^0 tačke.

Unija svih ćelija čija je dimenzija $\leq n$ u čelijskom prostoru X , naziva se n -tim skeletom i obilježava sa $sk_n X$ ili X_n .

Lemma 1. Sledeći uslovi su ekvivalentni:

1. $A \subset X$ je zatvoren;
2. $A \cap sk_n X$ je zatvoren podkup za bilo koje n ;
3. $\varphi_i^{-1}(A)$ je zatvoren u D^k za karakteristično preslikavanje $\varphi_i : D^k \rightarrow X$ bilo koje ćelije e_i^k .

Proof. 1. $\Rightarrow$ 2. Neka je A zatvoren. Kako je za proizvoljnu ćeliju $\overline{e_j^m} \subset e_j^m \cup (\bigcup_{l < m} e_s^l)$ - konačna unija i $sk_n X = \bigcup_{k \leq n, i \in I} e_i^k$ to za $m > n$ imamo da je $\overline{e_j^m} \cap$

$sk_n X = \emptyset$. Zato je $(A \cap sk_n X) \cap \overline{e_j^n} = \emptyset$, a to je zatvoren skup u $\overline{e_j^m}$. Ako je $m \leq n$ to je $\overline{e_j^m} \cap sk_n X = \overline{e_j^m}$, pa slijedi da je $(A \cap sk_n X) \cap \overline{e_j^m} = A \cap \overline{e_j^m}$ a to je po uslovu zatvoren podskup u $\overline{e_j^m}$. Dakle, $A \cap sk_n X$ je zatvoren skup.

2. $\Rightarrow$ 3. Neka je $A \cap sk_n X$ je zatvoren podkup za proizvoljno n . Kako je $\varphi_i : D^k \rightarrow X$ neprekidno preslikavanje i $\varphi_i|_{D^k} : D^k \rightarrow e_i^k$ homeomorfizam, to slijedi da je $\varphi_i(D^k) \subset \overline{e_i^k} \subset sk_k X$. Zaključujemo da je $\varphi^{-1}(A) = \varphi^{-1}(A \cap sk_k X)$, a to će na osnovu pretpostavke biti zatvoren skup.

3. $\Rightarrow$ 1. Neka je $\varphi_i^{-1}(A)$ je zatvoren u D^k za karakteristično preslikavanje proizvoljne ćelije e_i^k . Kako je $\varphi_i(D^k) \subset \overline{e_i^k}$ slijedi da je $\varphi_i^{-1}(A) = \varphi_i^{-1}(A \cap \overline{e_i^k})$. Osim toga preslikavanje $\varphi_i^{-1} : \varphi_i^{-1}(A) \cap D^k \rightarrow A \cap e_i^k$ je homeomorfizam. Treba da dokažemo da je skup $A \cap \overline{e_i^k}$ zatvoren. Neka niz $(x_n) \subset A \cap \overline{e_i^k}$ i x_n konvergira ka tački x_0 . Kako tada $x_0 \in \overline{e_i^k}$ i $\overline{e_i^k} \subset e_i^m \cup (\bigcup_{l < k} e_s^l)$, pri čemu je ova unija konačna, to slijedi da beskonačno mnogo članova ovog niza pripadaju jednoj od ovih ćelija. Zato ne umanjujući opštost možemo pretpostaviti da $(x_n) \subset A \cap e_i^k$. Tada postoji niz tačaka $(y_n) \subset \varphi_i^{-1}(A) \cap D^k$ takav da $\varphi_i(y_n) = x_n$. Kako je $(y_n) \subset D^k$ i D^k je kompaktan, to niz (y_n) ima konvergentan podniz, obilježimo ga isto za (y_n) . Neka je $\lim y_n = y_0$. Kako je $\varphi_i^{-1}(A)$ zatvoren slijedi da $y_0 \in \varphi_i^{-1}(A)$. Zato je $\varphi_i(y_0) = \varphi_i(\lim y_n) = \lim \varphi_i(y_n) = \lim x_n = x_0$. Slijedi da $x_0 \in \varphi_i(\varphi_i^{-1}(A)) \subset A$. Dakle, $x_0 \in A \cap \overline{e_i^k}$, čimo je dokazano da je $A \cap \overline{e_i^k}$ zatvoren.

□

Iz Leme 1 slijedi:

Corollary 1. *Neka je X ćelijski prostor i Y proizvoljan topološki prostor. Preslikavanje $f : X \rightarrow Y$ je neprekidno ako i samo ako su restrikcije $f|_{sk_n X} : sk_n X \rightarrow Y$ neprekidna preslikavanja za svako $n \geq 0$.*

Remark 1. Slova "C" i "W" u definiciji ćelijskog prostora potiču od engleskih riječi "cell" i "weak topology". Svojstvo ćelijskog koje se dato slovom "W" znači da je topologija na X najmanja topologija u odnosu na koju su sva karakteristična preslikavanja neprekidna.

Ćelijski potprostor ćelijskog prostora X je zatvoreni podskup u X koji se može dobiti kao unija nekih ćelija u X . Primijetimo da je u skelet $sk_n X$ ćelijski potprostor u X za sve $n \geq 0$.

Za ćelijski prostor X se kaže da je konačan ako se sastoji od konačno mnogo ćelija, dok se kaže da je lokalno konačan ako svaka njegova tačka ima okolinu koja pripada nekom konačnom ćelijskom potprostoru u X .

Za preslikavanje $f : X \rightarrow Y$ između ćelijskih prostora X i Y se kaže da je ćelijsko preslikavanje ako je $f(sk_n X) \subset sk_n Y$ za sve $n \geq 0$.

1.1 Primjeri ćelijskih prostora

1. Sfera S^n ima više prirodnih ćelijskih razbijanja. Jedno se dobija kada sferu razložimo na dvije otvorene polusfere e_+^n, e_-^n i ekvator koji im je zajednički. Polusfere su homeomorfne otvorenom disku $\overset{\circ}{D}^n$ dok je ekvator homeomorfan sferi S^{n-1} . Zatim ponavljamo isti postupak, sferu S^{n-1} razložimo na dvije kopije otvorenog diska $\overset{\circ}{D}^{n-1}$ i sferu S^{n-2} . Nastavljajući ovaj postupak dobijamo razbijanje sfere na $2n + 2$ ćelije $e_{\pm}^n, e_{\pm}^{n-1}, \dots, e_{\pm}^1, e_{\pm}^0$. Ćelija $e_{\pm}^k$ se eksplicitno opisuje sa

$$e_{\pm}^k = \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n : x_{k+1} = \dots = x_n = 0, \pm x_k > 0\}. \quad (1)$$

Takodje važi da je $\overline{e_{\pm}^k}$ homeomorfna sa D^k , pa su karakteristična preslikavanja data ovim homeomorfizmima.

2. Drugo ćelijsko razbijanje sfere S^n se sastoji od dvije ćelije: tačke $e^0 = (1, 0, \dots, 0)$ i skupa $e^n = S^n \setminus e^0$. Skup e^n je jasno homeomorfan otvorenom disku $\overset{\circ}{D}^n$ i to može da se vidi i pomoću stereografske projekcije sfere iz tačke e^0 . Naime, ovom stereografskom projekcijom se dobija homeomorfizam između e^n i $\mathbb{R}^n \cong \overset{\circ}{D}^n$. Za karakteristično preslikavanje koje odgovara ćeliji e^n može se posmatrati preslikavanje $D^n \rightarrow S^n$ koje granicu S^{n-1} diska D^n slika u tačku. Primjer takvog preslikavanja $D^n \rightarrow S^n$ je preslikavanje

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \begin{cases} (-\cos \pi r, \frac{x_1}{r} \sin \pi r, \dots, \frac{x_n}{r} \sin \pi r), & \text{ako je } r \neq 0, \\ (-1, 0, \dots, 0), & \text{ako je } r = 0 \end{cases}$$

gdje je $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Zaista, ako $(x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1}$ tada je $r = 1$, pa se tačka $(x_1, \dots, x_n)$ slika u tačku $(-1, 0, \dots, 0)$.

3. Realni projektivni prostor $\mathbb{R}P^n$ se može posmatrati kao količnički prostor sfere S^n po relaciji ekvivalencije $x \approx y$ ako i samo ako je $y = \pm x$, odnosno dvije tačke su u relaciji ako i samo ako se poklapaju ili su dijametralno suprotne. Na ovaj način imamo prirodnu projekciju $p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, $p(x) = \{x, -x\}$. Slijedi da, ako

razbijemo sferu S^n na $(2n + 2)$ ćelije $e_{\pm}^n, e_{\pm}^{n-1}, \dots, e_{\pm}^1, e_{\pm}^0$, kao što je to uradjeno u prvom primjeru, onda svake dvije ćelije $e_{\pm}^k$, $0 \leq k \leq n$ pri projekciji p imaju istu sliku, odnosno $p(e_{\pm}^k) = e^k$. Kako je topologija na $\mathbb{R}P^n$ količnička topologija i ćelije $e_{\pm}^k$ su homeomorfne sa $\overset{\circ}{D}^k$ slijedi da su skupovi $e^k \subset \mathbb{R}P^n$ homeomorfni sa $\overset{\circ}{D}^k$. Na ovaj način dobijamo ćelijsko razbijanje prostora $\mathbb{R}P^n$ na $n + 1$ ćeliju, po jednu ćeliju e^k u svakoj dimenziji k , gdje je $0 \leq k \leq n$. Primijetimo da iz (1) slijedi da se ćelija e^k može eksplicitno zapisati kao

$$e^k = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] : x_k \neq 0, x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}.$$

Odvade slijedi da je $e^k = \mathbb{R}P^k \setminus \mathbb{R}P^{k-1}$. Ovdje je inkluzija $\mathbb{R}P^{k-1} \subset \mathbb{R}P^k$ određena inkluzijom $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ koja je definisana sa $(x_1, \dots, x_k) \rightarrow (x_1, \dots, x_k, 0)$. Na ovaj način dobijamo lanac inkluzija $\ast = \mathbb{R}P^0 \subset \mathbb{R}P^1 \subset \dots \subset \mathbb{R}P^n$. Karakteristična preslikavanja ovakvog ćelijskog razbijanja za $\mathbb{R}P^n$ su data sa $\varphi_k : D^k \rightarrow \mathbb{R}P^n$, $\varphi_k = p_k \circ i_k$, gdje je $p_k : D^k \subset S^k \rightarrow \mathbb{R}P^k$ prirodna projekcija, a $i_k : \mathbb{R}P^k \rightarrow \mathbb{R}P^n$ opisana inkluzijom.

4. Kompleksni projektivni prostor $\mathbb{C}P^n$. To je kompleksni analog realnog projektivnog prostora $\mathbb{R}P^n$. Posmatra se $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ i na njemu uvodi relacija ekvivalencije $(z_0, \dots, z_n) \approx (w_0, \dots, w_n)$ ako i samo ako postoji $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tako da je $w_i = \lambda z_i$, $0 \leq i \leq n$. Drugim riječima dvije tačke su u relaciji ako i samo ako pripadaju istoj kompleksnoj pravoj koja prolazi kroz koordinatni početak. Definiše se

$$\mathbb{C}P^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \approx.$$

Kompleksni projektivni prostor se može takodje opisati polazeći od sfere. Kako je $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}$, pri poistovjećivanju $z_i = (x_i, y_i)$ to se sfera $S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$ može zapisati kao

$$S^{2n+1} = \{(z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_0|^2 + |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}.$$

Kompleksna prava kroz koordinatni početak je skup tačaka oblika $\{\lambda(z_0^0, z_1^0, \dots, z_n^0), \lambda \in \mathbb{C}\}$ za neku fiksiranu tačku $(z_0^0, z_1^0, \dots, z_n^0) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Jasno da uvijek možemo pretpostaviti da je $|z_0^0|^2 + |z_1^0|^2 + \dots + |z_n^0|^2 = 1$. Presjek ove prave sa sferom S^{2n+1} je skup onih tačaka prave za koje je $|\lambda| = 1$, odnosno kružnica S^1 . Zato se na sferi S^{2n+1} definiše relacija ekvivalencije tako da su dvije tačke z i w u relaciji ako i samo ako postoji $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ tako da je $w = \lambda z$. Tada se $\mathbb{C}P^n$ definiše kao količnički prostor sfere S^{2n+1} po ovoj relaciji.

Pokazuje se da su ove dvije definicije kompleksnog projektivnog prostora ekvivalentne, odnosno da daju isti topološki prostor.

Pri opisu ćelijskog razbijanja za $\mathbb{C}P^n$ postupamo slično kao u slučaju $\mathbb{R}P^n$. Neka je

$$D^{2n} = \{(z_0, z_1, \dots, z_n) \in S^{2n+1} : z_n \in \mathbb{R}, z_n \geq 0\}.$$

Ovo je zaista disk D^{2n} jer ako $(z_0, z_1, \dots, z_n)$ pripada ovom skupu, to je $z_i = (x_i, y_i)$, $0 \leq i \leq n-1$ i $z_n = (x_n, 0)$, $x_n \geq 0$. Slijedi da je $(z_0, z_1, \dots, z_n) = (x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_n, 0) \in S^{2n+1}$, gdje je $x_n \geq 0$, odnosno ove tačke opisuju "gornju" zatvorenu polusferu za S^{2n} , a to je disk D^{2n} . Pri ovoj korespondenciji skup tačaka za koje je $z_n = 0$ daje granicu diska D^{2n} odnosno sferu S^{2n-1} .

Važno je primijetiti sledeće: ako tačka $(z_0, z_1, \dots, z_n) \in S^{2n+1}$ i $z_n \notin \mathbb{R}$, to uzmimo $\lambda = \frac{\overline{z_n}}{|z_n|}$. Tada je $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ i $\lambda(z_0, \dots, z_n) = (w_0, \dots, w_n)$, gdje je $w_n = \frac{z_n \overline{z_n}}{|z_n|} \in \mathbb{R}$ i $w_n > 0$. Drugim riječima, $\lambda \cdot D^{2n} = S^{2n+1}$ kada λ prolazi kroz S^1 . Uočimo da ako dvije tačke z i w pripadaju unutrašnjosti diska D^{2n} to ne može biti $w = \lambda z$ za $\lambda \in S^1$ jer su obje koordinate w_n i z_n pozitivni realni brojevi.

Nastavimo postupak, posmatramo sferu S^{2n-1} koja je granica za D^{2n} , ona je data uslovom $z_n = 0$. Zatim uočimo disk

$$D^{2n-2} = \{(z_0, z_1, \dots, z_{n-1}) \in S^{2n-1} : z_{n-1} \in \mathbb{R}, z_{n-1} \geq 0\}.$$

Ponovo zaključujemo da je $\lambda \cdot D^{2n-2} = S^{2n-1}$ i da na unutrašnjosti diska D^{2n-2} nema tačaka koje su u relaciji. Ponavljajući ovaj postupak dobijamo otvorene diskove $\overset{\circ}{D}^{2n}, \overset{\circ}{D}^{2n-2}, \dots, \overset{\circ}{D}^2, \overset{\circ}{D}^0$ tako da skupovi $\lambda \cdot \overset{\circ}{D}^{2n}, \lambda \cdot \overset{\circ}{D}^{2n-2}, \dots, \lambda \cdot \overset{\circ}{D}^2, \lambda \cdot \overset{\circ}{D}^0$ pokrivaju sferu S^{2n+1} . Slijedi da se pri projekciji $p : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ svaki od ovih otvorenih diskova $\overset{\circ}{D}^{2k}$ homeomorfno slika na skup e^{2k} ,

$$e^{2k} = \{[z_0 : z_1 : \dots : z_n] \in \mathbb{C}P^n : z_k \neq 0, z_{k+1} = \dots = z_n = 0\}.$$

Na ovaj način dobijamo ćelijsko razbijanje za $\mathbb{C}P^n$ on n ćelija dato sa po jednom ćelijom u svakoj parnoj dimenziji $2k \leq 2n$, to jest $e^{2n}, e^{2n-2}, \dots, e^2, e^0$. Karakteristična preslikavanja se kao i u realnom slučaju zadaju kompozicijom $D^k \xrightarrow{p_k} \mathbb{C}P^k \xrightarrow{i_k} \mathbb{C}P^n$.

1.2 Borsukov par.

Par prostora (X, A) je takav par u kome je A potprostor topološkog prostora X . Preslikavanje parova $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ je neprekidno preslikavanje $f : X \rightarrow Y$ takvo da je $f(A) \subset B$.

Za par (X, A) se kaže da je Borsukov par (ili da ima svojstvo produženja homotopije) ako za proizvoljno neprekidno preslikavanje $f : X \rightarrow Z$, gdje je Z proizvoljan topološki prostor, i za proizvoljnu homotopiju $F : A \times I \rightarrow Z$ takvu da je $F(a, 0) = f(a)$ (to jest $F_0 = f|_A$) postoji homotopija $\tilde{F} : X \times I \rightarrow Z$ takva da je $\tilde{F}(x, 0) = f(x)$ (to jest $\tilde{F}_0 = f$) i $\tilde{F}(a, t) = F(a, t)$ (to jest $\tilde{F}|_{A \times I} = F$).

Theorem 1. *Ako je (X, A) Borsukov par i potprostor A je kontraktibilan, tada je projekcija $p : X \rightarrow X/A$ homotopska ekvivalencija.*

Proof. Kako je A kontraktibilan, to postoje preslikavanja $i : * \rightarrow A$ i $j : A \rightarrow *$, takva da je $j \circ i : A \rightarrow A$, $(i \circ j)(a) = *$ homotopno identičkom preslikavanju $id_A : A \rightarrow A$. Primijetimo da preslikavanje id_A možemo proširiti do preslikavanja $id_X : X \rightarrow X$. Neka je $F : A \times I \rightarrow A$ homotopija između id_A i $j \circ i$, pri čemu je $F_0 = id_A$. Kako je (X, A) Borsukov par, postoji homotopija $\tilde{F} : X \times I \rightarrow A$ takva da je $\tilde{F}_0 = id_X$ i $\tilde{F}|_{A \times I} = F$. Odavde slijedi da je $\tilde{F}(a, t) \in A$, a to dalje znači da $p(\tilde{F}(a, t))$ tačka u X/A koja odgovara potprostoru A .

Neka je $\tilde{F}_1 = \tilde{F}|_{X \times \{1\}} : X \rightarrow X$. Slijedi da je $\tilde{F}_1(a) = F_1(a) = F(a, 1) = *$, odnosno $\tilde{F}_1(A) = *$. Zato $\tilde{F}_1$ indukuje preslikavanje $g : X/A \rightarrow X$ definirano sa $g(x) = \tilde{F}_1(x)$, ako je x tačka različita od tačke koja odgovara potprostoru A , dok za tačku x koja odgovara A imamo da je $g(x) = *$. Pokazaćemo da je preslikavanje g homotopski inverzno preslikavanju p odakle će da slijedi da je p homotopska ekvivalencija. Zaista, $g \circ p : X \rightarrow X$ i jasno važi $g \circ p = \tilde{F}_1$. Kako je $\tilde{F}_1$ homotopno sa $\tilde{F}_0 = id_X$ slijedi da je $g \circ p$ homotopno sa id_X .

Dalje je $p \circ g : X/A \rightarrow X/A$ i $p(g(x)) = p(\tilde{F}_1(x))$, odnosno $p \circ g = p \circ \tilde{F}_1$. Kako je $\tilde{F}(a, t) \in A$ to preslikavanje $\tilde{F}_t = \tilde{F}|_{X \times \{t\}}$ indukuje preslikavanje $\hat{F}_t : X/A \rightarrow X/A$. Na ovaj način dobijamo homotopna preslikavanja $\hat{F}_1$ i $\hat{F}_0 = id_{X/A}$. Kako je $p \circ \tilde{F}_1 = \hat{F}_1$, to zaključujemo da je preslikavanje $p \circ g$ homotopno preslikavanju $id_{X/A}$ što završava dokaz. $\square$

Za par (X, A) se kaže da je ćelijski par ako je X ćelijski prostor i A njegov ćelijski potprostor. Navodimo bez dokaza sledeće:

Theorem 2. *Ako je (X, A) ćelijski par, tada je (X, A) i Borsukov par.*

Iz Teoreme 1 i Teoreme 2 slijedi:

Corollary 2. *Ako je (X, A) ćelijski par u kome je potprostor A kontraktibilan, onda je količnički prostor X/A homotopski ekvivalentan sa X .*

Koristeći prethodno može se dokazati i sledeće važno tvrdjenje, koje je u literaturi poznato pod nazivom Teorema o ćelijskoj aproksimaciji.

Theorem 3. *Bilo koje neprekidno preslikavanje $f : X \rightarrow Y$ ćelijskih prostora X i Y je homotopno ćelijskom preslikavanju između ovih prostora. Važi više, ako je f već ćelijsko preslikavanje na ćelijskom potprostoru $A \subset X$ to pomenuta homotopija može biti izabrana u odnosu na A .*

Prva primjena Teoreme 3 odnosi se na sfere.

Corollary 3. *Bilo koje neprekidno preslikavanje $f : S^k \rightarrow S^n$ gdje je $k < n$ je homotopno preslikavanju koje S^k slika u tačku.*

Proof. Iz Teoreme 3 sledi da je f homotopno ćelijskom preslikavanju $g : S^k \rightarrow S^n$. Na osnovu definicije ćelijskog preslikavanja imamo da je $g(sk_k S^k) \subset sk_k S^n$. Kao što smo vidjeli, sfera S^n ima ćelijsko razbijanje koje se sastoji od jedne ćelije dimenzije 0 i jedne ćelije dimenzije n . Ovo znači da je $sk_k S^n$ tačka ako je $k < n$ i da je $sk_n S^n = S^n$. Slijedi da je $g(S^k) = *$, što je trebalo pokazati. $\square$

Ovu lekciju ćemo završiti formulacijom značajne Whitehead-ove teoreme:

Theorem 4. *Neka su X i Y povezani ćelijski prostori. Neprekidno preslikavanje $f : X \rightarrow Y$ je homotopska ekvivalencija ako i samo ako je indukovani homomorfizam $f_* : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$ izomorfizam za svako n .*

Važno je obratiti pažnju na sledeće: ćelijski prostori X i Y mogu imati izomorfne homotopske grupe $\pi_n(X)$ i $\pi_n(Y)$ za svako n , ali ne moraju biti homotopski ekvivalentni, esencijalno je postojanje preslikavanja $f : X \rightarrow Y$ koje indukuje izomorfizam između homotopskih grupa. Recimo prostori $X = S^2 \times \mathbb{R}P^3$ i $Y = \mathbb{R}P^2 \times S^3$ imaju izomorfne homotopske grupe, ali nijesu homotopski ekvivalentni (jer se pokazuje da imaju različite homološke grupe).

Takodje pretpostavka u Whitehead-ovoj teoremi da se radi o ćelijskim prostorima je važna, odnosno ova teorema ne važi u opštem slučaju. Kao ilustraciju za to se može se posmatrati takozvana Varšavska kružnica $T \subset \mathbb{R}^2$ koja se dobija kao zatvorenje krive

$$\{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x \in (0, 1]\} \cup \{(0, 0)\},$$

koja predstavlja grafik funkcije $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ nad intervalom $(0, 1]$ zajedno sa tačkom $(0, 0)$, u odnosu na topologiju indukovanu iz $\mathbb{R}^2$. Pokazuje se da su sve homotopske grupe za T trivijalne, ali da Varšavska kružnica T nije homotopski ekvivalentna tački.