16. Neka su funkcije f_1 i f_2 analitičke u oblasti D i u toj oblasti zadovoljavaju diferencijalnu jednačinu $f^{(m)}(z) = P(z, f, f', \ldots, f^{m-1})$, gdje je P polinom svojih promjenljivih. Dokazati da ako u nekoj tački $z_0 \in D$ vrijede jednakosti $f_1(z_0) = f_2(z_0)$, $f_1'(z_0) = f_2'(z_0), \ldots, f_1^{m-1}(z_0) = f_2^{m-1}(z_0)$, onda je $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

17. Neka je $f(z)$ analitička funkcija na čitavoj kompleksnoj ravni koja zadovoljava uslov $|f(z)| \le e^x$. Dokazati da je $f(z) = ce^z$ za neku konstantu $c : |c| \le 1$.

18. Odrediti sve funkcije koje su analitičke u oblasti $D = \{z \in C : |z-1| < 1\}$ a za koje je $f(n/n+1) = 1 - 1/(2n^2 + 2n + 1)$. Odrediti sve analitičke funkcije koje u nekoj okolini tačke $z_0 = 0$ zadovoljavaju uslove: $f(2z) = f(3z)$, $f(0) = 1$.

19. Dokazati da je $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$.

3.5 Laurentov red. Izolovani singulariteti

U prethodnom paragrafu dokazali smo da se svaka funkcija koja je analitička u krugu može predstaviti stepenim redom, i obrnuto, da je funkcija koja je predstavljena stepenim redom analitička u krugu konvergencije tog reda. Odgovarajuća formula nazivala se Taylorovom formulom. Laurentova formula je uopštenje Taylorove formule; ona se odnosi na funkcije analitičke u kružnom prstenu, a članovi odgovarajućeg reda su funkcije oblika $a(z - z_0)^n$, pri čemu stepeni n mogu biti proizvoljni cijeli brojevi.

Teorema 3.5.1 (Laurentova teorema)**.** *Ako je funkcija $f : K \mapsto \mathbb{C}$ analitička u prstenu $K = \{z \in C : r < |z - z_0| < R\}$, onda je*

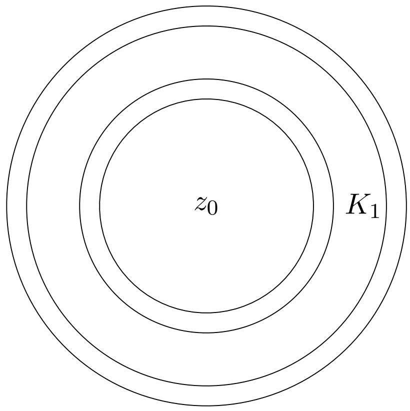
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,\ z \in K,$$

gdje je

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\,\eta, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

pri čemu je γ kružnica $|\eta - z_0| = \rho, r < \rho < R$.

Dokaz. Neka je $\gamma = \{z \in C : |z - z_0| = \rho$ i $K_1 = \{z \in C : r_1 \le |z - z_0| \le R_1\}$, pri čemu je $r < r_1 < \rho < R_1 < R$. Vidi sliku:



Slika 3.4: Laurentova teorema i četiri kruga

Funkcija f je analitička u K_1, pa na osnovu Cauchyeve integralne formule slijedi da za svako $z \in K_1$ važi:

$$f(z) = f_1(z) - f_2(z),$$

gdje je

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta - z_0| = R_1} \frac{f(\eta)}{\eta - z}\mathrm{d}\,\eta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta - z_0| = R_1} \frac{f(\eta)}{\eta - z_0}\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\eta - z_0}}\mathrm{d}\,\eta,$$

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta - z_0| = r_1} \frac{f(\eta)}{\eta - z}\mathrm{d}\,\eta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta - z_|= R_1} \frac{f(\eta)}{z - z_0}\frac{1}{1 - \frac{\eta - z_0}{z - z_0}}\mathrm{d}\,\eta.$$

Ako je $|\eta - z_0| = R_1$, onda je $\left|\frac{z - z_0}{\eta - z_0}\right| = \frac{\rho}{R_1} < 1$, pa je

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\eta - z_0}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\eta - z_0}\right)^k, |\eta - z_0| = R_1.$$

Slično, ako je $|\eta - z_0| = r_1$, onda je $\left|\frac{\eta - z_0}{z - z_0}\right| = \frac{r_1}{\rho} < 1$, pa je

$$\frac{1}{1 - \frac{\eta - z_0}{z - z_0}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\eta - z_0}{z - z_0}\right)^k, |\eta - z_0| = r_1.$$

Na osnovu Weierstrassovog kriterijuma slijedi da je u oba slučaja konvergencija ravnomjerna, pa se odgovarajući redovi mogu integraliti član po član. Tako dobijamo

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta-z_0|=R_1}\frac{f(\eta)}{\eta-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\eta-z_0}}\mathrm{d}\,\eta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta-z_0|=R_1}\left[\frac{f(\eta)}{\eta-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\eta-z_0}\right)^k\right]\mathrm{d}\,\eta = \sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k, \end{aligned}$$

gdje je

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta-z_0=R_1|}\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{k+1}}\mathrm{d}\,\eta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{k+1}}\mathrm{d}\,\eta, k=0,1,\ldots.$$

Takođe je

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta-z_0|=r_1}\frac{f(\eta)}{z-z_0}\frac{1}{1-\frac{\eta-z_0}{z-z_0}}\mathrm{d}\,\eta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta-z_0|=r_1}\left[\frac{f(\eta)}{z-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\eta-z_0}{z-z_0}\right)^k\right]\mathrm{d}\,\eta \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}b_l\left(\frac{1}{z-z_0}\right)^l = \sum_{k=-1}^{k=-\infty}c_k(z-z_0)^k, \end{aligned}$$

gdje je

$$b_l = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta-z_0|=r_1}f(\eta)(\eta-z_0)^l\mathrm{d}\,\eta, l=0,1,\ldots,$$

$$c_k = b_{-k+1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{k+1}}\mathrm{d}\,\eta, k=0,1,\ldots.$$

Odavde slijedi da za svako $z\in K_1$ važi:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n.$$

Pošto su r_1 i R_1 proizvoljni realni brojevi koji zadovoljavaju uslov $r<r_1<R_1<R$, odavde slijedi tvrđenje teoreme. □

Red

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, z\in K,$$

gdje je

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\eta)}{(\eta - z)^{n+1}}\mathrm{d}\,\eta, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

se naziva Laurentovim redom funkcije f. Takođe se govori da je formulom iz tvrđenja teoreme dato razlaganje funkcije f u Laurentov red. Pri tome se za red $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ kaže da je pravilni dio a za red $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z - z_0)^n$ da je glavni dio Laurentovog reda $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$.

U sljedećoj teoremi govori se o jedinstvenosti Laurentovog reda analitičke funkcije.

Teorema 3.5.2. *Ako je funkcija $f : K \mapsto \mathbb{C}$ analitička u prstenu $K = \{z \in C : r < |z - z_0| < R\}$, onda se ona na jedinstven način razlaže u Laurentov red.*

Dokaz. Neka je

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, z \in K.$$

Množeći gornju jednakost sa $(z - z_0)^{-n-1}$ i integraljeći duž kružnice $|z - z_0| = \rho$, dobijamo da je $a_n = c_n$. □

Primijetimo da se u prethodne dvije teoreme dopušta da je $r = 0$ i (ili) $R = +\infty$. U slučaju $r = 0$, razlaganje funkcije u Laurentov red može biti korišćeno za izučavanje ponašanja funkcije f kada $z \to z_0$.

Definicija 3.5.3. *Tačka z_0 je izolovani singularitet funkcije f ako postoji pozitivan broj r, takav da je funkcija f analitička u skupu $\{z \in C : 0 < |z - z_0| < r\}$ a nije analitička u krugu $\{z \in C : |z - z_0| < r\}$.*

Ako je tačka z_0 izolovani singularitet funkcije f, onda se funkcija f može razložiti u Laurentov red:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z - z_0)^n, z \in K = \{z \in C : 0 < |z - z_0| < r\}.$$

Zavisno od toga koliko članova sadrži glavni dio Laurentovog reda funkcije f, singulariteti se klasifikuju na sljedeći način:

(a) Ako je $c_{-n} = 0$ za svako $n \geq 0$, onda se Laurentov red svodi na njegov pravilni dio i tada se kaže da je z_0 otklonjiv (prividan) izolovani singularitet funkcije f;

(b) Ako glavni dio Laurentovog reda sadrži konačno mnogo članova, tada se kaže da je z_0 pol funkcije f. Pri tome, ako je m prirodan broj za koji je $c_{-m} \neq 0$

i $c_{-k} = 0$ za svako $k > m$, tada se kaže da je z_0 pol reda m funkcije f. Za pol reda $m = 1$ funkcije f kaže se da je prosti pol te funkcije..

(c) Ako glavni dio Laurentovog reda sadrži beskonačno mnogo članova tada se kaže da je z_0 esencijalni singularitet funkcije f.

U sljedećoj teoremi dato je nekoliko kriterijuma pomoću kojih se može utvrditi da li je z_0 otklonjivi izolovani singularitet funkcije f.

Teorema 3.5.4. *Neka je z_0 izolovani singularitet funkcije f. Sljedeći uslovi su ekvivalentni:*
(a) Tačka z_0 je otklonjiv izolovani singularitet funkcije f;
(b) Postoje $c_0 \in C$ i $r > 0$ takvi da je funkcija

$$\overline{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \{z : 0 < |z - z_0| < r\} \\ c_0, & z = z_0 \end{cases}$$

analitička u $\{z \in C : |z - z_0| < r\}$.
(c) Postoji $\lim_{z \to z_0} f(z)$.
(d) Postoji $r > 0$, takvo da je funkcija f ograničena na $K(z_0, r) \setminus \{z_0\} = \{z \in C : 0 < |z - z_0| < r\}$.

Dokaz. Ako je z_0 otklonjiv singularitet onda je

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots, z \in \{z \in C : 0 < |z - z_0| < r\}.$$

Ako funkciju $\overline{f}$ definišemo stepenim redom

$$\overline{f}(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots, z \in \{z \in C : |z - z_0| < r\}.$$

tada je $\overline{f}$ analitička u krugu $\{z \in C : |z - z_0| < r\}$.
Dakle, $(a) \Leftrightarrow (b)$. Iz (b) slijedi da je $\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \bar{f}(z) = c_0$, što znači da $(b) \Leftrightarrow (c)$. Dalje, ako je ispunjen uslov (c) i ako je $\lim_{z \to z_0} f(z) = c_0$, onda postoji krug $K(z_0, r)$ takav da je $|f(z) - c_0| < 1$ za svako $z \in K(z_0, r)$. Odavde slijedi da je $|f(z)| \leq |c_0| + 1$, odnosno $(c) \Leftrightarrow (d)$. Na kraju, pretpostavimo da je ispunjen uslov (d). Tada je za dovoljno malo r funkcija f ograni čena na $\{z \in C : |z - z_0| \leq r\}$, pa za za svako $n \in N$ i kružnicu $\gamma = \{z \in C : |z - z_0| = r\}$ važi:

$$\begin{aligned} |c_{-n}| &= |\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{-n+}} \mathrm{d}\,\eta| \leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|f(\eta)|}{|\eta - z_0|^{-n+1}} ds \\ &\leq M \frac{1}{2\pi} r^{n-1} \cdot 2\pi r = M r^n \to 0 \text{ kada } n \to \infty. \end{aligned}$$

Odavde slijedi da je $c_{-n} = 0$, pa je z_0 otklonjiv singularitet funkcije f. To znači da $(d) \Leftrightarrow (c)$. Ukupno, imamo da $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d) \Leftrightarrow a)$, čime je teorema dokazana. $\square$

Računanjem granične vrijednosti $\lim_{z\to z_0} f(z)$ može se utvrditi i da li je izolovani singularitet z_0 pol funkcije f.

Teorema 3.5.5. *Izolovani singularitet z_0 funkcije f je pol te funkcije ako i samo ako je* $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$.

Dokaz. Pretpostavimo da je z_0 pol reda $m \geq 1$ funkcije f. Tada postoji $r > 0$, takvo da je

$$f(z) = c_m(z - z_0)^{-m} + \sum_{i=-(m-1)}^{\infty} c_i(z - z_0)^i, z \in \{z \in C : 0 < |z - z_0| < r\}.$$

Odavde slijedi da je z_0 otklonjiv singularitet funkcije

$$g(z) = (z - z_0)^m f(z) = \sum_{j=0}{}^{\infty} c_{j-m}(z - z_0)^j, z \in \{z \in C : 0 < |z - z_0| < r\},$$

i

$$\lim_{z\to z_0} g(z) = \lim_{z\to z_0} f(z)(z - z_0)^m = c_m \neq 0.$$

Odavde je $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$.

Obrnuto, ako je $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$, tada postoji $r > 0$, takvo da je $f(z) \neq 0$ za $0 < |z - z_0| < r$. Posmatrajmo funkciju

$$f_1(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & z \in \{z : 0 < |z - z_0| < r\} \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$$

Pošto je $\lim_{z\to z_0} f_1(z) = 0$, to je funkcija f_1 analitička u krugu $k = \{z \in C : |z - z_0| < r\}$, pri čemu je z_0 jedinstvena nula funkcije f_1 u tom krugu. Zbog toga postoji m tako da je je $f_1(z) = (z - z_0)^m g(z)$, gdje je funkcija g analitička u krugu k, $g(z_0) \neq 0$. Slijedi da je i funkcija $g_1(z) = \frac{1}{g(z)}$ analitička u k, pa je

$$f(z) = (z - z_0)^{-m} \frac{1}{g(z)} = (z - z_0)^m \sum_{i=0}^{\infty} c_i(z - z_0)^i = \sum_{i=-m}^{\infty} c_{i+m}(z - z_0)^i,$$

$0 < |z - z_0| < r$, $c_{-m} \neq 0$. To znači da je z_0 pol reda m funkcije f. □

Teorema 3.5.6. *Neka je z_0 izolovani singularitet funkcije f. Sljedeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) Tačka z_0 je pol reda m.

(b) Za svako $k < m$ tačka z_0 je pol funkcije $h_k(z) = (z - z_0)^k f(z)$ i otklonjiv singularitet funkcije $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$.

(c) $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)^m f(z) = \beta$, *gdje je $\beta \neq 0$ i $\beta \neq \infty$.*

(d) Tačka z_0 je nula višestrukosti m funkcije

$$f_1(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & z \in \{z : 0 < |z - z_0| < r\} \\ 0, & z = z_0 \end{cases} .$$

Dokaz. Neka je ispunjen uslova (a). Tada je

$$f(z) = c_{-m}(z - z_0)^{-m} + \cdots + c_1(z - z_0)^{-1} + c_0 + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots ,$$

$c_{-m} \neq 0$, $z \in K(z_0, r) = \{z \in C : 0 < |z - z_0| < r\}$. Tada je za $k \leq m$

$$(z-z_0)^k f(z) = c_{-m}(z-z_0)^{-m+k} + \cdots + c_0(z-z_0)^k + \cdots + c_n(z-z_0)^{n+k} + \cdots ,$$

$c_{-m} \neq 0$, $z \in K(z_0, r) = \{z \in C : 0 < |z_0| < r\}$, odakle slijedi da je za tačka z_0 pol reda $m - k$ funkcije h_k, dok je za $k = m$ tačka z_0 otklonjiv singularitet funkcije $g = h_m$. Dakle, $(b) \Rightarrow (a)$.

Pretpostavimo da je ispunjen uslov (b). Tada je z_0 pol funkcije $h_{m-1}(z) = (z - z_0)^{m-1} f(z)$, pa postoji $r > 0$ takvo da je

$$h_{m-1}(z) = b_{-l}(z - z_0)^{-l} + \cdots + b_0 + b_1(z - z_0) + \cdots + b_n(z - z_0)^n + \cdots ,$$

$0 < |z - z_0| < r$, gdje je $b_{-l} \neq 0$. Pošto je z_0 otklonjiv singularitet funkcije $g(z) = (z - z_0)^m f(z) = (z - z_0)h_{m-1}(z)$, imamo da je

$$g(z) = b_{-l}(z - z_0)^{-l+1} + \cdots + b_{-1} + b_0(z - z_0) + \cdots + b_n(z - z_0)^{n+1} + \cdots .$$

Laurentov red funkcije $g(z)$ se sastoji samo od pravilnog dijela, pa iz uslova $b_{-l} \neq 0$, slijedi da je $l = 1$ i

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} = c_{-m}(z-z_0)^{-m} + \cdots + c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots .$$

(To znači da je z_0 pol reda m funkcije f. Dakle, $(a) \Rightarrow (b)$, odnosno $(a) \Leftrightarrow (b)$.

Ponovo pretpostavimo da je ispunjen uslov (a), odnosno da je z_0 pol reda m funkcije f. Tada postoji $r > 0$, takvo da je

$$f(z) = c_{-m}(z - z_0)^{-m} + \cdots + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots ,$$

$0 < |z - z_0| < r$, gdje je $c_{-m} \neq 0$. Odavde slijedi da je

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = \beta,$$

gdje je $\beta = c_{-m} \neq 0$ i $\beta \neq \infty$. To znači da $(a) \Leftarrow (c)$.

Obrnuto, ako postoji $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z) = \beta \neq 0$, tada je z_0 otklonjiv singularitet funkcije $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$, pa postoji realan broj $r > 0$, takav da je

$$g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i (z-z_0)^i, b_0 \neq 0, 0 < |z-z_0| < r.$$

Odavde slijedi da je

$$f(z) = (z-z_0)^{-m} g(z) = \sum_{i=-m}^{\infty} c_i (z-z_0)^i,\ 0 < |z-z_0| < r,$$

gdje je $c_{-m} = b_0 \neq 0$. To znači da je z_0 pol reda m funkcije f. Uzimajući u obzir prethodna razmatranja, zaključujemo da je $(a) \Leftrightarrow (c)$.

Dokažimo da je $(c) \Leftrightarrow (d)$. Pošto je z_0 izolovani singularitet funkcije f, postoji $r_1 > 0$, takvo da je funkcija $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$, analitička u skupu $\{z \in C : |z-z_0| < r_1\}$. Postavimo $g(z_0) := \lim_{z\to z_0} g(z) \neq 0$. Zbog neprekidnosti funkcije g postoji $r > 0$ takvo da je $g(z) \neq 0$ za $|z-z_0| < r$. Tada je $f_1(z) = (z-z_0)^m h(z)$, gdje je funkcija $h(z) = \frac{1}{g(z)}$ definisana u krugu $|z-z_0| < r$, analitička u tom krugu i različita od nule. To znači da je z_0 nula reda m funkcije f_1.

Pretpostavimo da je z_0 nula reda m funkcije f_1. Tada je

$$f_1(z) = (z-z_0)^m h(z),$$

pri čemu je h analitička funkcija u krugu $|z-z_0| < r_1$, takva da je $h(z_0) \neq 0$. Odavde slijedi da je $h(z) \neq 0$ u nekom krugu $|z-z_0| < r$, pa je za $0 < |z-z_0| < r$, $f_1(z) = (z-z_0)^m g(z)$, gdje je $g(z) = \frac{1}{h(z)}$ analitička funkcija u krugu $|z-z_0| < r$. Tada je

$$h(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i (z-z_0)^i, b_0 \neq 0,$$

i

$$f(z) = (z-z_0)^{-m} h(z) = \sum_{i=-m}^{\infty} c_i (z-z_0)^i, \text{ pri čemu je } c_{-m} = b_0 \neq 0.$$

To znači da je z_0 pol reda m funkcije f. Dokazali smo, dakle, da $(d) \Leftarrow (a)$. Uzimajući u obzir i ranije dokaze, imamo da $(a) \Leftrightarrow (b)$ i $(b) \Leftarrow (c) \Leftarrow (d) \Leftarrow (a)$, čime je teorema u potpunosti dokazana. $\square$

Ostaje da primijetimo da se izolovani singularitet z_0 funkcije f prepoznaje kao esencijalni tako što se negiraju dvije preostale mogućnosti: da je otklonjiv singularitet i da je pol. To znači da je izolovani singularitet z_0 funkcije $f(z)$ je esencijalni singularitet te funkcije ako i samo ako (u $\overline{\mathbb{C}}$ ne postoji $\lim_{z\to z_0} f(z)$. Odavde slijedi tvrđenje:

Teorema 3.5.7. *Neka je z_0 izolovani singularitet funkcije f neka je $f(z) \neq 0$ u nekoj okolini tačke z_0. Tada je z_0 esencijalni singularitet funkcije f ako i samo ako je z_0 esencijalni singularitet funkcije $\frac{1}{f}$.*

Primjer 3.5.8. Neka je $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Ako je $z_n = \frac{1}{n}$, tada $z_n \to 0$ i $f(z_n) = e^n \to +\infty$ kada $n \to \infty$. S druge strane, ako je $z_n = -\frac{1}{n}$, tada $z_n \to 0$ i $f(z_n) \to 0$ kada $n \to \infty$. Ako je $w \in C, w \neq 0$, tada postoji $a \in C$, takvo da je $e^a = w$. Ako je $z_n = \frac{1}{a+2\pi ni}$, tada $z_n \to 0$ kada $n \to \infty$ i $f(z_n) = w$.

U prethodnom primjeru tačka $z_0 = 0$ je esencijalni singularitet funkcije

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}.$$

Pri tome, za svako $\in \overline{C}$ postoji niz (z_n) takav da $z_n \to 0$ a $f(z_n) \to w$ kada $n \to \infty$.

Teorema 3.5.9 (Teorema Sohockog)**.** *Izolovani singularitet z_0 funkcije f je esencijalni singularitet te funkcije ako i samo ako za svako $w \in \overline{C}$ postoji niz $z_n \to z_0$, takav da $f(z_n) \to w$ kada $n \to \infty$.*

Dokaz. Jedan dio tvrđenja je direktna posljedica teorema o otklonjivom singularitetu i polu funkcije: ako za svako $w \in \overline{C}$ postoji niz (z_n), takav da $z_n \to z_0$ i $f(z_n) \to w$ kada $n \to \infty$, onda je z_0 esencijalni singularitet funkcije f.

Pretpostavimo da je z_0 esencijalni singularitet funkcije f. Tada je

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

$z \in K = \{z \in C : 0 < |z - z_0| < r\}$. U toku dokaza Laurentove teoreme dokazano je i da red $f_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n$ konvergira za svako $z \in \overline{C} \setminus \{z_0\}$. Slijedi da je funkcija $g(\eta) = c_{-1}\eta + c_{-2}\eta^2 + \cdots + c_{-n}\eta^n + \cdots$ analitička u cijeloj kompleksnoj ravni. Pošto ta funkcija nije konstantna, ona je, prema Liouvilleovoj teoremi, neograničena. Slijedi da postoji niz $\eta_n \to \infty$, takav da $g(\eta_n) \to \infty$. Tada niz $z_n = z_0 + \frac{1}{\eta_n} \to z_0$, a $f_1(z_n) \to c_0, f_2(z_n) \to \infty$, pa $f(z_n) \to \infty$ kada $n \to \infty$.

Neka je $w \in C$. Ako je z_0 tačka nagomilavanja skupa $A = \mathrm{Null}\,(f)$ nula funkcije $h(z) = f(z) - w$, onda postoji niz (z_n) tačaka skupa A, takav da $z_n \to z_0$. Tada $f(z_n) \to w$. Ako z_0 nije tačka nagomilavanja skupa A, onda postoji krug $K(z_0, \varepsilon)$ koji ne sadrži ni jednu nulu funkcije h. Funkcija $\varphi = \frac{1}{h}$ je analitička u skupu $K(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$. Tačka z_0 je esencijalni singularitet i funkcije h i funkcije φ. Pri tome postoji niz (z_n) takav da $z_n \to z_0$ i $\varphi(z_n) \to \infty$ kada $n \to \infty$. Tada $h(z_n) \to w$, odnosno, $f(z_n) \to w$ kada $n \to \infty$.

□

Iz teoreme Sohockog slijedi da ako se posmatraju svi nizovi (z_n) koji konvergiraju ka esencijalnom singularitetu z_0 funkcije f, onda je skup svih tačaka nagomilavanja odgovarajućih nizova $(f(z_n))$ proširena kompleksna ravan.

Situacija se bitno razlikuje od situacije kada je z_0 pol (tada je skup svih tačaka nagomilavanja nizova $(f(z_n))$ tačka ∞), ili kada je z_0 otklonjiv singularitet (tada je skup svih tačaka nagomilavanja nizova $(f(z_n))$ neka tačka iz C). Tako, dakle, ponašanje funkcije f u okolini izolovanog singulariteta zavisi od glavnog dijela Laurentovog reda u okolini tog singulariteta

Bez dokaza dajemo sljedeću teoremu, koja sadrži opštiji rezultat od teoreme Sohockog.

Teorema 3.5.10 (Picardova teorema)**.** *Ako je tačka $z_0 \in D$ esencijalni singularitet funkcije $f : D \to C$, onda za svaku okolinu $O(z_0) \subseteq D$ tačke z_0 i za za svako $w \in \overline{C}$ sa izuzetkom najviše jedne vrijednosti, postoji beskonačno mnogo tačaka $z \in O(z_0)$ tako da je $f(z) = w$.*

Primjer 3.5.11. Dokažimo da je tvrđenje Picardove teoreme tačno za funkciju $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Za $w \neq 0$ i $r > 0$ jednačina $e^{1/t} = w$, $|t| < r$ je ekvivalentna sa jednačinom $e^z = w$, za $|z| > 1$. Neka je $z = x + iy$ i $w = u_i v$. Tada je $|w| = e^x$ i $e^{iv} = e^{iy}$. Slijedi da su rješenja polazne jednačine $z = \log |w| + i(v + 2k\pi)$, $k \in Z$.

Razmotrimo posebno slučaj kada je izolovani singularitet funkcije f tačka $z_0 = \infty$. To znači da postoji $r > 0$, takvo da je na skupu $\{z \in C : |z| > r\}$ funkcija f analitička. Slijedi da je funkcija $\varphi(\eta) = f(\frac{1}{\eta})$ analitička na skupu $\{\eta : 0 < |\eta| < \frac{1}{r}\}$, pa je $\eta = 0$ izolovani singularitet funkcije φ. To znači da u okolini tačke 0 funkciju φ možemo razložiti u Laurentov red:

$$\varphi(\eta) = f(\frac{1}{\eta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \eta^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k \eta^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \eta^k,$$

odakle slijedi da je

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}.$$

Kažemo da je gornjom formulom dato razlaganje funkcije f u Laurentov red u okolini tačke ∞. Pri tome se red $\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^k$ naziva glavnim dijelom a red $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}$ pravilnim dijelom ovog Laurentovog reda. Klasifikacija izolovanog singulariteta $z_0 = \infty$ funkcije f vrši se na uobičajen način: ako glavni dio Laurentovog reda funkcije f u okolini beskonačno udaljene tačke sadrži beskonačno mnogo članova, onda je $z_0 = \infty$ esencijalni singularitet funkcije f; ako je za svako $k > m c_{-k} = 0$ i $c_{-m} \neq 0$, onda je $z_0 = \infty$ pol reda m funkcije f; ako Laurentov red sadrži samo pravilni dio onda je $z_0 = \infty$ otklonjivi singularitet. Ukupno, beskonačno udaljena tačka je esencijalni (pol reda m, otklonjiv singularitet) izolovani singularitet funkcije f ako i samo ako je tačka $\eta = 0$ esencijalni singularitet (pol reda m, otklonjiv singularitet) funkcije $\varphi(\eta) = f(\frac{1}{\eta})$. Odavde se lako izvodi zaključak da sve teoreme iz ovog paragrafa koje se odnose na izolovane singularitete važe i kada je izolovani singularitet beskonačno udaljena tačka.

3.5.1 Zadaci

1. Razviti u Laurentov red funkcije po stepenima $z - a$ u oblasti D ako je

   a) $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$, $a = 0, D = \{z \in C : 1 < |z| < 2\}$,

   b) $f(z) = \frac{z^3}{(z-2)(z+1)}$, $a = -1, D = \{z \in C : 0 < |z+1| < 3\}$.

2. Ispitati karakter singulariteta funkcije f ako je

   a) $f(z) = \dfrac{z}{e^z + 1}$,

   b) $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z^2}$,

   c) $f(z) = \sin \frac{z}{z+1}$,

   U sljedećim zadacima date funkcije razložiti u Laurentov red na datim prstenima ili u (šupljim) okolinama datih tačaka.

   Ako se traži razvoj funkcije f u okolini tačke $z = a$ onda treba naći razvoj po stepenima $z - a$. Ako se pak traži razvoj funkcije f u tački $z = \infty$ onda se podrazumijeva da treba naći razvoj po stepenima z ili, što je isto, po stepenima $1/z$.

3. $w = \dfrac{1}{z-2}$; (i) $z = 0$, (ii) $z = \infty$.

4. $w = \dfrac{1}{(z-a)^k}$ ($a \neq 0$, k prirodan broj); (i) $z = 0$, (ii) $z = \infty$.

5. $w = \dfrac{1}{z-a}$; $z = b, b \neq a$.

6. $w = \dfrac{1}{z(1-z)}$; (i) $z = 0$, (ii) $z = 1$, (iii) $z = \infty$.

7. $w = \dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ $(0 < |a| < |b|)$;

   (i) $z = 0$, (ii) $z = a$, (iii) $z = \infty$, (iv) $|a| < |z| < |b|$.

8. $w = \dfrac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}$; (i) $z = \infty$, (ii) $1 < |z| < 2$.

9. $w = \dfrac{1}{(z^2+1)^2}$; (i) $z = i$, (ii) $z = \infty$.

10. $w = \sqrt{(z-a)(z-b)}\; w(+\infty) = +\infty)$; $z = \infty$.

11. $w = \dfrac{z}{1-z^8} + z^2 e^{\frac{1}{z}}$; (i) $z = 0$, (ii) $z = \infty$.

12. $w = e^{\frac{1}{z-i}} \dfrac{\sin \frac{1}{z-i}}{(z-i)^2}$; $z = i$.

13. $w = e^{\frac{1}{1-z}}$; (i) $z = 1$, (ii) $z = \infty$.

14. $w = e^{z+\frac{1}{z}} + \sin z \sin \dfrac{1}{z}$; $0 < |z| < \infty$.

15. $w = \sin \dfrac{z}{1-z}$; (i) $z = 1$, (ii) $z = \infty$
(u posljednjem slučaju ograničiti se na prvim trimja članovima reda).

16. $w = \operatorname{ctg} z$; $z = 0$.

17. Dokazati da je svaka funkcija koja je meromorfne na C racionalna.

18. Neka je funkcija $f : \overline{D} \mapsto \mathbb{C}$ analitička u krugu $D = \{z : |z - z_0| < r\}$ i neprekidna na $\overline{D} = \{z : |z - z_0| \leq r\}$. Koristeći Poissonovu i Schwartzovu formulu, dokazati da je tada

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta - z_0| = r} \mathrm{Re}\ f(\eta) \frac{\eta - 2z_0 + z}{(\eta - z)(\eta - z_0)} \mathrm{d}\,\eta + i\,\mathrm{Im}\ f(z_0)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{|\eta - z| = r} \mathrm{Im}\ f(\eta) \frac{\eta - 2z_0 + z}{(\eta - z)(\eta - z_0} \mathrm{d}\,\eta + \mathrm{Re}\,(z_0);$$

$$\mathrm{Re}\ f(z) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\ f(z_0 + re^{it}) \frac{re^{it} + \rho e^{i\varphi}}{re^{it} - \rho e^{i\varphi}} \mathrm{d}\,t\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\ f(z_0 + e^{it}) \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\varphi_0 - \varphi)} \mathrm{d}\,t,$$

gdje je $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$.

3.6 Rezidium. Primjena na izračunavanje integrala kompleksnih funkcija

Definicija 3.6.1. *Rezidum u tački $z_0 \in D \subseteq C$ funkcije $f : D \mapsto \mathbb{C}$, analitičke na skupu $D \setminus \{z_0\}$, je kompleksan broj koji se označava sa $\mathrm{Res}(f; z_0)$ i definiše formulom*

$$\mathrm{Res}(f; z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} f(z) \mathrm{d}\, dz,$$

gdje je γ dio po dio glatka zatvorena kriva orijentisana suprotno kretanju kazaljke na satu, koja ograničava oblast $\Omega \subseteq D$, pri čemu $z_0 \in \Omega$.

Iz definicije rezidiuma i Cauchyeve teoreme slijedi da ako je funkcija f analitička u tački z_0, onda je $\mathrm{Res}(f; z_0) = 0$. Ako je z_0 izolovani singularitet funkcije f, tada se u nekom prstenu $\{z \in C : 0 < |z - z_0| < r\}$ funkcija f može razložiti u Laurentov red i $\mathrm{Res}(f, z_0) = c_{-1}$, gdje je c_{-1} koeficijenat uz $(z - z_0)^{-1}$. Odavde slijedi da ako je z_0 otklonjiv singularitet funkcije f, onda je $\mathrm{Res}(f; z_0) = 0$.

Ako je z_0 pol reda m funkcije f, onda je

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_0 + \cdots, 0 < |z - z_0| < r.$$

Funkcija

$$g(z) = (z - z_0)^m f(z) = c_{-m} + \cdots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + c_0(z - z_0)^m + \cdots,$$

je analitička u krugu $\{z : |z - z_0| < r\}$. Diferencirajući gornji red $(m - 1)$ puta dobijamo

$$g^{(m-1)}(z) = (m - 1)! c_{-1} + (z - z_0) g_1 z), g_1(z_0) \neq 0.$$

Odavde slijedi da je

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = c_{-1} = \frac{1}{(m - 1)!} \cdot \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{\mathrm{d}\, z^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)].$$

Specijalno, ako je z_0 prost pol, onda je

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Ako je $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, gdje su funkcije φ i ψ analitičke u $z_0, \varphi(z_0) \neq 0, \psi(z_0) = 0, \psi'(z_0) \neq 0$, onda je z_0 pol prvog reda funkcije f, pa je

$$\operatorname{Res}(f;z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Pretpostavimo da je funkcija f analitička u skupu $\{z\in C : |z|>r\}$, gdje je $r>0$. Rezidium funkcije f u tački $z_0=\infty$ definiše se formulom

$$\operatorname{Res}(f;\infty) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\mathrm{d}\,z,$$

gdje je $\gamma=\{z : |z|=\rho\}$, kružnica poluprečnika $\rho>r$. Ako se funkcija f razloži u Laurentov red u okolini tačke $z_0=\infty$, onda je njen rezidium u tački z_0 jednak koeficijentu uz $\frac{1}{z}$ sa promijenjenim znakom. Primijetimo da se taj koeficijent nalazi u pravilnom dijelu Laurentovog reda.

Iz definicije rezidiuma funkcije u datoj tački slijedi da, pod izvesnim uslovima, važi jednakost

$$2\pi i\cdot\operatorname{Res}(f;z_0) = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}\,z.$$

Odavde slijedi da integrale kompleksnih funkcija po zatvorenim krivim linijama možemo računati pomoću rezidiuma. U vezi sa ovom primjedbom važi sljedeće značajno tvrđenje.

Teorema 3.6.2 (Cauchyeva teorema o rezidiumima)**.** *Neka je D oblast u C i $A=\{z_1,\dots,z_n\}\subseteq D$. Ako je funkcija f analitička na skupu $D\setminus A$, onda za svaku konturu $\gamma\subseteq D$ koja ograničava oblast $\Omega\supseteq A, \Omega\subseteq D$, važi*

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}\,z = \sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f;z_k).$$

Dokaz. Neka su $\gamma_1,\dots,\gamma_n(\subseteq\Omega)$ konture opisane oko tačaka $z_1,\dots,z_n$, takve da njima ograničene zatvorene oblasti $\Omega_1\subseteq\Omega,\dots,\Omega_n\subseteq\Omega$ nemaju zajedničkih tačaka. Primjenjujući Cauchyevu teoremu za višestruko povezane oblasti, dobijamo

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}\,z = \sum_{k=1}^{n}\int_\gamma f(z)\mathrm{d}\,z = \sum_{k=1}^{n}2\pi i\operatorname{Res}(f;z_k) = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f;z_k).$$

□

Primjedba 3.6.3. Pretpostavimo da su $\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n$ konture u C koje su granice oblasti $\Omega_1,\Omega_2,\dots,\Omega_n$, pri čemu je za $i\neq j$ presjek $\overline{\Omega_i}\cap\overline{\Omega_j}$ prazan skup. Neka je dalje γ_0 kontura koja obuhvata konture $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ i ograničava oblast Ω_0. Sa D

označimo višestruko povezanu oblast $\Omega_0 \setminus (\Omega_1 \cup \cdots \Omega_n)$ a sa ∂D granicu oblast koja se sastoji od konačnog broja zatvorenih kontura, orijentisana tako da kada se obilazi granica ∂D, oblast D ostaje sa lijeve strane. Neka je $A \subseteq D$ konačan skup a funkcija f analitička na $D \setminus A$ i neprekidna na $\overline{D} \setminus A$. Tada, ponovo iz Cauchyeve teoreme, slijedi da je

$$\int_{\partial D} f(z) \mathrm{d}\, z = 2\pi i \sum_{z_k \in A} \operatorname{Res}(f; z_k).$$

Ako skup izolovanih singulariteta funkcije f sadrži i beskonačno udaljenu tačku, onda važi sljedeće tvrđenje.

Teorema 3.6.4. *Ako je funkcija analitička na skupu $C \setminus A$, gdje je $A = \{z_1, \ldots, z_n\}$ konačan skup, onda je*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f; z_k) + \operatorname{Res}(f; \infty) = 0.$$

Dokaz. Neka je γ krug koji obuhvata tačke $z_1, \ldots, z_n$, orijentisan suprotno kretanju kazaljke na satu. Tada je, prema prethodnoj teoremi,

$$\int_{\gamma^+} f(z) \mathrm{d}\, z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f; z_k).$$

S druge strane, na osnovu definicije rezidiuma funkcije f u tački ∞, važi jednakost

$$2\pi i \operatorname{Res}(f; \infty) = -\int_{\gamma^+} f(z) \mathrm{d}\, z.$$

Iz gornjih formula slijedi tvrđenje teoreme. $\square$

Na sljedećem primjeru pokazujemo kako se integrali po konturama mogu računati pomoću rezidiuma.

Primjer 3.6.5. Izračunaćemo $\int_\gamma \frac{1}{(1+z^2)^m} \mathrm{d}\, z$, gdje je γ

(a) polukrug $\{z : |z| = r, -r \leq \operatorname{Re}\, z \leq r, \operatorname{Im}\, z \geq 0\}$,

(b) krug $\{z : |z| = r\}$, $(r > 0, r \neq 1)$, orijentisan suprotno kretanju kazaljke na satu.

Izolovani singulariteti funkcije $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^m}$ su tačke $z_1 = i$ i $z_2 = -i$ i to su polovi reda m. Ako je $r < 1$, onda je i u slučaju (a) i u slučaju (b) funkcija f analitička u oblasti ograničenoj krivom γ, pa je u oba slučaja $\int_\gamma f(z) \mathrm{d}\, z = 0$. Ako je $r > 1$, onda je u slučaju (a) potrebno izračunati rezidium funkcije f u tački

$z_1 = i$ a u slučaju (b) rezidium iste funkcije u tačkama $z_1 = i$ i $z_2 = -i$. Imamo da je

$$\operatorname{Res}(f;i) = \lim_{z\to i}((z-i)^m \frac{1}{(1+z^2)^m})^{(m-1)} = \lim_{z\to i} \frac{1}{(i+z)^m})^{(m-1)} =$$

$$\lim_{z\to i} \frac{(-1)^{m-1} m(m+1)\cdots(2m-2)}{(i+z)^{2m-1}} = -i\frac{(2m-2)!}{2^{2m-1}((m-1)!)^2}.$$

Slijedi da je u slučaju (a)

$$\int_\gamma \frac{1}{(1+z^2)^m} = 2\pi i \operatorname{Res}(f;i) = 2\pi \frac{(2m-2)!}{2^{2m-1}((m-1)!)^2}.$$

3.6.1 Zadaci

1. Izračunati

   a) $\operatorname{Res}\{ze^{\frac{1}{z}} : z = 1\}$. b) $\operatorname{Res}\{\frac{1}{\sin \pi z} : z = 1\}$.

   c) $\operatorname{Res}\{\frac{\sin z}{z - \pi/4} : z = 1\}$. d) $\operatorname{Res}\{\frac{e^{\frac{1}{z}} z^n}{2z} : z = 1\}$.

   e) $\operatorname{Res}\{\frac{1}{z^2+4} : z = 1\}$.

2. Izračunati integrale:

   (a) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{z\,\mathrm{d}\,z}{(z^2-1)(z^2+1)^2},\ D = \{z \in C : |z - i| < \frac{3}{2}\}.$

   (b) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{z\,\mathrm{d}\,z}{(z^2-1)(z^2+1)^2},\ D = \{z \in C : |z - i| < \frac{3}{2}\},$

   (c) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{\mathrm{d}\,z}{z^5(z^{20}-3)},\ D = \{z \in C : |z| < 3\},$

   (d) $\displaystyle\int_{\partial D} z \cos \frac{z}{z+1} \mathrm{d}\,z,\ D = \{z \in C : |z| > 2\},$

   (e) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{z}{z-1} e^{-z^2} \mathrm{d}\,z,\ D = \{z \in C : |\arg z| < \frac{\pi}{4}\}.$

   (f) $\displaystyle\int_l \frac{1}{z} e^{\frac{1}{1-z}} \mathrm{d}\,z,$

   gdje je l zatvorena dio po dio glatka kriva.

3. Odrediti rezidiume sljedećih funkcija u svim izolovanim singularitetima i u tački $z = \infty$ i provjeriti da li su te funkcije meromorfne funkcije u cijeloj kompleksnoj ravni ili pak u proširenoj kompleksnoj ravni:

1. $w = \dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$. 2. $w = \dfrac{z^{2n}}{(1+z)^2}$ $(n \in \mathbb{N})$. 3. $w = \dfrac{1}{z(1-z^2)}$.

4. $w = \dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$. 5. $w = \dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$. 6. $w = \dfrac{e^z}{z^2(z^2+9)}$.

7. $w = \dfrac{1}{\sin z}$. 8. $w = \operatorname{ctg}^3 z$. 9. $w = z^3 \cos \dfrac{1}{z-2}$.

10. $w = e^{z+\frac{1}{z}}$. 11. $w = \sin z \sin \dfrac{1}{z}$. 12. $w = \cos \dfrac{z^2+4z-1}{z+3}$.

13. $w = \dfrac{1}{z(1-e^{-hz})}$ $(h \neq 0)$. 14. $w = \dfrac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}$.

15. $w = \dfrac{\tan z}{z^n}$ (n-prirodni broj). 16. $w = \Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

4. Odrediti rezidium funkcije

$$w(z) = \frac{1}{\sqrt{2-z}-1}$$

u tački $z = 1$ ($\sqrt{1} = 1$).

5. Funkcije $w = f(z)$ u tački $z = 0$ ima razvoj $w = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}$. Odrediti $\operatorname*{Res}_{z=1}[f(z)]^2$.

3.7 Primjena rezidiuma za izračunavanje određenih integrala

U ovom dijelu ćemo pokazati kako se Cauchyeve teoreme o rezidiumima mogu koristiti za izračunavanje određenih integrala realnih funkcija. Za početak posmatraćemo integrale tipa

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi,$$

gdje je R racionalna funkcija. Gornji integral se može računati uvodeći novu promjenljivu $z = e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Tada je $\cos\varphi = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \sin\varphi = \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}), \mathrm{d}\,z = izd\varphi$. Slijedi da je

$$\begin{aligned} I &= \int_{z|=1} R\left(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})\right)\frac{1}{iz}\mathrm{d}\,z \\ &= \int_{z|=1} R_1(z)\mathrm{d}\,z = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}(R_1; z_k), \end{aligned}$$

pri čemu se sabiraju rezidiumi funkcije R_1 u izolovanim singularitetima te funkcije, koji se nalazi u krugu $|z| < 1$. Primijetimo da je funkcija R_1 racionalna, pa su njeni izolovani singulariteti ili otklonjivi ili polovi. To znači da se za izračunavanje rezidiuma mogu primijeniti ranije opisani postupci.

Primjer 3.7.1. Izračunaćemo integral $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2}$, gdje je $a > b > 0$. Iz $\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$ uvrsteći $z = e^{i\varphi}$, dobijamo $\cos\varphi = \dfrac{1+z^2}{2z}$ i $\mathrm{d}\varphi = \dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$. Zato je

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2} &= \frac{4}{ib^2}\int_{|z|=1} \frac{z\,\mathrm{d}z}{(1+2a/bz+z^2)^2}\\ &= \frac{4}{ib^2}\int_{|z|=1} \frac{z\,\mathrm{d}z}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\end{aligned}$$

, gdje je $z_1 = -\frac{a}{b} + \sqrt{(\frac{a}{b})^2 - 1}$ i $z_2 = -\frac{a}{b} - \sqrt{(\frac{a}{b})^2 - 1}$. Lako se pokazuje da je $|z_1| < 1$ i $|z_2| > 1$, pa je

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2} &= 2\pi i \frac{4}{ib^2} \operatorname*{Res}_{z=z_1} \frac{z}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\\ &= \frac{8\pi}{b^2}\left(\frac{z}{(z-z_2)^2}\right)'_{z=z_1} = \frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Vratimo se opštijim pitanjima. Pretpostavimo da je funkcija f neprekidna na $\mathrm{Im}\ z \geq 0$ i analitička na skupu $\{z \in C : \mathrm{Im}\ z > 0\} \setminus A$, gdje je $A = \{z_1, \ldots, z_k\}$ skup izolovanih singulariteta funkcije f koji leže u gornjoj poluravni $\mathrm{Im}\ z > 0$. Pretpostavimo dalje da postoje $M > 0$, $r > 0$ i $\delta > 0$, takvi da za $|z| > r$, važi: $|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}$. Pokažimo kako se tada može izračunati integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}\,x$. Ako polukrug $K_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r, \mathrm{Im}\ z \geq 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\ z = 0, |\mathrm{Re}\ z| \leq r\}$ obuhvata sve tačke $z_1, z_2, \ldots, z_k$ i ako je $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r, \mathrm{Im}\ z \geq 0\}$, onda je

$$\int_{K_r} f(z)\mathrm{d}\,z = \int_{-r}^{r} f(x)\mathrm{d}\,x + \int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}\,z = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}(f; z_i).$$

Pri tome je

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}\,z\right| \leq \int_{\gamma_r} |f(z)|ds \leq \int_{\gamma_r} \frac{M}{|z|^{1+\delta}} ds = \frac{2\pi M}{r^{\delta}}.$$

Slijedi da

$$\int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}\,z \to 0 \text{ kada } r \to \infty.$$

Zbog toga je

$$\lim_{r\to 0}\int_{-r}^{r} f(x)\mathrm{d}\,x = 2\pi i\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Res}(f;z_i),$$

odnosno,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}\,x = 2\pi i\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Res}(f;z_i).$$

Pokazaćemo kako se mogu računati integrali oblika

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\alpha ix}\mathrm{d}\,x,\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos ax\mathrm{d}\,x\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin ax\mathrm{d}\,x,$$

gdje je a realan broj, $a > 0$. Prethodno ćemo formulisati i dokazati jedan pomoćni rezultat.

Lema 3.7.2 (Jordanova lema). *Neka je* $D = \{z \in C : \mathrm{Im}\ z \geq 0\}$ $f : D \to C$ *neprekidna funkcija na* D *i* $A = \{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$ *skup izolovanih singulariteta funkcije* f *koji leže u gornjoj poluravni* $\mathrm{Im}\ z > 0$*. Neka je dalje funkcija* f *analitička na skupu* $\{z \in C : \mathrm{Im}\ z > 0\} \setminus A$ *i* $\lim_{z\to\infty,\mathrm{Imz}\geq 0} f(z) = 0$*, pri čemu je konvergencija ravnomjerna u odnosu na* $\arg z$*. Ako je* $\gamma_r = \{z \in C : |z| = r, \mathrm{Im}\ z \geq 0\}$*, tada*

$$\int_{\gamma_r} f(z)e^{iz}\mathrm{d}\,z \to 0 \textit{ kada } r \to +\infty.$$

Dokaz. Ako sa M_r označimo maksimum funkcije $|f|$ na skupu γ_r, onda iz uslova teoreme slijedi da $M_r \to 0$ kada $r \to \infty$. Koristeći nejednakost $\sin\varphi > \frac{2}{\pi}\varphi$, koja važi za $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, dobijamo

$$|\int_{\gamma_r} f(z)e^{iz}\mathrm{d}\,z| = |\int_0^{\pi} f(re^{i\varphi})e^{ir\cos\varphi - r\sin\varphi} rie^{i\varphi}d\varphi| \leq$$

$$\int_0^{\pi} |f(re^{i\varphi})e^{ir\cos\varphi - r\sin\varphi} rie^{i\varphi}|d\varphi \leq M_r r\int_0^{\pi} e^{-r\sin\varphi}d\varphi =$$

$$2M_r r\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin\varphi}d\varphi \leq 2M_r r\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-2r\varphi}{\pi}}d\varphi = \frac{2M_r r\pi}{2r(1-e^{-r})} \leq$$

$$\leq M_r\pi \to 0 \text{ kada } r \to \infty.$$

$\square$

Dalje je

$$\int_{K_r} f(z)e^{iaz}\mathrm{d}\,z = \int_{-r}^{r} f(x)e^{iax}\mathrm{d}\,x + \int_{\gamma_r} f(z)e^{iaz}\mathrm{d}\,z = 2\pi i\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Res}(f;z_i).$$

Ocijenimo integral $\int_{\gamma_r} f(z)e^{iaz}\mathrm{d}\,z$. Uvedimo smjenu $az = w$. Neka je $\Gamma_r = \{w \in C : |w| = ar, \mathrm{Im}\ w \geq 0\}$. Primijetimo da funkcija $f_1(w) = f(\frac{w}{a}), a > 0$, zadovoljava sve uslove iz Jordanove leme, pa

$$\int_{\gamma_r} f(z)e^{iaz}\mathrm{d}\,z = \frac{1}{a}\int_{\Gamma_r} f(\frac{w}{a})e^{iw}\mathrm{d}\,w \to 0 \text{ kada } r \to \infty.$$

Odavde slijedi da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\mathrm{d}\,x = \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r} f(x)e^{iax}\mathrm{d}\,x = 2\pi i\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Res}(f(z)e^{iaz};z_i).$$

Primjer 3.7.3. Izračunaćemo integral

$$I = \int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}\,x.$$

U vezi sa ovim integralom posmatraćemo integral

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}\mathrm{d}\,x.$$

Pri tome je

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\ I_1.$$

Posmatrajmo zatvorenu krivu $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$, gdje su γ_1 i γ_3 duži a γ_2 i γ_4 polukrugovi: $\gamma_1 = \{z \in C : \mathrm{Im}\ z = 0, -R < \mathrm{Re}\ z < -r\}$, $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r, \mathrm{Im}\ z \geq 0\}$, $\gamma_3 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\ z = 0, r < \mathrm{Re}\ z < R\}, \gamma_4 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \mathrm{Im}\ z \geq 0\}$, pri čemu je $r < R$. Pretpostavimo da je kriva Γ orijentisana suprotno kretanju kazaljke na satu. Tada je

$$0 = \int_{\Gamma}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}\,z = \int_{\gamma_1}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}\,z + \int_{-R}^{-r}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}\,z + \int_{\gamma_3}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}\,z + \int_{r}^{R}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}\,z.$$

Na osnovu Jordanove leme slijedi da

$$\int_{\gamma_4}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}\,z \to 0 \text{ kada } R \to \infty.$$

Da bismo ocijenili drugi integral po polukrugu γ_2, primijetimo da za $z \neq 0$ važi

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \ c_n = \frac{1}{n!} i^n.$$

Pri tome je funkcija $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ analitička u C. Odavde slijedi da je

$$\int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}\, z = \int_{\gamma_2} \frac{1}{z} \mathrm{d}\, z + \int_{\gamma_2} h(z) \mathrm{d}\, z.$$

Postavljajući $z = re^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \pi$, dobijamo

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z} \mathrm{d}\, z = \int_{\pi}^{0} \frac{1}{re^{i\varphi}} rie^{i\varphi} d\varphi = -i\pi.$$

Funkcija h je ograničena u okolini tačke $z = 0$, pa važi:

$$|\int_{\gamma_2} h(z) \mathrm{d}\, z| \leq \int_{\gamma_2} |h(z)| ds \leq \mathrm{const} \cdot \pi r \to 0 \text{ kada } r \to 0.$$

Slijedi da

$$\int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}\, z \to 0 \text{ kada } r \to 0$$

Ukupno važi:

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}\, z + \int_{r}^{R} \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}\, z \to -i\pi \text{ kada } r \to 0, R \to \infty,$$

odnosno,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} \mathrm{d}\, x = -i\pi.$$

Odavde slijedi da je $2I = \mathrm{Im}\ I_1 = \pi$ i

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}\, x = \frac{\pi}{2}.$$

Razmotrimo još integrale tipa $I = \int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x)$, gdje je α realan broj (interesantan je jedino slučaj kada α nije cio broj), a $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ racionalna funkcija. Pretpostavićemo da funkcija Q nema nula na $[0, +\infty)$ i da je $P(0) \neq 0$. Dalje pretpostavljamo da važi:

$$\lim_{z \to 0} |z|^\alpha f(z) = \lim_{z \to \infty} |z|^\alpha f(z) = 0.$$

Odavde slijedi da je $\alpha > 0$, a za takve vrijednosti parametra α, posmatrani integral $I = \int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x)$ konvergira. Pri tome postoji cijeli broj $k > \alpha$, takav da je $f(z) \sim \frac{A}{z^k}$ gdje je $A \neq 0$. Da bismo koristili prethodne metode za izvođenje odgovarajućih formula, treba definisati analitičku funkciju koja će se na $[0, +\infty)$ poklopiti sa podintegralnom funkcijom. Osnovna razlika u odnosu na prethodna razmatranja je ta što je funkcija $z^{\alpha-1}$ višeznačna. Izdvojimo jednu njenu analitičku granu na sljedeći način. Sa D označimo kompleksnu ravan sa razrezom $[0, +\infty)$. Neka je h analitička grana funkcije $z^{\alpha-1}$ koja je pozitivna na gornjoj granici razreza. U oblasti D je $h(z) = r^{\alpha-1}e^{i\varphi(\alpha-1)}, 0 < \varphi < 2\pi$. Na gornjoj granici razreza $(\varphi = 0)$ je $h(x + i0) = h(x) = x^{\alpha-1} > 0, x > 0$, dok je na donjoj granici $(\varphi = 2\pi), h(x - i0) = x^{\alpha-1}e^{i2\pi(\alpha-1)} = h(x)e^{i2\pi\alpha}, x > 0$. Tada je

$$f(x - i0) = e^{i2\pi\alpha} f(x).$$

Neka je $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_3$, gdje su, kao i u prethodnom primjeru, γ_2 i γ_4 polukrugovi, a γ_1 i γ_3 duži, Tada je

$$\int_\Gamma z^{\alpha-1} f(z) \mathrm{d}\, z = \int_{\gamma_1} z^{\alpha-1} f(z) \mathrm{d}\, z + \int_{-R}^{-r} z^{\alpha-1} e^{i2\pi\alpha} f(x) \mathrm{d}\, x +$$

$$\int_{\gamma_3} z^{\alpha-1} f(z) \mathrm{d}\, z + \int_r^R x^{\alpha-1} f(x) \mathrm{d}\, x = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(z^{\alpha-1} f(z); z_k),$$

pri čemu se sabiraju rezidiumi u svim singularitetima funkcije $z^{\alpha-1} f(z)$ koji pripadaju skupu $C \setminus \{0\}$.

Ocijenimo prvi i treći integral. Neka je

$$M_r = \max\{|z^{\alpha-1} f(z)| : |z| = r\} = r^{\alpha-1} \max\{|f(z)| : |z| = r\}.$$

Tada

$$r \cdot M_r = r^\alpha \max\{|f(z)| : |z| = r\} \to 0 \text{ kada } r \to 0.$$

Odavde slijedi da

$$|\int_{\gamma_1} z^{\alpha-1} f(z) \mathrm{d}\, z| \leq M_r \cdot 2\pi r \to 0 \text{ kada } r \to 0.$$

Na sličan način se dokazuje da

$$\int_{\gamma_3} z^{\alpha-1} f(z) \mathrm{d}\, z \to 0 \text{ kada } R \to \infty.$$

To znači da je

$$2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(z^{\alpha-1} f(z); z_k)$$
$$= \lim_{r\to 0, R\to\infty} \left(\int_{-R}^{-r} x^{\alpha-1} e^{i2\pi\alpha} f(x) \mathrm{d}\, x + \int_{r}^{R} x^{\alpha-1} f(x) \mathrm{d}\, x \right),$$

odnosno

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x) \mathrm{d}\, x = \frac{1}{1 - e^{i2\pi\alpha}} 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(z^{\alpha-1} f(z); z_k).$$

3.8 Primjena logaritamskog rezidiuma

Logaritamskim izvodom funkcije f naziva se funkcija

$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{\mathrm{d}\, z}(\ln f(z)).$$

Svaki izolovani singularitet funkcije f je izolovani singularitet funkcije φ. Pored toga, i nule funkcije f su izolovani singulariteti funkcije φ. Zbog toga je prirodno da rezidium funkcije φ sadrži informaciju o nulama i singularitetima funkcije f.

Teorema 3.8.1. *Neka je $D \subseteq C$ oblast u kompleksnoj ravni C, $A = \{z_1, \ldots, z_k\} \subseteq D$ skup polova reda $m_1, \ldots, m_k$ funkcije f u skupu D, a $B = \{a_1, \ldots, a_n\}$ skup nula reda $l_1, \ldots, l_n$ iste funkcije u oblasti D. Ako je f analitička u oblasti $D \setminus A$, a $\Gamma \subseteq D$ kontura koja obuhvata sve polove i sve nule funkcije f onda je*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}\, z = \sum_{i=1}^{n} l_i - \sum_{i=1}^{k} m_i.$$

Dokaz. Iz uslova teoreme slijedi da je funkcija $\varphi(z)$ analitička na skupu $D \setminus (A \cup B)$. Pri tome, za svako $j \in \{1, \ldots, n\}$, postoji okolina $O_j = \{z \in C : |z - a_j| < r_j\}$ tačke a_j, takva da za $z \in O_j$ važi jednakost: $f(z) = (z - a_j)^{l_j} g(z)$, gdje je funkcija g analitička u O_j i $g(a_j) \neq 0$. Odavde slijedi da je za $z \in O_j$,

$$\varphi(z) = \frac{l_j}{z - a_j} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

To znači da je $z = a_j$ pol prvog reda funkcije φ, pa je $\mathrm{rez}(\varphi; a_j) = l_j$.

Dalje, za svako $i \in \{1, \ldots, k\}$ postoji $r_i > 0$, takvo da ako $z \in U_i = \{z \in C : 0 < |z - z_i| < r\}$, tada je

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_i)^{m_i}}, h(z_i) \neq 0.$$

Pri tome je z_i otklonjiv singularitet funkcije h, pa je za $z \in U_i$,

$$\varphi(z) = \frac{-m_i}{z - z_i} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

To znači pa je i tačka z_i pol prvog reda funkcije φ, a $\mathrm{Res}(\varphi; z_i) = -m_i$.

Prema teoremi o rezidiumu, odavde slijedi da je

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \varphi(z)\mathrm{d}\,z = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}\,z = \sum_{i=1}^{n} l_i - \sum_{i=1}^{k} m_i.$$

$\square$

Prethodna teorema ima zanimljivu geometrijsku interpretaciju.

Teorema 3.8.2 (Princip argumenta)**.** *Ako su ispunjeni uslovi prethodne teoreme, onda je razlika $\sum_{i=1}^{n} l_i - \sum_{i=1}^{k} m_i$ između broja nula i broja polova funkcije f jednaka broju obilazaka krive $\gamma = f(\Gamma)$ za jedan obilazak krive Γ.*

Dokaz. Pošto je

$$\sum_{i=1}^{n} l_i - \sum_{i=1}^{k} m_i = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}\,z,$$

dovoljno je dokazati da je integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}\,z$$

jednak broju obilazaka krive γ. Dalje, iz jednakosti $\ln f(z) = \ln |f(z)| + i \arg f(z)$, slijedi da je

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}\,z = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma d\ln f(z) = \frac{1}{2\pi}\Delta \arg f(z)|_\Gamma,$$

gdje je sa $\Delta \arg f(z)|_\Gamma$ označena promjena argumanta vrijednosti funkcije f kada se obiđe kontura Γ. Odavde, s obzirom da se obilaskom krive γ argument $f(z)$ promijeni za 2π, slijedi tvrđenje teoreme. $\square$

Primjedba 3.8.3. Tvrđenje teoreme važi i ako se pretpostavi da je funkcija f analitička u $D \setminus A$ i neprekidna na $\overline{D} \setminus A$, a kontura Γ ograničava D.

Za dokaz sljedeće teoreme, potreban je jedan pomoćni rezultat.

Lema 3.8.4. *Ako su $\varphi_1 : [\alpha, \beta] \to C$ i $\varphi_2 : [\alpha, \beta] \to C$ zatvoreni dio po dio glatki putevi i ako je $a \in \mathbb{C}$ kompleksan broj takav da je*

$$(\forall t \in [\alpha, \beta]) \ |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |a - \gamma_1(t)| + |a - \gamma_2(t)|,$$

onda je

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(a) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(a).$$

Dokaz. Iz uslova teoreme slijedi da tačka a ne pripada nijednoj od krivih $\gamma_1 = \{\varphi_1(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$ $\gamma_2 = \{\varphi_2(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$, pa je funkcija $\varphi(t) = \frac{\varphi_1(t)-a}{\varphi(t)_2-a}$ definisana na $[\alpha, \beta]$. Pri tome važi

$$\frac{\varphi'(t)}{\gamma} = \frac{\varphi_1'(t)}{\gamma_1 - a} - \frac{\varphi_2'(t)}{\gamma_2 - a}.$$

Dalje, iz uslova teoreme slijedi da je $|1-\gamma(t)| < 1+|\gamma(t)|$, za svako $t \in [\alpha, \beta]$. To znači da kriva $\gamma = \{\varphi(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$ pripada uglu $A = \{z : -2\pi/3 < \arg z < 2\pi/3\}$ koji je prosto povezana oblast u C. Funkcija $h(z) = \ln(z) = \int_1^z \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}$ je definisana i analitička na A i pri tome je $h'(z) = 1/z$. Odavde, s obzirom da je φ zatvoren put, slijedi:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_\gamma(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 h'(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{d}{dt}(h(\gamma(t)))\mathrm{d}t = h(\gamma(\beta)) - h(\gamma(\alpha)) = 0.\end{aligned}$$

Odavde i definicije indeksa krive slijedi da je $\mathrm{Ind}_\gamma(0) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(a) - \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(a)$. $\square$

Teorema 3.8.5 (Roucheova teorema)**.** *Neka su funkcije $f : D \mapsto \mathbb{C}$ i $g : D \mapsto \mathbb{C}$ analitičke u oblasti D i $\Gamma \subseteq D$ kontura koja obuhvata oblast $\Omega \subseteq D$. Ako je za svako $z \in \Gamma, |f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$, onda funkcije f i g imaju isti broj nula u Ω.*

Dokaz. Napomenimo da se u iskazu teoreme podrazumijeva da se svaka nula računa onoliko puta kolika je njena višestrukost.

Broj nula funkcije f i broj nula funkcije g označimo sa $N(f)$ i $N(g)$. Neka je $\gamma_1 = f(\Gamma)$ i $\gamma_2(s) = g(\Gamma)$. Ispunjeni su uslovi prethodne leme (za $a = 0$), pa je $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(0)$. S druge strane je

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}\,z}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}\,z$$

i

$$\operatorname{Ind}_{\gamma_2}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{\mathrm{d}\, z}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g'(z)}{g(z)}\mathrm{d}\, z.$$

Odavde, s obzirom da je prema teoremi 3.8.1 $N(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}\, z$ i $N(g) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g'(z)}{g(z)}\mathrm{d}\, z$, slijedi da je $N(f) = N(g)$. □

U formi posljedica dajemo još dvije formulacije Roucheove teoreme.

Posljedica 3.8.6. *Neka su funkcije $f : D \to \mathbb{C}$ i $g : D \mapsto \mathbb{C}$ analitičke u oblasti D i $\Gamma \subseteq D$ kontura koja obuhvata oblast $\Omega \subseteq D$. Ako je za svako $z \in \Gamma$, $|g(z)| < |f(z)|$, onda funkcije f i $F = f + g$ imaju isti broj nula u Ω.*

Dokaz. Iz uslova slijedi da, za svako $z \in \Gamma$, važi

$$|g(z)| - |-f(z)| < 0 \leq |f(z) + g(z)| = |F(z)|,$$

pa je

$$|F(z)| + |-f(z)| > |g(z)| = |F(z) + (-f(z))|, \text{ za svako } z \in \Gamma.$$

Odavde, primjenom Roucheove teoreme, zaključujemo da funkcije F i $-f$ imaju isti broj nula u Ω. □

Posljedica 3.8.7. *Neka su funkcije $f : D \to \mathbb{C}$ i $g : D \mapsto \mathbb{C}$ analitičke u oblasti D i $\Gamma \subseteq D$ kontura koja obuhvata oblast $\Omega \subseteq D$. Ako za svako $z \in \Gamma$ važi $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$, onda funkcije f i g imaju isti broj nula u Ω.*

Dokaz. Primjenom prethodne posljedice na par funkcija f i $G = g - f$, dobijamo da funkcije f i $G + f = g$ imaju isti broj nula u Ω. □

I jedno svojstvo jednolisnih funkcija može se izvesti kao posljedica cka z_0 je Roucheove teoreme.

Posljedica 3.8.8. *Ako je funkcija $f : D \mapsto \mathbb{C}$ jednolisna u oblasti D onda je, za svako $z \in D$, $f'(z) \neq 0$.*

Dokaz. Neka je $a \in \Omega$ proizvoljna tačka. Treba da dokažimo da je $f'(a) \neq 0$. Po Taylorovoj formuli imamo da je

$$f(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z-a)^k, \quad |z - a| < R = \operatorname{dist}(a, \partial\Omega). \tag{3.8.3}$$

Jasno je $a_1 = f'(a)$. Treba dokazati da je $a_1 \neq 0$. Pretpostavimo suprotno. Neka je $n = \min\{k : a_k \neq 0\}$. Takav n postoji, inače bi funkcija bila identički jednaka nuli (na osnovu teoreme o jedinstvenosti).

Dakle imamo
$$f(z) - a_0 = (z-a)^n \varphi(z),$$
gdje je $\varphi(z)$ funkcija koja je razlicit od nule za $z = a$ pa i u nekoj $\delta-$okolini od a.

Kako je
$$f'(z) = n(z-a)^{n-1}\varphi(z) + (z-a)^n \varphi'(z) = (z-a)^{n-1}(n\varphi(z) + (z-a)\varphi'(z)),$$
slijedi da možemo izabrati takvo δ tako da je
$$f'(z) \neq 0, \ \text{ za }, \ 0 < |z-a| \leq \delta. \tag{3.8.4}$$
Neka je
$$m = \min\{|\varphi(z)|, |z-a| \leq \delta\}$$
$$= (\text{na osnovu principa maksimuma}) = \min\{|\varphi(z)|, |z-a| = \delta\}.$$

Neka je $0 < \alpha < \delta^n m$ i posmatramo funkcije $\psi(z) = f(z) - a_0 = (z-a)^n \varphi(z)$ i $\phi(z) = \psi(z) - \alpha$.

Tada imamo
$$|\psi(z) - \phi(z)| = |\alpha| < \delta^n m \leq |\psi(z)|, \ \ |z-a| = \delta.$$
Na osnovu Teoreme Rouche, važi da ψ i ϕ imaju isti broj nula na $|z-a| < \delta$, uključujući višestrukost. Funkcija ψ ima n nula, prema tome toliko nula ima i funkcija $\phi(z) = f(z) - a_0 - \alpha$. Kako je $\phi'(z) = f'(z) \neq 0$ za $0 < |z-a| \leq \delta$ (na osnovu (3.8.4) i kako je $\phi(a) \neq 0$, slijedi da su nule od ϕ proste (Ako neka nula b nije prosta, onda je $\varphi'(b) = 0$). Otud slijedi da postoji n razlicitih tacaka z_k, $k = 1, \ldots, n$ iz $|z-a| < \delta$ koje zadovoljavaju jednakost $\phi(z_k) = f(z_k) - a_0 - \alpha = 0$. Ovo protivureči injektivnosti funkcije f na Ω. Zaključak je da je $n = 1$, odnosno $f'(a) \neq 0$. □

Posljedica 3.8.9 (Osnovni stav algebre)**.** *Polinom* $P_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, a_n \neq 0$ *nad poljem kompleksnih brojeva ima tačno* n *nula.*

Dokaz. Ovu značajnu teoremu dokazali smo ranije. Dokaz koji ćemo ovdje prezentirati zasnovan je na primjeni Roucheove teoreme.

Primijetimo da je
$$\begin{aligned}
|P_n(z)\,| &= |a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \\
&= \left| a_n z^n \left(1 + b_{n-1}\frac{1}{z} + \cdots + b_1 \frac{1}{z^{n-1}} + b_0 \frac{1}{z^n} \right) \right| \\
&\geq |a_n z^n| \left(1 - \left| b_{n-1}\frac{1}{z} + \cdots + b_1 \frac{1}{z^{n-1}} + b_0 \frac{1}{z^n} \right| \right) \\
&\geq |a_n z^n| \left(1 - |b_{n-1}|\frac{1}{|z|} - \cdots - |b_1| \frac{1}{|z^{n-1}|} - |b_0| \frac{1}{|z^n|} \right),
\end{aligned}$$

gdje je $b_i = \frac{a_i}{a_n}$. Pošto postoji $r > 0$, takvo da za $|z| \geq r$ važi

$$|b_{n-1}|\frac{1}{|z|} + \cdots + |b_1|\frac{1}{|z^{n-1}|} + |b_0|\frac{1}{|z^n|} < \frac{1}{2},$$

pa za $|z| \geq r$ važi: $|P_n(z)| > \frac{|a_n z^n|}{2}$. Neka je $g(z) = P_n(z), f(z) = -a_n z^n$. Tada je, za $z \in \Gamma = \{z \in C : |z| = r\}$,

$$\begin{aligned}
|f(z) + g(z)| &= |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \\
&= |a_n z^n| \left| b_{n-1}\frac{1}{z} + \cdots + b_1\frac{1}{z^{n-1}} + b_0\frac{1}{z^n} \right| \\
&\leq |a_n z^n| \left(|b_{n-1}|\frac{1}{|z|} + \cdots + |b_1|\frac{1}{|z^{n-1}|} + |b_0|\frac{1}{|z^n|} \right) \\
&< \frac{|a_n z^n|}{2} < |a_n z^n| < |f(z) + |g(z)|.
\end{aligned}$$

Odavde, primjenom Roucheove teoreme, zaključujemo da funkcije $g(z) = P_n(z)$ i $f(z) = -a_n z^n$ imaju isti broj nula u $\Omega = \{z \in C : |z| < r\}$. Taj broj nula jednak je n, što znači da polinom P_n ima n nula u C. □

Primjer 3.8.10. Dokažimo da jednačina $3 + z^2 = 2e^{iz}$ ima tačno jedno rješenje u otvorenoj gornjoj poluravni. Posmatrajmo funkcije $f(x) = z^2 + 3$ i $g(z) = -2e^{iz}$. Neka je $\Omega = \{z : |z| < R, \Im z > 0\}$ polukrug u gornjoj poluravni poluprečnika $R > \sqrt{5}$. Tada za $z \in [-R, R]$, $|f(z)| \geq 2 = |g(z)|$. Dalje, za $z = Re^{it}$ važi $|f(z)| \geq R^2 - 3 > 2$, $|g(z)| = 2e^{-R\sin t} \leq 2$. Prema Roucheovoj teoremi, funkcija $f + g$ ima isti broj nula na Ω kao i funkcija f, dakle jednu. Pošto je R proizvoljan broj veći od $\sqrt{5}$, odavde slijedi da jednačina $3 + z^2 = 2e^{iz}$ ima tačno jednu nulu na gornjoj poluravni.

3.8.1 Zadaci

1. a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^4+1}$, b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\mathrm{d}\,x}{x^4-1}$, c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{(a+bx^2)^n}$.

2. *a)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x\mathrm{d}\,x}{x(x^2+1}$, b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\mathrm{d}\,x}{(x^2+1)^3}$, c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\frac{\pi x}{2}\mathrm{d}\,x}{x^2-1}$.

3. a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin^{2n} x\mathrm{d}\,x$, b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \cos^{2n} x\cos 2mx\mathrm{d}\,x$,

   c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos nx\mathrm{d}\,x}{1-a\cos x}, a \in (-1,1)$.

4. a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \ln x \mathrm{d}\, x}{x^2+1}$, b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \mathrm{d}\, x}{x^4+1}$, c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} \mathrm{d}\, x}{1+e^x}, a \in (0,1)$.

5. Izračunati $I = \int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1} \mathrm{d}\, x$. Rez. $I = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

6. Izračunati integrale $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} \mathrm{d}\, x$. Rez. $\frac{\pi}{2}$.

7. Izračunati integral $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} \mathrm{d}x$ Rez. $\frac{\pi(\beta-\alpha)}{2}$.

8. Izračunati integrale $I_1 = \int_0^\infty \cos x^2 \mathrm{d}\, x, I_2 = \int_0^\infty \sin x^2 \mathrm{d}\, x$. Rez. $I_1 = I_2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$.

9. Izračunati $\int_{\gamma_3} \frac{x^{\alpha-1}}{x+1} \mathrm{d}\, x, 0 < \alpha < 1$. Rez. $\frac{\pi}{\sin \alpha\pi}$.

10. Izračunati $\int_{\gamma_3} \frac{x^{\alpha-1}}{1-x} \mathrm{d}\, x, 0 < \alpha < 1$. Rez. $\pi \cdot \cot \alpha\pi$.

11. Izračunati integral $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\, x}{1+x^{2n}}$. Rez. $\frac{\pi}{2n \sin \frac{\pi}{2n}}$.

12. Odrediti broj nula polinoma $P_5(z) = z^5 + 5z^3 + 2z$ a) krugu $|z| < 1$; b) u prstenu $1 \leq |z| < 2$; c) u prstenu $2 \leq |z| < 3$.

13. Odrediti broj rješenja jednačine u oblasti D :

    a) $z^4 - 9z + 1 = 0,\ D = \{z \in C : |z| < 2\}$,

    b) $z^{2n} + 4z^{2n-1} + 1 + 1 = 0, D = \{z \in C : \mathrm{Re}\ z > 0\}$.

14. Dokazati da za veliko $n \in N$ jednačina

$$2 - 2 \cdot 3z + 3 \cdot 4z^2 + \cdots + (-1)^n (n+1)(n+2) z^n = 0$$

    nema rješenja u oblasti $D = \{z \in C : |z| < 1\}$.

15. Dokazati da jednačine a) $z \sin z = 1$ i b) $\tan z = z$ imaju samo realna rješenja.