Theorem 0.1 (Theorema Rouche)**.** *Ako su f i g dvije analitička preslikavanja definisana u oblasti D koja sadrži Žordanovu konturu γ zajedno sa njenom unutrašnjosti Ω i ako važi nejednakost $|g(z)+f(z)| < |f(z)|+|g(z)|$ za svako $z \in \gamma$, onda f i g imaju isti broj nula na Ω, t.j. $N(f,\Omega) = N(g,\Omega)$.*

Skica dokaza. Imamo da je

$$\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}.$$

Ako je $\Gamma = f(\gamma)$, onda na osnovu principa argumenta je

$$N(f,\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)dz}{f(z)} = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{dz}{z} = \mathrm{Ind}_\Gamma(0).$$

Slično se dobija za $\Gamma_1 = g(\gamma)$

$$N(g,\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{g'(z)dz}{g(z)} = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1} \frac{dz}{z} = \mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(0).$$

Sada se pozivamo na tvrdjenje koje se odnosi na indeks krivih.

Ako imamo dvije krive α i β koje zadovoljavaju uslov $|\alpha(s)+\beta(s)| < |\alpha(s)|+|\beta(s)|$, onda $\mathrm{Ind}_\alpha(0) = \mathrm{Ind}_\beta(0)$.

□

Theorem 0.2. *Ako je f injektivna analitička funkcija defininisana u nekoj oblasti Ω kompleksne ravni, onda je $f'(z) \neq 0$ za svako z.*

Dokaz. Neka je $a \in \Omega$ proizvoljna tačka. Treba da dokažimo da je $f'(a) \neq 0$. Po Taylorovoj formuli imamo da je

$$f(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z-a)^k, \quad |z-a| < R = \mathrm{dist}(a,\partial\Omega). \tag{0.1}$$

Jasno je $a_1 = f'(a)$. Treba dokazati da je $a_1 \neq 0$. Pretpostavimo suprotno. Neka je $n = \min\{k : a_k \neq 0\}$. Takav n postoji, inače bi funkcija bila identički jednaka nuli (na osnovu teoreme o jedinstvenosti).

Dakle imamo

$$f(z) - a_0 = (z-a)^n\varphi(z),$$

gdje je $\varphi(z)$ funkcija koja je razlicit od nule za $z = a$ pa i u nekoj $\delta-$okolini od a.

Kako je

$$f'(z) = n(z-a)^{n-1}\varphi(z) + (z-a)^n\varphi'(z) = (z-a)^{n-1}(n\varphi(z) + (z-a)\varphi'(z)),$$

slijedi da možemo izabrati takvo δ tako da je

$$f'(z) \neq 0, \quad \text{za} \ , \quad 0 < |z-a| \leqslant \delta. \tag{0.2}$$

Neka je

$$\begin{aligned} m &= \min\{|\varphi(z)|, |z-a| \leqslant \delta\} \\ &= (\text{na osnovu principa maksimuma}) = \min\{|\varphi(z)|, |z-a| = \delta\}. \end{aligned}$$

Neka je $0 < \alpha < \delta^n m$ i posmatramo funkcije $\psi(z) = f(z) - a_0 = (z - a)^n \varphi(z)$ i $\phi(z) = \psi(z) - \alpha$.

Tada imamo

$$|\psi(z) - \phi(z)| = |\alpha| < \delta^n m \leqslant |\psi(z)|, \quad |z - a| = \delta.$$

Na osnovu Teoreme Rouche, važi da ψ i ϕ imaju isti broj nula na $|z-a| < \delta$, uključujući višestrukost. Funkcija ψ ima n nula, prema tome toliko nula ima i funkcija $\phi(z) = f(z) - a_0 - \alpha$. Kako je $\phi'(z) = f'(z) \neq 0$ za $0 < |z-a| \leqslant \delta$ (na osnovu (0.2) i kako je $\phi(a) \neq 0$, slijedi da su nule od ϕ proste (Ako neka nula b nije prosta, onda je $\varphi'(b) = 0$). Otud slijedi da postoji n razlicitih tacaka z_k, $k = 1, \ldots, n$ iz $|z - a| < \delta$ koje zadovoljavaju jednakost $\phi(z_k) = f(z_k) - a_0 - \alpha = 0$. Ovo protivureči injektivnosti funkcije f na Ω. Zaključak je da je $n = 1$, odnosno $f'(a) \neq 0$. □

1. Konformna preslikavanja

Definition 1.1. Pretpostavimo da se krive $\alpha : [-1,1] \to \mathbf{C}$ i $\beta : [-1,1] \to \mathbf{C}$ sijeku u tacki $a = \alpha(0) = \beta(0)$. Ugao $\theta = \angle(\alpha, \beta)$ se definise kao ugao koji zaklapaju tangente krivih α i β u tački a. Drugim riječima:

$$\cos\theta = \frac{\langle \alpha'(0), \beta'(0) \rangle}{|\alpha'(0)| \cdot |\beta'(0)|}.$$

Definition 1.2 (Geometrijksa definicija)**.** Kažemo da C^1 preslikavanje $f : \Omega \to D$, koje čuva orijentaciju, izmedju dva otvorena domena kompleksne ravni konformno ako f čuva ugao izmedju krivih. Drugim rijecima, ako je $\gamma = f(\alpha)$ i $\delta = f(\beta)$, onda $\angle(\alpha, \beta) = \angle(\gamma, \delta)$, pod pretpostavkom da se α i β sijeku.

Definition 1.3 (Analitična definicija)**.** Kažemo da C^1 preslikavanje $f = u + iv : \Omega \to D$ izmedju dva otvorena domena kompleksne ravni konformno ako je f holomorfno i $f'(z) \neq 0$.

Theorem 1.4. *Analitička definicija je ekvivalentna geometrijskoj definiciji.*

Proof. Pretpostavimo da je f holomorfna, i pretpostavimo da je $f'(z) \neq 0$ za $z \in \Omega$. Neka su α i β glatke krive u Ω koje se sijeku u tački a pod uglom θ. Tada imamo

$$\cos\theta = \frac{\langle \alpha'(0), \beta'(0) \rangle}{|\alpha'(0)| \cdot |\beta'(0)|}.$$

Neka je θ' ugao izmedju krivih γ i δ u $b = f(a)$.

Tada je

$$\cos\theta' = \frac{\langle \gamma'(0), \delta'(0) \rangle}{|\gamma'(0)| \cdot |\delta'(0)|}.$$

Kako je $\gamma'(0) = f'(a)\alpha'(0)$ i $\delta'(0) = f'(a)\beta'(0)$, slijedi da je

$$\begin{aligned}\cos\theta' = \frac{\langle \gamma'(0), \delta'(0)\rangle}{|\gamma'(0)| \cdot |\delta'(0)|} &= \frac{\mathrm{Re}(\gamma'(0)\overline{\delta'(0)})}{|\gamma'(0)| \cdot |\delta'(0)|} \\ &= \frac{\mathrm{Re}(f'(a)\alpha'(0)\overline{f'(a)\beta'(0)})}{|f'(a)\alpha'(0)| \cdot |f'(a)\beta'(0)|} \\ &= \frac{|f'(a)|^2}{|f'(a)|^2}\frac{\mathrm{Re}(\alpha'(0)\overline{\beta'(0)})}{|\alpha'(0)| \cdot |\beta'(0)|} \\ &= \frac{\langle \alpha'(0), \beta'(0)\rangle}{|\alpha'(0)| \cdot |\beta'(0)|} = \cos\theta.\end{aligned}$$

Odavde slijedi da je $\theta = \theta'$, jer je ugao izmedju krivih uvijek broj iz intervala $(0,\pi)$ na kojem je funkcija kosinus injektivna.

Obratno. Pretpostavimo da funkcija zadovoljava geometrijsku definiciju konformnosti. Neka je $A = f_z(a) = \frac{1}{2}(f_x - if_y)$ i $B = f_{\bar z}(a) = \frac{1}{2}(f_x + if_y)$.

Neka je $a \in \Omega$ i neka su $\alpha(r) = a + re^{\varphi i}$, i $\beta(r) = a + re^{i(\varphi+\pi/2)}$, $r \in (-\epsilon, \epsilon)$. Tada krive α i β se sijeku u tacki $a = \alpha(0) = \beta(0)$ pod uglom $\theta = \pi/2$. Zato je $\cos\theta = 0$. Neka je $\gamma(t) = f(\alpha(t))$ i $\delta(t) = f(\beta(t))$. Tada je

$$\gamma'(0) = A\alpha'(0) + B\overline{\alpha'(0)}$$

i

$$\delta'(0) = A\beta'(0) + B\overline{\beta'(0)}.$$

Kako je $\theta' = \pi/2$, slijedi da je

$$\mathrm{Re}\left(\gamma'(0)\overline{\delta'(0)}\right) = 0,$$

za svako φ.

Dalje imamo da je

$$\mathrm{Re}\left(\gamma'(0)\overline{\delta'(0)}\right) = \mathrm{Re}[(A\alpha'(0) + B\overline{\alpha'(0)})\overline{(A\beta'(0) + B\overline{\beta'(0)})}].$$

Kako je $\alpha'(0) = e^{\varphi i}$ i $\beta'(0) = ie^{\varphi i}$, slijedi da je

$$(A\alpha'(0) + B\overline{\alpha'(0)})\overline{(A\beta'(0) + B\overline{\beta'(0)})} = 2\mathrm{Re}(iA\overline{B}e^{2\varphi i}) + i(|B|^2 - |A|^2).$$

Zato je

$$\mathrm{Re}((A\alpha'(0) + B\overline{\alpha'(0)})\overline{(A\beta'(0) + B\overline{\beta'(0)})}) = 2\mathrm{Re}(iA\overline{B}e^{2\varphi i}) = 0$$

za svako φ. Sada postoji $\varphi \in [0, 2\pi]$ tako da je $iA\overline{B}e^{2\varphi i} = |AB| = 0$. Kako je $|A| > |B|$ (jer $J(f,z) = |A|^2 - |B|^2 > 0$, jer f čuva orijentaciju), zakljucujemo da je $B = 0$. Zakljucak je da je $f_{\bar z}(a) = 0$, a ovo je ekvivalentno sa Cauchy-Riemannovim uslovima.

Naime

$$f_{\bar z} = \frac{1}{2}(f_x + if_y) = \frac{1}{2}((u_x + iv_x) + i(u_y + iv_y)) = 0$$

ako i samo ako $u_x = v_y$ i $u_y = -v_x$.

Teorema je dokazana. $\square$