

## DOMAĆI ZADATAK 2

1. Ispitati prirodu singulariteta i naći rezidume u njima za funkcije:

a)  $f(z) = \frac{1}{z^3(z^2+4)}$ , b)  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ , c)  $f(z) = \frac{1}{z(1-e^{2z})}$ .

2. Ispitati prirodu singulariteta u proširenoj kompleksnoj ravni i naći rezidume u njima za funkcije:

a)  $f(z) = \frac{z-2}{z}$ , b)  $f(z) = e^{z-1}$ , c)  $f(z) = z \cos \frac{1}{z}$ .

3. Izračunati integral  $\int_c \frac{dz}{z^5-z^3}$ , gdje je  $c = \{z \mid |z| = 3\}$  pozitivno orijentisana kružnica.

4. Funkcijom  $\tan^4(az)$ ,  $a > 0$  preslikati  $\{Imz < 0, -\frac{\pi}{4a} < Rez < 0\}$ .

5. Izračunati integral  $\int_c \frac{\cos \frac{1}{z}}{(z-1)^2}$ , gdje je  $c = \{z \mid |z| = r\}$   $r > 0, r \neq 1$ , pozitivno orijentisana kružnica.

6. Odrediti sledeće integrale

a)  $\int_0^\infty \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$ .

b)  $\int_0^\infty \frac{\sin ax dx}{x(x^2+b^2)} (a \geq 0)$ .

c) Sumirati red  $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}$ .

7. Preslikati konformno na gornju poluravan polukrug  $|z| < 1, Imz > 0$ .

8. Ako je  $a$  realan broj dokazati da je

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{\operatorname{sh}(x)} dx = \frac{\pi}{2} \tan \frac{a\pi}{2},$$

integraleći funkciju  $f(z) = \frac{e^{iaz}}{\operatorname{sh}(z)}$  duž pozitivno orijentisane konture  $\Gamma$  koja je granica pravougaonika  $[-R, R] \times [0, 2\pi]$  sa zaobilaženjem tačaka 0 i  $2\pi i$  (manje polukružnice sa unutrašnje strane pravougaonika).

9. Izračunati

a)  $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$ .

b)  $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{5-4 \cos 2\theta} d\theta$ .

10. Neka je  $\rho > 0$ . Pokazati da za dovoljno veliko  $n$  sve nule funkcije

$$f_n(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots + \frac{1}{n!z^n},$$

leže u krugu  $|z| < \rho$ .

11. Sektor  $\{z \mid |z| \leq 1, 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{3}\}$  preslikati funkcijom

$$\frac{i(1-z^3)^2 - (1+z^3)^2}{(1+z^3)^2 + i(1-z^3)^2}.$$

12. Odrediti sledeće integrale

a)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-\sin x)^2} dx$ .

b)  $\int_0^\infty \frac{1}{x^4+a^4} dx, a > 0.$

c) Sumirati red  $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n^2+a^2}.$

13. Odrediti sledeće integrale

a)  $\int_0^{2\pi} \frac{(1+2\cos\theta)^n \cos n\theta}{1-a-2a\cos(\theta)} d\theta (-1 < a < \frac{1}{3}).$

b)  $\int_{-\infty}^\infty \frac{(x^2-b^2)\sin(ax)dx}{x(x^2+b^2)} (a, b > 0).$

c) Sumirati red  $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$

14. Preslikati funkcijom  $w = e^{\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^2}$  oblast  $\{z ||z| < 1, Im(z) \geq 0\}.$