# 1 Uslovno matematičko očekivanje

Neka je $(X, Y)$ slučajni vektor diskretnog tipa. Uslovno matematičko očekivanje promjenljive $Y$ uz uslov $X = x_i$ se označava sa $E(Y|X = x_i)$ i zadaje sa

$$E(Y|X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j P\{Y = y_j|X = x_i\},$$

gdje je $x_i$ neka realizacija promjenljive $X$, a $y_j, j = 1, 2, ..., m$, su sve realizacije promjenljive $Y$. Primjenjujući isti postupak na sve realizacije $x_i, i = 1, 2, ...n$, slučajne promjenljive $X$, generišemo preslikavanje $g(x_i) = E(Y|X = x_i), i = 1, 2, ..., n.(*)$ Kako su argumenti preslikavanja $g$ slike preslikavanja $X$ sa $(*)$ je zadata kompozicija $g \circ X = g(X)$ tj. slučajna promjenljiva i formirano preslikavanje-slučajnu promjenljivu nazivamo matematičko očekivanje od $Y$ uz uslov $X$ i označavamo sa $E(Y|X)$. Sumirajući sve do sada rečeno možemo konstatovati:

$$g(X) = E(Y|X) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) I\{X = x_i\} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=-1}^{m} y_j P\{Y = y_j|X = x_i\} I\{X = x_i\}.$$

Uopštenje na apsolutno neprekidni slučaj je prirodno. Ulogu sume preuzima integral, ulogu vjerovatnoće gustina. Neka je $(X, Y)$ slučajni vektor apsolutno neprekidnog tipa i neka su $\varphi(x, y)$, $\varphi(y|x), \varphi_1(x), \varphi_2(y)$ odgovarajuće gustine. Imamo

$$E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\varphi(y|x)dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{\varphi(x, y)}{\varphi_1(x)} dy = h(x) \Rightarrow h(X) = E(Y|X).$$

Svojstva uslovnog matematičkog očekivanja.

1. $E(\sum_i c_i X_i|Y) = \sum_i c_i E(X_i|Y)$.

2. $E(w(X)|X) = w(X)$, $E(X|X) = X$, $E(w(X)Y|X) = w(X)E(Y|X)$, $w : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je Borelovo preslikavanje.

3. Ako su $X$ i $Y$ nezavisne slučajne promjenljive, tada je $E(Y|X) = EY$.

4. $EE(Y|X) = EY$. Tvrđenje ćemo dokazati u apsolutno neprekidnom slučaju.

$$EE(Y|X) = \int_{-\infty}^{\infty} E(Y|X=x)\varphi_1(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\varphi(x,y)}{\varphi_1(x)}dy\Big)dx = \int_{-\infty}^{\infty} y\big(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y)dx\big)dy =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} y\varphi_2(y)dy = EY.$$

U stohastici se sa $L^2 = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ označava prostor slučajnih promjenljivih (zadatih na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$) sa konačnim drugim momentom. Dakle, $X \in L^2$ ako je $EX^2 < \infty$.

Zadaćemo preslikavanje $(X,Y) = EXY$, gdje su $X, Y \in L^2$. Dakle, paru $(X,Y)$ se dodjeljuje realni broj.

Lako se provjerava: ako su $X, Y, Z \in L^2$ tada važi

$$(aX + bY, Z) = a(X,Z) + b(Y,Z),\ a, b \in \mathbf{R}$$
$$(X,X) \geqslant 0$$
$$(X,X) = 0 \Rightarrow X = 0.$$

Dakle $(X,Y)$ je skalarni proizvod. Pokazuje se da je prostor $L^2$ snabdjeven normom

$$\| X \| = (X,X)^{\frac{1}{2}}$$

kompletan. Dakle, prostor $L^2$ snabdjeven sa gore zadatim skalarnim proizvodom je Hilbertov. Uobičajeno se $L^2$ naziva Hilbertovim prostorom slučajnih veličina sa konačnim drugim momentom.

Neka je $(X,Y)$ slučajni vektor i neka je $w : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ Borelovo preslikavanje. Slučajnu promjenljivu $w(X)$ nazivamo ocjenom slučajne promjenljive $Y$.

Definicija 1.1 *Ocjena $w^*(X)$ je najbolja ako je*

$$E(Y - w(X))^2 \geqslant E(Y - w^*(X))^2 \text{ tj. } \| Y - w(X) \| \geqslant \| Y - w^*(X) \|$$

*za proizvoljno Borelovo preslikavanje $w$.*

**Teorema 1.1** $w^*(X) = E(Y|X)$.

$$\blacklozenge E(Y-w(X))^2 = E(Y-w^*(X)+w^*(X)-w(X))^2 \geqslant$$
$$E(Y-w^*(X))^2 + 2E(Y-w^*(X))(w^*(X)-w(X)) = E(Y-w^*(X))^2.$$

Naime

$$E(Y-w^*(X))(w^*(X)-w(X)) = EE((Y-w^*(X))(w^*(X)-w(X))|X) =$$
$$= \text{ (koristimo svojstvo 2) } E(w^*(X)-w(X))E(Y-w^*(X)|X) = 0.\blacklozenge$$

Potreba za ocjenjivanjem se pojavljuje u slučajevima kada je $X$ dostupna, a $Y$ nedostupna slučajna promjenljiva. Na primjer, $X$ je temperatura, a $Y$ vlažnost na nekom lokalitetu i dostupni su podaci o temperaturi, a nedostupni o vlažnosti. U tim okolnostima na osnovu trenutne temperature $x$ nepoznatu trenutnu vlažnost ocjenjujemo sa $w^*(x)$.

U teoriji ocjenjivanja, funkcija $w^*$ se naziva funkcija regresije. Tačnost ocjene se "mjeri" parametrom $\Delta = E(Y-w^*(X))^2$.

Primjer 1.1 $(X,Y):\mathcal{U}(D)$, $D=\{(x,y): 0<x<1, 0<y<x\}$.

$$\blacktriangleright\ \varphi(x,y)=2,\ (x,y)\in D,\ \varphi_1(x)=\int\limits_0^x 2dy = 2x, 0<x<1,\ w^*(x)=\int\limits_0^x y\varphi(y|x)dy = \tfrac{x}{2},$$
$$0<x<1;\ \Delta = E\Big(Y-\tfrac{X}{2}\Big)^2 = \int\limits_D\int 2\big(y-\tfrac{x}{2}\big)^2 dxdy = \tfrac{1}{24}.\ \blacktriangleleft$$

Primjer 1.2 *Naći očekivani broj bacanja kocke do registrovanja tri uzastopne šestice.*

$\blacktriangleright$Neka je $X_3$ broj bacanja kocke do registrovanja tri uzastopne šestice, $X_2$ broj bacanja kocke do registrovanja dvije uzastopne šestice, $X_1$ broj bacanja kocke do registrovanja šestice.

$$X_3|X_2:\ \begin{array}{cccc} x+1 & x+1+3 & x+1+4 & ... \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6}P\{X_3=3\} & \frac{5}{6}P\{X_3=4\} & ... \end{array}$$

$$E(X_3|X_2=x) = (x+1)\Big(\tfrac{1}{6}+\tfrac{5}{6}\big(P\{X_3=3\}+P\{X_3=4\}+...\big)\Big)+$$
$$\tfrac{5}{6}\big(3P\{X_3=3\}+4P\{X_3=4\}\big)+...\big) = (x+1)+\tfrac{5}{6}EX_3 \Rightarrow E(X_3|X_2) =$$
$$X_2+1+\tfrac{5}{6}EX_3 \Rightarrow EE(X_3|X_2) = EX_3 = EX_2+1+\tfrac{5}{6}EX_3 \Rightarrow EX_3 = 6(EX_2+1).$$

Istovjetnim postupkom se dobija

$$EX_2 = 6(EX_1+1) \Rightarrow EX_2 = 6(6+1) \Rightarrow EX_3 = 6^3+6^2+6 = 258.\ \blacktriangleleft$$

Primjer 1.3 *Neka je slučajna promjenljiva $X$ jednaka broju bacanja novčića do padanja prvog pisma, a $Y$ broju bacanja novčića do padanja drugog pisma. Naći raspodjelu slučajne promjenljive $Y$ te $E(X|Y), E(Y|X)$ i $EY$.*

▶Standardnim postupkom se dobija raspodjela slučajne promjenljive $Y$, a računanjem $E(Y|X=k)$ i $E(X|Y=l)$ dobijamo funkcije koje određuju uslovno matematičko očekivanje.

$$Y: \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & \dots \\ \frac{1}{2^2} & 2\frac{1}{2^3} & 3\frac{1}{2^4} & \dots \end{matrix}, \quad EY = 4,$$

$$Y|X=k: \begin{matrix} k+1 & k+2 & k+3 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \dots \end{matrix}, E(Y|X=k) = k+2 \Rightarrow E(Y|X) = X+2,$$

$$X|Y=l: \begin{matrix} l-1 & l-2 & l-3 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \dots \end{matrix}, E(X|Y=l) = l-2 \Rightarrow E(X|Y) = X-2. \blacktriangleleft$$

Primjer 1.4 *Slučajna promjenljiva $X$ ima $\mathcal{P}\ (\lambda)$ raspodjelu, a slučajna promjenljiva $Y$ pri uslovu $X=n$ ima $\mathcal{B}(n,p)$ raspodjelu. Naći $E(Y|X), E(X|Y), EY$.*

$$\blacktriangleright P\{Y=k|X=n\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k=0,1,...,n, E(Y|X=n) = np \Rightarrow$$

$$E(Y|X) = pX,\ EY = EE(Y|X) = EpX = \lambda p.$$

$$P\{Y=k\} = \sum_{n=k}^{\infty} P\{Y=k|X=n\}P\{X=n\} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p},\ k=0,1,2,...$$

$$P\{X=k|Y=n\} = \frac{P\{Y=n|X=k\}P\{X=k\}}{P\{Y=n\}} = \frac{(\lambda(1-p))^{k-n}}{(k-n)!} e^{-\lambda(1-p)},$$

$$k=n,n+1,...,\ E(X|Y=n) = \sum_{k=n}^{\infty} kP\{X=k|Y=n\} = \lambda(1-p)+n \Rightarrow$$

$$E(X|Y) = \lambda(1-p)+Y. \blacktriangleleft$$

Primjer 1.5 *U kutiji se nalazi 10 bijelih i 10 crnih kuglica. Iz kutije se po modelu bez vraćanja, u prvoj seriji vadi 8 kuglica, a zatim se po istom modelu u drugoj seriji vadi još 8 kuglica. Neka je $X$ broj izvađenih bijelih kuglica u prvoj seriji, a $Y$ broj izvađenih bijelih kuglica u drugoj seriji. Naći raspodjelu slučajnog vektora $(X,Y)$ te $E(Y|X)$ i $EY$.*

$$\blacktriangleright P\{X=k,Y=l\}=\frac{\binom{10}{k}\binom{10}{8-k}\binom{10-k}{l}\binom{2+k}{8-l}}{\binom{20}{8}\binom{12}{8}}, P\{Y=l|X=k\}=\frac{\binom{10-k}{l}\binom{2+k}{8-l}}{\binom{12}{8}},$$
$$0\leqslant k\leqslant 8, 0\leqslant l\leqslant 8, 6\leqslant k+l\leqslant 10,\ E(Y|X=k)=8\frac{10-k}{12}=\frac{20-2k}{3}\Rightarrow$$
$$E(Y|X)=\frac{20-2X}{3}\Rightarrow EY=EE(Y|X)=\frac{20-2\cdot 4}{3}=4. \blacktriangleleft$$

Primjer 1.6 *Na brojač padaju kosmičke čestice. Neka slučajna promjenljiva $X$ predstavlja broj čestica koje padnu na brojač u toku vremena $T$ i neka je $X:\mathcal{P}(\lambda T)$. Svaka čestica koja padne na brojač registruje se nezavisno od ostalih i to sa vjerovatnoćom $p$, $0<p<1$. Neka je $Y$ broj registrovanih čestica. Naći $E(X|Y)$.*

$$\blacktriangleright P\{Y=m\}=\sum_{k=m}^{\infty}P\{Y=m|X=k\}P\{X=k\}=\sum_{k=m}^{\infty}\binom{k}{m}p^m q^{k-m}\frac{(\lambda T)^k}{k!}=$$
$$\frac{(p\lambda T)^m}{m!}e^{-p\lambda T},\ m=0,1,2,...,\ q=1-p;\ P\{X=k|Y=m\}=$$
$$\frac{P\{Y=m|X=k\}P\{X=k\}}{P\{Y=m\}}=\frac{(q\lambda T)^{k-m}}{(k-m)!}e^{-q\lambda T},\ k=m,m+1,m+2,...,$$
$$E(X|Y=m)=\sum_{k=m}^{\infty}k\frac{(q\lambda T)^{k-m}}{(k-m)!}e^{-q\lambda T}=m+q\lambda T\Rightarrow E(X|Y)=Y+q\lambda T. \blacktriangleleft$$

Primjer 1.7 $X_1:\mathcal{U}(0,1)$, $(X_2|X_1=x_1):\mathcal{U}(x_1,1)$, $(X_3|X_2=x_2):\mathcal{U}(x_2,1)$, .... *Naći* $\varphi_2(x_2)$, $\varphi(x_1|x_2)$, $EX_n$.

$$\blacktriangleright\ \varphi(x_2|x_1)=\tfrac{1}{1-x_1},\ \varphi(x_1,x_2)=\varphi(x_2|x_1)\varphi_1(x_1)=\tfrac{1}{1-x_1},\ 0<x_1<x_2<1;\varphi_2(x_2)=$$
$$\int_0^{x_2}\varphi(x_1,x_2)dx_1=\ln\tfrac{1}{1-x_2},\ 0<x_2<1;\ \varphi(x_1|x_2)=\tfrac{\varphi(x_1,x_2)}{\varphi_2(x_2)}=\tfrac{1}{(x_1-1)\ln(1-x_2)},$$
$$0<x_1<x_2<1.\ E(X_2|X_1=x_1)=\int_{x_1}^{1}x_2\varphi(x_2|x_1)dx_2=\int_{x_1}^{1}\tfrac{x_2}{1-x_1}dx_2=\tfrac{1+x_1}{2}=h(x_1)\Rightarrow$$
$$E(X_2|X_1)=\tfrac{1+X_1}{2}\Rightarrow EX_2=EE(X_2|X_1)=\tfrac{1+EX_1}{2}=\tfrac{3}{4}.$$

Po analogiji imamo, $EX_3=\frac{1+EX_2}{2}=\frac{7}{8},...,EX_n=\frac{1+EX_{n-1}}{2}=\frac{2^n-1}{2^n}$. $\blacktriangleleft$

Primjer 1.8 *Neka su $X_1,X_2,...,X_n$ nezavisne, jednako raspodijeljene slučajne promjenljiva sa $\mathcal{U}(0,1)$ raspodjelom. Naći $E(Y_1|Y_n)$ i $E(Y_n|Y_1)$.*

$$\blacktriangleright\ f(y_1|y_n) = \frac{f(y_1,y_n)}{h(y_n)} = \frac{(n-1)(y_n-y_1)^{n-2}}{y_n^{n-1}},\ 0 < y_1 < y_n < 1,$$

$$E(Y_1|Y_n = y_n) = \int\limits_0^{y_n} y_1 f(y_1|y_n)dy_1 = \frac{y_n}{n} \Rightarrow E(Y_1|Y_n) = \frac{Y_n}{n}.$$

Slično se dobija $E(Y_n|Y_1) = nY_1$. ◀

Primjer 1.9 *Neka su $X_1,X_2,\ldots,X_n$ nezavisne, jednako raspodijeljene slučajne veličine sa $\mathcal{U}(0,1)$ raspodjelom. Izračunati $E\Big(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k|Y_n\Big)$ i $E\Big(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k|Y_1\Big)$.*

▶Zbog linearnosti operatora matematičkog očekivanja imamo,

$$E\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k|Y_n\Big) = E(X_1|Y_n).$$

Nađimo raspodjelu za $X_1|Y_n = v$, $0 < v < 1$. Imamo,

$$F(u|v) = \lim_{h\to 0} P\{X_1 < u|v \leqslant Y_n < v+h\} = \lim_{h\to 0}\frac{P\{X_1 < u, v \leqslant Y_n < v+h\}}{P\{v \leqslant Y_n < v+h\}}.$$

Očigledno je $F(u|v) = 1$, $u > v$. Dalje,

$$F(u|v) = \lim_{h\to 0}\frac{(n-1)uv^{n-2}h + o(h)}{nv^{n-1}h + o(h)} = \frac{n-1}{n}\frac{u}{v},\ u \leqslant v.$$

Na kraju, računajući Lebeg-Stiltjesov integral i uzimajući u obzir skok koji funkcija $F(u|v)$ ima u tački $u = v$, dobijamo funkciju koja određuje traženo uslovno matematičko očekivanje. Imamo,

$$E(X_1|Y_n = v) = \int\limits_{\mathbb{R}} udF(u|v) = \frac{n-1}{n}\int\limits_0^v \frac{u}{v}du + \frac{1}{n}v = \frac{n+1}{2n}v.$$

Dakle, $w(v) = \frac{n+1}{2n}v$ pa je traženo $E\Big(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k|Y_n\Big) = \frac{n+1}{2n}Y_n$. Sprovodeći identični postupak, dobija se $E\Big(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k|Y_1\Big) = \frac{n+1}{2}Y_1$. ◀

Primjer 1.10 *Na intervalu $(0,1)$ slučajno se biraju dvije tačke, a zatim se na intervalu koji* *one formiraju slučajno bira tačka $T$. Naći raspodjelu slučajne promjenljive $X$ koja je jednaka apscisi tačke $T$ i naći $ET$.*

Primjer 1.11 *Slučajna promjenljiva $X$ ima $\mathcal{U}(0,1)$ raspodjelu, a $Y|X = x : \mathcal{B}(n,x)$. Naći raspodjelu slučajne promjenljive $Y$ i $EY$.*

$$\blacktriangleright\ E(Y|X=x) = nx \Rightarrow E(Y|X) = nX \Rightarrow EY = EE(Y|X) = EnX = \frac{n}{2}.$$

Primjenjujući formulu potpune vjerovatnoće u apsolutno neprekidnom slučaju, dobijamo

$$P\{Y=k\} = \int_0^1 P\{Y=k|X=x\}\varphi_1(x)dx = \int_0^1 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}dx =$$
$$\binom{n}{k} B(k+1, n-k+1) = \tfrac{1}{n+1}, k = 0, 1, ..., n. \blacktriangleleft$$

# 2 Karakteristične funkcije

Definicija 2.1 *Neka je $X$ slučajna promjenljiva čija je funkcija raspodjele $F_X(x)$.* **Karakteristična funkcija slučajne promjenljive** $X$ *u oznaci*

$$f_X(t) := Ee^{itX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}dF(x),\ t \in \mathbf{R}.$$

Primijetimo, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ i funkcija raspodjele postoji za svaku slučajnu promjenljivu. Integral sa kojim je definisana karakteristična funkcija apsolutno konvergira odakle slijedi konvergencija samog integrala. Provjerimo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx}|dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = 1.$$

Ako je raspodjela slučajne promjenljive $X$ diskretnog tipa tj. $P\{X = x_i\} = p_i$, $i \in I$, tada je

$$f_X(t) = \sum_{i \in I} p_i e^{eti}.$$

Ako je slučajna promjenljiva $X$ apsolutno neprekidnog tipa sa gustinom $g(x)$ tada je

$$f_X(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} g(x)dx.$$

Koristi se i sinonim: **karakteristična funkcija za raspodjelu** $X$. Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}dF(x)$ se u Analizi naziva Furijeova transformacija funkcije $F(x)$.

Potražimo karakterističnu funkciju slučajne promjenljive $X : \mathcal{N}(0,1)$.

$$f(t) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos txe^{-\frac{x^2}{2}}dx,\ f'(t) = -\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\sin txe^{-\frac{x^2}{2}}dx = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin txde^{-\frac{x^2}{2}} =$$
$$(\text{parcijalna int}) = -tf(t) \Rightarrow f(t) = Ce^{-\frac{t^2}{2}};\ f(0) = 1 \Rightarrow C = 1 \text{ te je } f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Iz

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x\sin tx|e^{-\frac{x^2}{2}}dx \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-\frac{x^2}{2}}dx < \infty,$$

slijedi da integral dobijen formalnim diferenciranjem ravnomjerno konvergira po $t$ te je diferenciranje bilo korektno.

Svojstva karakteristične funkcije.

1. $f(0) = 1,\ |f(t)| \leqslant 1,\ f(-t) = \overline{f(t)}$.

2. Ako je $Y = aX + b,\ a, b \in \mathbf{R}$, tada je $f_Y(t) = f_X(at)e^{itb}$.

$f_Y(t) = E^{it(aX+b)} = Ee^{iatX+itb} = f_X(at)e^{itb}$.

3. Funkcija $f(t)$ je ravnomjerno neprekidna na $\mathbf{R}$.

$$|f(t+h) - f(t)| = |Ee^{i(t+h)X} - Ee^{itX}| = |Ee^{itX}(e^{iXh} - 1)| \leqslant E|e^{itX}||e^{iXh} - 1| =$$
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |e^{ixh} - 1|dF(X) \to 0, h \to 0.$$

Konvergencija slijedi na osnovu Lebegove konvergencije o dominantnoj konvergenciji, a čiju primjenu obezbjeđuje aproksimacija $|e^{ixh} - 1| \leqslant 2$.

4. Ako za neko $n \in \mathbf{N}$ postoji $EX^n$, tada za svako $k \leqslant n$ postoji $f^{(k)}(t)$ i važi

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} EX^k + o(t^n),\ t \to 0.$$

Formalnim diferenciranjem dobijamo $f^{(k)}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (ix)^k e^{itx} dF(x)$. Korektnost diferenciranja slijedi kao posljedica aproksimacije

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |(ix)^k e^{itx}| dF(x) = E|X|^k < \infty.$$

Konstatujmo, $f^{(k)}(0) = i^k EX^k$. I na kraju

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0) + o(t^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} EX^k + o(t^n),\ t \to 0.$$

5. Ako postoji $f^{(2k)}(0)$, tada je $EX^{2k} < \infty$. (bez dokaza)

6. Ako su $X_1, ..., X_n$ nezavisne slučajne promjenljive, tada je $f_{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}(t) = \prod\limits_{k=1}^{n} f_{X_k}(t)$.

$$f_{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}(t) = Ee^{it \sum\limits_{k=1}^{n} X_k} = E \prod_{k=1}^{n} e^{itX_k} = \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(t).$$

**Teorema 2.1** *Bohner-Hinčinova teorema. Funkcija $f(t)$ je karakteristična funkcija neke slučajne promjenljive ako i samo ako važi 1. $f(0) = 1$, 2. $|f(t)| \leqslant 1$, 3. $f(t)$ je neprekidna 4. $f(t)$ je nenegativno definitivna tj. za svaku kolekciju realnih brojeva $t_1, ..., t_n$ i svaku kolekciju kompleksnih brojeva $z_1, ..., z_n$ važi $\sum\limits_{j,k=1}^{n} f(t_j - t_k) z_j \overline{z_k} \geqslant 0, n = 1, 2, ...$*

U konkretnim slučajevima je provjera nenegativne definitnosti težak zadatak. Zbog toga su ustanovljene teoreme tipa ako-tada i do cilja tj. verifikacije da je data funkcija karakteristična se brzo dolazi. Navešćemo primjer.

**Teorema 2.2** *Pojina teorema. Ako je funkcija $f(t)$ neprekidna, konveksna, parna, nenegativna, $f(0) = 1$, $f(t) \to 0, t \to \pm\infty$, tada je $f(t)$ karakteristična funkcija.*

Primjenom Pojine teoreme lako se provjerava da je $f(t) = e^{-|t|}$ karakteristična funkcija.

**Teorema 2.3** *Levijeva formula inverzije. Ako su a i b tačke neprekidnosti funkcije raspodjele $F(x)$ i ako je $f(t)$ odgovarajuća karakteristična funkcija, tada je*

$$F(b) - F(a) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int --T^t \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it} f(t)dt.$$

**Posljedice.** a) Ako je karakteristična funkcija $f(t)$ apsolutno integrabilna na $\mathbf{R}$, tada je odgovarajuća slučajna promjenljiva (raspodjela) apsolutno neprekidnog tipa i za odgovarajuću funkciju gustine $g(x)$ važi

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(t)dt.$$

b) Ako je slučajna promjenljiva $X$ diskretnog tipa, tada za svaku realizaciju $x$ važi

$$P\{X = x\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} e^{-itx} f(t)dt.$$

Karakterističnim funkcijama se uspostavlja preslikavanje sa skupa funkcija raspodjele (sa skupa raspodjela) na skup karakterističnih funkcija. Teoremom jedinstvenosti se ustanovljava da je preslikavanje $1-1$.

U dokazu teoreme jedinstvenosti za karakteristične funkcije koristimo Stonovu teoremu.

**Teorema 2.4 (Stone)** *Neka je $f(x)$ neprekidna funkcija na $[-l, l]$ i $f(-l) = f(l)$. Za $\forall\varepsilon > 0$ postoji trigonometrijski polinom*

$$T_n(x) = \sum_{v=-n}^{n} a_v e^{i\pi v \frac{x}{l}}$$

*takav da je* $\sup\limits_{[-l,l]} |T_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

**Teorema 2.5 (Teorema jedinstvenosti)** *Neka su $F$ i $G$ funkcije raspodjele koje imaju istu karakterističnu funkciju na $\mathbb{R}$ tj. za svako $t \in \mathbb{R}$ važi*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dG(x). \tag{2.1}$$

*Tada je $F = G$.*

♦Fiksirajmo $a, b \in \mathbb{R}\,(a < b), \varepsilon > 0$ i formirajmo funkciju $f^{(\varepsilon)}$ za koju važi:

$$f^{(\varepsilon)}(x) = \begin{cases} 0, & x < a-\varepsilon,\ x \geqslant b, \\ \frac{x-a+\varepsilon}{\varepsilon}, & a-\varepsilon \leqslant x < a, \\ 1, & a \leqslant x < b-\varepsilon, \\ \frac{b-x}{\varepsilon}, & b-\varepsilon \leqslant x < b. \end{cases}$$

Dokažimo da je

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{(\varepsilon)}(x)dF(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{(\varepsilon)}(x)dG(x). \tag{2.2}$$

Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $[a-\varepsilon, b] \subset [-n, n]$ i neka je $(\delta_n,\ n \in \mathbb{N})$ takav niz da je $\delta_n \geqslant 0$ i $\delta_n \downarrow 0$, $n \to \infty$. Funkcija $f^{(\varepsilon)}$ ispunjava uslove Stonove teoreme te postoji konačna suma

$$f_n^{(\varepsilon)}(x) = \sum_k a_k e^{\frac{i\pi xk}{n}}$$

tako da važi

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \mid f^{(\varepsilon)}(x) - f_n^{(\varepsilon)}(x) \mid \leqslant \delta_n.$$

Funkciju $f_n^{(\varepsilon)}$ periodično produžimo na $\mathbb{R}$. Primijetimo

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \mid f_n^{(\varepsilon)}(x) \mid \leqslant 2.$$

Iz (**??**) slijedi

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n^{(\varepsilon)}(x)dF(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n^{(\varepsilon)}(x)dG(x).$$

Imamo

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f^{(\varepsilon)}(x)dF(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f^{(\varepsilon)}(x)dG(x)\right| = \left|\int_{-n}^{n} f^{(\varepsilon)}(x)dF(x) - \int_{-n}^{n} f^{(\varepsilon)}(x)dG(x)\right| \leqslant$$
$$\left|\int_{-n}^{n} f_n^{(\varepsilon)}(x)dF(x) - \int_{-n}^{n} f_n^{(\varepsilon)}(x)dG(x)\right| + 2\delta_n \leqslant$$
$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f_n^{(\varepsilon)}(x)dF(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f_n^{(\varepsilon)}(x)dG(x)\right| + 2\delta_n + 2F\big([-n,n]^c\big) + 2G\big([-n,n]^c\big), \tag{2.3}$$

gdje je $F(A) = \int_A dF(x)$ i $G(A) = \int_A dG(x)$. Puštajući da $n \to \infty$ zaključujemo da (**??**) teži ka 0. Ovim je dokazana jednakost (**??**).

Primijetimo $f^{(\varepsilon)}(x) \to I_{[a,b)}(x)$ kad $\varepsilon \to 0$. Na osnovu teoreme o dominantnoj konvergenciji iz (**??**) slijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} I_{[a,b)}(x)dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} I_{[a,b)}(x)dG(x)$$

tj. $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$. Zbog proizvoljnosti $a$ i $b$ zaključujemo da je $F(x) = G(x)$ za svako $x \in \mathbb{R}$. ♦

Definicija 2.2 *Raspodjela sučajne promjenljive $X$ je simetrična ako za svaki Borelov skup $B$ važi $P\{X \in B\} = P\{X \in (-B)\} = P\{(-X) \in B\}$ tj. slučajne promjenljive $X$ i $-X$ imaju istu raspodjelu.*

**Lema 2.1** *Karakteristična funkcija je parna $\Leftrightarrow$ odgovarajuća raspodjela je simetrična $\Leftrightarrow$ karakteristična funkcija je realna.*

♦Pretpostavimo da je karakteristična funkcija parna. Imamo $f_X(t) = f_X(-t) = f_{-X}(t)$ na osnovu tepreme jedinstvenosti zaključujemo da promjenljive $X$ i $-X$ imaju istu raspodjelu tj. raspodjela promjenljive $X$ je simetrična.

Pretpostavimo da je raspodjela slučajne promjenjive $X$ simetrična. Imamo

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx dF(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin tx dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx dF(x).$$

Pretpostavimo da je karakteristična funkcija realna. Imamo $f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos tx dF(x) = f(-t)$.♦

Primjer 2.1 *Naći karaktersističnu funkciju slučajne pomjenljive $S_n : \mathcal{B}(n,p)$.*

►Neka je $I_A$ indikator događaja $A$, $p(A) = p$. Kako je $I_A : \begin{matrix} 0 & 1 \\ q & p \end{matrix}$, $q = 1-p$, imamo $f_{I_A}(t) = pe^{it} + q$. Polazeći od $S_n = I_{A_1} + ... + I_{A_n}$, gdje je $A_1$ događaj da se u prvom opitu iz serije od $n$ ponavljanja ostvari uspjeh,..., $A_n$ je događaj da se u $n$-tom opitu iz serije ostvari uspjeh, dobijamo

$$f_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} f_{I_{A_k}}(t) = (pe^{it}+q)^n. \blacktriangleleft$$

Primjer 2.2 *Naći karakterističnu funkciju slučajne promjenljive $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$.*

►Pokažimo da $\frac{X-m}{\sigma} : \mathcal{N}(0,1)$.

$$P\Big\{\frac{X-m}{\sigma} < t\Big\} = P\{X < \sigma t + m\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{\sigma t+m} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \Big(\frac{x-m}{\sigma} = u\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$\Rightarrow \frac{X-m}{\sigma} = X^* : \mathcal{N}(0,1),\ X = \sigma X^* + m;\ f_X(t) = f_{\sigma X^*+m}(t) = e^{itm} f_{X^*}(\sigma t) = e^{itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}. \blacktriangleleft$$

Primjer 2.3 *a) Slučajna promjenljiva $X : \mathcal{P}(\lambda)$. Naći $f_X(t)$, $EX$, $DX$.*

*b) Slučajne promjenljive $X_1, ..., X_n$ su nezavisne sa $\mathcal{P}(\lambda_1), ..., \mathcal{P}(\lambda_n)$ raspodjelama. Dokazati da $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k : \mathcal{P}(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k)$.*

$$\blacktriangleright\ a)\ f_X(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda t e^{it})^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{\lambda(te^{it}-1)}. f'(0) = iEX \Rightarrow EX = \lambda;$$

$$f"(0) = i^2 EX^2 \Rightarrow EX^2 = \lambda^2 + \lambda \Rightarrow DX = EX^2 - (EX)^2 = \lambda.$$

$$b)\ f_{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(t) = e^{(\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k)(te^{it}-1)} \Rightarrow \text{ (t. jedinstvenosti) } \sum_{k=1}^{n} X_k : \mathcal{P}(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k). \blacktriangleleft$$

Primjer 2.4 *a) Slučajne promjenljive $X_1, ..., X_n$ su nezavisne sa $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2), ..., \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ raspodjelama. Dokazati da $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k : \mathcal{N}(\sum\limits_{k=1}^{n} m_k, \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k^2)$.*

*b) Slučajne promjenljive $X_1, ..., X_n$ su nezavisne jednako raspodiljeljene sa $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ raspodjelom. Dokazati da $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k : \mathcal{N}\big(m, \frac{\sigma^2}{n}\big)$.*

► $f_{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}(t) = \prod\limits_{k=1}^{n} f_{X_k}(t) = e^{it\sum\limits_{k=1}^{n} m_k - \frac{t^2}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} X_k : \mathcal{N}(\sum\limits_{k=1}^{n} m_k, \sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2)$. ◄

**Gama raspodjela**

Gama funkcija. $\Gamma(a) := \int\limits_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$, $a > 0$. Pokazuje se da važi $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$, $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(0,5) = \sqrt{\pi}$.

Definicija 2.3 *Slučajna promjenljiva $X$ ima gama raspodjelu sa parametrima $\alpha$ i $\nu$, koristi se zapis $X : \Gamma(\nu, \alpha)$, ako je odgovarajuća funkcija gustine*

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\alpha^\nu x^{\nu-1}e^{-\alpha x}, x > 0, \alpha > 0, \nu > 0.$$

Potražimo karakterističnu funkciju slučajne promjenljive $X : \Gamma(\nu, \alpha)$.

$$f_X(t) = \tfrac{1}{\Gamma(\nu)}\int\limits_0^\infty \alpha^\nu e^{itx}x^{\nu-1}e^{-\alpha x}dx = \tfrac{1}{\Gamma(\nu)}\sum\limits_{n=0}^\infty \tfrac{(it)^n}{n!}\int\limits_0^\infty \alpha^\nu x^{n+\nu-1}e^{-\alpha x}dx = (\alpha x = u)$$
$$= \tfrac{1}{\Gamma(\nu)}\sum\limits_{n=0}^\infty \tfrac{(\frac{it}{\alpha})^n}{n!}\int\limits_0^\infty u^{n+\nu-1}e^{-u}du = \sum\limits_{n=0}^\infty \tfrac{\Gamma(n+\nu)}{n!\Gamma(\nu)}\Big(\tfrac{it}{\alpha}\Big)^n = \sum\limits_{n=0}^\infty \tbinom{-\nu}{n}\Big(-\tfrac{it}{\alpha}\Big)^n = \Big(1-\tfrac{it}{\alpha}\Big)^{-\nu}.$$

Koristili smo uopšteni binomni koeficijent

$$\binom{t}{k} := \frac{t(t-1)...(t-k+1)}{k!}, \ t \in \mathbf{R},\ k \in \mathbf{N_0}.$$

Ako su $X_1, ..., X_n$ nezavisne slučajne promjenljive sa $\Gamma(\nu_1, \alpha), ..., \Gamma(\nu_n, \alpha)$ raspodjelama, tada $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k : \Gamma(\sum\limits_{k=1}^{n}\nu_k, \alpha)$. Zaista

$$f_{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(t) = \Big(1 - \frac{it}{\alpha}\Big)^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\nu_k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} X_k : \Gamma(\alpha, \sum_{k=1}^{n}\nu_k).$$

Primijetimo, ako je $X : \mathcal{E}(\lambda)$ možemo koristiti i zapis $X : \Gamma(1, \lambda)$. Naime, eksponencijalna raspodjela je specijalan slučaj gama raspodjele. Ako su $X_1, ..., X_n$ nezavisne slučajne promjenljive i svaka ima $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodjelu, tada $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k : \Gamma(n, \lambda)$.

**Komentar.** Neka je $X$ slučajna promjenljiva koja je jednaka broju neuspjeha do registrovanja $r$ tog uspjeha, vjerovatnoća uspjeha je $p$.

$$P\{X = k\} = \binom{r+k-1}{k}p^r q^k = \binom{-r}{k}p^r\big(-q\big)^k, \ k = 0, 1, 2, ...$$

Ovim je objašnjeno zbog čega se koristi naziv negativna binomna raspodjela.

Primjer 2.5 *Slučajne promjenljive $X$ i $Y$ su nezavisne i svaka ima karakterističnu funkciju $f(t) = (2-e^{it})^{-1}$. Naći raspodjelu slučajne promjenljive $Z = X + Y$.*

$$\blacktriangleright\ f(t) = \frac{1}{2-e^{it}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-e^{it}/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{int}}{2^{n+1}} \Longrightarrow P\{X=k\} = \frac{1}{2^{k+1}},\ k=0,1,\ldots.$$

Koristeći razvoj $(1-z)^{-2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$, dobijamo

$$f_Z(t) = \frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{e^{it}}{2}\right)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+2}}e^{int}.$$

Iz teoreme jedinstvenosti, dobija se

$$P\{Z=k\} = \frac{k+1}{2^{k+2}},\ k=0,1,2,\ldots. \blacktriangleleft$$

Primjer 2.6 *Neka su $X$ i $Y$ nezavisne slučajne promjenljive sa raspdjelama $P\{X=k\} = 1/2^k$, $k=1,2,...$, $P\{Y=k\} = 2^{k-1}/3^k$, $k=1,2,...$ Naći raspodjelu slučajne promjenljive $Z = X+Y$.*

$$\blacktriangleright f_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{itk}}{2^k} = \frac{e^{it}}{2-e^{it}},\ f_Y(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}e^{itk}}{3^k} = \frac{e^{it}}{3-2e^{it}}.$$

$$f_Z(t) = f_X(t)f_Y(t) = \frac{e^{2it}}{(2-e^{it})(3-2e^{it})}.$$

Uvedimo smjenu $w = e^{it}$ i funkciju $g(w) = \frac{w^2}{(2-w)(3-2w)}$ razvijmo u red. Dobijamo

$$g(w) = \frac{1}{2} + \frac{4}{w-2} - \frac{9}{2}\frac{1}{2w-3} = \sum_{k=2}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \frac{1}{2^{k-1}}\right]e^{itk}.$$

Dakle, $P\{Z=k\} = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \frac{1}{2^{k-1}}$, $k=2,3,...$ $\blacktriangleleft$

Primjer 2.7 *Naći raspodjelu čija je karakteristična funkcija $f(t) = \frac{3}{8-5e^{-3it}}$.*

Primjer 2.8 *Slučajne promjenljive $X$ i $Y$ su nezavisne, njihove karakteristične funkcije su $f_X(t) = \frac{3e^{it}-1}{4e^{it}-2}$, $f_Y(t) = \cos^4(t)$. Izračunati $P\{X \leqslant Y+1\}$ i $EY^9$.*

$$\blacktriangleright\ f_X(t) = \frac{3}{4} + \left[8e^{it}\left(1 - \frac{1}{2e^{it}}\right)\right]^{-1} = \frac{3}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i(-n-1)t}}{2^{n+3}} \Rightarrow X : \begin{array}{ccccc} 0 & -1 & -2 & -3 & \dots \\ \frac{3}{4} & 2^{-3} & 2^{-4} & 2^{-5} & \dots \end{array}$$

$$f_Y(t) = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4}\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}e^{itk}e^{-it(4-k)} \Rightarrow Y : \begin{array}{ccccc} -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{array}$$

Zbog simetričnosti raspodjele slučajne promjenljive $Y$ dobijamo $EY^9 = 0$ i

$$P\{X \leqslant Y+1\} = 1 - P\{X+Y \geqslant 2\} = 1 - P\{X=0, Y=2\} - P\{X=-2, Y=4\} - P\{X=-1, Y=4\} - P\{X=0, Y=4\} = \frac{193}{256}. \blacktriangleleft$$

Primjer 2.9 *$X$ i $Y$ su nezavisne slučajne promjenljive, $X : \mathcal{U}(-0,5; 0,5)$, $Y : \begin{array}{cc} -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{array}$ Metodom karakterističnih funkcija naći raspodjelu slučajne promjenljive $Z = X+Y$.*

Primjer 2.10 *Neka su $X_1, X_2, \dots$ nezavisne, jednako raspodijeljene slučajne promjenljive i neka je $Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Ako je $0 < P\{X_1$ je djeljivo sa $2\} < 1$, tada je $\lim\limits_{n\to\infty} P\{Y_n$ je djeljivo sa $2\} = \frac{1}{2}$. Dokazati!*

$\blacktriangleright$Neka je $P\{X_1 = k\} = p_k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$. Kako je $f_{X_1}(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{itk}$ to je

$$f_{X_1}(\pi) = (p_0 + p_{-2} + p_2 + \dots) - (p_1 + p_{-1} + p_3 + p_{-3} + \dots) =$$
$$P\{X_1 \text{ je djeljivo sa } 2\} - P\{X_1 \text{ nije djeljivo sa } 2\}.$$

Očigledno, $f_{Y_n}(t) = f^n_{X_1}(t)$. Sada je

$$P\{Y_n \text{ je djeljivo sa } 2\} - P\{Y_n \text{ nije djeljivo sa } 2\} = \alpha_n - \beta_n,$$

gdje je $\alpha_n = P\{Y_n$ je djeljivo sa $2\}$ i $\beta_n = P\{Y_n$ nije djeljivo sa $2\}$. Primijetimo, $f_{Y_n}(\pi) = f^n_{X_1}(\pi) \longrightarrow 0$, $n \to \infty$ jer je $|f_{X_1}(\pi)| < 1$. Dakle, $\alpha_n - \beta_n \longrightarrow 0$ i $\alpha_n + \beta_n = 1$, odakle slijedi $\alpha_n \longrightarrow \frac{1}{2}$, $n \to \infty$. $\blacktriangleleft$

Primjer 2.11 *Dokazati da funkcije a) $f(t)=e^{-i|t|}$, b) $f(t)=\cos t^2$, c) $f(t)=e^{-t^4}$ nisu karakteristične.*

►a) Funkcija je parna ali nije realna. b) Funkcija nije ravnomjerno neprekidna. c) Ako je funkcija karakteristična, tada je $EX^2=-f"(0)=0\Rightarrow X\overset{s.i.}{=}0\Rightarrow f_X(t)=1$, kontradikcija.◄

Definicija 2.4 *Niz funkcija raspodjele $F_n(x)$ slabo konvergira ka funkciji $F(x)$ ako $F_n(x)\longrightarrow F(x)$ za $\forall x\in C(F)$, koristi se zapis $F_n(x)\xrightarrow{w}F(x)$. Ako niz $F_n(x)\xrightarrow{w}F(x)$ pri čemu je $F(x)$ funkcija raspodjele, tada kažemo da niz $F_n(x)$ kompletno konvergira ka $F(x)$ i koristimo zapis $F_n(x)\xrightarrow{c}F(x)$.*

Definicija 2.5 *Niz slučajnih promjenljivih $X_n, n=1,2,...$ u raspodjeli konvergira ka slučajnoj promjenljivoj $X$, koristimo zapis $X_n\xrightarrow{d}X$ (d-distribution) ako $F_{X_n}(x)\xrightarrow{c}F_X(x)$.*

Primjer 2.12 $X_n:\begin{array}{cc}-n & n\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{array}$ $n=1,2,...F_n(x)\xrightarrow{w}F(x)=\frac{1}{2}$. *Konvergencija nije kompletna.*

**Teorema 2.6** *(Teorema neprekidnosti) Neka je $F_n(x), x\in\mathbf{R}$, niz funkcija raspodjele i neka je $f_n(t), t\in\mathbf{R}$, odgovarajući niz karakterističnih funkcija.*

*1) Ako $F_n(x)\xrightarrow{k}F(x)$, tada $f_n(t)\rightrightarrows f(t), t\in\mathbf{R}$, $f(t)$ je karakteristična funkcija za $F(x)$.*

*2) Ako za $\forall t\in\mathbf{R}$ postoji $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t)$ i ako je funkcija $f(t)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t)$ neprekidna u tački $t=0$, ona je karakterističana funkcija za neku funkciju raspodjele $F(x)$ i $F_n(x)\xrightarrow{c}F(x)$.*

Primjer 2.13 *Neka je $X_n, n=1,2,...$ niz slučajnih promjenljivih sa $\mathcal{U}((-4-\frac{1}{n},-4+\frac{3}{n})\cup(0,\frac{2}{n}))$ raspodjelom. Metodom karakterističnih funkcija ispitati konvergenciju u raspodjeli datog niza.*

$$► f_{X_n}(t)=\int\limits_{-4-\frac{1}{n}}^{-4+\frac{3}{n}}\frac{n}{6}e^{itx}dx+\int\limits_{0}^{\frac{2}{n}}\frac{n}{6}e^{itx}dx\to\frac{2}{3}e^{-4it}+\frac{1}{3}=f_W(t),\ W:\begin{array}{cc}-4 & 0\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{array}. ◄$$

Primjer 2.14 *Slučajne promjenljive $X_j, j = 1, 2, ...$ su nezavisne i jednako raspodijeljene sa raspodjelom*

$$X_j : \begin{array}{cccc} 0 & 1 & ... & 9 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & & \frac{1}{10} \end{array}.$$

*Neka je*

$$Y_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{10^j} X_j,\ n = 1, 2, ....$$

*Dokazati da niz slučajnih promjenljivih*

$$Y_n \xrightarrow{d} W : \mathcal{U}(0,1),\ n \to \infty.$$

$$\blacktriangleright\ f_{X_j}(t) = E^{itX_j} = \frac{1}{10} \sum_{k=0}^{9} e^{itk} = \frac{1}{10} \frac{\sin 5t}{\sin \frac{t}{2}} e^{i\frac{t}{2}}.$$

$$f_{Y_n}(t) = \frac{1}{10^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin 5 \frac{t}{10^j}}{\sin \frac{t}{2 \cdot 10^j}} e^{\frac{9it}{2 \cdot 10^j}} = \frac{1}{10^n} \frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2 \cdot 10^n}} e^{\frac{it}{2}(1-10^{-n})} \to 2 \frac{\sin \frac{t}{2}}{t} e^{i\frac{t}{2}} = f_W(t).$$

Koristili $e^{i\varphi} - 1 = 2i \sin \frac{\varphi}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}}$; u proizvodu sinusa nakon što sinuse eksplicitno zapišemo dolazi do skraćivanja.◀

Primjer 2.15 *Neka je $X_n, n = 1, 2, ...$ niz nezavisnih slučajnih promjenljivih sa $\Gamma(1, n+1)$ raspodjelama. Dokazati da*

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k - EX_k}{n} \xrightarrow{R} X : \mathcal{N}\big(0, 1/2\big),\ n \to \infty.$$

▶ Znamo $f_{X_k}(t) = (1 - it)^{-k-1}$, $f'_{X_k}(0) = iEX_k \Rightarrow EX_k = k + 1$.

$$f_{Y_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}\Big(\frac{t}{n}\Big) e^{-it\frac{k+1}{n}} = \Big(1 - \frac{it}{n}\Big)^{-\frac{n(n+3)}{2}} e^{-it\frac{n+3}{2}} = e^{-\frac{n(n+3)}{2} \ln\left(1 - i\frac{t}{n}\right) - it\frac{n+3}{2}} =$$

$$e^{-\frac{n(n+3)}{2}\left(-\frac{it}{n} + \frac{t^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - it\frac{n+3}{2}} = e^{-\frac{(n+3)t^2}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \to e^{-\frac{t^2}{4}} = f_X(t),\ n \to \infty. \blacktriangleleft$$

Primjer 2.16 *Neka su $X_1, X_2, ...$ nezavisne, jednako raspodijeljene slučajne promjenljive sa $\mathcal{U}(0,1)$ raspodjelom i neka je slučajna promjenljiva $Y_n$ $n$-ta po veličini iz kompleksa $(X_1, X_2, ..., X_{2n-1})$. Dokazati da niz*

$$W_n = \Big(Y_n - \frac{1}{2}\Big)\sqrt{8n}$$

*u raspodjeli konvergira ka slučajnoj promjenljivoj $W$ koja ima $\mathcal{N}(0,1)$ raspodjelu.*

►Znamo da je gustina slučajne promjenljive $Y_n$

$$g_n(u) = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!}u^{n-1}(1-u)^{n-1},\ 0 < u < 1.$$

Sada je

$$f_{W_n}(t) = f_{Y_n}(\sqrt{8n}t)e^{-it\sqrt{2n}} = e^{-it\sqrt{2n}}\int_0^1 e^{i\sqrt{8n}tu}g_n(u)du = [(u-\tfrac{1}{2})\sqrt{8n} = w]$$
$$\frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!\sqrt{8n}}\int_{-\sqrt{2n}}^{\sqrt{2n}} e^{i\sqrt{8n}t(\frac{1}{2}+\frac{w}{\sqrt{8n}})}g_n(\tfrac{1}{2}+\tfrac{w}{\sqrt{8n}})dw =$$
$$\frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!\sqrt{8n}2^{2n-2}}\int_{-\infty}^{\infty} I_{(-\sqrt{2n},\sqrt{2n})}(w)e^{itw}\left(1-\frac{w^2}{2n}\right)^{n-1}dw \to$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itw}e^{-\frac{w^2}{2}}dw = f_W(t), n\to\infty,\ W:\mathcal{N}(0,1).$$

Koristili smo Stirlingovu formulu i Lebegovu teoremu o dominantnoj konvergenciji.◄

Primjer 2.17 *Slučajne promjenljive iz niza $X_n$, $n = 1, 2, ...$ imaju gustine*

$$g_n(x) = n(1-x)^{n-1},\ 0 < x < 1.$$

*Neka je $Y_n = nX_n$. Dokazati da niz $Y_n$ u raspodjeli konvergira ka slučajnoj promjenljivoj $Y$ koja ima $\mathcal{E}(1)$ raspodjelu.*

$$► f_{Y_n}(t) = E^{itnX_n} = \int_0^1 n(1-x)^{n-1}e^{intx}dx = [nx = v]\int_0^\infty (1-v/n)^{n-1}e^{itv}I_{(0,n)}(v)dv$$

$$\to \int_0^\infty e^{itv}e^{-v}dv = f_Y(t),\ n\to\infty.$$

Koristili smo Lebegovu teoremu o dominantnoj konvergenciji i teoremu jedinstvenosti. ◄

# 3 Konvergencije nizova slučajnih promjenljivih

Definicija 3.1 *Niz slučajnih promjenljivih $X_n, n = 1, 2, ...$ u vjerovatnoći konvergira ka slučajnoj promjenljivoj $X$, koristi se zapis $X_n \xrightarrow{p} X$, ako je za $(\forall\epsilon > 0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} P\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\} = 0$.*

Neka je $\alpha_n, n = 1, 2, ...$ niz realnih brojeva. Znamo,

$$\alpha_n \to \alpha \Leftrightarrow (\forall\epsilon > 0)(\exists N \in \mathbf{N})(\forall n \geqslant N)|\alpha_n - \alpha| \leqslant \epsilon \Leftrightarrow (\forall k \in \mathbf{N})(\exists N \in \mathbf{N})(\forall n \geqslant N)|\alpha_n - \alpha| \leqslant \tfrac{1}{k}.$$

Označimo sa

$$L = \{X_n \to X\} = \bigcap_{\epsilon>0}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{|X_n - X| \leqslant \epsilon\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{|X_n - X| \leqslant \frac{1}{k}\} \in \mathcal{F}.$$

Budući da je $X_n - X$ slučajna promjenljiva, skup $\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}\}$ je događaj. Budući da je $\sigma$ polje događaja zatvoreno u odnosu na prebrojiva presijecanja i uniranja, izvodimo zaključak da je skup $L$ događaj.

Definicija 3.2 *Niz slučajnih promjenljivih $X_n$ skoro izvjesno konvergira ka slučajnoj promjenljivoj $X$, koristi se zapis $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ (a.s. almost surely), ako je $P\{\omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\} = P(L) = 1$.*

**Lema 3.1** *Neka je $B_k, k = 1, 2, ...$ niz događaja.* $P\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k\Big) = 1 \Leftrightarrow (\forall k \in \mathbf{N})P(B_k) = 1.$

♦U $\Rightarrow$ smjeru tvrđenje je očigledno. Dokažimo tvrđenje u $\Leftarrow$ smjeru. $C_1 = B_1, C_2 = B_1B_2, C_3 = B_1B_2B_3, ...$ Kako $C_k \downarrow$, imamo $P\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k\Big) = P\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} C_k\Big) = \lim\limits_{k\to\infty} P(C_k) = 1$. Primjenom Silvesterove formule se dokazuje $(\forall k \in \mathbf{N})P(C_k) = 1$.♦

Na osnovu leme zaključujemo,$X_n \xrightarrow{a.s.} X \Leftrightarrow (\forall k \in \mathbf{N})P\Big\{\bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=N}^{\infty} \{|X_n - X| \leqslant \frac{1}{k}\Big\} = 1 \Leftrightarrow$ $(\forall k \in \mathbf{N}) \lim\limits_{N\to\infty} P\Big\{\bigcap\limits_{n=N}^{\infty} \{|X_n - X| \leqslant \frac{1}{k}\Big\} = 1$, posljednja ekvivalencija slijedi iz: $(\forall k \in \mathbf{N})$ $\bigcap\limits_{n=N}^{\infty} \{|X_n - X| \leqslant \frac{1}{k}\} = W_N \uparrow$. Dokazali smo

**Lema 3.2** $X_n \xrightarrow{a.s.} X \Leftrightarrow (\forall\epsilon > 0) \lim\limits_{N\to\infty} P\Big(\bigcap\limits_{n=N}^{\infty} \{|X_n - X| \leqslant \epsilon\Big) = 1,$

Prelaskom na komplementarni događaj, zaključujemo da se lema može formulisati na sljedeći način:

**Lema 3.3** $X_n \xrightarrow{a.s.} X \Leftrightarrow (\forall\epsilon > 0) \lim\limits_{N\to\infty} P\Big\{ \bigcup\limits_{n=N}^{\infty} \{|X_n - X| > \epsilon\}\Big\} = \lim\limits_{N\to\infty} P\Big\{ \sup\limits_{n\geqslant N} |X_n - X| > \epsilon\Big\}$
$= P\Big\{ \bigcap\limits_{N=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=N}^{\infty} \{|X_n - X| > \epsilon\}\Big\} = P(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_{n,\epsilon}) = 0$, *gdje je* $A_{n,\epsilon} = \{|X_n - X| > \epsilon\}, n = 1, 2, ...$

Primijetimo, $P\Big\{ \bigcup\limits_{n=N}^{\infty} \{|X_n - X| > \epsilon\}\Big\} \leqslant \sum\limits_{n=N}^{\infty} P\Big\{|X_n - X| > \epsilon\Big\}$ te ako za $\forall\epsilon > 0$ red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P\Big\{|X_n - X| > \epsilon\Big\}$ konvergira konstatujemo: $(\forall\epsilon > 0) \lim\limits_{N\to\infty} P\Big\{ \bigcup\limits_{n=N}^{\infty} \{|X_n - X| > \epsilon\}\Big\} = 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{a.s.} X$.

Prisjetimo se jednog tvrđenja iz Borel-Kantelijeve teoreme. Ako je $A_n, n = 1, 2, ...$ niz nezavisnih događaja, tada je $P(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n) = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$. Neka je $c$ konstanta i $X_n$ niz nezavisnih slučajnih promjenljivih. Iz pretpostavljene nezavisnosti promjenljivih $X_n$ slijedi nezavisnost događaja $A_{n,\epsilon} = \{|X_n - c| > \epsilon\}, n = 1, 2, ....$ Analizu zaključimo sa $X_n \xrightarrow{a.s.} X \Leftrightarrow (\forall\epsilon > 0) P(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_{n,\epsilon}) = 0 \Leftrightarrow (\forall\epsilon > 0) \sum\limits_{n=1}^{\infty} P\Big\{|X_n - c| > \epsilon\Big\} < \infty$.

Dakle, važi

**Lema 3.4** *Neka je* $X_n, n = 1, 2, ...$ *niz slučajnih promjenljivih,* $X$ *slučajna promjenljiva i* $c$ *konstanta.*

*a) Ako za* $\forall\epsilon > 0$ *red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P\big\{|X_n - X| > \epsilon\big\}$ *konvergira tada* $X_n \xrightarrow{a.s.} X$.

*b) Ako su promjenljive* $X_n$ *nezavisne, tada* $X_n \xrightarrow{a.s.} c$ *ako i samo ako za* $\forall\epsilon > 0$ *red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P\big\{|X_n - c| > \epsilon\big\}$ *konvergira.*

**Komentar.** U nizu događaja $A_{n,\epsilon} = \{|X_n - X| > \epsilon\}, n = 1, 2, ...$ , gdje su slučajne promjenljive $X, X_1, X_2, ...$ nezavisne i jednako raspodijeljene sa raspodjelom $X : \begin{matrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{matrix}$, događaji nisu nezavisni. Provjeriti! Ovim je obrazloženo zbog čega u prethodnoj lemi pod a) nemamo ekvivalenciju.

**Lema 3.5** *Ako* $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ *tada* $X_n \xrightarrow{p} X$.

♦$X_n \overset{a.s.}{\to} X \Rightarrow (\forall\epsilon > 0) \lim\limits_{N\to\infty} P\Big\{\sup\limits_{n\geqslant N} |X_n - X| > \epsilon\Big\} = 0 \Rightarrow (\forall\epsilon > 0) \lim\limits_{N\to\infty} P\{|X_N - X| > \epsilon\} = 0$ jer $\{|X_N - X| > \epsilon\} \subset \{\sup\limits_{n\geqslant N} |X_n - X| > \epsilon\}$.♦

**Lema 3.6** *Ako $X_n \overset{p}{\to} X$ tada postoji podniz $X_{n_k}$ takav da $X_{n_k} \overset{a.s.}{\to} X$.*

♦Iz $P\{|X_n - X| > 1\} \to 0 \Rightarrow \exists n_1, P\{|X_{n_1} - X| > 1\} < \frac{1}{1^2}$. Iz $P\{|X_n - X| > \frac{1}{2}\} \to 0 \Rightarrow \exists n_2 > n_1, P\{|X_{n_2} - X| > \frac{1}{2}\} < \frac{1}{2^2}$. Nastavljajući postupak dolazimo do $n_k > .. > n_2 > n_1$ i $X_{n_k}, P\{|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k}\} < \frac{1}{k^2}$. Neka je $\epsilon > 0$. $\exists k_0 \in \mathbf{N}, \frac{1}{k_0} < \epsilon$ te je $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} P\{|X_{n_k} - X| > \epsilon\} \leqslant \sum\limits_{k=k_0}^{\infty} P\{|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k}\} < \infty$.♦

Primjer 3.1 *Neka je $X_n : \mathcal{U}(0, n)$, $n = 1, 2, ...$ niz nezavisnih slučajnih promjenljivih i neka je $Y_n = \min\{1, X_n\}$. Dokazati da $Y_n \xrightarrow{P} 1$ i $Y_n \not\xrightarrow{a.s.} 1$.*

► Neka je $0 < \varepsilon < 1$. Imamo

$$P\{1 - Y_n > \varepsilon\} = P\{X_n < 1 - \varepsilon\} = \frac{1 - \varepsilon}{n} \to 0,\, n \to \infty.$$

Dakle, $Y_n \xrightarrow{P} 1$. Kako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira, zaključujemo da $Y_n \not\xrightarrow{a.s.} 1$ ◄.

**Komentar.** U zadacima u kojima ispitujemo $p$ ili $a.s.$ konvergenciju, dovoljno je analizu provesti u slučaju $0 < \epsilon < 1$. Naime, $P\{|X_n - X| > \epsilon_2\} \leqslant P\{|X_n - X| > \epsilon_1\}$, gdje je $0 < \epsilon_1 < 1, \epsilon_2 \geqslant 1$.

**Lema 3.7** $X_n \overset{p}{\to} X \Rightarrow X_n \overset{d}{\to} X$.

♦Neka je $x \in C(F), \epsilon > 0$.

$$F_X(x - \epsilon) = P\{X < x - \epsilon\} = P\{X < x - \epsilon, X_n < x\} + P\{X < x - \epsilon, X_n \geqslant x\} \leqslant$$
$$P\{X_n < x\} + P\{|X_n - X| > \epsilon\} \Rightarrow F_X(x - \epsilon) - P\{|X_n - X| > \epsilon\} \leqslant F_{X_n}(x).$$
$$\text{Takođe } F_{X_n}(x) \leqslant F_X(x + \epsilon) + P\{|X_n - X| > \epsilon\} \Rightarrow$$
$$F_X(x - \epsilon) \leqslant \liminf F_{X_n}(x) \leqslant \limsup F_{X_n}(x) \leqslant F_X(x + \epsilon).$$

Budući da je $x$ proizvoljna tačka neprekidnosti funkcije $F(x)$ i $\epsilon$ proizvoljan pozitivan broj, zaključujemo da $F_{X_n} \overset{c}{\to} F(x)$.♦

**Lema 3.8** $X_n \xrightarrow{d} c \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} c.$

♦Znamo, $F_c(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant c \\ 1, & x > c \end{cases}$ Neka je $\epsilon > 0$. $P\{|X_n - c| > \epsilon\} \leqslant P\{X_n < c - \epsilon\} + P\{X_n > c + \epsilon\} \leqslant P\{X_n < c - \frac{\epsilon}{2}\} + 1 - P\{X_n < c + \frac{\epsilon}{2}\} \to 0, n \to \infty.$♦

Primjer 3.2 *Konstruisati niz slučajnih promjenljivih koji konvergira u raspodjeli i ne konvergira u vjerovatnoći.*

►Navešćemo dva niza. a) Neka je $X$ slučajna promjenljivih sa raspodjelom

$$X : \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array},$$

neka je $X_n = X$, $n = 1, 2, ...$ i $Y = 1 - X$. Slučajne promjenljive $X_n$ i $Y$ imaju istu raspodjelu te $X_n \xrightarrow{d} Y$. Međutim, $|X_n - Y| = 1$ te niz $X_n$ ne konvergira u vjerovatnoći ka slučajnoj promjenljivoj $Y$.

b) Neka je $X : \mathcal{N}(0, 1)$ i neka je $X_n = -X$, $n = 1, 2, ....$ Slučajne promjenljive iz niza $X_n$ i slučajna promjenljiva $X$ imaju istu raspodjelu te $X_n \xrightarrow{d} X$. Neka je $\varepsilon$ proizvoljan broj veći od 0. Imamo

$$P\{|X_n - X| > \varepsilon\} = P\{|X| > \varepsilon/2\} \not\longrightarrow 0,\ n \to \infty.$$

Dakle niz slučajnih promjenljivih $X_n$ ne konvergira u vjerovatnoći.◄

U tekstu koji slijedi oznaka $\| \ \|$ se odnosi na normu iz prostora $L_2$.

Definicija 3.3 *Niz slučajnih promjenljivih $X_n, n = 1, 2,$ srednjekvadratno konvergira ka slučajnoj promjenljivoj $X$ ako $\|X_n - X\| \to 0 \Leftrightarrow E(X_n - X)^2 \to 0, n \to \infty$, koristićemo oznaku $X_n \xrightarrow{L_2} X$.*

**Lema 3.9** $X_n \xrightarrow{L_2} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X.$

♦Neka je $\epsilon > 0$. $P\{|X_n - X| > \epsilon\} \leqslant \frac{E(X_n - X)^2}{\epsilon^2} \to 0, n \to \infty.$♦

Primjer 3.3 *a)* $X_n : \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 - \frac{1}{n^2} & \frac{1}{n^2} \end{array}, n = 2, 3, ...$

*b)* $X_n : \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 - \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{array}, n = 2, 3, ...$ *promjenljive su nezavisne.*

►a) $X_n \overset{a.s.}{\to} 0 \Rightarrow X_n \overset{p}{\to} 0$, $EX_n^2 = 1$ te niz ne konvergira srednjekvadratno. b) Niz ne konvergira skoro izvjesno, $EX_n^2 = \frac{1}{n} \Rightarrow X_n \overset{L_2}{\to} 0 \Rightarrow X_n \overset{p}{\to} 0$. ◄

**Lema 3.10** *Ako je niz $X_n, n = 1, 2, ...$ skoro izvjesno ograničen (tj. postoji interval $(a, b)$ takav da je $(\forall n \in \mathbf{N}) P(a < X_n < b) = 1$), tada iz $X_n \overset{p}{\to} X \Rightarrow X_n \overset{L_2}{\to} X$.*

$$♦\epsilon > 0, E(X_n - X)^2 = \int\limits_{\omega:|X_n(\omega)-X(\omega)|\leqslant\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}} (X_n - X)^2 P(d\omega) + \int\limits_{\omega:|X_n(\omega)-X(\omega)|>\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}} (X_n - X)^2 P(d\omega)$$
$$\leqslant \tfrac{\epsilon}{2} + (b-a)^2 P\{|X_n - X| > \sqrt{\tfrac{\epsilon}{2}}\} \leqslant \tfrac{\epsilon}{2} + (b-a)^2 \tfrac{\epsilon}{2(b-a)^2} = \epsilon, \text{ za } \forall n \geqslant n_0(\epsilon).$$

Postojanje brojeva $\frac{\epsilon}{2(b-a)^2}$ i $n_0(\epsilon)$ slijedi iz pretpostavljene konvergencije u vjerovatnoći.♦

Primjer 3.4 *Neka je $X_n$, $n = 2, 3, ...$ niz slučajnih promjenljivih sa raspodjelama*

$$X_n : \begin{array}{ccc} -n & 0 & n \\ \frac{2}{(n+1)^2} & 1 - \frac{5}{(n+1)^2} & \frac{3}{(n+1)^2} \end{array}.$$

*Ispitati konvergencije niza $X_n$.*

►Neka je $0 < \varepsilon < 1$. Kako red $\sum\limits_{n=2}^{\infty} P\{|X_n| > \epsilon\} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{5}{(n+1)^2}$ konvergira, zaključujemo da $X_n \xrightarrow{a.s.} 0$, $X_n \xrightarrow{P} 0$ i $X_n \xrightarrow{d} 0$. Kako je $EX_n^2 = \frac{5n^2}{(n+1)^2} \to 5$, $n \to \infty$, zaključujemo da $X_n \overset{L_2}{\not\longrightarrow} 0$. ◄

Primjer 3.5 *Neka je $X_n$, $n = 1, 2, ...$ niz jednako raspodijeljenih slučajnih promjenljivih sa $\mathcal{E}(1)$ raspodjelom. Ispitati konvergencije niza $Y_n = \frac{1}{\sqrt{n^3} X_n}$.*

►Neka je $\varepsilon > 0$.

$$P\{Y_n > \varepsilon\} = P\Big\{X_n < \frac{1}{\varepsilon\sqrt{n^3}}\Big\} = \int\limits_0^{\frac{1}{\varepsilon\sqrt{n^3}}} e^{-u} du = 1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon\sqrt{n^3}}} \sim \frac{1}{\varepsilon\sqrt{n^3}}, \, n \to \infty.$$

Kako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ konvergira to je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P\{|Y_n| > \varepsilon\} < \infty$ te $Y_n \xrightarrow{a.s.} 0$, $Y_n \xrightarrow{P} 0$ i $Y_n \xrightarrow{d} 0$.

Primijetimo,

$$EY_n^2 = \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{n^3 t^2} dt > \frac{1}{n^3 e} \int\limits_0^1 \frac{dt}{t^2}.$$

Posljednji integral divergira te slučajne promjenljive $Y_n$ ne pripadaju prostoru $L_2$. ◄

Primjer 3.6 *Neka je* $X_n$, $n = 1, 2, ...$, *niz jednako raspodijeljenih slučajnih promjenljivih sa* $\mathcal{U}(0,1)$ *raspodjelom i neka je* $Y_n = \frac{1}{1+n^4X_n^2}$. *Ispitati konvergencije niza* $Y_n$.

► Neka je $0 < \varepsilon < 1$. Za dovoljno velike $n$-ove kojima se obezbjeđuje da je $\frac{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}}{n^2} < 1$, imamo

$$P\{Y_n > \varepsilon\} = P\Big\{\frac{1}{1+n^4X_n^2} > \varepsilon\Big\} = P\left\{X_n < \frac{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}}{n^2}\right\} = \frac{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}}{n^2}.$$

Kako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira, zaključujemo da $Y_n \xrightarrow{a.s.} 0$, $Y_n \xrightarrow{P} 0$ i $Y_n \xrightarrow{d} 0$. Realizacije niza $Y_n$ su izvjesno sa intervala $(0,1)$ te iz već konstatovane konvergencije u vjerovatnoći slijedi $Y_n \xrightarrow{L_2} 0$. ◄

Primjer 3.7 *Neka je* $X_n$, $n = 1, 2, ...$ *niz nezavisnih, jednako raspodijeljenih slučajnih promjenljivih sa* $\mathcal{E}(1)$ *raspodjelom i neka je* $Y_n = \frac{1}{1+nX_n}$. *Ispitati konvergencije niza* $Y_n$.

►Neka je $0 < \varepsilon < 1$. Imamo

$$P\{Y_n > \varepsilon\} = P\Big\{\frac{1}{1+nX_n} > \varepsilon\Big\} = P\Big\{X_n < \frac{\frac{1}{\varepsilon}-1}{n}\Big\} = \int\limits_0^{\frac{\frac{1}{\varepsilon}-1}{n}} e^{-u}du =$$

$$1 - e^{-\frac{\frac{1}{\varepsilon}-1}{n}} = g(\varepsilon, n).$$

Kako $g(\varepsilon, n) \to 0$, $n \to \infty$, zaključujemo da $Y_n \xrightarrow{P} 0$ i $Y_n \xrightarrow{d} 0$.

Primijetimo, $g(\varepsilon, n) \sim \frac{\frac{1}{\varepsilon}-1}{n}$, $n \to \infty$ te red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g(\varepsilon, n)$, $0 < \varepsilon < 1$, divergira. Dakle, $Y_n \not\xrightarrow{a.s.} 0$. Iz $P\{0 < Y_n < 1\} = 1$ i već dokazane konvergencije u vjerovatnoći zaključujemo $Y_n \xrightarrow{L_2} 0$. ◄

Primjer 3.8 *Neka je* $X_n$, $n = 1, 2, ...$ *niz slučajnih promjenljivih sa*

$$\mathcal{U}\Big(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\Big)$$

*raspodjelama. Ispitati konvergencije niza* $X_n$.

► $P\Big\{\omega : 1 - \frac{1}{n} < X_n(\omega) < 1 + \frac{1}{n}\Big\} = 1 \Rightarrow P\{X_n \to 1\} = 1 \Rightarrow X_n \xrightarrow{a.s.} 1$, $X_n \xrightarrow{p} 1$ i $X_n \xrightarrow{d} 1$. Budući da je izvjesno $0 < Y_n < 2$ zaključujemo da $X_n \xrightarrow{L_2} 1$. ◄

Primjer 3.9 *Neka je* $X_n$, $n=1,2,...$ *niz nezavisnih slučajnih promjenljivih sa* $\mathcal{U}(0,n)$ *raspodjelama. Ispitati konvergencije niza* $Y_n = \frac{X_n}{1+X_n}$.

►Neka je $0<\varepsilon<1$ i $n$ dovoljno veliko tako da je $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Imamo,

$$P\{|1-Y_n|>\varepsilon\} = P\{1-Y_n>\varepsilon\} = P\Big\{X_n < \frac{1}{\varepsilon}-1\Big\} = \frac{\frac{1}{\varepsilon}-1}{n} \to 0,\ n\to\infty.$$

Dakle, $Y_n \xrightarrow{p} 1$ i $Y_n \xrightarrow{d} 1$. Primijetimo, $P\{0<Y_n<1\}=1$ te $Y_n \xrightarrow{L_2} 1$. Kako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P\{|1-Y_n|>\varepsilon\}$ divergira, zaključujemo da $Y_n \overset{a.s.}{\not\longrightarrow} 1$. ◄

Primjer 3.10 *Neka je* $X_n$, $n=1,2,...$ *niz nezavisnih slučajnih promjenljivih sa*

$$\mathcal{U}\Big(\big(0,\frac{1}{n}\big)\cup\big(1,1+\frac{1}{n^2}\big)\Big)$$

*raspodjelama. Ispitati konvergencije niza* $X_n$.

►Jednostavno se provjerava da $f_{X_n}(t)\to 1$ odakle slijedi $X_n \xrightarrow{d} 0$, a time i $X_n \xrightarrow{P} 0$. Kako je $P\{0\leqslant X_n\leqslant 2\}=1$ to $X_n \xrightarrow{L_2} 0$. Neka je $0<\varepsilon<1$ i $n$ dovoljno veliko tako da je $\frac{1}{n}<\varepsilon$. Imamo,

$$P\{X_n>\varepsilon\} = P\Big\{X_n \in \Big(1,1+\frac{1}{n^2}\Big)\Big\} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n+1}.$$

Kako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P\{X_n>\varepsilon\}$ divergira to $X_n \overset{a.s.}{\not\longrightarrow} 0$. ◄

Primjer 3.11 *Neka je* $X_n$, $n=1,2,...$ *niz slučajnih promjenljivih sa* $\mathcal{U}(n,n^2)$ *raspodjelama i neka je* $Y_n = e^{-n}X_n$. *Dokazati da* $Y_n \xrightarrow{a.s.} 0$ *i* $Y_n \xrightarrow{L_2} 0$.

$$\blacktriangleright\ P\Big\{\omega : 0\leqslant Y_n(\omega)\leqslant \frac{n^2}{e^n}\Big\} = 1 \Longrightarrow P\{\omega:\ Y_n(\omega)\to 0\} = 1.$$

Dakle, $Y_n \xrightarrow{a.s.} 0$. Lako se provjerava da $EY_n^2 \to 0$, $n\to\infty$. ◄

# 4 Zakoni velikih brojeva

Definicija 4.1 *Neka su $X_n, n = 1, 2, ...$ slučajne promjenljive sa konačnim matematičkim očekivanjem i neka je $S_n = X_1 + ... + X_n, n = 1, 2, ...$ Ako niz*

$$\frac{S_n - ES_n}{n}$$

*konvergira u vjerovatnoći ka 0, tada za niz $X_n$ važi slabi zakon velikih brojeva. Ako je konvergencija ka 0 skoro izvjesna, tada za niz $X_n$ važi strogi zakon velikih brojeva.*

**Teorema 4.1 Bernulijev zakon velikih brojeva.** *Neka $S_n : \mathcal{B}(n,p)$. Tada $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} p$.*

♦Znamo da je $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} I_{A_k}$, gdje je $A_k$ događaj da se u $k$-tom opitu Bernulijeve sheme ostvari uspjeh. Očigledno $E\frac{S_n}{n} = p$. Primjenom Čebišovljeve nejednakosti dobijamo

$$\epsilon > 0, P\Big\{ \mid \frac{S_n}{n} - p \mid > \epsilon \Big\} \leqslant \frac{D\frac{S_n}{n}}{\epsilon^2} = \frac{pq}{n\epsilon^2} \leqslant \frac{1}{4n\epsilon^2} \to 0, n \to \infty. ♦$$

**Komentar.** U opitu u kome $n$ puta bacamo novčić, $n$ je veliko, iskustvo nas uči da relativna učestalost palih pisama ne odstupa "mnogo" od $\frac{1}{2}$. Međutim, ne mogu se isključiti slučajevi kada dolazi do značajnog odstupanja. Recimo, u četvrtini bacanja padne pismo. Tada je relativna učestalost pisama $\frac{1}{4}$ i taj broj "mnogo" odstupa od $\frac{1}{2}$. Prirodno se nameće računanje vjerovatnoće događaja $W = \Big\{ \mid \frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \mid > \epsilon \Big\}$-odstupanje relativne učestalosti pisama odstupa od $\frac{1}{2}$ više od $\epsilon$. Eksplicitno računanje te vjerovatnoće je težak i mukotrpan zadatak, a dobijeni rezultat neprikladan za dobijanje ocjene vjerovatnoće odstupanja. Jakob Bernuli je našao ocjenu te vjerovatnoće ($\leqslant \frac{1}{4n\epsilon^2}$) i potom zaključio da vjerovatnoća odstupanja teži ka 0. Dakle, vjerovatnoća događaja da je odstupanje veće od $\epsilon$, sa rastom $n$ sve je manja. Uskoro ćemo naći bolju ocjenu za $P\Big\{ \mid \frac{S_n}{n} - p \mid > \epsilon \Big\}$.

**Teorema 4.2 Čebišovljev zakon velikih brojeva.** *Neka je $X_n, n = 1, 2, ...$ niz nezavisnih slučajnih promjenljivih i neka je $C$ konstanta za koju važi $DX_n \leqslant C, n = 1, 2, ...$ Tada za niz $X_n$ važi slabi zakon velikih brojeva.*

$$♦\epsilon > 0, P\Big\{ \frac{\mid S_n - ES_n \mid}{n} > \epsilon \Big\} \leqslant \frac{DS_n}{\epsilon n^2} \leqslant \frac{Cn}{\epsilon n^2} \to \infty.$$

Koristili smo Čebišovljevu nejednakost.♦

**Teorema 4.3 Hinčinov zakon velikih brojeva.** *Neka je $X_n, n = 1, 2, ...$ niz nezavisnih jednako raspodijeljenih slučajnih promjenljivih sa konačnim matematičkim očekivanjem i neka je $EX_1 = a$. Tada za niz $X_n$ važi slabi zakon velikih brojeva.*

$$\blacklozenge t \in \mathbf{R}, f_{\frac{S_n - ES_n}{n}}(t) = f_{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{X_k - a}{n}}(t) = [EX_k - a = 0] = \prod_{k=1}^{n} \big(1 + o(\frac{t}{n})\big) = \big(1 + o(\frac{t}{n})\big)^n \to 1 = f_0(t).$$

Iz teoreme neprekidnosti slijedi da niz $\frac{S_n - ES_n}{n}$ konvergira u raspodjeli ka 0. Kako je 0 konstanta, niz konvergira i u vjerovatnoći.$\blacklozenge$

Primjer 4.1 *Neka je $X_n$, $n = 1, 2, ...$ niz nezavisnih slučajnih promjenljivih sa raspodjelama*

$$X_n : \begin{array}{cc} -2^n & 2^n \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}.$$

*Dokazati da za niz $X_n$ ne važi slabi zakon velikih brojeva.*

$\blacktriangleright$Primijetimo, $P\{|S_{n-2}| \leqslant 2^{n-1}\} = 1$. Neka je $0 < \varepsilon < 1$. Imamo

$$P\Big\{\Big|\frac{S_n}{n}\Big| \geqslant \varepsilon\Big\} \geqslant P\Big\{\Big|\frac{S_n}{n}\Big| \geqslant \varepsilon | X_n = 2^n, X_{n-1} = 2^{n-1}\Big\} \times$$
$$\times P\{X_n = 2^n, X_{n-1} = 2^{n-1}\} = P\{X_n = 2^n, X_{n-1} = 2^{n-1}\} = \frac{1}{4}.$$

Dakle, za niz $X_n$ ne važi slabi zakon velikih brojeva.$\blacktriangleleft$

Primjer 4.2 *Neka je $X_n$, $n = 1, 2, ...$ niz nezavisnih slučajnih promjenljivih sa $\mathcal{N}(0, n)$ raspodjelama. Dokazati da za niz $X_n$ ne važi slabi zakon velikih brojeva.*

$\blacktriangleright$Metodom karakterističnih funkcija lako se dokazuje $\frac{S_n}{n} : \mathcal{N}\Big(0, \frac{n+1}{2n}\Big)$. Neka je $\varepsilon$ proizvoljan broj veći od 0. Imamo

$$P\Big\{\Big|\frac{S_n}{n}\Big| \leqslant \varepsilon\Big\} = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sqrt{\frac{n}{(n+1)\pi}} e^{-\frac{nu^2}{n+1}} du \longrightarrow \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} du < 1, \; n \to \infty.$$

Dakle, za niz $X_n$ ne važi slabi zakon velikih brojeva.$\blacktriangleleft$

Primjer 4.3 *Neka je $X_n$, $n = 1, 2, ...$ niz nezavisnih slučajnih promjenljivih sa raspodjelama*

$$X_n : \begin{array}{cc} 0 & 2^n \\ 1 - \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{array}.$$

*Dokazati da* $X_n \xrightarrow{P} 0$*, ali da* $\frac{S_n}{n} \stackrel{P}{\not\longrightarrow} 0$.

►Neka je $\varepsilon$ proizvoljan broj veći od 0. Za dovoljno veliko $n$ imamo $P\{X_n > \varepsilon\} = \frac{1}{n}$ te je konvergencija niza $X_n$ u vjerovatnoći ka nuli očigledna.

Neka je $N$ prirodan broj, $N \geqslant 4$. Lako se provjerava da je $2^{N/2} > N$. Za $n \geqslant N$ imamo

$$P\Big\{\frac{S_n}{n} \leqslant 1\Big\} \leqslant P\Big\{X_k = 0, \text{ za svako } k, \frac{n+1}{2} < k \leqslant n\Big\} \leqslant$$
$$\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{n/2} \longrightarrow e^{-1/2}, \, n \to \infty. \blacktriangleleft$$

**Teorema 4.4 Kolmogorovljeva nejednakost.** *Neka su* $X_k, k = 1, 2, ..., n$*, nezavisne slučajne promjenljive,* $EX_k = 0, EX_k^2 < \infty, S_k = X_1 + ... + X_k$*. Tada za svako* $\varepsilon > 0$ *važi*

$$P\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \mid S_k \mid > \varepsilon\} \leqslant \frac{DS_n}{\varepsilon^2}.$$

♦Označimo

$$A = \{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \mid S_k \mid > \varepsilon\}; A_k = \{\mid S_i \mid \leqslant \varepsilon, i = 1, ..., k-1, \mid S_k \mid > \varepsilon\}, 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Konstatujmo,

$$A = \sum_{k=1}^{n} A_k; \; DS_n = ES_n^2 \geqslant ES_n^2 I_A = \sum_{k=1}^{n} ES_n^2 I_{A_k}.$$

$$ES_n^2 I_{A_k} = E(S_k + (X_{k+1} + ... + X_n))^2 I_{A_k} = ES_k^2 I_{A_k} +$$
$$2ES_k(X_{k+1} + ... + X_n) I_{A_k} + E(X_{k+1} + ... + X_n)^2 I_{A_k} \geqslant ES_k^2 I_{A_k}.$$

Naime $ES_k I_{A_k}(X_{k+1} + ... + X_n) = ES_k I_{A_k} E(X_{k+1} + ... + X_n) = 0$, koristimo nezavisnost promjenljivih $S_k I_{A_k}$ i $X_{k+1} + ... + X_n$. Na kraju,

$$ES_n^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} ES_k^2 I_{A_k} \geqslant \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \varepsilon^2 P(A). \blacklozenge$$

Posljedica 4.1 *Neka su* $X_k, k = 1, 2, ..., n$*, nezavisne slučajne promjenljive sa konačnim disperzijama* $DX_k, S_k = X_1 + ... + X_k$*. Tada za svako* $\varepsilon > 0$ *važi*

$$P\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \mid S_k - ES_k \mid > \varepsilon\} \leqslant \frac{DS_n}{\varepsilon^2}.$$

Ako su $w_k = X_k - EX_k$ i $S'_k = w_1 + ... + w_k$, tada je $Ew_k = 0, DS'_k = DS_k$. Imamo na osnovu upravo dokazane teoreme

$$P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} \mid S_k - ES_k \mid > \varepsilon\} = P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} \mid S'_k \mid > \varepsilon\} \leqslant \frac{DS'_n}{\varepsilon^2} = \frac{DS_n}{\varepsilon^2}.$$

**Teorema 4.5 Kolmogorovljev zakon velikih brojeva.** *Neka je* $X_n, n = 1, 2, ...,$ *niz nezavisnih slučajnih promjenljivih,* $EX_n = 0$, $DX_n = \sigma_n^2$ *i red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2}$ *konvergira. Tada* $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \overset{a.s.}{\to} 0, n \to \infty$, *tj. za niz* $X_n$ *važi strogi zakon velikih brojeva.*

♦Neka je $S_K = X_1 + X_2 + ... + X_k$. Skoro izvjesna konvergencija iz formulacije teoreme je ekvivalentna sa

$$(\forall\epsilon > 0) \lim_{n\to\infty} P\Big\{\sup_{k\geqslant n} \mid \frac{S_k}{k} \mid > \epsilon\Big\} = 0. \ (*)$$

Neka je

$$A_n = \Big\{\max_{2^{n-1}\leqslant k<2^n} \mid \frac{S_k}{k} \mid > \epsilon\Big\}.$$

Jednakost $(*)$ je ekvivalentna sa (provjerite!)

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\Big) = P\Big(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n\Big) = 0$$

Koristeći Kolmogorovljevu nejednakost dobijamo

$$P(A_n) \leqslant P\Big\{\max_{2^{n-1}\leqslant k<2^n} \mid S_k \mid > \epsilon 2^{n-1}\Big\} \leqslant P\Big\{\max_{1\leqslant k<2^n} \mid S_k \mid > \epsilon 2^{n-1}\Big\} \leqslant 4\tfrac{S_{2^n}}{\epsilon^2 2^{2n}}.$$

Na kraju,

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \leqslant 4\epsilon^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-2k} \sum_{n=1}^{2^k} \sigma_n^2 \leqslant 4\epsilon^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 \sum_{k:2^k\geqslant n} 2^{-2k} \leqslant 8\epsilon^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty,$$

koristimo ocjenu $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} 2^{-2k} \leqslant 2 \cdot 2^{-2k}$. Iz konvergencije reda $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ i Borel-Kantelijeve teoreme slijedi $(\forall\epsilon > 0) P\Big(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n\Big) = 0$.♦

POSLJEDICA 4.2 *Neka je* $X_n, n = 1, 2, ...,$ *niz nezavisnih slučajnih promjenljivih i neka red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{DX_n}{n^2}$ *konvergira. Tada* $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - EX_i) \overset{a.s.}{\to} 0$, *tj. za niz* $X_n$ *važi strogi zakon velikih brojeva.*

Formirajmo niz $w_n = X_n - EX_n$. Očigledno, $Ew_n = 0$, $Dw_n = DX_n$ i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{Dw_n}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{DX_n}{n^2}$ na osnovu pretpostavke konvergira. Na osnovu upravo dokazane teoreme slijedi $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - EX_i) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} w_i \overset{a.s.}{\to} 0$.

Posljedica 4.3 *Neka je $X_n$ niz nezavisni jednako raspodijeljenih slučajnih promjenljivih sa konačnom disperzijom i neka je $EX_n = a, S_n = X_1 + ... + X_n$. Tada za niz $X_n$ važi strogi zakon velikih brojeva tj. $\frac{S_n}{n} \overset{si}{\to} a$.*

Posljedica 4.4 **Borelov zakon velikih brojeva.** *U Bernulijevoj shemi $\frac{S_n}{n} \overset{a.s.}{\to} p$.*

Znamo da je $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} I_{A_k}$, gdje je $A_k$ događaj da se u $k$ tom opitu ostvari događaj $A$ tj. uspjeh. Promjenljive iz niza $I_{A_k}$ su nezavisne, $EI_{A_k} = p$, $DI_{A_k} = p(1-p)$ te iz prethodne posljedice slijedi Borelov zakona velikih brojeva.

**Teorema 4.6 Kolmogorovljev zakon velikih brojeva.** *Neka je $X_n$ niz nezavisnih jednako raspodijeljenih slučajnih promjenljivih, $S_n = X_1 + ... + X_n$. $\frac{S_n}{n} \overset{a.s.}{\to} a$ ako i samo ako je $EX_n = a$.* **Bez dokaza.**

**Teorema 4.7** *Neka je $X_n, n = 1, 2, ...$ niz slučajnih promjenljivih za koji važi strogi zakon velikih brojeva tj. $\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - E\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} \overset{a.s.}{\to} 0$. Tada, $\frac{X_n - EX_n}{n} \overset{a.s.}{\to} 0$.*

♦Neka je $W_n = X_n - EX_n, n = 1, 2, ..., EW_n = 0, S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} W_k$. Naše tvrđenje se sada svodi na: ako $\frac{S_n}{n} \overset{a.s.}{\to} 0$, tada $\frac{W_n}{n} \overset{a.s.}{\to} 0$. Iz

$$\frac{S_n}{n} \overset{a.s.}{\to} 0 \Rightarrow (\forall \epsilon > 0) P\{\mid S_n \mid > n\epsilon \text{ za b.m. } n\} = 0.$$

Ako je

$$\mid W_n \mid > n\epsilon \Rightarrow \mid S_n - S_{n-1} \mid > n\epsilon \Rightarrow \mid S_n \mid > \frac{n\epsilon}{3} \vee \mid S_{n-1} \mid > \frac{n\epsilon}{3} > \frac{(n-1)\epsilon}{3}.$$

Dakle,

$$\{\mid W_n \mid > n\epsilon \text{ za b.m. } n\} \subseteq \{\mid \frac{S_n}{n} \mid > \frac{\epsilon}{3} \text{ za b.m. } n\} \Rightarrow (\forall \epsilon > 0) P\{\mid W_n \mid > n\epsilon \text{ za b.m. } n\} = 0$$

tj. $\frac{W_n}{n} \xrightarrow{a.s.} 0.$♦

**Normalni brojevi.** Opit slučajnog izbora braja sa $[0,1]$ se modelira vjerovatnosnim prostorom $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, P)$, $P$ je Lebegova mjera na $[0,1]$. Neka je $\omega$ proizvoljni broj sa $[0,1]$ i neka je $\omega = 0, \omega_1\omega_2...$ odgovarajući binarni razvoj (zbog jednoznačnosti u slučaju kada postoje dva razvoja, opredjeljujemo se za onaj sa beskonačno mnogo uzastopnih nula). Za broj sa $[0,1]$ kažemo da je **normalan** ako relativna učestalost cifre 1 među prvim ciframa njegovog binarnog razvoja konvergira ka $\frac{1}{2}$. Akup normalnih brojeva ćemo označiti sa $A$. Formirajmo niz slučajnih promjenljivih $X_n, X_n(\omega) = \omega_n, n = 1, 2, ...$ Kako je

$$P\{X_{n_1} = x_1\} \cdots P\{X_{n_k} = x_k\} = \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k} = P\{X_{n_1} = x_1, ..., X_{n_k} = x_k\},$$

(provjeriti!) zaključujemo da su slučajne promjenljive iz niza $X_n$ nezavisne i

$$X_n : \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}.$$

Na osnovu Kolmogorovljevog zakona velikih brojeva zaključujemo

$$p\Big\{\omega : \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) \to \frac{1}{2}\Big\} = P(A) = 1,$$

dakle Lebegova mjera skupa normalnih brojeva sa $[0,1]$ je 1. Drugim riječima, skoro svi brojevi sa $[0,1]$ su normalni.

**Metod Monte Karlo.** Neka je $f : [0,1] \to [0,1]$ neprekidna funkcija. Neka je $X_1, Y_1, X_2, Y_2, ...$ niz nezavisnih slučajnih promjenljivih sa $\mathcal{U}[0,1]$ raspodjelom. Neka je

$$w_i = \begin{cases} 1, & f(X_i) > Y_i, \\ 0, & f(X_i) \leqslant Y_i. \end{cases}$$

Konstatujmo, slučajne promjenljive $w_i, i = 1, 2, ...$ su nezavisne i

$$Ew_i = P\{f(X_i) > Y_i\} = \int_0^1 f(x)dx.$$

Kako za niz $w_i$ važi strogi zakon velikih brojeva, zaključujemo

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i \overset{a.s.}{\to} \int\limits_0^1 f(x)dx.$$

Metod Monte Karlo za približno računanje integrala $\int\limits_0^1 f(x)dx$ se zasniva na ustanovljenoj konvergenciji. Modeliraju se nezavisne slučajne tačke $(X_i, Y_i)$ (vektor $(X_i, Y_i) : \mathcal{U}([0,1] \times [0,1])$), zatim se ustanovljavaju realizacije $w_i$ i konačno se realizacija $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} w_i$. proglašava za aproksimaciju integrala. Veća vrijednost broja $n$ obezbjeđuje bolju aproksimaciju.

Primjer 4.4 *Neka je $X_n$, $n = 2, 3, ...$ niz nezavisnih slučajnih promjenljivih sa raspodjelama*

$$X_n : \begin{array}{ccc} -n & 0 & n \\ \frac{1}{2n\ln n} & 1-\frac{1}{n\ln n} & \frac{1}{2n\ln n} \end{array}.$$

*Dokazati da za niz $X_n$ važi slabi, a ne važi strogi zakon velikih brojeva.*

► $0 < \epsilon < 1$, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} P\{\mid X_n \mid > n\epsilon\} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n} = \infty \Rightarrow \frac{X_n}{n} \overset{a.s.}{\not\to} 0.$

Primijetimo da je $DX_n = \frac{n}{\ln n}$, $n = 2, 3, ...$ i da funkcija $g(x) = \frac{x}{\ln x}$ monotono raste za $x > e$. Sada imamo

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=2}^{n+1} DX_k \leqslant \frac{1}{n^2}\Big[\frac{2}{\ln 2} + \int\limits_3^{n+2} \frac{x}{\ln x}dx\Big] \leqslant \frac{2}{n^2\ln 2} + \frac{(n-1)(n+2)}{n^2\ln n}.$$

Neka je $\varepsilon$ proizvoljan broj veći od 0. Na osnovu Čebišovljeve nejednakosti imamo

$$P\Big\{\Big|\frac{S_n}{n}\Big| > \varepsilon\Big\} \leqslant \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{k=2}^{n+1} DX_k \longrightarrow 0,\ n \to \infty.$$

Dakle, za niz $X_n$ važi slabi zakon velikih brojeva.◄

Primjer 4.5 *Neka je $f$ neprekidna funkcija zadata na segmentu $[0,1]$ i neka je $X_n$, $n = 1, 2, ...$ niz nezavisnih, jednako raspodijeljenih slučajnih veličina sa $\mathcal{U}[0,1]$ raspodjelom. Dokazati da $f\big(\frac{S_n}{n}\big) \xrightarrow{a.s.} f\big(\frac{1}{2}\big)$ i $Ef\Big(\frac{S_n}{n}\Big) \longrightarrow f\big(\frac{1}{2}\big)$, $n \to \infty$.*

►Na osnovu Borelove teoreme $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s.} \frac{1}{2}$. Zbog neprekidnosti funkcije $f(x)$ imamo

$$P\Big\{f\Big(\frac{S_n}{n}\Big)\longrightarrow f\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big\} = 1,\ n \to \infty.$$

Dakle $f\big(\frac{S_n}{n}\big) \xrightarrow{a.s.} f\big(\frac{1}{2}\big)$.

$$Ef\Big(\frac{S_n}{n}\Big) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f\Big(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\Big)dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$
$$\int_\Omega f\Big(\frac{S_n(\omega)}{n}\Big)P(d\omega) \longrightarrow \int_\Omega f\Big(\frac{1}{2}\Big)P(d\omega) = f\Big(\frac{1}{2}\Big),\ n \to \infty. ◄$$

Primjer 4.6 *Izračunati* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \ldots \int_0^1 \cos^{2m} \frac{\pi}{2n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)dx_1 dx_2 \ldots dx_n$.

►Na funkciju $f(x) = \cos^{2m}\frac{\pi}{2}x,\ x \in [0,1]$ primijenimo drugo tvrđenje iz prethodnog primjera. Tražena granična vrijednost je $f\big(\frac{1}{2}\big) = 2^{-m}$. ◄

# 5 Centralna granična teorema

**Teorema 5.1 Centralna granična teorema.** *Za niz* $X_n, n = 1, 2, \ldots$ *nezavisnih, jednako raspodijeljenih slučajnih promjenljivih,* $EX_n = a, DX_n = \sigma^2, S_n = X_1 + \ldots + X_n$ *važi:*

$$(\forall x \in \mathbf{R})P\Big\{\frac{S_n - na}{\sqrt{n\sigma^2}} < x\Big\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt, n \to \infty,\ \textit{tj.}\ \frac{S_n - na}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{d} X^* : \mathcal{N}(0,1).$$

♦Neka je $t \in \mathbf{R}$.

$$f_{\frac{S_n - na}{\sqrt{n\sigma^2}}}(t) = \prod_{k=1}^{n} f_{\frac{X_k - a}{\sqrt{n\sigma^2}}}(t) = \Big(1 - \frac{t^2}{2n} + o\Big(\frac{t^2}{2n}\Big)\Big)^n \to e^{-\frac{t^2}{2}} = f_{X^*}(t), n \to \infty.$$

Iz teoreme neprekidnosti za karakteristične funkcije slijedi $\frac{S_n - na}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{d} X^*$.♦

Posljedica 5.1 **Integralna Moavr-Laplasova teorema.** *Neka* $S_n : \mathcal{B}(n,p)$. *Tada*

$$(\forall x \in \mathbf{R}) P\Big\{\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < x\Big\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, n \to \infty, \ \textit{tj.} \ \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{d} X^*.$$

Postoji i lokalna Moavr-Laplasova teorema koja se koristi za aproksimaciju vjerovatnoće $P_n(m) = P\{S_n = m\}$ u slučaju velikog $n$. Teoremu ćemo prezentovati bez dokaza.

**Teorema 5.2 Lokalna Moavr-Laplasova teorema.** *Za* $\forall C > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi npq} P_n(m)}{e^{-\frac{x^2}{2}}} = 1$$

*ravnomjerno po svim* $m \in \{0, 1, ..., n\}$ *za koje se* $x = x_{m,n} = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ *nalazi u intervalu* $(-C, C)$, *tj.*

$$\sup_{\{m:|m-np|<C\sqrt{npq}\}} \Big|\frac{\sqrt{2\pi npq} P_n(m)}{e^{-\frac{x^2}{2}}} - 1\Big| \to 0, n \to \infty.$$

U knjizi B.V. Gnedenko: The theory of probability, knjiga se moze skinuti sa http://gen.lib.rus.ec/, lijepo je ilustrovana primjena lokalne teoreme. Iz te knjige navodimo konkretan primjer.

Koristi se oznaka $Q_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Podaci su $n = 400, p = \frac{1}{2}, m = 210$. Imamo $x_{210,400} = 1, P_{400}(210) = 0,024207, Q_{400}(210) = 0,024194, P_{400}(210) - Q_{400}(210) = 0,000013$, $\frac{P_{400}(210)}{Q_{400}(210)} = 1,0004$.

Primjer 5.1 *Kocka se baca* 100 *puta. Kolika je vjerovatnoća da je zbir palih brojeva između* 340 *i* 370*?*

►Sa $X_k$, $k = 1, 2, \ldots, 100$, označimo rezultat $k$-tog bacanja. Jasno

$$X_k : \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{matrix}, \ EX_k = 3,5, \ DX_k = \frac{35}{12}, \ k = 1, 2, \ldots, 100.$$

Zbir palih brojeva je $S_{100} = \sum\limits_{k=1}^{100} X_k$.

Niz vjerovatnoća u CGT brzo konvergira, 100 je dovoljno velik broj pa je opravdano tražiti rezultat kao što to radimo u redovima koji slijede. Iako koristimo aproksimaciju, zbog njene izuzetne preciznosti, nakon primjene CGT nećemo upotrijebiti simbol za približnu vrijednost već simbol jednakosti.

$$P\{340 < S_{100} < 370\} = P\left\{\frac{340-350}{\sqrt{\cdot}} < \frac{S_{100} - 100 \cdot 3,5}{\sqrt{100 \cdot \frac{35}{12}}} < \frac{370-350}{\sqrt{\cdot}}\right\}$$

$$= \Phi^*(1,17) + \Phi^*(0,59) = 0,379 + 0,222 = 0,601. \blacktriangleleft$$

Primjer 5.2 *Informacionim kanalom se prenose binarni nizovi. Zbog prisustva bijelog šuma u kanalu, vjerovatnoća pravilnog prijema odaslanog znaka je* $0,55$. *Zbog toga se svaki znak šalje* $n$ *puta, a odluka o poslanom znaku se donosi nakon utvrđivanja znaka koji se češće javlja. Naći najmanje* $n$ *za koje je vjerovatnoća pravilne odluke* $> 0.99$.

$\blacktriangleright$Smatraćemo da je uspjeh pravilno primljeni znak. Kod nas je $p = 0,55$, $q = 0,45$, dok $S_n : \mathcal{B}(n,p)$ predstavlja broj pravilno primljenih znakova. Pravilnu odluku donosimo ako je $S_n > \frac{n}{2}$. Sada imamo

$$P\left\{S_n > \frac{n}{2}\right\} = P\left\{\frac{S_n - 0,55n}{\sqrt{\cdot}} > \frac{0,5n - 0,55n}{\sqrt{0,55 \cdot 0,45n}}\right\} = 1 - \Phi\left(-\frac{0,05\sqrt{n}}{\sqrt{0,2475}}\right)$$

$$= 0,5 + \Phi^*\left(\frac{0,05\sqrt{n}}{\sqrt{0,2475}}\right) > 0,99 \Longrightarrow \frac{0,05\sqrt{n}}{\sqrt{0,2475}} > 2,33 \Longrightarrow n = 537. \blacktriangleleft$$

Primjer 5.3 *Strijelac pogađa metu sa vjerovatnoćom* $0,4$ *i gađa u nju* $150$ *puta. Naći bar jedan interval u kojem će se sa vjerovatnoćom* $> 0,8$ *nalaziti broj pogodaka.*

$\blacktriangleright$Slučajna veličina $S_{150} : \mathcal{B}(150; 0,4)$ predstavlja broj pogodaka. Tražićemo interval oblika $(A, B)$.

$$P\{A < S_{100} < B\} = P\left\{\frac{A-60}{6} < \frac{S_{150} - 60}{\sqrt{150 \cdot 0,4 \cdot 0,6}} < \frac{B-60}{6}\right\}$$

$$= 0,8 \Longrightarrow \frac{A-60}{6} = -1,28,\ \frac{B-60}{6} = 1,28 \Longrightarrow A = 52,32,\ B = 67,68$$

te je zbog cjelobrojnosti broja pogodaka traženi interval $(52,68)$. Interval je tim bolji što je kraći. Cilj dobijanja najkraćeg intervala se ostvaruje izborom simetričnog intervala $\left(\frac{A-60}{6}; \frac{B-60}{6}\right)$. Naime, od svih intervala za koje je vjerovatnoća da u njih "upadne" $X^*$ konstantna, najkraći je simetričan interval. $\blacktriangleleft$

Primjer 5.4 *Koliko puta treba baciti novčić pa da sa vjerovatnoćom* $> 0,95$ *odstupanje relativne učestalosti pojave pisma od* $\frac{1}{2}$ *bude* $\leqslant 0,02$*?*

▶ Muavr–Laplasova teorema nam daje mogućnost da nađemo $n$ za koje je sa vjerovatnoćom $> \alpha$ (prirodno je raditi sa $\alpha$ koje je blisko 1) odstupanje relativne frekvencije posmatranog događaja od vjerovatnoće tog događaja manje od nekog malog $\varepsilon$. Sa dobijenim rezultatom sebi možemo dati za pravo da u nekom smislu predviđamo budućnost. Naime, kad u nekom konkretnom vjerovatnosnom zadatku nađemo vjerovatnoću $p$ nekog događaja $A$, a zatim nađemo i gore pomenuto $n$, tada možemo sa velikom dozom uvjerenosti tvrditi da će nakon $n$ ponavljanja opita, relativna frekvencija događaja $A$ biti blizu broja $p$.

Potražimo $n$ u konkretnom slučaju.

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n}-0,5\right|\leqslant 0,02\right\}=P\left\{\left|\frac{S_n-0,5n}{\sqrt{0,5\cdot 0,5n}}\right|\leqslant 0,04\sqrt{n}\right\}=2\Phi^*(0,04\sqrt{n})$$
$$> 0,95 \Longrightarrow 0,04\sqrt{n} > 1,96 \Longrightarrow n = 2401.$$

Korišćenjem nejednakosti Čebišova dobijamo grubu aproksimaciju broja $n$.

$$0,95 < P\left\{\left|\frac{S_n}{n}-0,5\right|\leqslant 0,02\right\} \Longrightarrow P\left\{\left|\frac{S_n}{n}-0,5\right| > 0,02\right\}\leqslant 0,05$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{4n(0,02)^2}\leqslant 0,05 \Longrightarrow n > 12500. ◀$$

Primjer 5.5 *Izračunati* $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$.

▶Neka su $X_1, X_2, ..., X_n$ nezavisne, jednako raspodijeljene slučajne promjenljive sa $\mathcal{P}(1)$ raspodjelom. Znamo da je $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} X_k : \mathcal{P}(n)$. Sada imamo

$$P\{S_n \leqslant n\} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}e^{-n} = P\Big\{\frac{S_n-n}{\sqrt{n}}\leqslant 0\Big\} \longrightarrow \Phi(0)=\frac{1}{2},\ n\to\infty. ◀$$

Primjer 5.6 *Neka je* $X_n$, $n = 1, 2, 3, ...$ *niz nezavisnih slučajnih promjenljivih sa raspodjelama*

$$X_n : \begin{array}{ccc} -n & 0 & n \\ \frac{1}{2n^2} & 1-\frac{1}{n^2} & \frac{1}{2n^2} \end{array}.$$

*Dokazati da za niz* $X_n$ *ne važi CGT.*

►Elementarno se ustanovljava da je $EX_n = 0$, $DX_n = 1$, $n = 1, 2, ...$ i $X_n \xrightarrow{a.s.} 0$. Iz ustanovljedne skoro izvjesne konvergencije slijedi da skoro izvjesno u nizu $X_n$ postoji samo konačno mnogo članova različitih od nule te red $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ skoro izvjesno konvergira. Dakle, $\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{\sqrt{n}} \xrightarrow{si} 0$, $n \to \infty$. ◄