



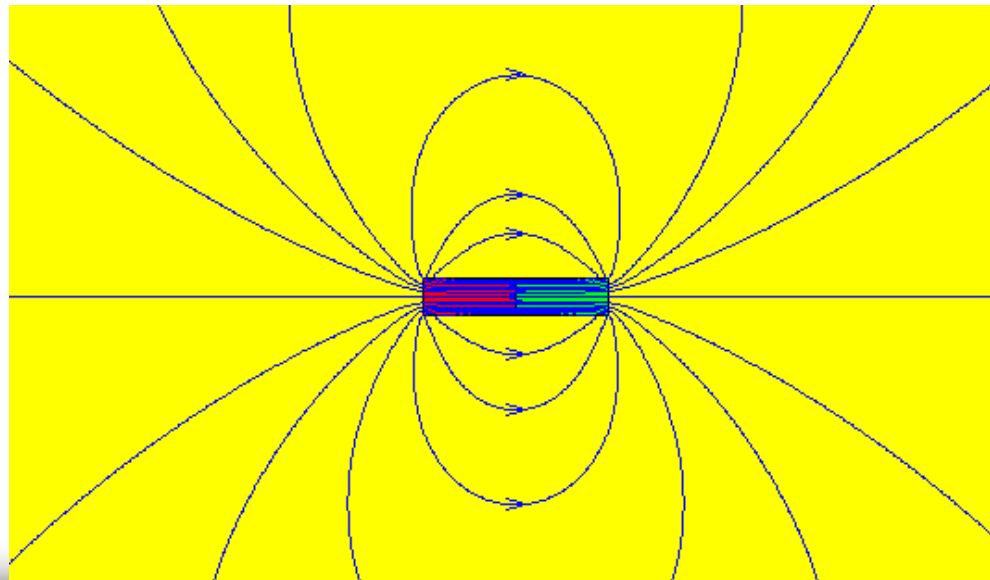
# **ELEKTROMAGNETIKA**

# Magnetska sila i magnetsko polje

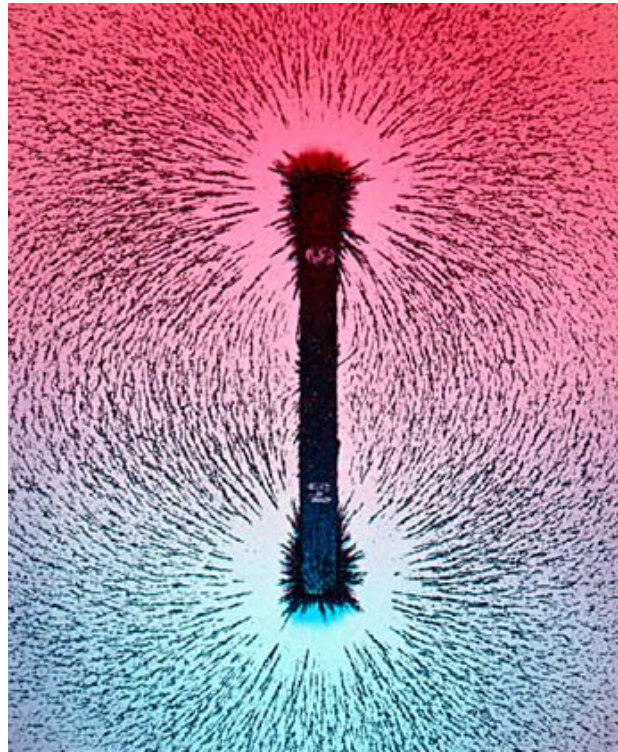
## ⇒ Magnet

- pojam magneta
- postojanje dva pola koja se ne mogu razdvojiti
- magnet je dipol
- kompas

## ⇒ Magnetsko polje stalnog magneta

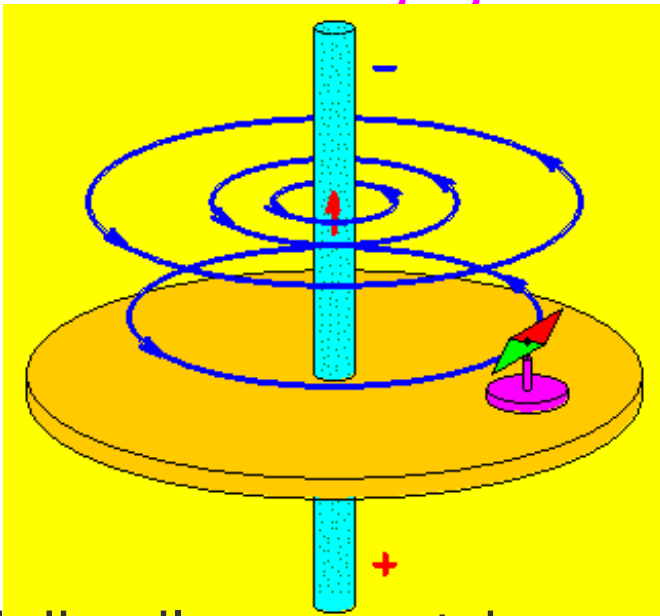


# Magnetsko polje magneta

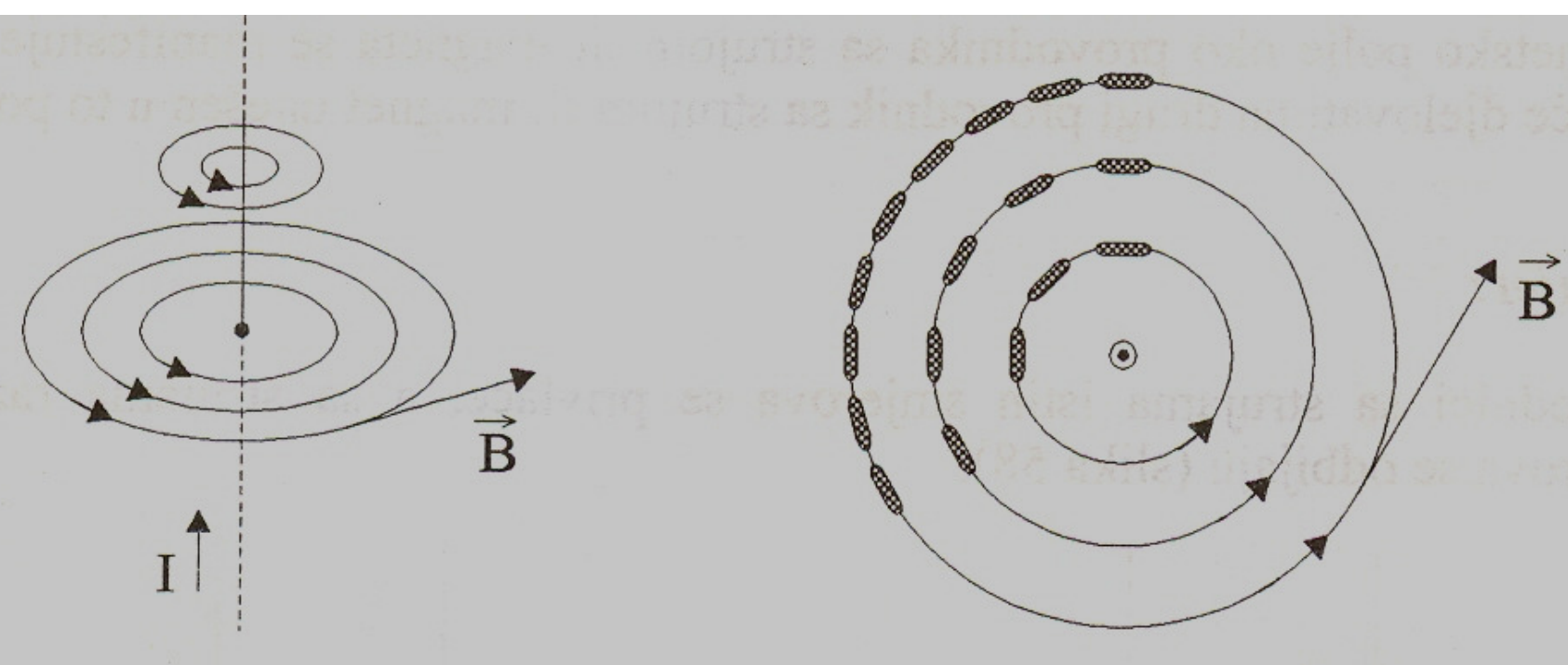
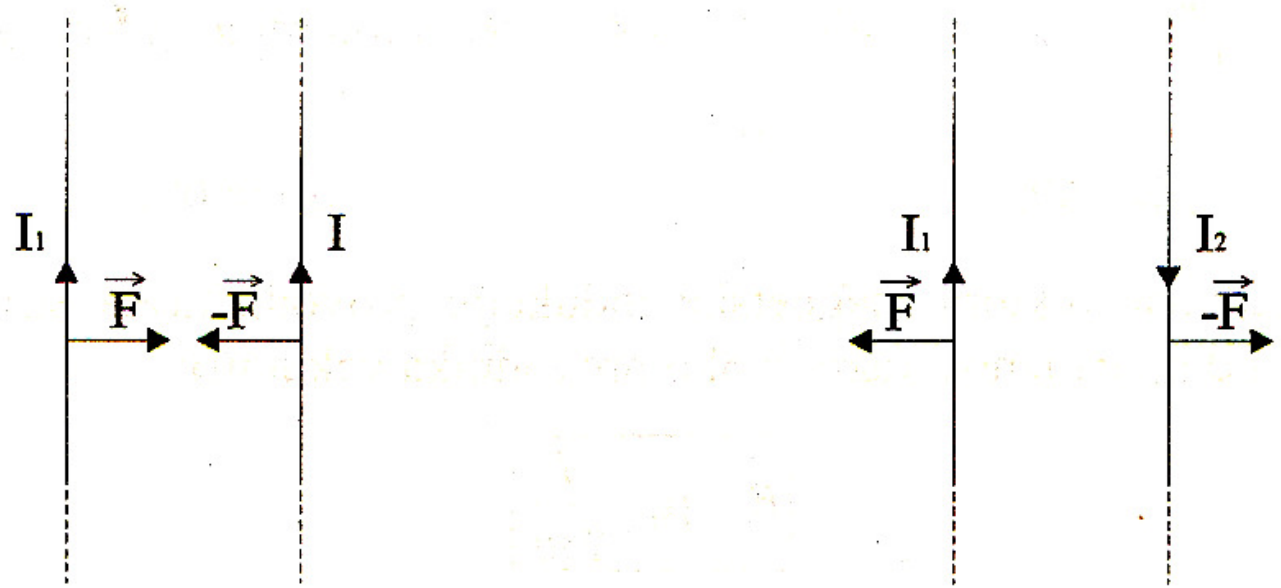


# Magnetsko polje pravolinijskog provodnika

- ⇒ Kompas reaguje u prisustvu provodnika !!! (Ersted)
- ⇒ Električna struja je izvor magnetskog polja !!!

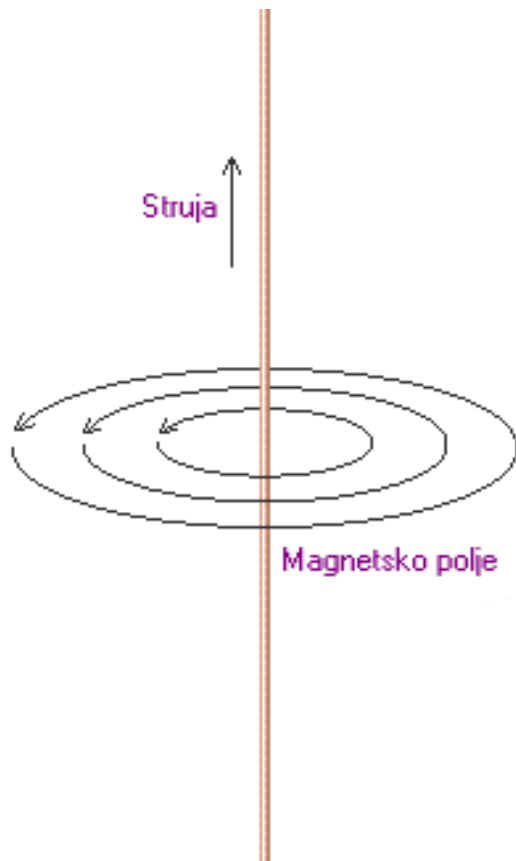


- Linije sila magnetskog polja su **zatvorene** linije !!!
- Ne postoji početna i završna tačka linije sila magnetskog polja

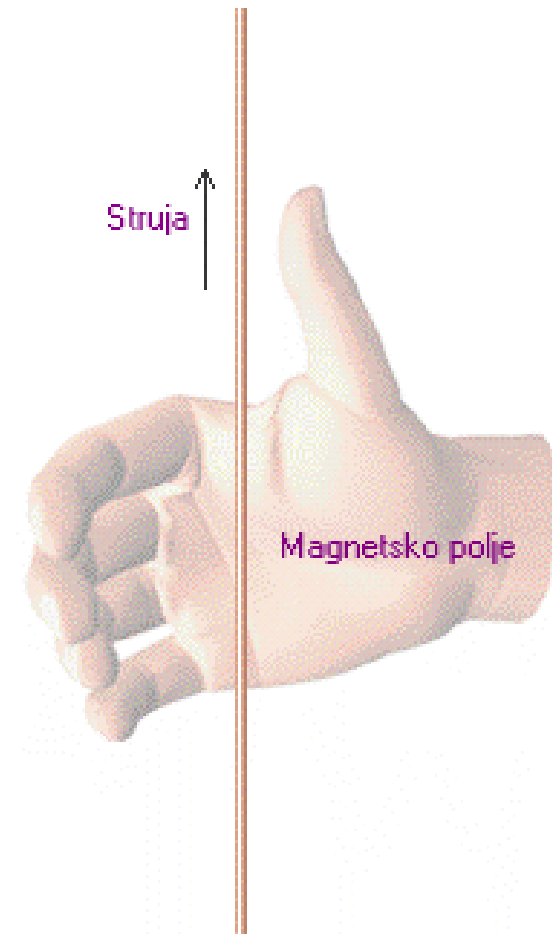


# Indukcija magnetskog polja pravolinijskog provodnika

⇒ Eksperimentalno odredio Amper



$$B = k' \frac{I}{r}$$



# Indukcija magnetskog polja

- ⇒ Fizička veličina koja opisuje silu kojom deluje magnetsko polje (Amper)
- ⇒ Igra ulogu sličnu jačini električnog polja
- ⇒ Izvor magnetskog polja je  $(I \cdot l)$
- ⇒ Magnetsko polje deluje na  $(I \cdot l)$
- ⇒  $(I \cdot l)$  igra ulogu “magnetskog naboja”

$$E = \frac{F_{el}}{Q_{probno}}$$

$$B = \frac{F_{mag}}{(I \cdot l)_{probno}}$$

$$[B] = \frac{N}{Am} = T \quad (Tesla)$$

# 3. ELEKTROMAGNETIKA

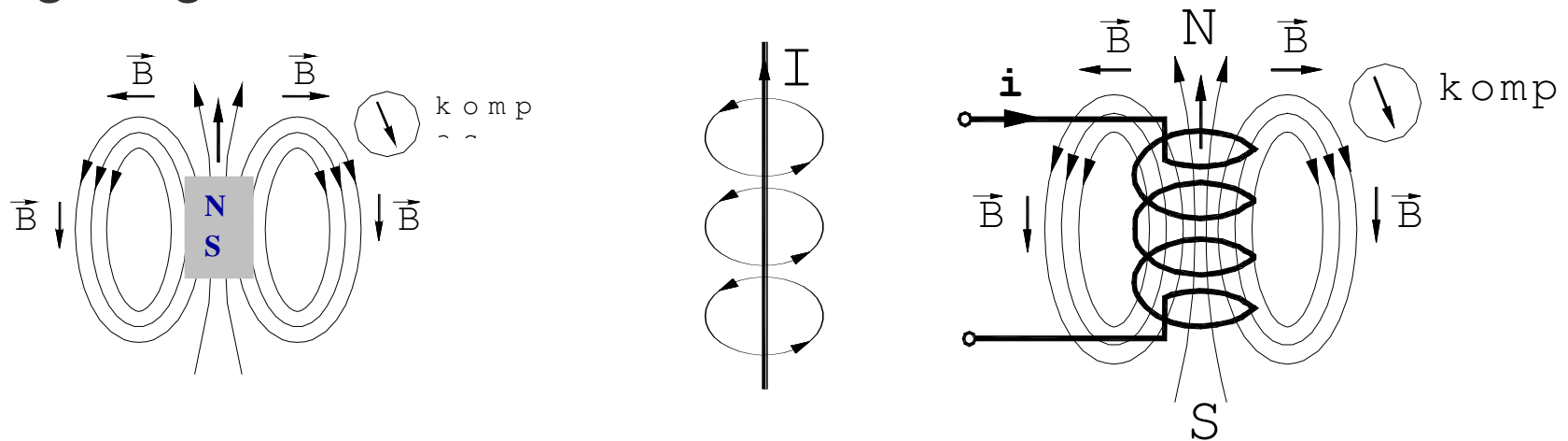
Elektromagnetika je oblast elektrotehnike u kojoj se proučavaju jedinstvene elektromagnetne pojave.

Magnetne pojave, kao i električne, uočene su davno. Međutim, tek početkom XIX vijeka otkrivena je njihova međuzavisnost. Godine 1821. Ersted je otkrio da magnetna igla (kompas) skreće sa pravca sjever-jug, ako se u njenoj blizini nalazi provodnik kroz koji protiče električna struja. Djelovanje električne struje nije, dakle, lokalizovano samo u električnom kolu (zagrijavanje provodnika, hemijske reakcije u bateriji), već se to djelovanje osjeća i van provodnika. Kažemo da električna struja u okolnom prostoru stvara ***magnetno polje***. Eksperimenti ukazuju da ovo magnetno polje, stvoreno strujom (elektricitetom u pokretu), ima sve osobine magnetnog polja koje potiče od ***permanentnog (stalnog) magneta***.



Čuveni naučnici toga doba, među kojima treba izdvojiti Ampere i Faradeja, na osnovu mnogobrojnih eksperimenata, uspijevaju da shvate zakonitosti elektromagnetnih pojava i dolaze do saznanja da **nema električne struje bez magnetskog polja, niti, magnetskog polja bez električne struje**. Te dvije pojave su djelovi jedne jedinstvene **elektromagnetske pojave**.

Eksperimentom se lako može uvjeriti da se oko svakog provodnika sa strujom javlja magnetno polje, slično kao kod stalnog magneta.



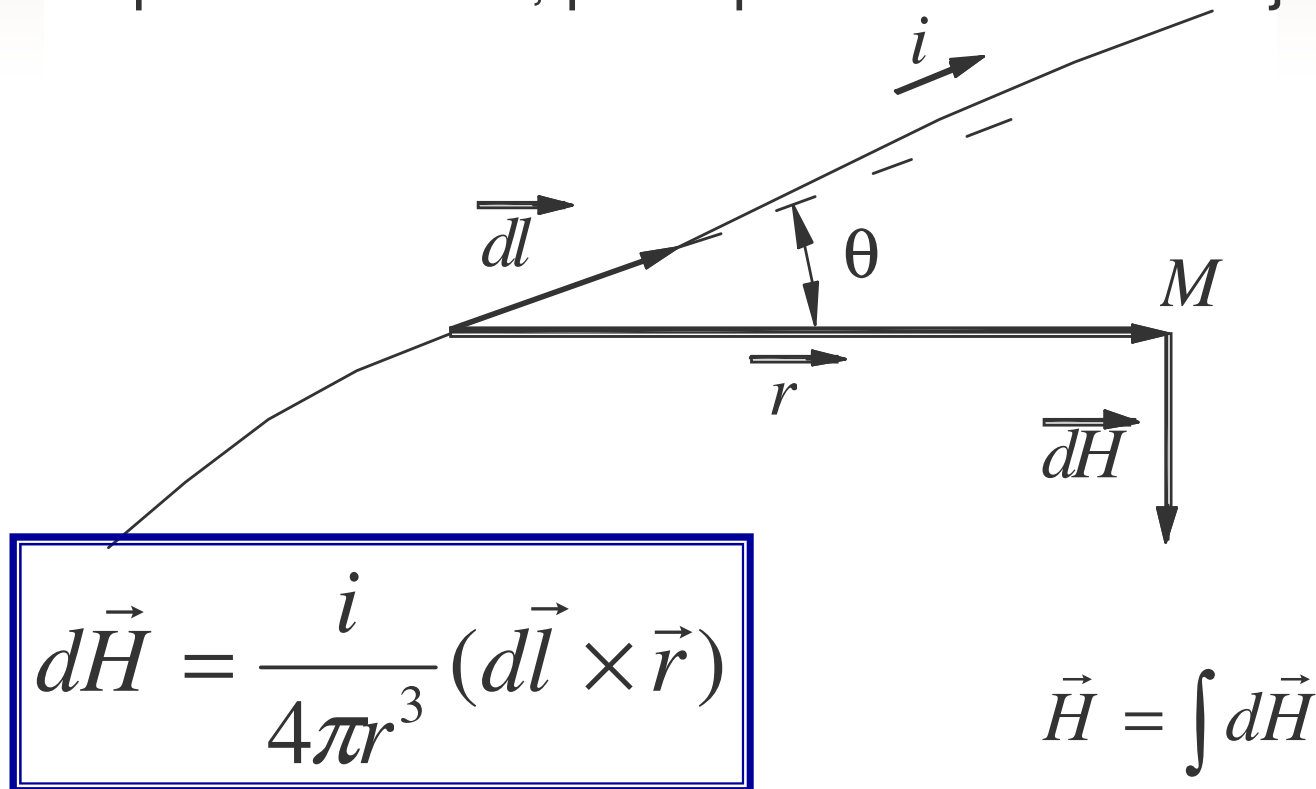
## 3.1 Magnetno polje

### 3.1.1 Laplasov zakon

Magnetno polje je vektorsko polje opisano u svakoj tački **vektorom jačine magnetnog polja  $H$**

**Laplasov zakon** (u literaturi se srijeće i pod nazivom Amperov zakon) nam omogućava da, u bilo kojoj tački oko provodnika, odredimo elementarno polje  **$dH$** , koje potiče od elementa  **$dl$**  električnog kola kroz koje teče struja  $i$ . Ukupna jačina polja  **$H$**  u posmatranoj tački dobija se kao zbir elementarnih polja svih elemenata  **$dl$**  električnih kola koja, učestvuju u stvaranju posmatranog magnetnog polja.

Na slici je prikazan je dio provodnika kroz koji teče struja  $i$ . Elementarna jačina magnetnog polja u tački M, koje potiče od djelića provodnika  $d\vec{l}$ , po Laplasovom zakonu je:



$$d\vec{H} = \frac{i}{4\pi r^3} (d\vec{l} \times \vec{r})$$

$$\vec{H} = \int d\vec{H}$$

$$dH = \frac{i}{4\pi r^2} dl \cdot \sin \theta$$

$$d\vec{H} = \vec{i} dH_x + \vec{j} dH_y + \vec{k} dH_z$$

$$\mathbf{H} (=) \text{ A/m}$$

### 3.1.2 Amperov zakon ukupne struje

Zakon ukupne struje opisuje značajnu osobinu magnetnog polja, prema kojem je, bez obzira na porijeklo magnetnog polja i okolnu sredinu, u prirodi uvijek zadovoljena sljedeća jednakost:

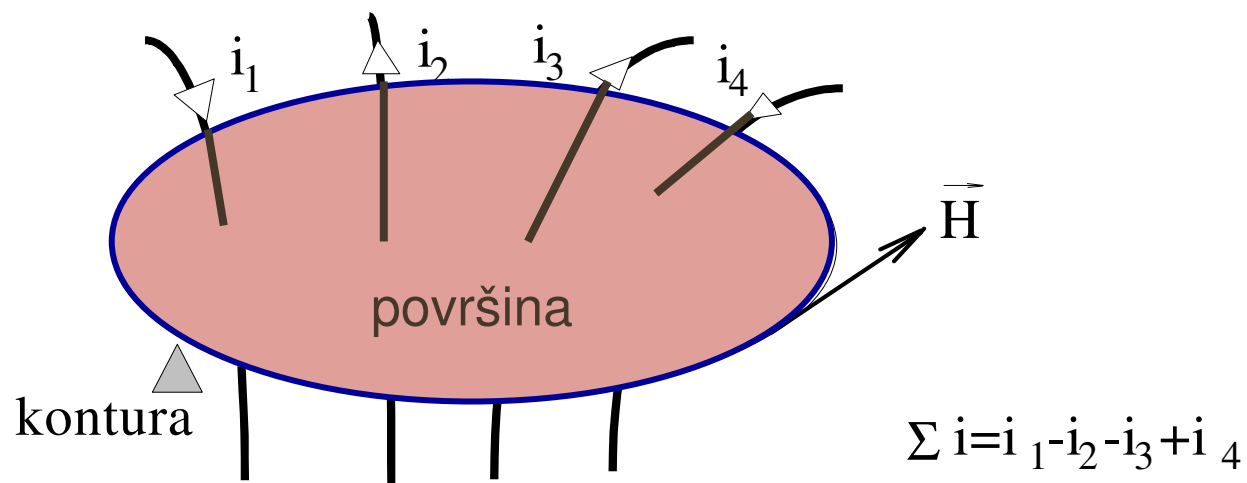
$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int \vec{J} d\vec{S}$$

koja predstavlja matematičku formu Amperovog zakona ukupne struje (ili, kako se ponekad naziva, zakon o cirkulaciji vektora  $\mathbf{H}$ ). Interpretacija ovog zakona je da je cirkulacija vektora jačine polja po proizvoljnoj zatvorenoj liniji  $l$  jednaka ukupnoj struji koja prolazi kroz površinu koja se oslanja na tu konturu.

Za praktičnu primjenu, ipak, značajniji je oblik ovog zakona:

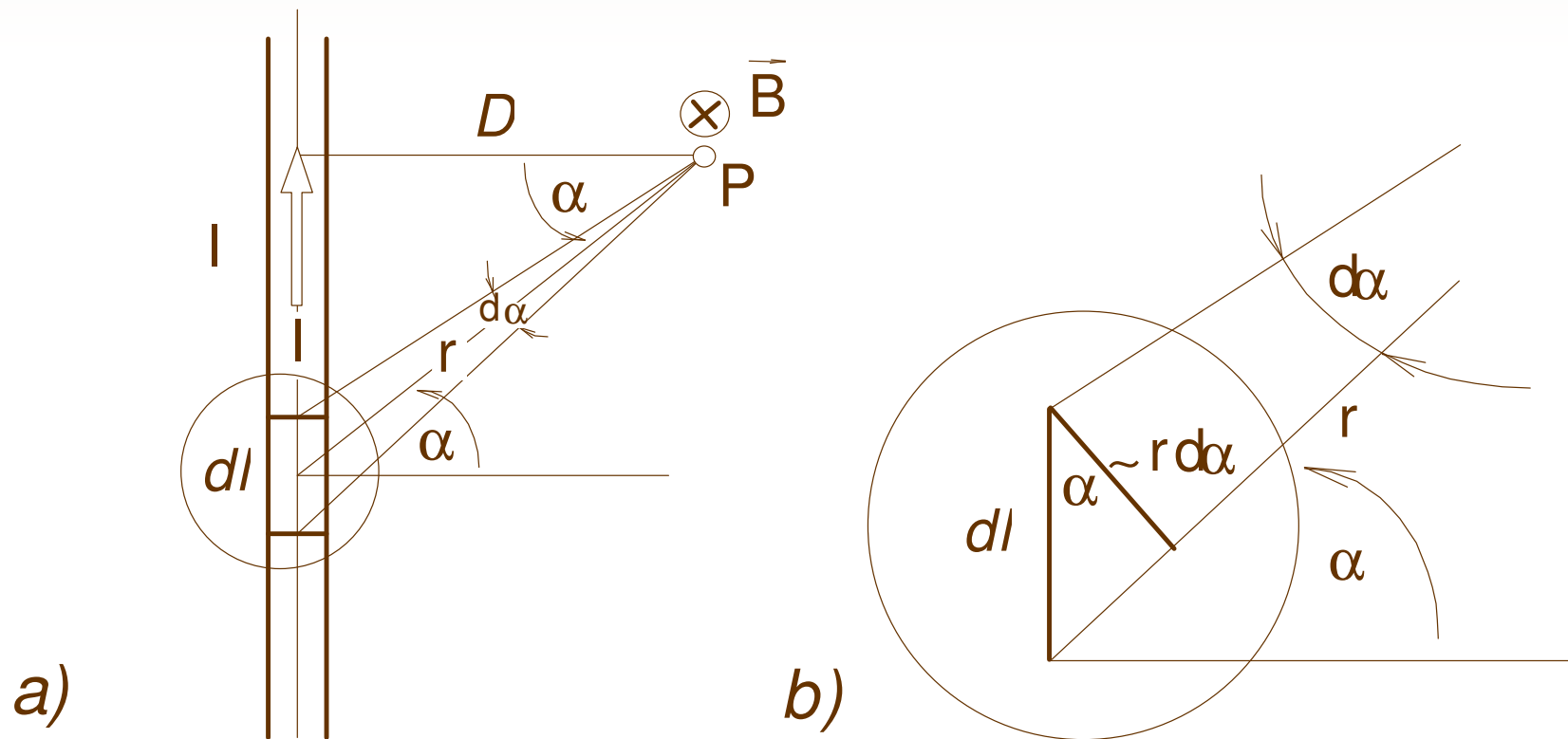
$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum i$$

koji je saglasan sa slikom:



### 3.1.3 Primjeri određivanja magnetnog polja

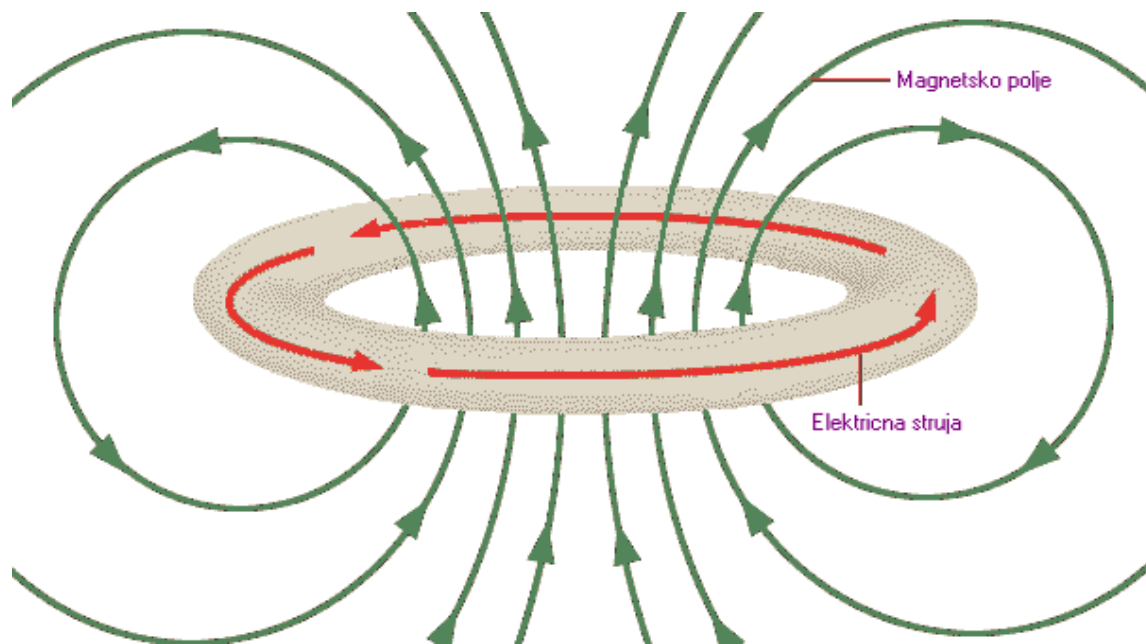
Polje u okolini dugog pravolinijskog provodnika



$$H = \frac{I}{4\pi D} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha = \frac{I}{2\pi D}$$

# Magnetsko polje strujne konture

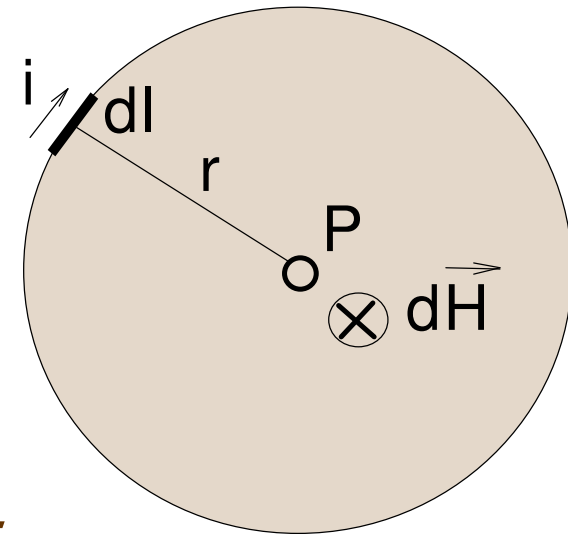
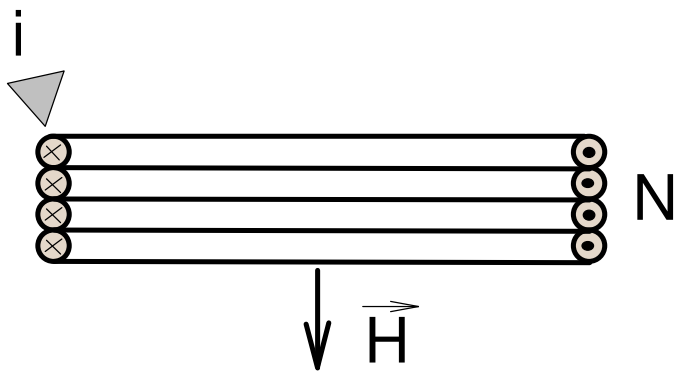
- ⇒ Nijedno strujno kolo ne može da se predstavi pravolinijskim provodnikom
- ⇒ Svako kolo je zatvorena strujna kontura
- ⇒ Kružna strujna kontura



$$B = \pi k' \frac{I}{r} \quad (\text{na osi konture})$$

## Magnetno polje kompaktnog namotaja

Neka je dat kompaktni namotaj, sačinjen od  $N$  navojaka tanke izolovane provodne žice, kružnog oblika poluprečnika  $r$  kroz koji protiče struja  $I$ , kao onaj predstavljen na slici. Neka se zahtijeva da se odredi jačina polja  $H$  u tački  $P$  u centru namotaja.



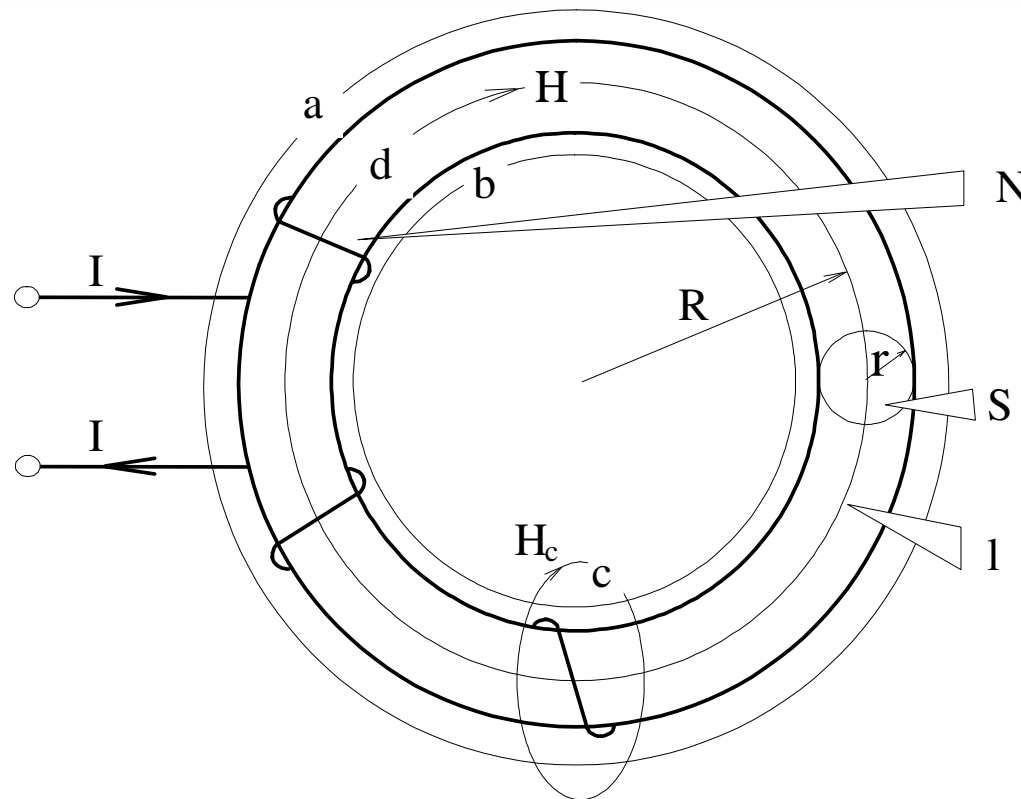
$$H = \int dH = \frac{i}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} dl = \frac{i(2\pi r)}{4\pi r^2} = \frac{i}{2r}$$

$$H = N \frac{i}{2r}$$



## Magnetno polje torusa

Za realizaciju jakih magnetnih polja koristi se, obično, namotaj velikog broja  $N$  navojaka namotanih na magnetno kolo oblika torusa, kao na slici



$$\oint \vec{H} d\vec{l} = H(2\pi R) = NI$$

$$H = \frac{NI}{2\pi R}$$

## 3.2 Magnetna indukcija

Vidjeli smo da jačina magnetnog polja zavisi od geometrijskih oblika strujnih kola i jačina struje  $I$  koje kroz ta kola protiču i razumije se, od položaja tačke u kojoj se polje posmatra. Međutim, u manifestacijama magnetnog polja, od kojih su najvažnije pojava mehaničke sile na elektricitet u pokretu (***elektromagnetna (mehanička) sila***) i pojava ***indukovane elektromotorne sile*** pri promjeni magnetnog polja, uviđa se da i sredina, prostor u kome se pojave odvijaju, igra bitnu ulogu. Da bi bili u stanju da dalje izučavamo pojave u vezi sa magnetskim poljem, neophodno je da damo definiciju nove fizičke veličine koja će voditi računa o sredini oko tačke u kojoj se posmatra magnetno polje. Ta veličina se naziva ***magnetna indukcija*** i definisana je kao:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Magnetna indukcija je vektorska veličina, kolinerna sa vektorom jačine magnetnog polja, što znači da su joj pravac i smjer isti kao i pravac i smjer vektora magnetnog polja.

Koeficijent srazmjernosti  $\mu$  naziva se **magnetna permeabilnost** sredine (magnetna propustljivost sredine).

Uobičajeno je da se magnetna permeabilnost praznog prostora (vakuma) obilježava sa  $\mu_0$ .

Prema čuvenoj Maksvelovoj formuli, proizašloj iz teorije elektromagnetnih talasa, brzina prostiranja svjetlosti kroz neku sredinu određena je izrazom:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

gdje je:

$c_0$  - brzina svjetlosti u vakumu ( $c_0 = 3 \cdot 10^8$  m/s)

$\epsilon_0$  - dielektrična konstanta vakuma ( $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  F/m)

$\mu_0$  - magnetna permeabilnost vakuma ( $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m)

Kako je jedinica za magnetno polje amper po metru H(=)A/m, a za magnetnu permeabilnost henri po metru, to će jedinica za magnetnu indukciju biti:

$$B = \mu H(=) \frac{N}{A^2} \cdot \frac{A}{m} = \frac{N}{Am} = T$$

### 3.2.1 Magnetna svojstva materijala

Odnos magnetne permeabilnosti neke sredine i magnetne permeabilnosti vakuma naziva se **relativna magnetna permeabilnost** materijalne sredine:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$$

Relativna magnetna permeabilnost je neimenovan broj.

Svi prirodni elementi, izuzev željeza, nikla i kobalta, imaju relativnu magnetnu permeabilnost veoma blisku jedinici.

Kod nekih ona je nešto veća od jedinice. Takve materijale nazivamo **paramagnetici**, a kod nekih je nešto manja od jedinice; takve materijale nazivamo **diamagnetici**.

Pri rješavanju inženjerskih problema za sve ove "nemagnetne" materijale može se uzeti da je

$$\mu = \mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ N / A}^2$$

# Magnetski materijali

⇒ Dijamagnetici

- $B_{un} > 0,9999 B_{sp}$

⇒ Paramagnetici

- $B_{un} < 1,0001 B_{sp}$

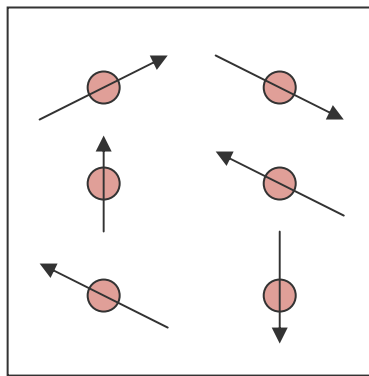
⇒ Feromagnetici

- $B_{un} > 10000 B_{sp}$

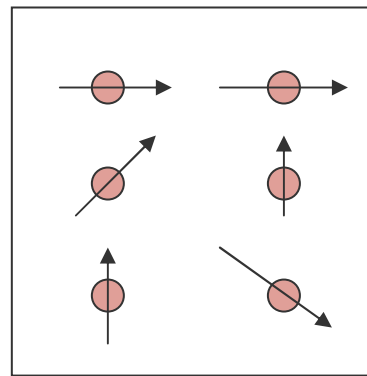
# Feromagnetici

- ⇒ odakle feromagnetizam?
- ⇒ elektron u atomu je mala strujna kontura
- ⇒ svaki elektron stvara magnetsko polje
- ⇒ kod gotovo svih atoma, magnetska polja raznih elektrona se međusobno poništavaju (elektroni se kreću u suprotnim smerovima)
- ⇒ samo kod nekih atoma (gvožđe, nikal, kobalt, ...), više elektrona se okreće na jednu stranu nego na drugu
- ⇒ atomi tih elemenata su mali magneti

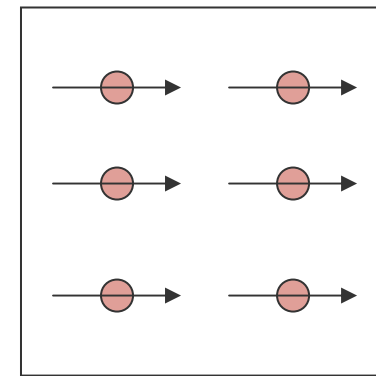
van mag. polja



u mag. polju



magnet



# Feromagnetizam

$$\vec{B}_{uk} = \vec{B}_{sp} + \vec{B}_{un} = \vec{B}(\text{struja}) + \vec{B}(\text{magnet})$$

$$\oint_c \vec{B}_{uk} \cdot d\vec{l} = \oint_c \vec{B}_{sp} \cdot d\vec{l} + \oint_c \vec{B}_{un} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_c I + \oint_c \vec{B}_{un} \cdot d\vec{l}$$

$$\oint_c (\vec{B}_{uk} - \vec{B}_{un}) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_c I \Rightarrow \oint_c \frac{(\vec{B}_{uk} - \vec{B}_{un})}{\mu_0} \cdot d\vec{l} = \sum_c I \Rightarrow \oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_c I$$

$$\vec{B}_{uk} = \vec{B}_{sp} + \vec{B}_{un} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} \quad \vec{B}_{sp} = \mu_0 \vec{H} \quad \vec{B}_{un} = \mu_0 \vec{M}$$

$$\vec{B}_{un} = \mu_0 \vec{M} = \chi \vec{H} \quad \chi - \text{magnetska susceptibilnost}$$

$$\vec{B}_{uk} = (\mu_0 + \chi) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad \mu_r - \text{relativna magnetska propustljivost}$$

$$\vec{B}_{uk} = \mu_r \vec{B}_{sp} \quad \mu_r > 0,9999 \quad \text{dijamagnetici}$$

$$\mu_r < 1,0001 \quad \text{paramagnetici}$$

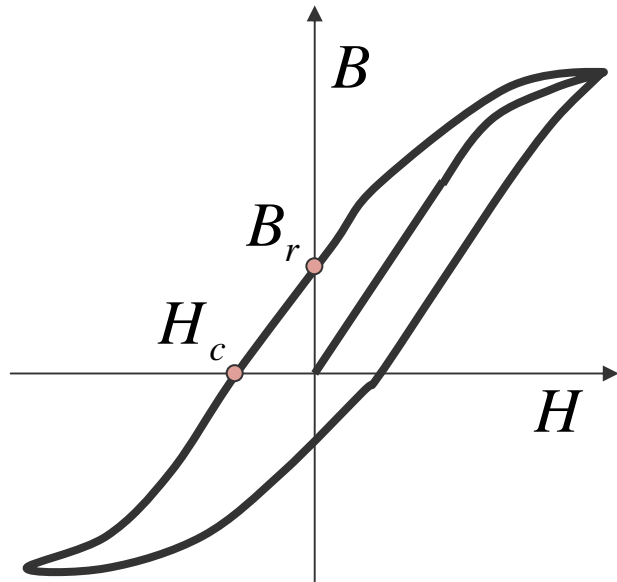
$$\mu_r > 10000 \quad \text{feromagnetici}$$



<b>Materijal</b>	$\mu / (\text{H m}^{-1})$	$\mu_r$	<b>Primjena</b>
<b>Ferit U 60</b>	1.00E-05	8	UHF jezgra
<b>Ferit M33</b>	9.42E-04	750	Jezgra među-frekvencijskih transformatora u radio prijemnicima
<b>Nikal (čistoća 99%)</b>	7.54E-04	600	-
<b>Ferit N41</b>	3.77E-03	3000	Sklopovi mrežnog napajanja
<b>Željezo (čistoća 99.8%)</b>	6.28E-03	5000	-
<b>Ferit T38</b>	1.26E-02	10000	Širokopojasni transformatori
<b>Silikatno GO Željezo</b>	5.03E-02	40000	Dinama, mrežni transformatori
<b>Supermalloy</b>	1.26	1000000	Glave za snimanje

# Feromagnetici

- ⇒ jačina magnetskog polja  $H$  opisuje uticaj struja električnih provodnika
- ⇒ magnetizacija  $M$  opisuje uticaj materijala -magneta
- ⇒ indukcija magnetskog polja opisuje ukupne magnetske efekte
- ⇒ namagnećivanje



$B_r$  – remanentna magnetizacija

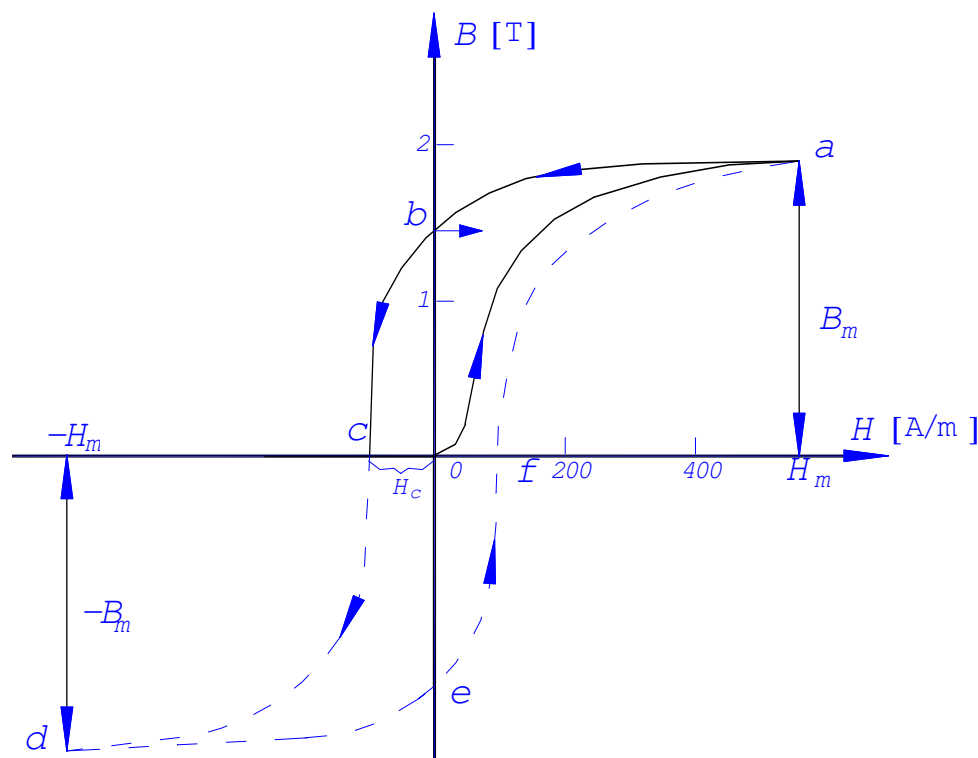
$H_c$  – koercitivno polje

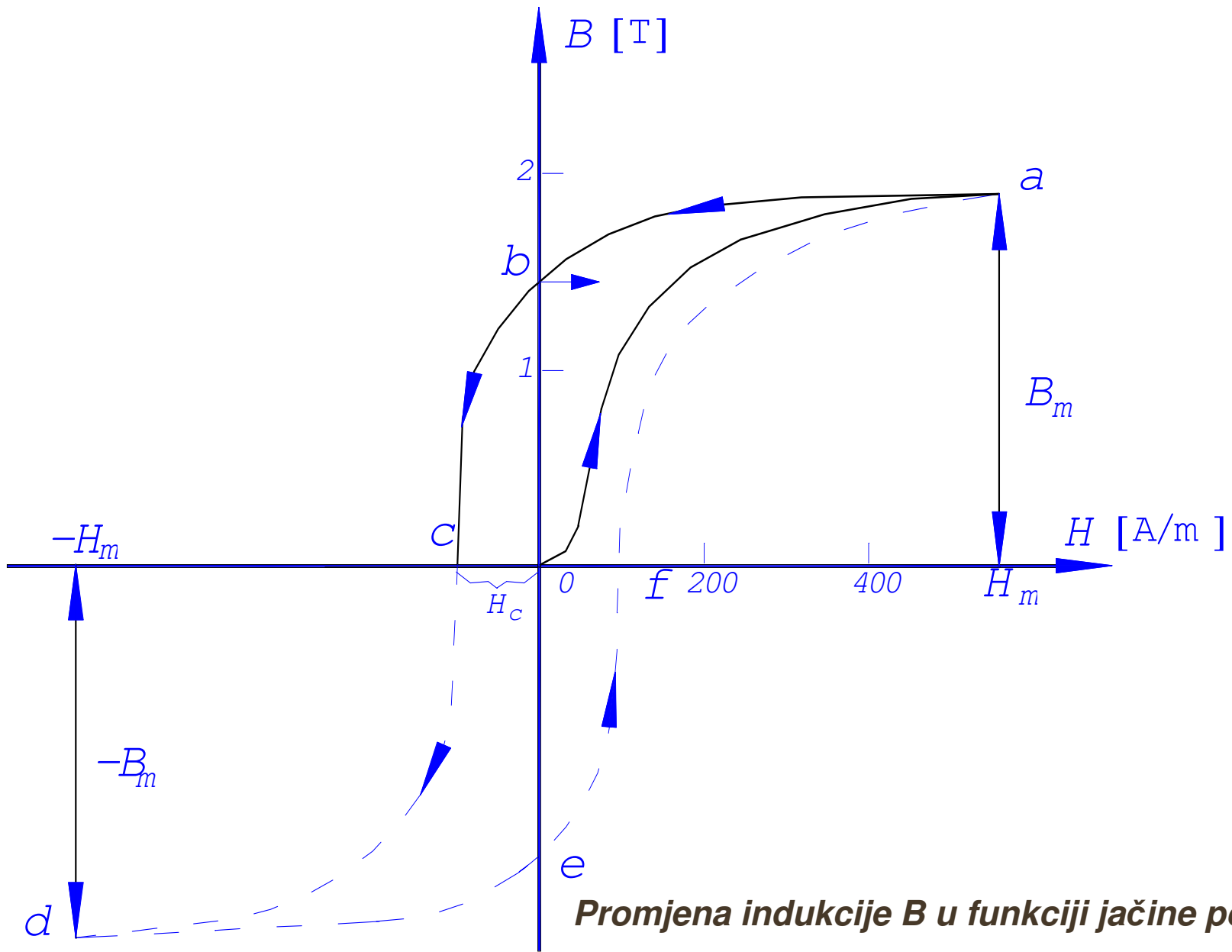
veliko  $B_r$  – tvrdi magnetski materijali (za magnete)

malo  $B_r$  – meki magnetski materijali (za elektromagnete)

Kod željeza, nikla, kobalta i nekih njihovih legura, koji se nazivaju **feromagnetici** (feromagnetni materijali), dolazi do veoma složenih pojava pod dejstvom magnetnog polja. Magnetna permeabilnost kod ovih materijala nije konstantan, već zavisi od jačine magnetnog polja i predistorije ranijeg magnećenja

$$\mu_{(feromagnetika)} = f(H, proslosti)$$





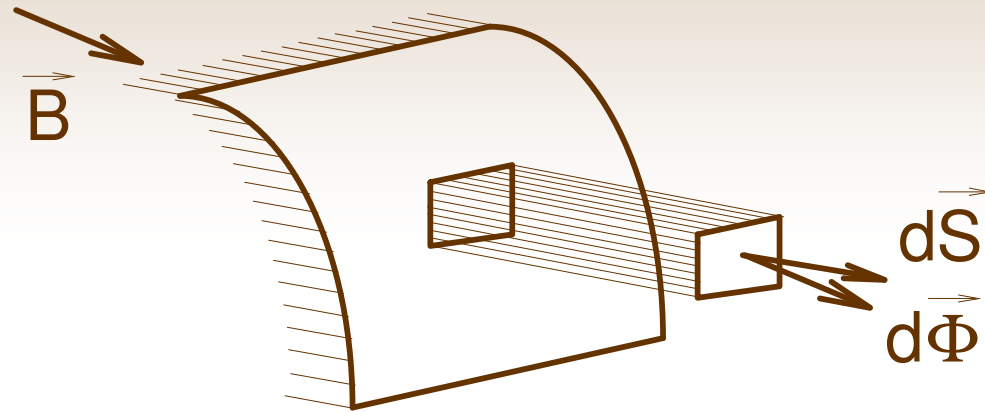
**Promjena indukcije  $B$  u funkciji jačine polja  $H$**

### 3.3 Magnetni fluks

Generalno, fluks je pojam vezan za površinu i može se definisati u svakom vektorskom polju. Zamislimo u magnetnom polju (vektorsko polje) proizvoljnu površinu  $S$ , podijeljenu na beskonačno elementarnih površina  $dS$ . U svakoj tački ove površine magnetno polje je određeno vektorom magnetne indukcije  $\vec{B}$ , koji je, u opštem slučaju, funkcija položaja  $\vec{B}(x, y, z)$ . Element površine  $dS$ , takođe možemo okarakterisati pomoću vektora  $d\vec{S}$ , čiji je intenzitet jednak površini  $dS$ , pravac normalan na tu površinu, a smjer od negativne ka pozitivnoj strani površine.

Elementarni magnetni fluks  $d\Phi$  kroz površinu  $dS$ , definisan je kao skalarni proizvod:

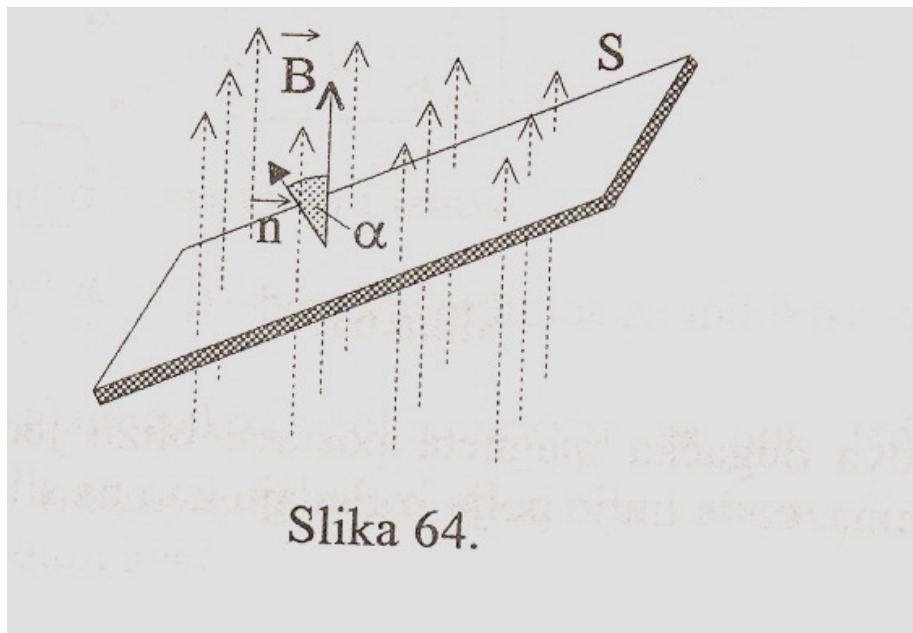
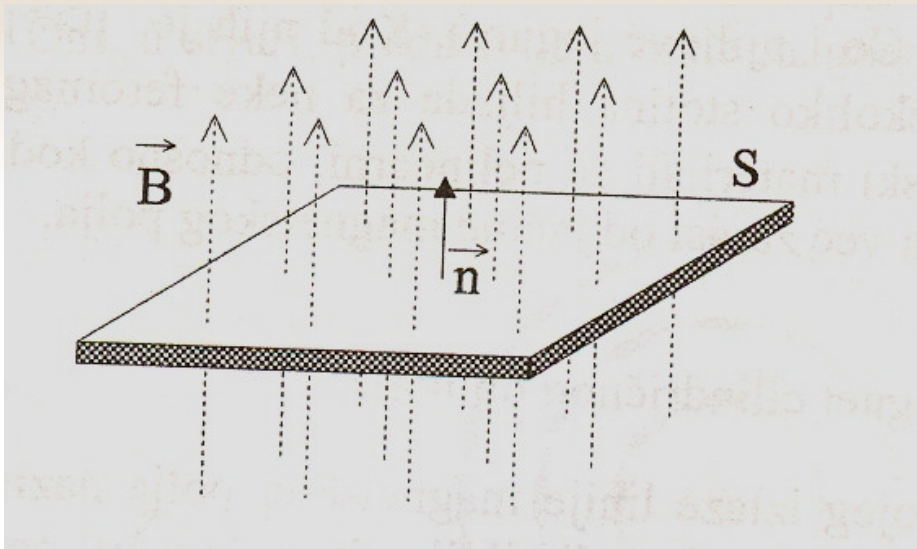
$$d\Phi = (\vec{B} \cdot d\vec{S}) = B \cdot dS \cdot \cos(\vec{B}, d\vec{S})$$



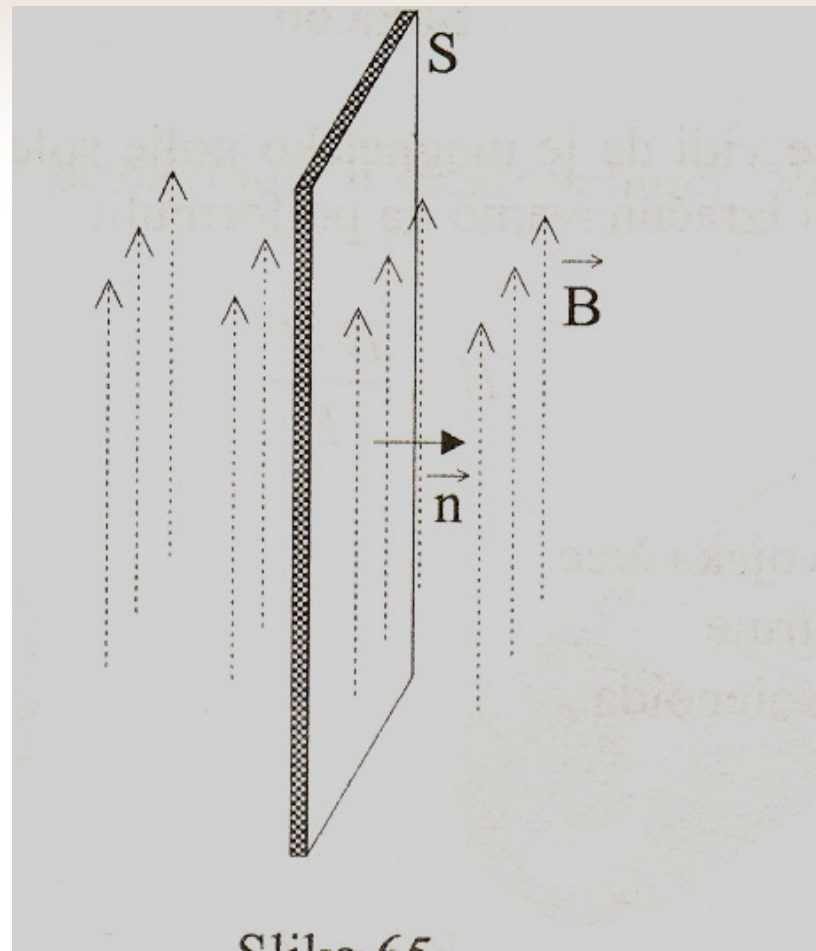
Ukupni magnetni fluks posmatrane površine  $S$ , dobije se kao:

$$\Phi = \int d\Phi = \int \vec{B} d\vec{S} = \int B dS \cos(\vec{B}, d\vec{S})$$

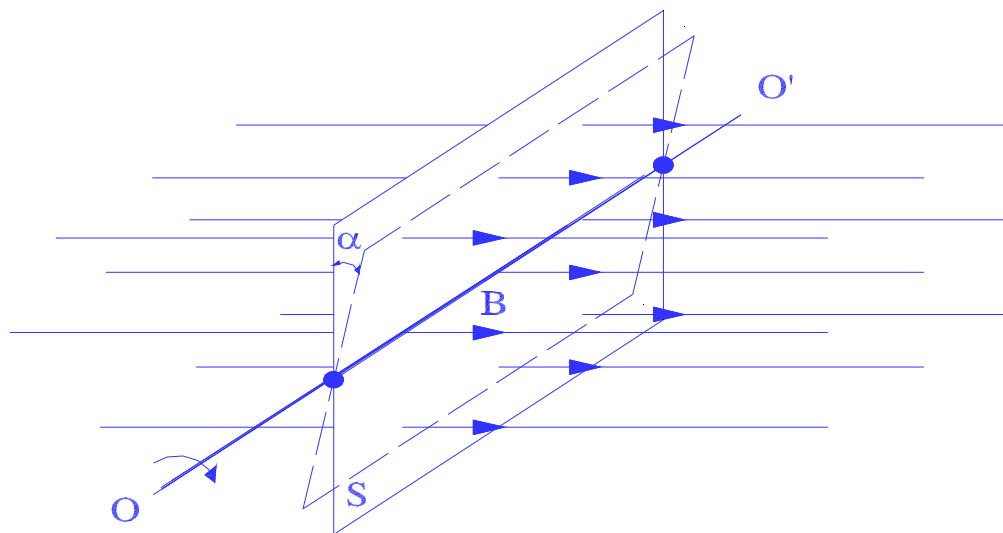
Jedinica za magnetni fluks je veber (1Wb). Iz definicije fluksa je očigledno;  $1\text{Wb} = 1\text{Tm}^2$



Slika 64.

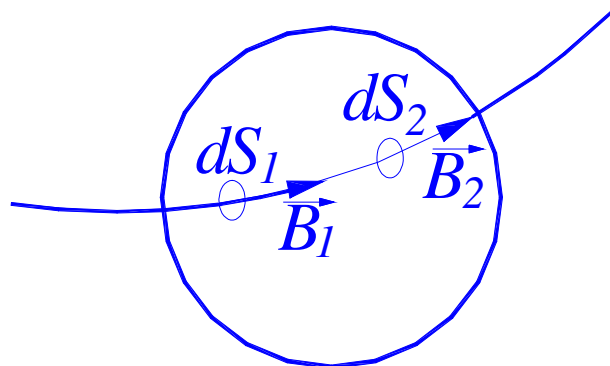


Slika 65.



$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos \alpha = B \cdot S \cdot \cos(\omega t) = \Phi_{\max} \cos(\omega t)$$

**zakon o konzervaciji magnetnog fluksa**



$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$$



## 3.4 Elektromagnetna sila

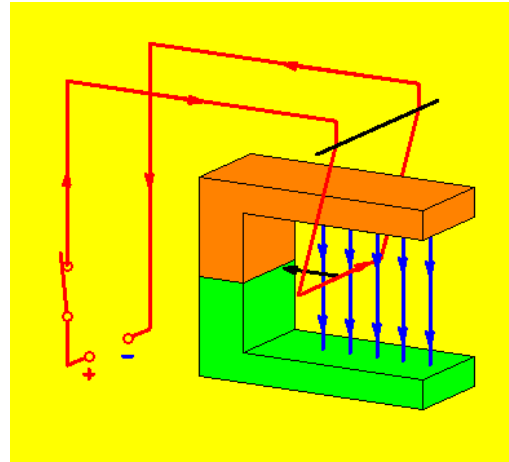
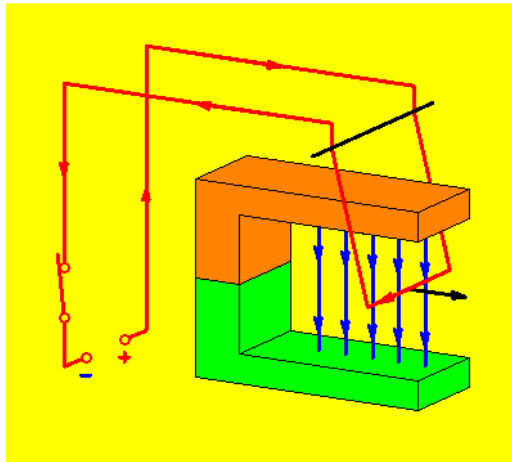
Nije teško eksperimentalno utvrditi da ***na provodnik kroz koji teče struja i koji se nalazi u stranom magnetnom polju djeluje sila*** koja se naziva ***elektromagnetna sila***. To je sila koja pokreće rotore svih električnih motora, sila koja pokreće kazaljke mnogih mjernih instrumenata, i sila koja se koristi kod mnogih drugih čovjeku korisnih uređaja.

U opštem slučaju, provodnik ima proizvoljan oblik, a vektor magnetne indukcije je funkcija položaja  $\vec{B} = f(\vec{r})$  (polje nije homogeno). U takvom slučaju sila koja djeluje na provodnik može se odrediti sabiranjem elementarnih sila koje djeluju na provodnik:

$$d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B})$$

# Elektromagnetska sila

- ➔ Na provodnik, kao na izvor magnetskog polja, mora da deluje bilo kakvo drugo magnetsko polje (Amper)
- ➔ nazvana elektromagnetska, ustvari je ono što je do sada nazivano magnetska sila

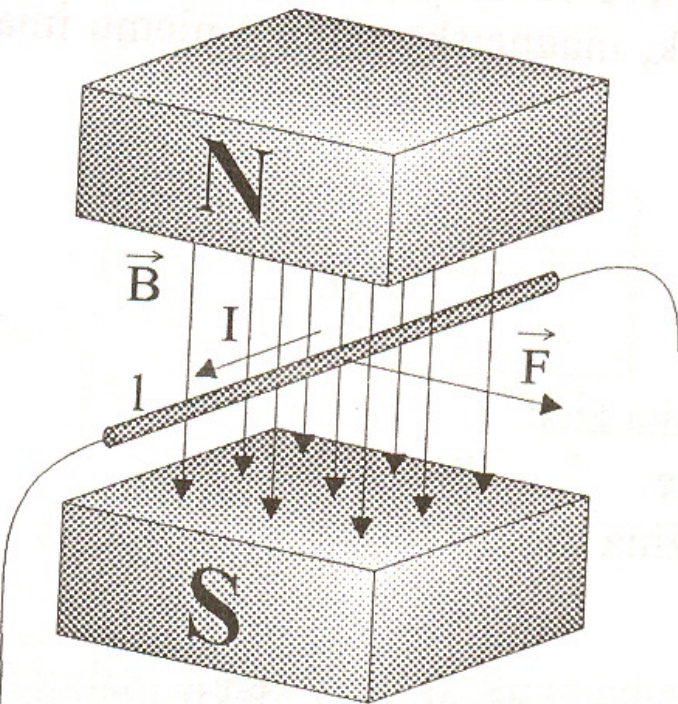


$$F = (I \cdot l) \cdot B$$

$$\vec{F} = (I \cdot \vec{l}) \times \vec{B}$$

- Elektromagnetska sila ne deluje na provodnik postavljen u pravcu magnetskog polja

*Elektromehaničko djelovanje silom na element provodnika sa strujom.*



$$F = I \cdot l \cdot B$$

gdje je:

$F$  - elektromagnetna sila na provodnik, N (njutn)

$I$  - jačina električne struje kroz provodnik, A (amper);

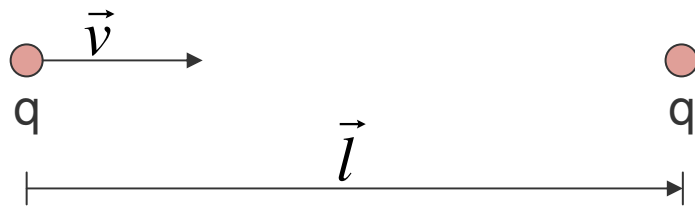
$l$  - aktivna dužina provodnika, m (metar);

$B$  - magnetna indukcija stranog magnetnog polja, T (tesla);

Smjer sile određuje se pravilom desnog zavrtnja.

# Lorencova sila

- ⇒ Naelektrisana čestica koja se kreće je elementarna električna struja
- ⇒ Magnetska sila koja deluje na naelektrisanu česticu se naziva Lorencova sila



$$\vec{F} = (I \cdot \vec{l}) \times \vec{B} = \left(\frac{q}{t} \cdot \vec{v} \cdot t\right) \times \vec{B} = (q \cdot \vec{v}) \times \vec{B}$$

$$\boxed{\vec{F} = (q \cdot \vec{v}) \times \vec{B}}$$

- Naelektrisana čestica u kretanju je elementarni magnetski naboj
- Za magnetizam je  $(qv)$  ono što je za elektricitet  $q$
- Magnetska sila ne ubrzava naelektrisanje i ne mijenja mu energiju

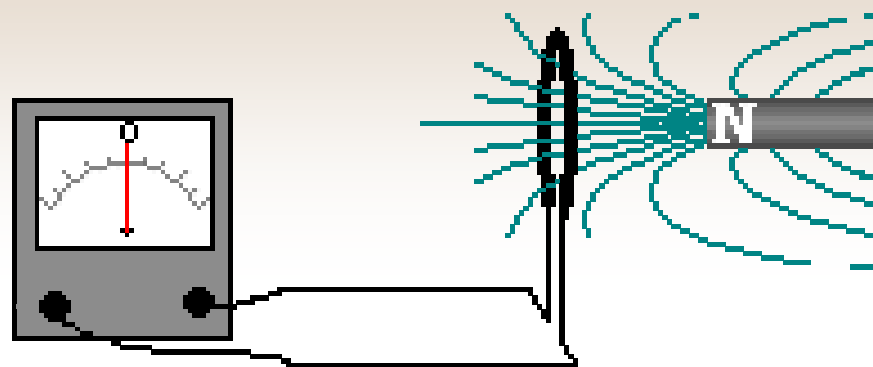
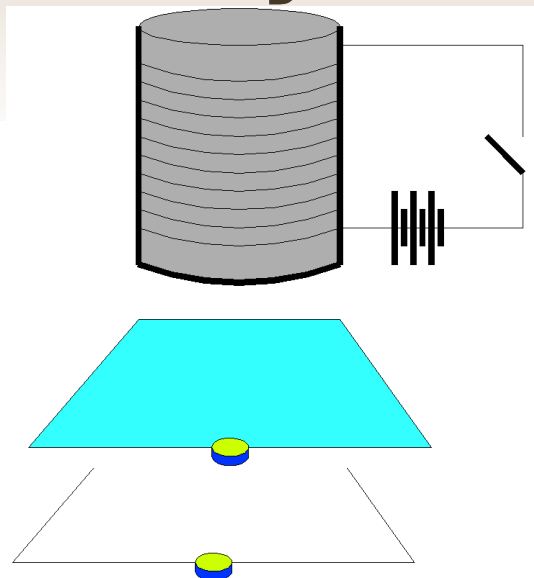
## 3.5 Elektromagnetna indukcija

Godine 1831., Faradej je eksperimentalno otkrio pojavu elektromagnetne indukcije. To je pojava na bazi koje se u svim električnim generatorima mehanička energija pretvara u električnu, na osnovu koje su izrađeni mnogi mjerni instrumenti i drugi čovjeku korisni uređaji.

Formulacija Faradejevog zakona: ***U električno provodnoj konturi će se indukovati elektromotorna sila i kao posljedica te ems-e u zatvorenom kolu će se pojaviti struja, ako se, iz bilo kog razloga, mijenja magnetni fluks kroz tu konturu (kolo).***

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

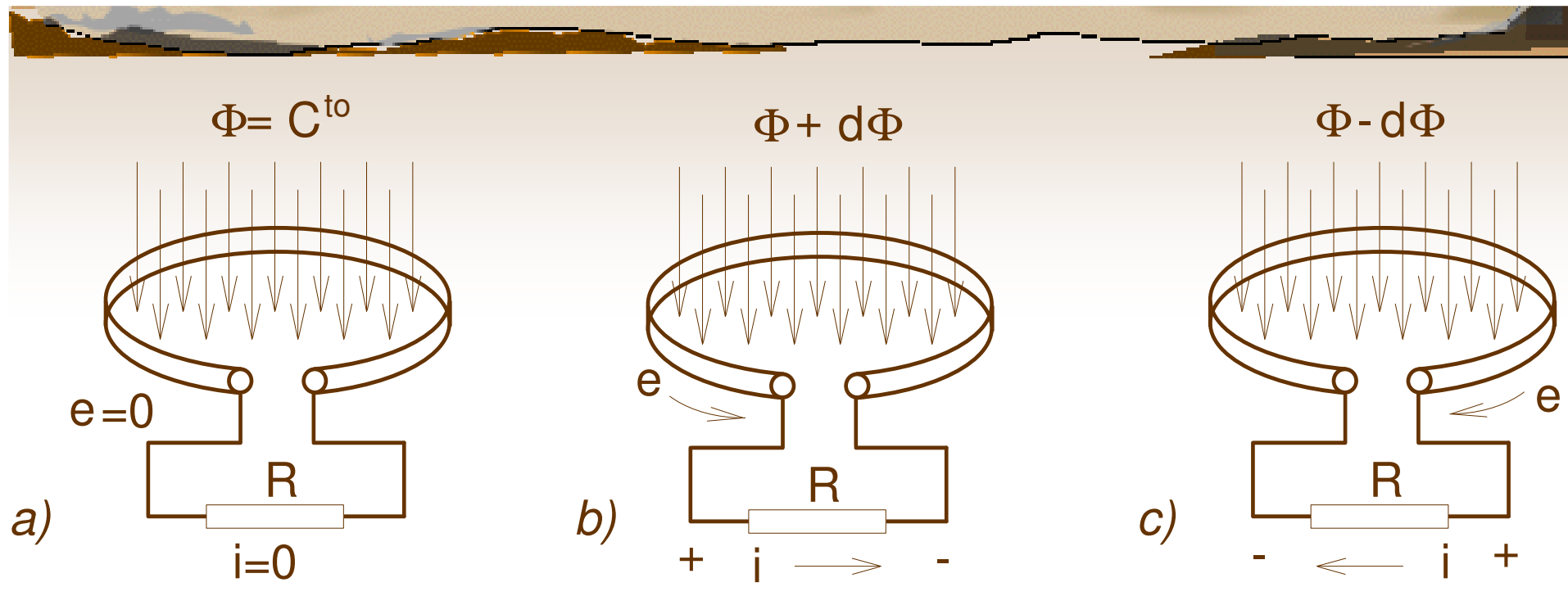
# Faradejev zakon



- ➔ Promjena magnetskog fluksa kroz neku provodnu konturu izaziva električnu struju u toj konturi
- ➔ Električnu struju u provodnoj konturi pokreće elektromotorna sila koja nastaje u toj konturi usled promjene magnetskog fluksa

Elektromagnetska indukcija je pojava nastajanja elektromotorne sile u promjenljivom magnetskom polju

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$



Znak "-" u izrazu za  $e$  uveden je saglasno **Lencovom pravilu**.

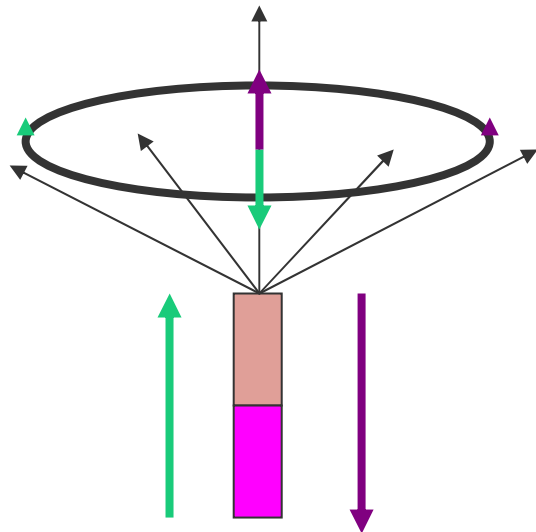
$$e = -N \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d\Psi}{dt}$$

# Lencovo pravilo

Indukovana elektromotorna sila teži da svojim dejstvom poništi uzrok svoga nastanka

➔ Određuje smer indukovane elektromotorne sile

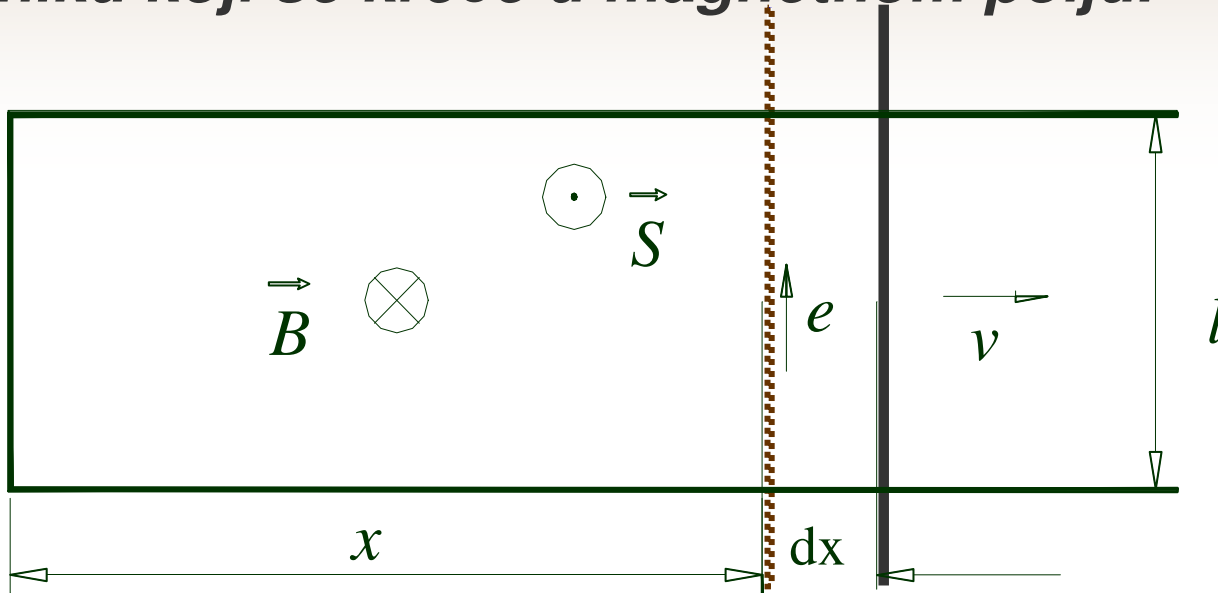
- Izraz inercije prirode, odnosno zakona o održanju energije



- Kontura reaguje na promenu magnetskog polja stvaranjem spostvenog magnetskog polja (indukovane struje)
- Ako se spoljašnji fluks uvećava, indukovani fluks teži da to povećanje anulira (odmaže spoljašnjem polju)
- Ako se spoljašnji fluks umanjuje, indukovani fluks teži da to umanjeđe anulira (pomaže spoljašnjem polju)



Razmotrimo sada slučaj indukovanja **elektromotorne sile u provodniku koji se kreće u magnetnom polju.**



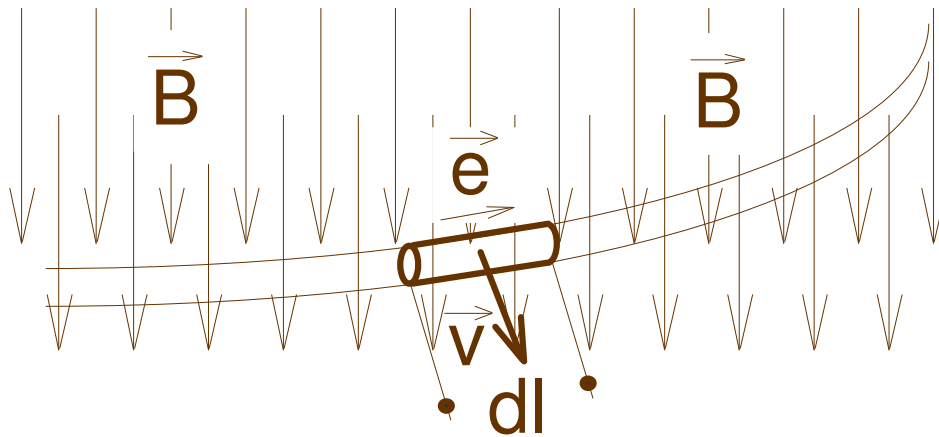
$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos(\vec{B}, \vec{S}) = B \cdot S \cdot \cos(180^\circ) = -B \cdot S,$$

$$d\Phi = -B \cdot dS = -B \cdot l \cdot dx,$$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = B \cdot l \cdot \frac{dx}{dt} = B \cdot l \cdot v$$

Generalno, međusobni položaj vektora  
može biti proizvoljan

$$\vec{B}, \vec{l} \text{ i } \vec{v}$$



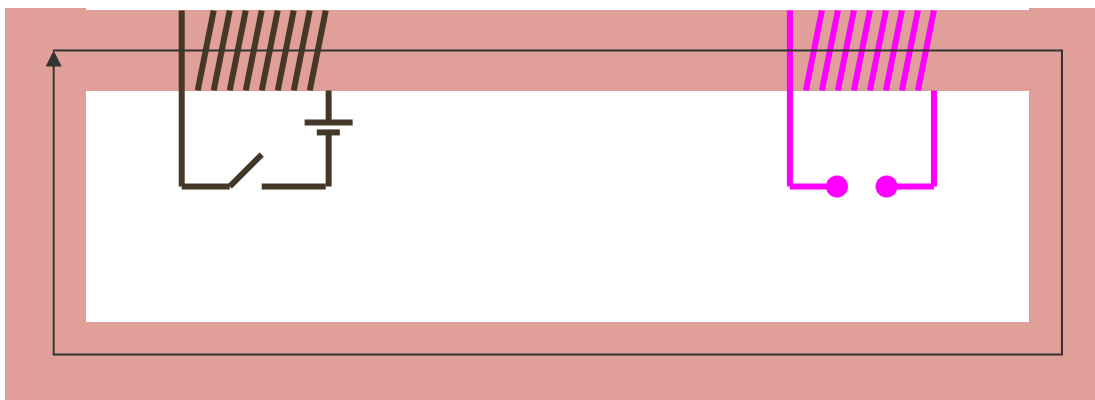
$$de = d\vec{l} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (d\vec{l} \times \vec{v}) = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

# Statička i dinamička indukcija

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_s B \cdot dS \cdot \cos(\vec{B}, d\vec{S})$$

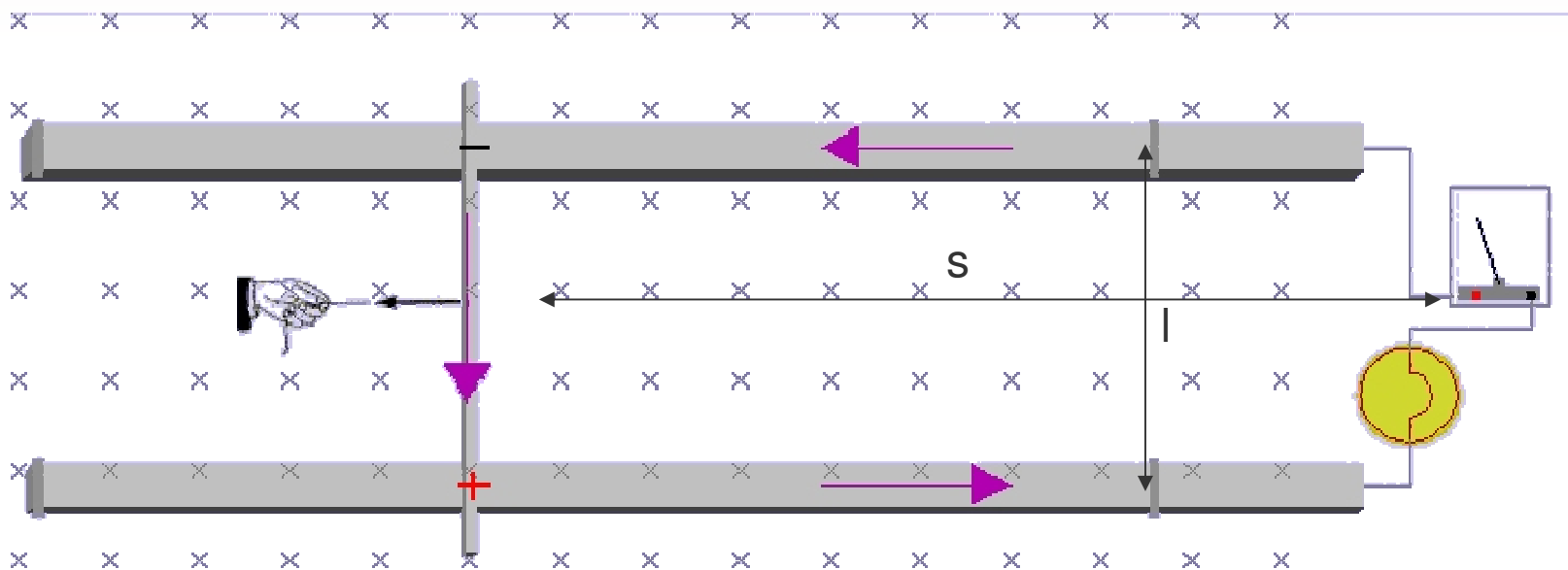
- ➔ Promjena B  → Statička indukcija
- ➔ Promjena S  → Dinamička indukcija
- ➔ Promjena ugla B i S

Pri statičkoj indukciji se kontura u kojoj se indukuje ems ne kreće



# Statička i dinamička indukcija

## ➔ Dinamička indukcija



$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(BS)}{dt} = -\frac{d(Bls)}{dt} = -Bl\frac{ds}{dt} = -Blv$$

- U provodniku koji se kreće u magnetskom polju (siječe linije magnetskih sila) indukuje se elektromotorna sila

## 3.6 Samoindukcija i međusobna indukcija

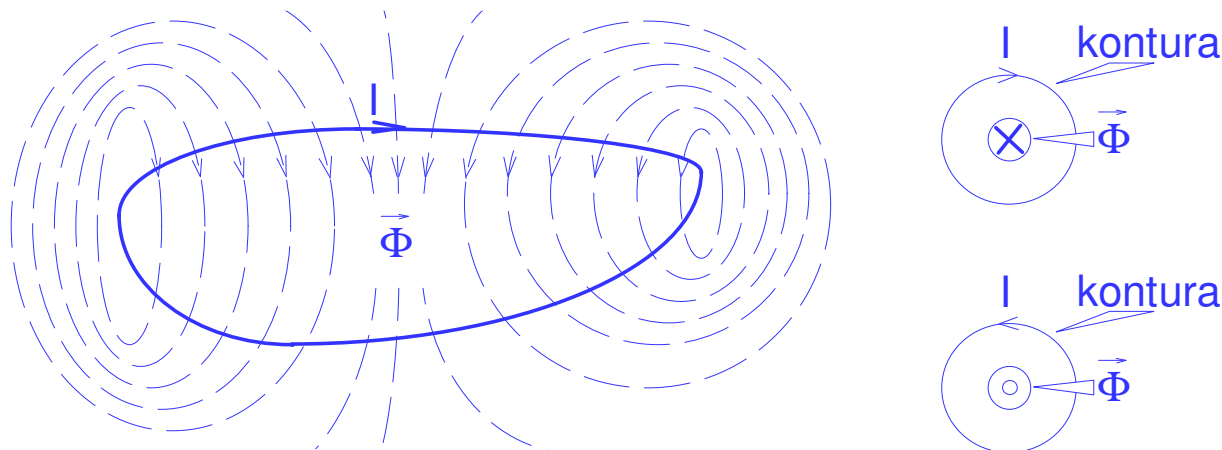
Naglasimo još jednom da svaka provodna kontura kroz koju protiče struja stvara magnetno polje, koje se zatvara i kroz površinu koja naliježe na tu konturu. Magnetni fluks kola, koji potiče od struje tog kola, nazivamo **sopstveni fluks**. Vrijednost magnetnog fluksa kroz konturu zavisi od konfiguracije konture, i mnogo je veća ako je kontura izvedena u obliku kalema sa većim brojem navojaka. Takvi kalemi nalaze široku primjenu kod električnih mašina i mnogih drugih elektrotehničkih uređaja, kod kojih se zahtijevaju jača magnetna polja.

Ako u blizini kalema (konture) nema feromagnetnih materijala (koji unose nelinearnost), tada je sopstveni magnetni fluks kola, u bilo kojem trenutku vremena, proporcionalan struji i koja protiče kroz kolo, jer je jačina magnetnog polja  $\mathbf{H}$  srazmjerna struji (Laplasov zakon), magnetna indukcija  $\mathbf{B}$  uzima u obzir sredinu  $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ , a fluks kroz konturu je  $\Phi=BS$ .

Očigledno, da je sopstveni fluks srazmjeran struji koja ga je izazvala, pa možemo pisati:

$$\Phi = L \cdot i$$

U jednačini  $L$  je **koeficijent samoindukcije** (ili **sopstvena induktivnost kola**), koji zavisi od geometrije kola i magnetne permeabilnosti sredine u kojoj se kolo nalazi. Za kolo u kome se opaža pojava samoindukcije kaže se da je **induktivno kolo**.



Svaka promjena struje  $i$  u kolu povlači za sobom promjenu magnetnog fluksa. To izaziva u kolu pojavu ems-e. Koristeći Faradejev zakon elektromagnetne indukcije za ***elektromotornu silu samoindukcije*** dobijamo:

$$e_L = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

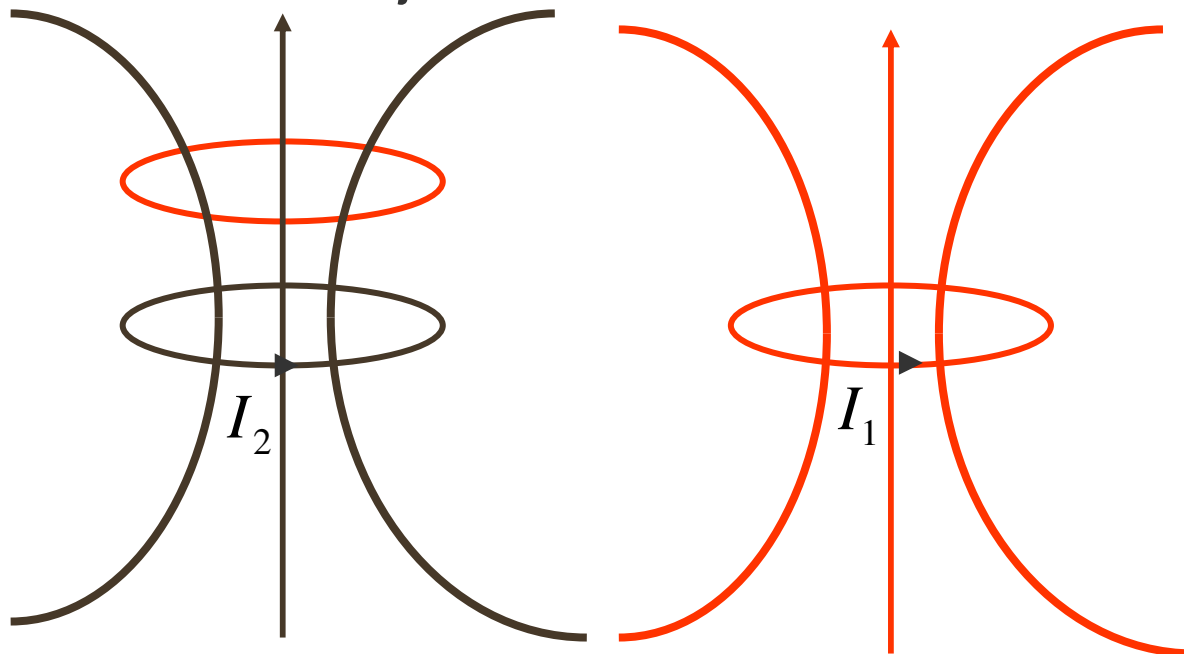
Jedinica za induktivitet  $L$  je jedan henri (1H).  $L (=) H = \text{Wb/s}$

# Medusobna indukcija i samoindukcija

⇒ Magnetsko polje koje stvara fluks kroz neku konturu može poticati od drugih kontura, ali može poticati i od struje same konture

■ međusobna indukcija

■ samoindukcija



$$\Phi_1 = \Phi_1(I_2) = \Phi_{12}$$

spoljašnji fluks

$$\Phi_1 = \Phi_1(I_1) = \Phi_{11}$$

sopstveni fluks

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}$$

ukupni fluks



# Međusobna indukcija i samoindukcija

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{d\Phi_{11}}{dt} - \frac{d\Phi_{12}}{dt}$$

← ems međusobne indukcije

↑  
ems samoindukcije

- ⇒ Samoindukcija je električna inercija
- ⇒ Ukoliko se pokuša smanjenje jačine struje u nekoj konturi, kontura će sama indukovati ems koja će sprečavati umanjenje
- ⇒ Ukoliko se pokuša povećanje jačine struje u nekoj konturi, kontura će sama indukovati ems koja će sprečavati povećanje
- ⇒ Lencovo pravilo

# Induktivnost

- ⇒ Intenzitet magnetskog polja je proporcionalan struji koja ga izaziva
- ⇒ Fluks magnetskog polja kroz bilo koju konturu u polju je proporcionalan intenzitetu magnetskog polja
- ⇒ Fluks magnetskog polja kroz bilo koju konturu u polju je proporcionalan jačini struje koja stvara magnetsko polje
- ⇒ Sopstveni fluks kroz neku konturu proporcionalan je jačini struje koja protiče kroz tu konturu

**Induktivnost** (ili koeficijent samoindukcije) je količnik sopstvenog fluksa neke konture i jačine struje koja protiče kroz konturu

$$L_1 = \frac{\Phi_{11}}{i_1}$$

$$[L] = \frac{[\Phi]}{[i]} = \frac{Wb}{A} = H$$

$$e_{11} = -\frac{d\Phi_{11}}{dt} = -\frac{d(L_1 i_1)}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt}$$

Induktivnost konture zavisi od njenog oblika i osobina sredine unutar konture

# Energija magnetskog polja strujne konture

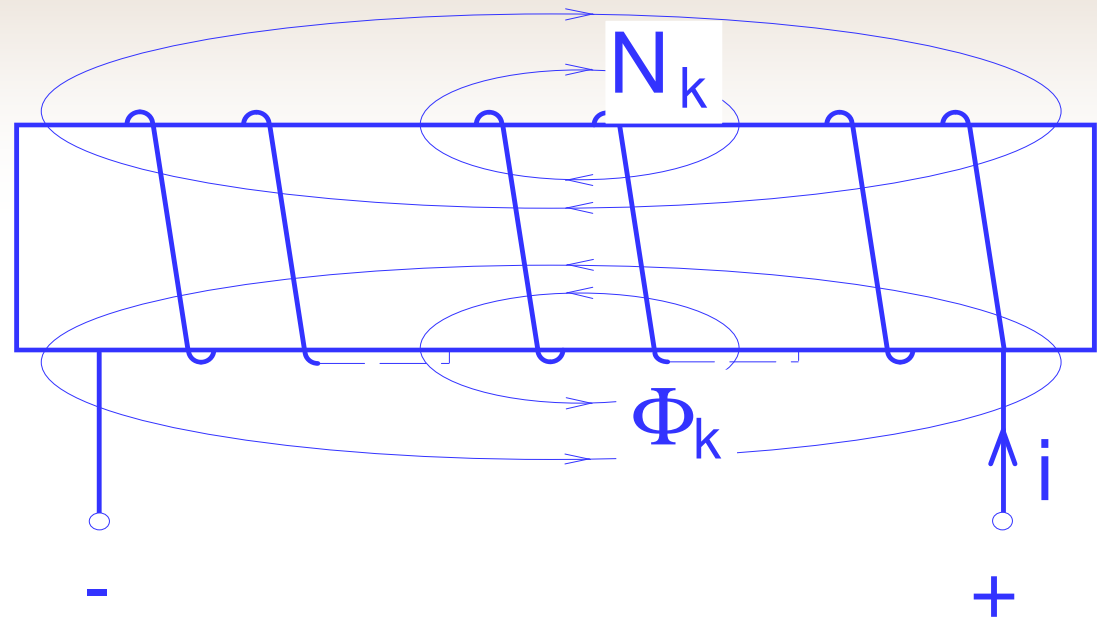
- ⇒ Pri povećanju struje u strujnoj konturi stvara se magnetsko polje, suprotstavljajući se ems samoindukcije
- ⇒ Za stvaranje magnetskog polja mora da se uloži rad, odnosno mora se određena količina energije izvora električne struje pretvoriti u energiju magnetskog polja
- ⇒ Magnetsko polje strujne konture ima energiju

$$W = \frac{1}{2} Li^2$$

Magnetno polje kalema.

$$e_L = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(N\Phi)}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}$$

$$\Psi = \sum \Phi_k N_k$$

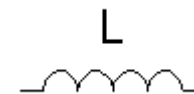
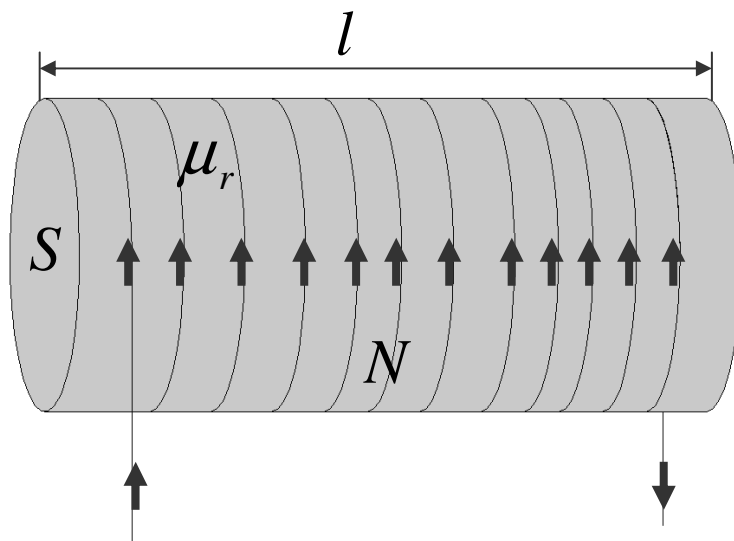


$$\Psi = N\Phi = NBS = N\mu HS = N\mu \frac{Ni}{l} S = Li$$

$$\Psi = Li$$

# Kalem

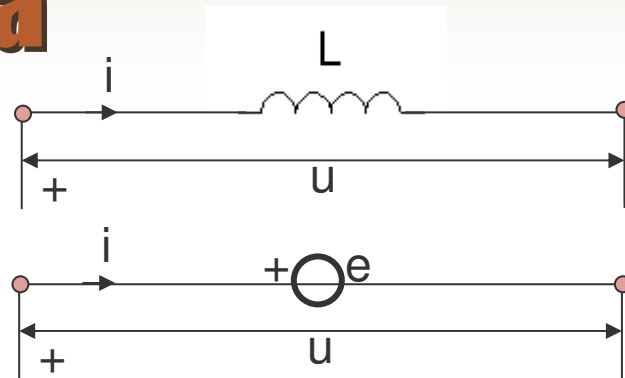
- ⇒ Električna struktura koja služi nakupljanju magnetske energije u električnom kolu
- ⇒ Inercijalni element električnih kola – usporivač procesa – nazivaju ga i **prigušnica**
- ⇒ “Električna masa”



$$L \approx \mu_0 \mu_r \frac{N^2 S}{l}$$

- pretpostavke
  - dug kalem
  - gusto motan

# Strujno naponska zavisnost kalema

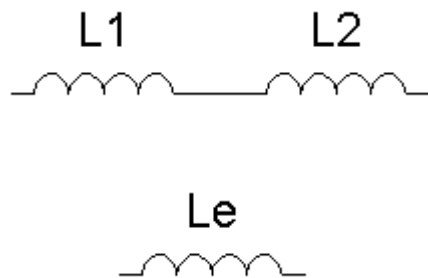


$$u_L = -e = L \frac{di}{dt}$$

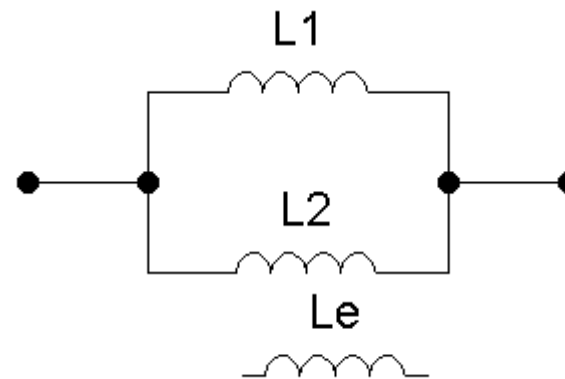
- ⇒ Ako je struja jednosmjerna stacionarna, napon na kalemu je jednak nuli, on je kratak spoj

# Vezivanje kalemova

- ➔ Fizički veliki element
  - izbjegava se njegova primjena
  - manja serijska proizvodnja
- ➔ Povezivanje
  - redno
  - paralelno



$$L_e = L_1 + L_2$$



$$\frac{1}{L_e} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

# Međusobna induktivnost

- ⇒ Intenzitet magnetskog polja je proporcionalan struji koja ga izaziva
- ⇒ Fluks magnetskog polja kroz bilo koju konturu u polju je proporcionalan intenzitetu magnetskog polja
- ⇒ Fluks magnetskog polja kroz bilo koju konturu u polju je proporcionalan jačini struje koja stvara magnetsko polje
- ⇒ I spoljašnji fluks kroz neku konturu proporcionalan je jačini struje koja stvara taj fluks

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{i_2} \quad [M] = \frac{[\Phi]}{[i]} = \frac{Wb}{A} = H \quad e_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = \frac{d(M_{12}i_2)}{dt} = -M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

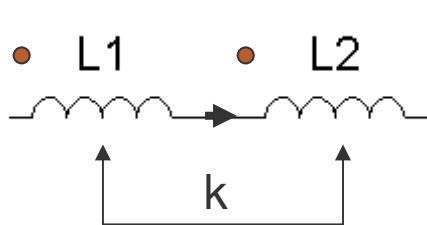
$$M_{12} = M_{21} = M = k\sqrt{L_1L_2} \quad k - \text{koeficijent sprege}$$

- Međusobna induktivnost dve konture zavisi od
  - oblika kontura
  - sredine u kojoj se konture nalaze
  - međusobnog položaja kontura



# Sprezanje kalemova

- ➔ Međusobni fluks utiče na ukupan fluks, a time i na indukovanu ems u kalemu
- ➔ Spoljašnji fluks može da se sabira ili poništava ( $0 \leq k \leq 1$ ) sa sopstvenim fluksom

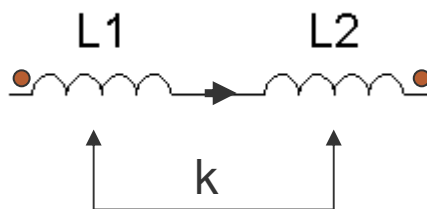


$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \quad k > 0$$

$$u_1 = L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} = (L_1 + M) \frac{di}{dt}$$

$$L_e = L_1 + L_2 + 2M$$

$$u_2 = L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} = (L_2 + M) \frac{di}{dt}$$



$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

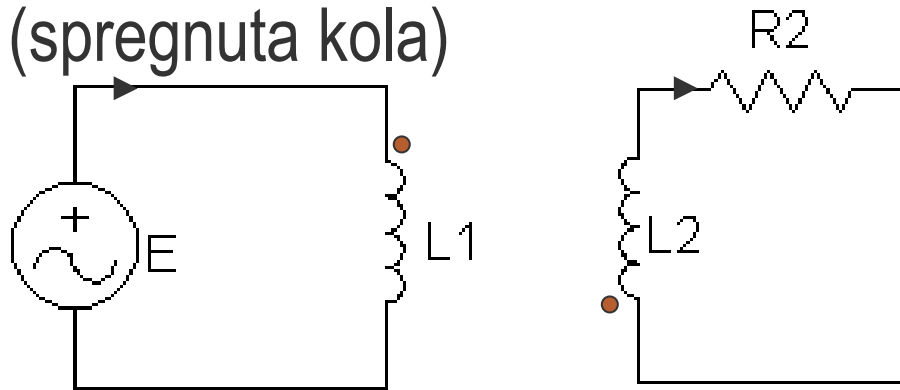
$$u_1 = L_1 \frac{di}{dt} - |M| \frac{di}{dt} = (L_1 - |M|) \frac{di}{dt}$$

$$L_e = L_1 + L_2 - 2|M|$$

$$u_2 = L_2 \frac{di}{dt} - |M| \frac{di}{dt} = (L_2 - |M|) \frac{di}{dt}$$

# Sprezanje kalemova

- ⇒ Kalemovi mogu da se nalaze u različitim granama kola
- ⇒ Kalemovi mogu da se nalaze u različitim kolima (spregnuta kola)



$$M = k\sqrt{L_1L_2} \quad k > 0$$

$$E - L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = 0 \rightarrow \frac{di_1}{dt} = \frac{1}{L_1} (E - M \frac{di_2}{dt})$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} - R_2 i_2 = 0$$

$$\left(L_2 - \frac{M^2}{L_1}\right) \frac{di_2}{dt} + \frac{ME}{L_1} - R_2 i_2 = 0$$

# R-L kolo

⇒ Kolo sa izvorom, otpornikom i kalemom

$$e = u_R + u_L$$

↓

$$e = L \frac{di}{dt} + Ri$$

↓

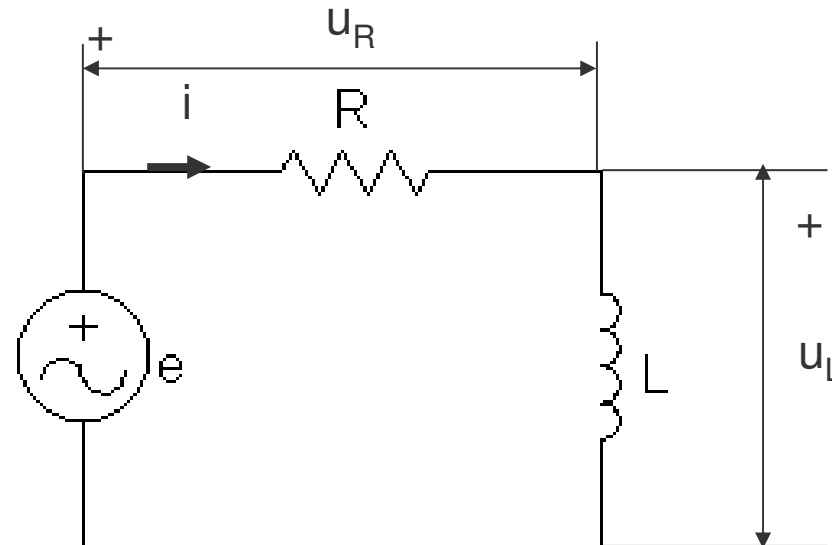
$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{e}{L}$$

→

$$s + \frac{R}{L} = 0$$

$$\boxed{\frac{L}{R} = \tau}$$

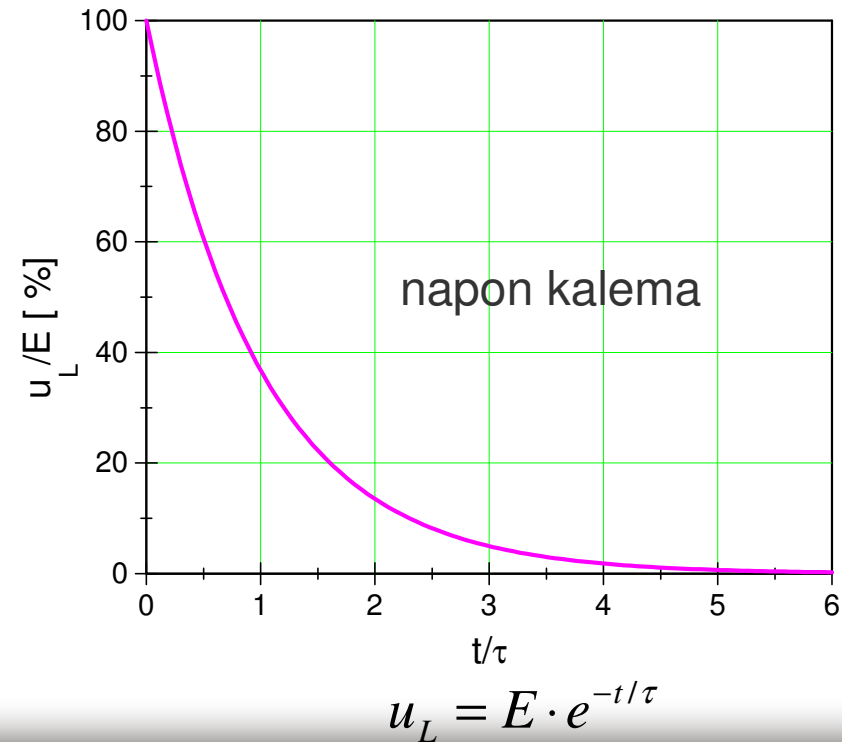
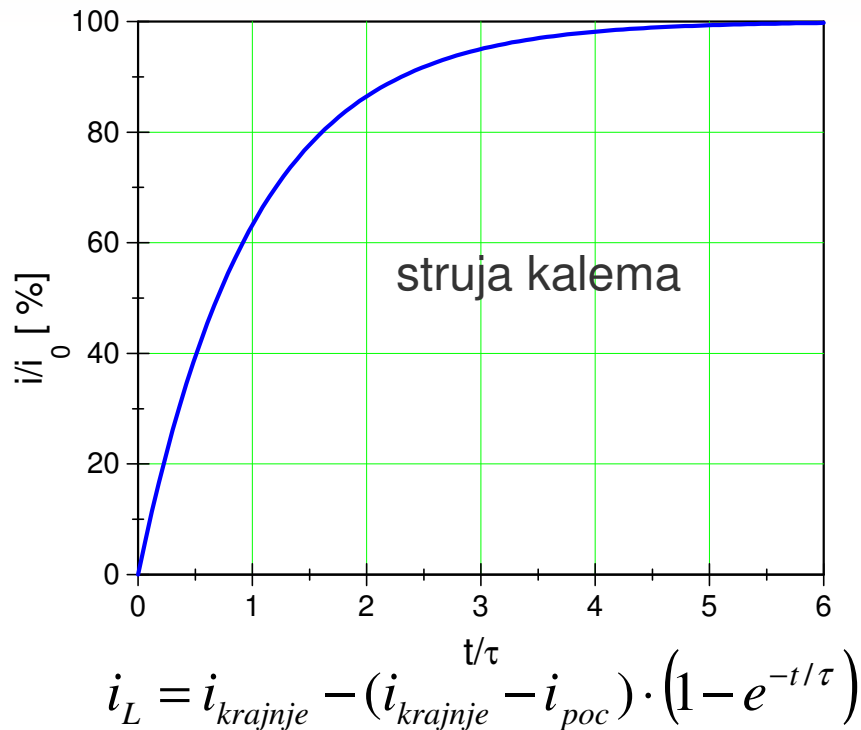
vremenska konstanta kola

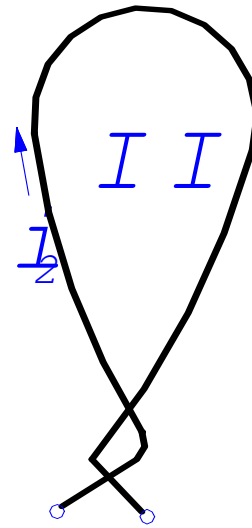
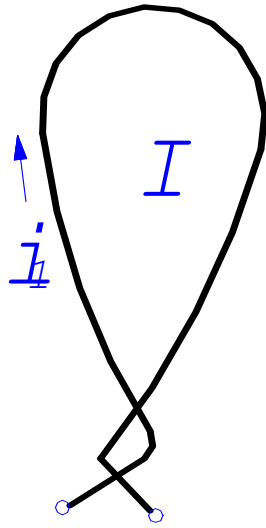


nehomogena linearna DJ prvog reda

# RL kolo sa jednosmernim izvorom

- “punjenje” kalema magnetnim poljem





$$\Phi_I = \Phi_{11} + \Phi_{21} = L_1 i_1 + M_{21} i_2$$

$$\Phi_{II} = \Phi_{22} + \Phi_{12} = L_2 i_2 + M_{12} i_1$$

$$e_I = e_{sI} + e_{MI} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M_{21} \frac{di_2}{dt}$$

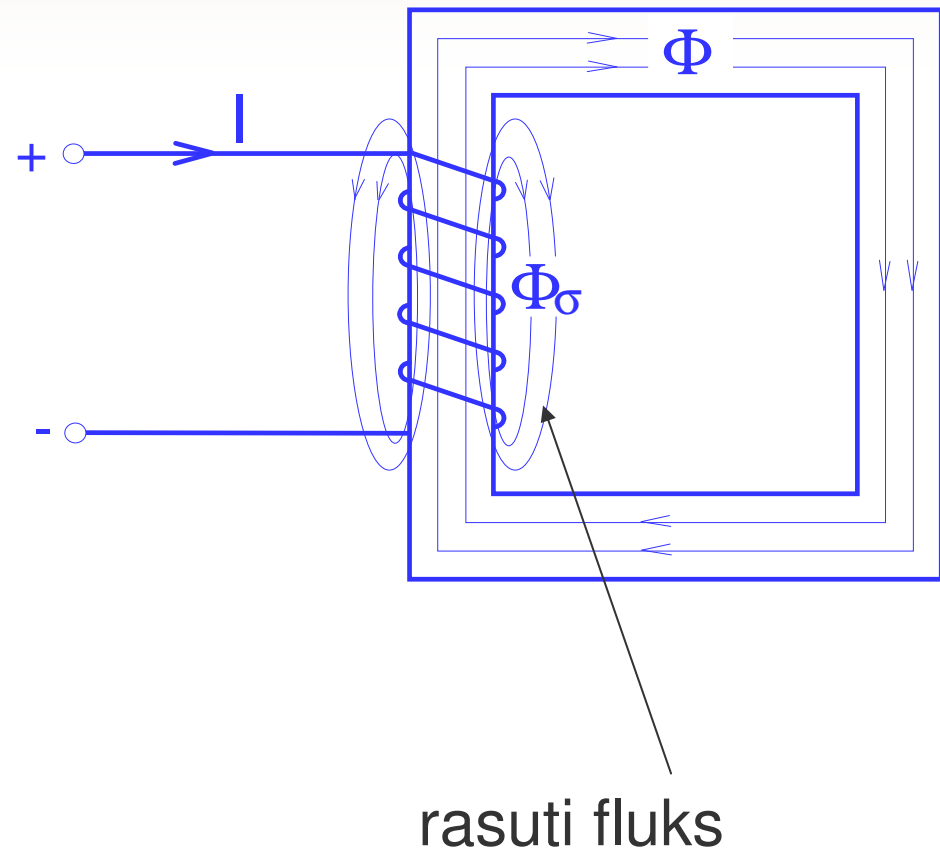
$$e_{II} = e_{sII} + e_{MII} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M_{12} \frac{di_1}{dt}$$

### 3.7 Magnetna kola

Zahvaljujući činjenici da je električna provodnost provodnih materijala mnogo puta veća od električne provodnosti izolacionih materijala, bilo je moguće uvesti pojam električnog kola, koje obezbjeđuje podužno kretanje elektriciteta duž provodnika kola. Na analogan način možemo govoriti o **magnetnom kolu**, zahvaljujući činjenici da je magnetna provodnost (permeabilnost) feromagnetnih materijala mnogo veća od magnetne provodnosti ostalih sredina  $[\mu_{Fe} = (10^2 - 10^4)\mu_0]$

Dakle, moguće je formirati magnetno kolo od feromagnetnih materijala, koje će obezbijediti da se kroz njega zatvara većina linija magnetnog polja. I zaista, većina električnih uređaja i aparata sadrže **gvozdena jezgra**, kao što su jezgra transformatora, jaram i kotva elektromagneta, statorski i rotorski limovi električnih mašina, koji obezbjeđuju **podužno "kretanje" magnetnog fluksa**. Aproksimacija "podužnog kretanja" ovdje nije tako dobra kao kod električnih kola

Prethodno je razmatrano magnetno kolo posebne (torusne) izvedbe kod kojeg su navojci bili raspoređeni ravnomjerno duž obima torusa. U praksi se, ipak, najčešće srijeću magnetna kola različite geometrije na koja je namotan jedan ili više namotaja, pri čemu njihovi navoji nisu ravnomjerno raspoređeni duž magnetnog kola već su skoncentrisani na ograničenim njegovim djelovima. Jedan primjer takvog magnetnog kola prikazan je na slici

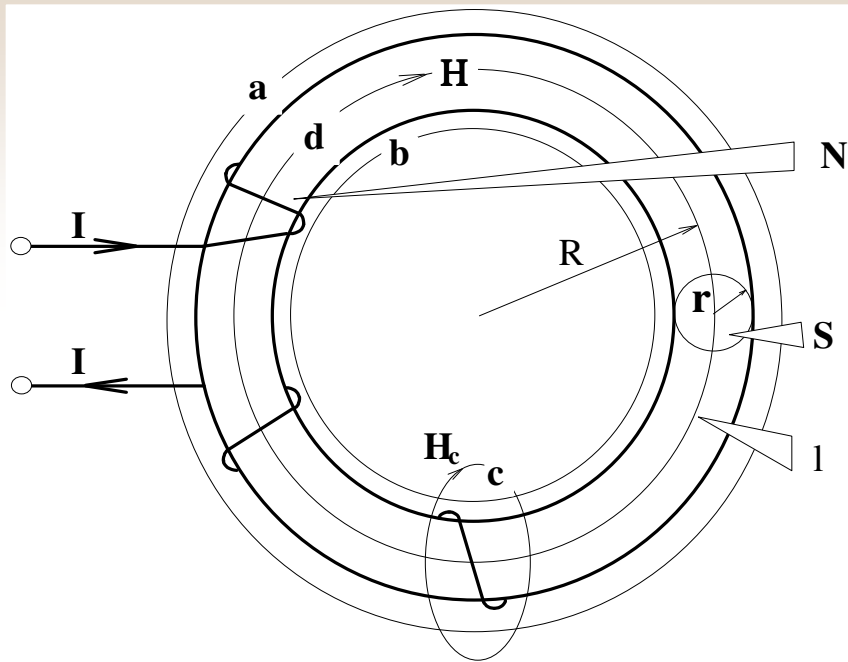


### ***3.7.1 Omov zakon za magnetna kola***

Primjer torusnog namotaja može se iskoristiti da se ukaže na jedan praktični pristup analizi prostih magnetnih kola, koji je analogan pristupu analizi električnih kola.

Uz pretpostavku da je  $r \ll R$ , može se smatrati da je  $B$  jednako u svim tačkama presjeka  $S$  torusnog jezgra (homogeno polje). Smatramo da se praktično sav fluks od namotaja na torusu zatvara kroz jezgro (feromagnetno), pa se magnetni fluks kroz torusno jezgro presjeka  $S$  može izračunati pomoću izraza



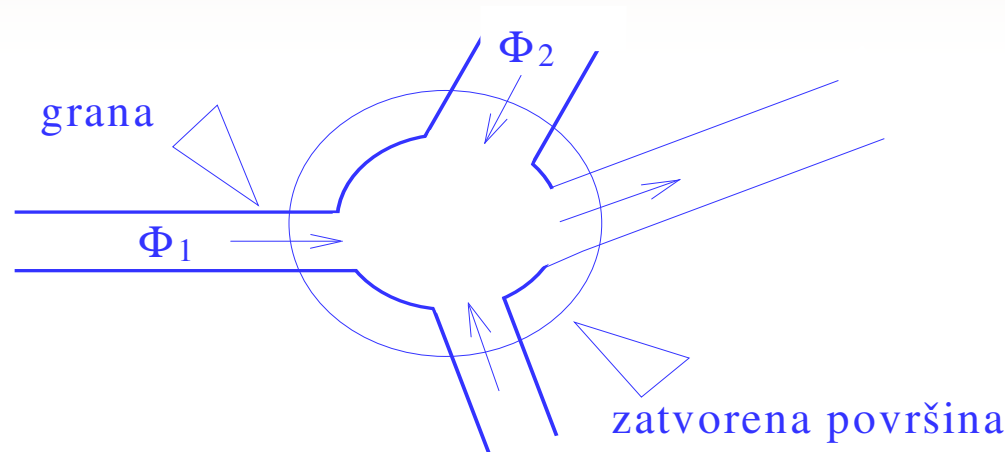


$$\Phi = BS = \mu \frac{NI}{2\pi R} (r^2 \pi)$$

Ako se  $2R\pi$  označi kao srednja dužina torusnog jezgra  $l$ , a  $NI$  kao  $M$

$$\Phi = \mu \frac{S}{l} M = \frac{M}{\frac{l}{\mu S}} = \frac{M}{R_m} \quad R_m = \frac{l}{\mu S} \quad M = \sum_{k=1}^n N_k I_k \quad R_m = \sum \frac{l_k}{\mu_k S_k}$$

### 3.7.2 Kirhofovi zakoni za magnetna kola



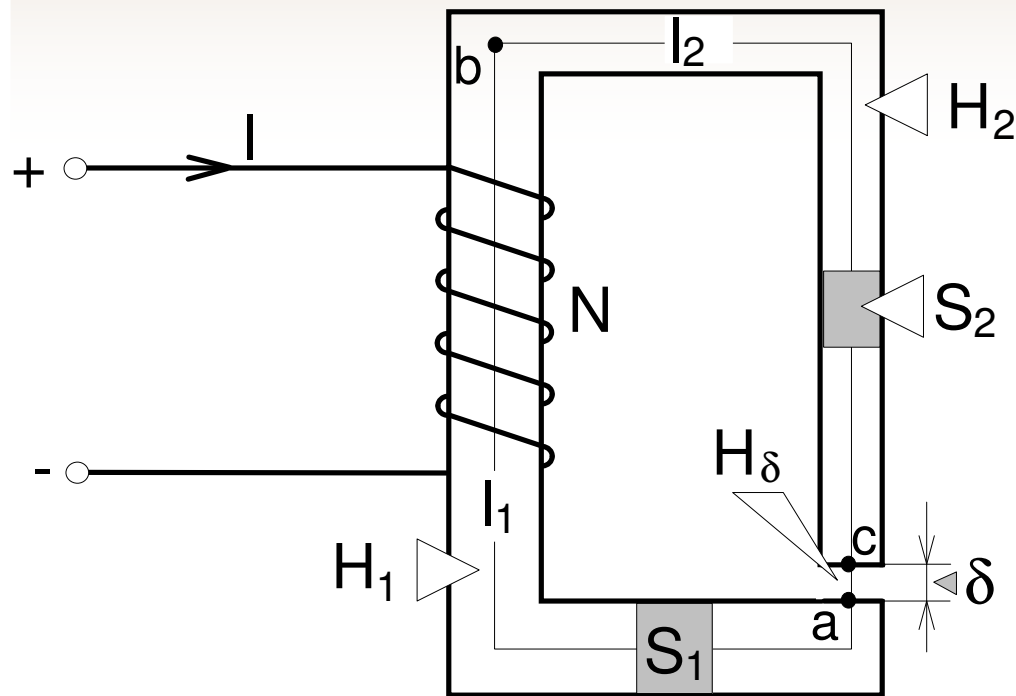
$$\sum_{i=1}^n \Phi_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n H_i l_i = \sum_{i=1}^n N_i I_i$$

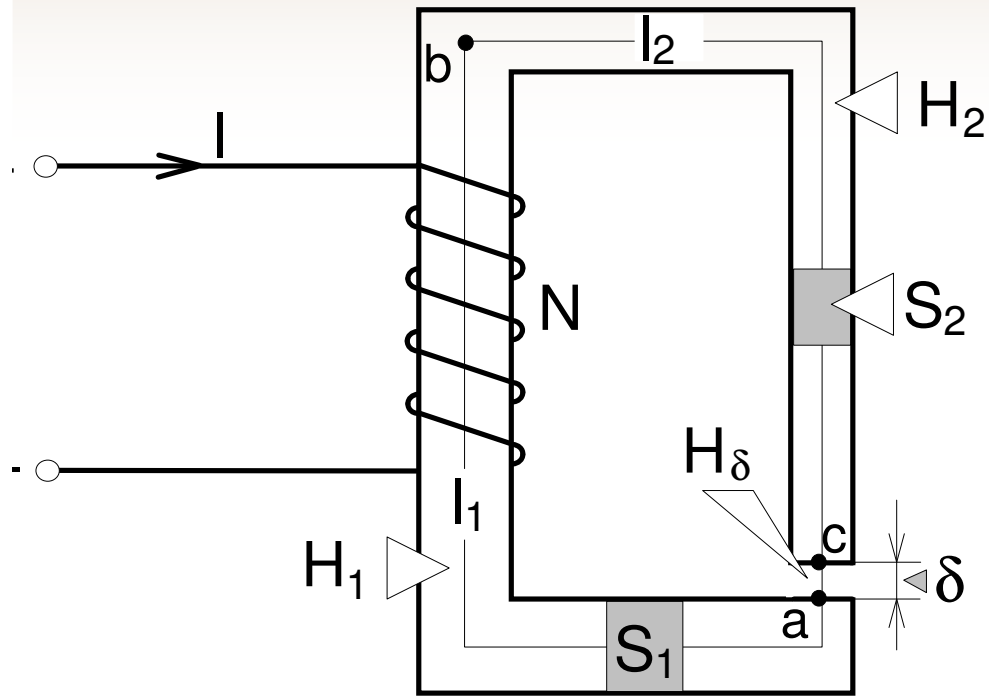
$$\sum_{i=1}^n \Phi_i R_{mi} = \sum_{i=1}^n M_i$$

$$\frac{B_i}{\mu_i} \frac{l_i}{S_i} S_i = \Phi_i R_{mi}$$

## 3.8 Proračunavanje magnetnih kola

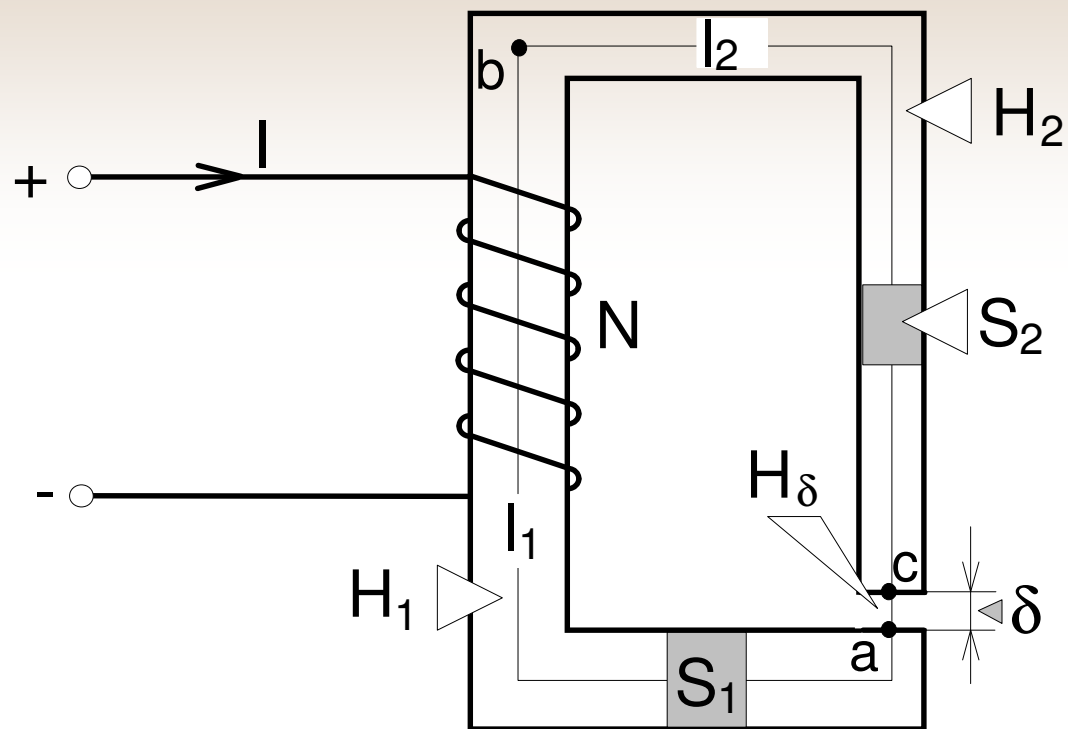


1. Zadane su geometrijske dimenzije magnetnog kola, karakteristike feromagnetnih materijala i magnetni fluks  $\Phi$  koji treba realizovati u magnetnom kolu, a treba naći mps namotaja  $M=NI$ , potrebnu za realizaciju zadanog fluksa.



$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_\delta \delta = NI$$

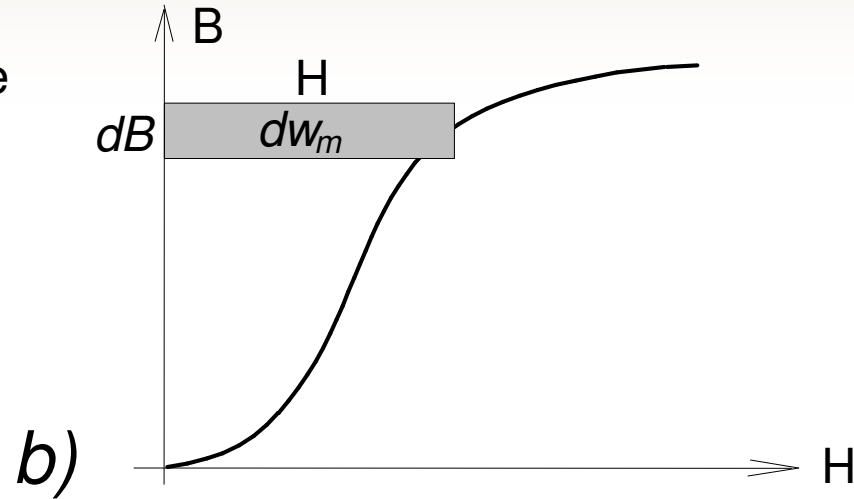
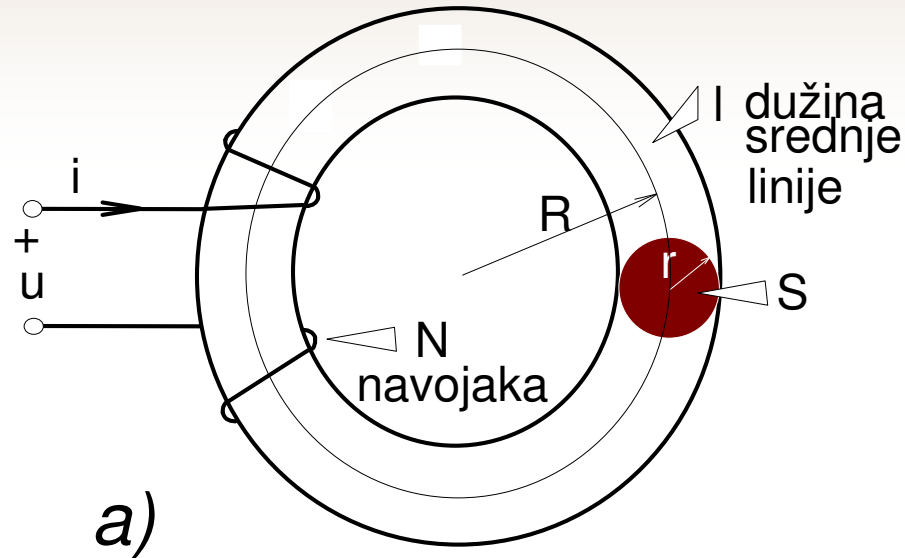
Magnetno kolo se razbija na red djelova jednakog poprečnog presjeka  $S$  realizovanih od homogenih materijala. Označava se kontura koja prolazi srednjom magnetnom linijom. Kako fluks u svim djelovima kola mora biti isti, to je uvijek  $B_i = \Phi / S_i$  za svaki dio kola. Ovo omogućava jednostavno određivanje vrijednosti  $\oint \vec{H} d\vec{l}$  za konturu koju obrazuje srednja linija magnetnog polja, pa je jednostavno naći i traženu mps  $NI$



$$H_\delta = \frac{\Phi / S_\delta}{\mu_0}$$

Vrijednosti  $H_1$  i  $H_2$  određuju se na osnovu izračunatih  $B_1$  i  $B_2$  sa zadatih krivih magnećenja materijala od kojih su realizovani odgovarajući djelovi magnetnog kola.

### 3.9 Energija magnetnog polja



Kada se torus priključi na promjenljivi napon  $u$ , pod uticajem tog napona, kroz namotaj će proteći struja  $i$ , koja stvara magnetno polje čiji je fluks  $\Phi$  takođe promjenljiv, pa se može pisati jednačina dinamičke ravnoteže električnih sila:

$$u - Ri - \frac{d\Phi}{dt} = 0 \quad /(\bullet idt)$$

$$uidt - Ri^2 dt - id\Phi = 0$$

$$i \cdot d\Phi = dW_M$$

$$\Phi = Li$$

$$W_M = \int dW_M = \int_{i=0}^i Lid i = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \Phi i$$

U gornjim razmatranjima električnog kola fluks  $\Phi$  je fluks električnog kola, dakle fluks koji prolazi kroz površine koje se naslanjaju na električno kolo, a fluks magnetnog kola  $\Phi_{Fe}$  je fluks koji prolazi kroz presjek magnetnog kola. U posmatranom slučaju fluks električnog kola je  $N$  puta veći ( $N$  je broj navojaka električnog kola) od fluksa magnetnog kola:

$$\Phi = N\Phi_{Fe}$$

Primjenjujući zakon ukupne struje na posmatrano kolo imamo:

$$H \cdot l = N \cdot i$$

pa se, imajući u vidu da je

$$\Phi_{Fe} = B \cdot S$$

magnetna energija kola može izraziti:

$$W_M = \frac{1}{2} N \Phi_{Fe} \cdot i = \frac{1}{2} N \Phi_{Fe} \frac{H \cdot l}{N} = \frac{1}{2} B S l H = \frac{1}{2} B H V$$

*zapreminska gustina energije magnetnog polja*

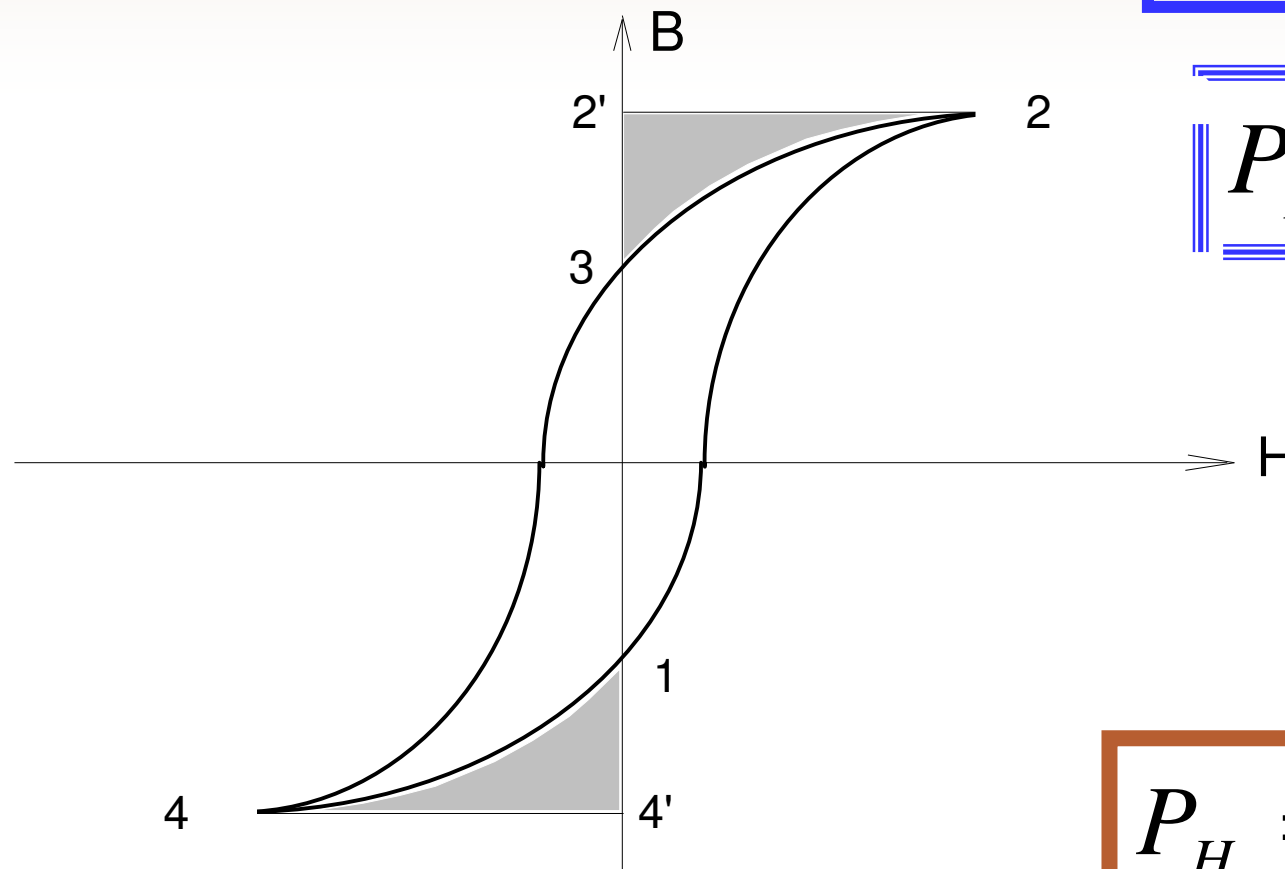
$$w_M = \frac{W_M}{V} = \frac{1}{2} B H = \frac{1}{2} \mu \cdot H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$



### 3.10 Gubici energije u magnetnom kolu

Vidjeli smo da je za magnećenje magnetnog kola potrebna određena energija. Kada se magnećenje feromagnetnih materijala vrši naizmjenično, a to je slučaj kod transformatora, električnih mašina i svih drugih uređaja koji koriste naizmjeničnu struju, nastaju gubici energije uslijed pojave histerezisa i pojave vrtložnih struja. Ovi gubici jednim imenom zovu se **gubici u gvožđu**.

### 3.10.1 Gubici usljed histerezisa

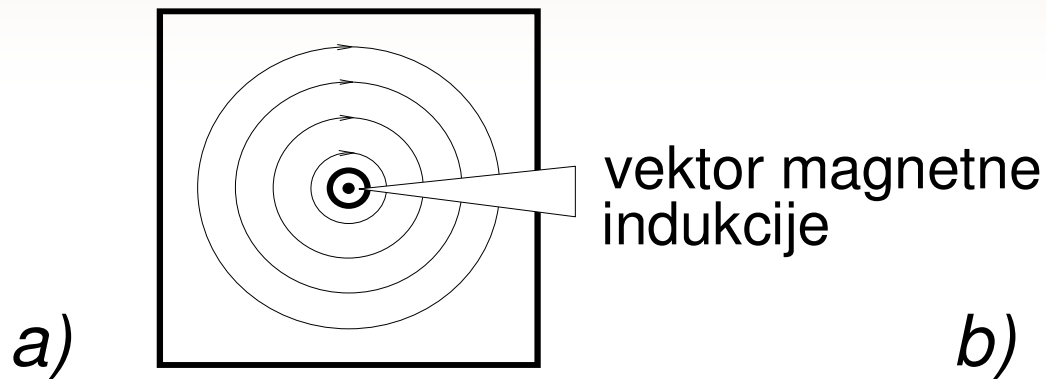


Štajnmeč –ov obrazac

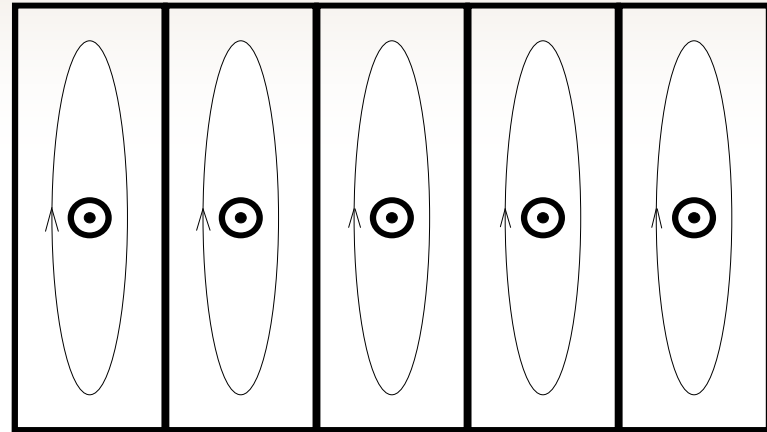
$$P_H = \eta f B_m^{1,6}$$

$$P_H = \eta f B_m^2$$

### 3.10.2 Gubici usljed vrtložnih struja



b)

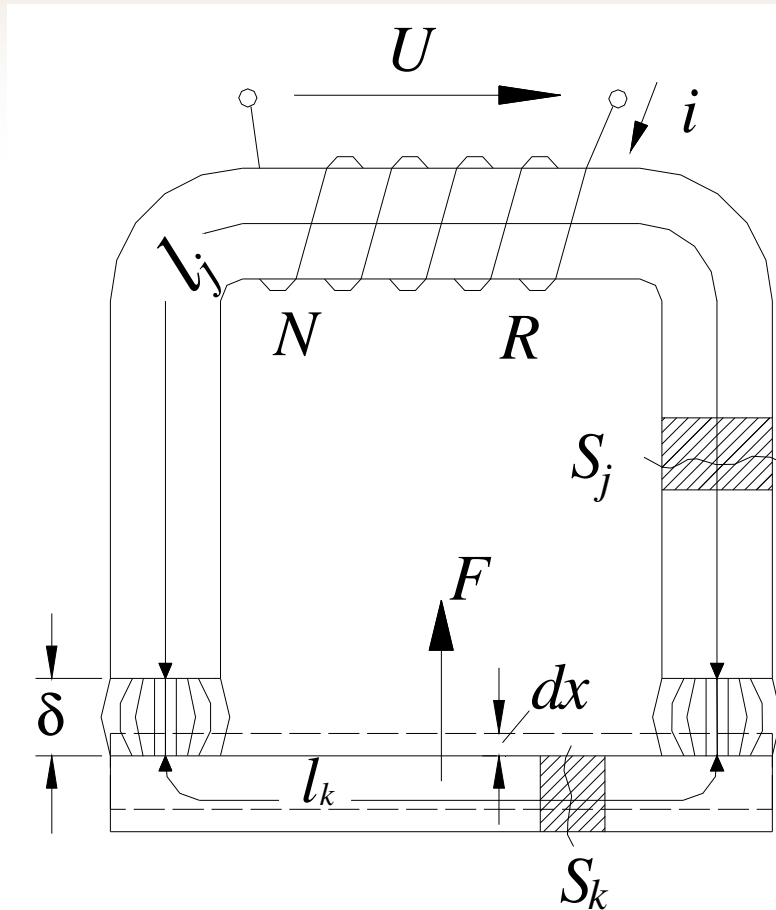


$$P_F = \sigma f^2 B_m^2$$

gdje je koeficijent snage gubitaka usljed vrtložnih struja, koji karakteriše svojstva materijala feromagnetnog kola.

U katalozima proizvođača, navodi se podatak o gubicima usljed vrtložnih struja po jedinici mase, za standardnu učestanost i konstantnu maksimalnu indukciju.

### 3.11 Elektromagnet



$$u \, i \, dt = R i^2 \, dt + dW_M + F \, dx$$

$$u - R i - \frac{d\Phi}{dt} = 0$$

$$i \, d\Phi = dW_M + F \, dx$$

$$F = B H S_j = \mu H^2 S_j$$