Граничне вриједности функција

У наредним задацима користићемо граничне вриједности : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$,

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Одредити граничне вриједности функција

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=\lim_{x\to 0}4\frac{\sin 4x}{4x}=4\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=4$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{x}=1\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$$

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x+1-1}\left(\sqrt{x+1}+1\right)=4\cdot 2=8$$

5. $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^3=e^3$$

6. $$\lim_{x\to\infty}x\left(\ln(x+1)-\ln x\right)=\lim_{x\to\infty}x\ln(\frac{x+1}{x})=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\ln e=1$$

7. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1+1-e^{-2x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{2x}-1}{2x}+\frac{e^{-2x}-1}{-2x}}{\frac{x}{2x}}=\frac{1+1}{\frac{1}{2}}=4$$

Непрекидност функције

Функција $f:A\to R$ је непрекидна у тачки $x_0\in A$ ако постоји $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. Овај лимес постоји ако постоје лијеви и десни лимес и једнаки су $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$.

1. Додефинисати функцију f у тачки x_0 тако да функција буде непрекидна у тачки x_0 :

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x},\ x_0=0$$

Функција је непрекидна $\forall x \neq 0$, једини могући прекид има у тачки $x_0 = 0$ па да би била непрекидна и у $x_0 = 0$ мора бити $\lim\limits_{x \to 0_0} f(x) = f(0)$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}\dfrac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \dfrac{1}{2}$. За $f(0)$ узећемо $f(0) = \dfrac{1}{2}$ па ће функција имати облик $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$

2. Одредити параметар a тако да функција буде непрекидна на R: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x \leq 2 \\ ax + 1 & x > 2 \end{cases}$

Да би функција била непрекидна за $\forall x \in R$ мора бити $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(x^2 - 4) = 0$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(ax + 1) = 2a + 1$

тј. мора бити $2a + 1 = 0$ односно $a = -\dfrac{1}{2}$

3. Одредити параметре a и b тако да функција $f(x) = \begin{cases} x+2 & ; \quad x \leq 1 \\ x^2 + ax + b & ; 1 < x \leq 2 \\ (x-2)^2 & ; \quad x > 2 \end{cases}$ буде непрекидна на R

Могуће тачке прекида су $x_0 = 1$ и $x_0 = 2$. Да би функција била непрекидна за $x_0 = 1$ мора бити $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x + 2 = 3 = f(1)$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x^2 + ax + b) = 1 + a + b$; $1 + a + b = 3$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(x^2 + ax + b) = 4 + 2a + b = f(2)$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)^2 = 0$; $4 + 2a + b = 0$

Из $1 + a + b = 3$ и $4 + 2a + b = 0$ се добија $a = -6$, $b = 8$

Изводи

Таблица

1. $(Const)' = 0$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{-1}{x^2}$
5. $(a^x)' = a^x \ln a; \quad a > 0, a \neq 1$
6. $(e^x)' = e^x$

7. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$

8. $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$

9. $\left(\sin x\right)' = \cos x$

10. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$

11. $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

12. $\left(ctgx\right)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$

13. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14. $\left(\arccos x\right)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

16. $\left(arcctgx\right)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$

Основна правила

$$\left(cf(x)\right)' = cf'(x)$$

$$\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Одредити изводе следећих функција :

1. $\left(x+\sin x\right)' = 1+\cos x$

2. $\left(x^2 \ln x\right)' = 2x\ln x + x^2 \dfrac{1}{x}$

3. $\left(\dfrac{\sin x}{\ln x} - 8x\right)' = \dfrac{\cos x \ln x - \sin x \dfrac{1}{x}}{\ln^2 x} - 8$

4. $\left(5arctgx - 4xtgx\right)' = \dfrac{5}{1+x^2} - (tgx + x\dfrac{1}{\cos^2 x})$

Извод сложене функције

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))g'(x)$$

Одредити изводе следећих функција :

1. $$\left(\ln(\sin x)\right)' = \frac{1}{\sin x}\cos x$$

2. $$\left(\sqrt{x^2 \ln x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 \ln x}}\left(2x\ln x + x^2\frac{1}{x}\right)$$

3. $$\left(\sin(\ln\frac{x+1}{x-1})\right)' = \cos(\ln\frac{x+1}{x-1})\frac{1}{\frac{x+1}{x-1}}\frac{1(x-1)-(x+1)1}{(x-1)^2}$$

Лопиталово правило

Код неодређености облика $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ примјењујемо правило $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Израчунати граничне вриједности

1. $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2} = 0$$

3. $$\lim_{x\to 0} x\ln x = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

Изводи вишег реда

$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$, $\quad y'' = (y')'$, $y''' = (y'')'$ ....

Наћи четврти извод функције $y = \ln x$

$$y^{(4)} = (\ln x)^{(4)} = \left((\ln x)'\right)^{(3)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(3)} = \left(\left(\frac{1}{x}\right)'\right)'' = \left(\frac{-1}{x^2}\right)'' = \left(\left(\frac{-1}{x^2}\right)'\right)' = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = \frac{-6}{x^4}$$

Наћи трећи извод функције $y = x\ln x$

$$y^{(3)} = (x\ln x)^{(3)} = \left((x\ln x)'\right)'' = \left(\ln x + x\frac{1}{x}\right)'' = (\ln x + 1)'' = \left((\ln x+1)'\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$$

Наћи трећи извод функције $y = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$y^{(3)}=\left(x^2e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(3)}=\left(\left(x^2e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'\right)''=\left(2xe^{-\frac{x^2}{2}}+x^2e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)\right)''=\left((2x-x^3)e^{-\frac{x^2}{2}}\right)''=\left(\left((2x-x^3)e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'\right)'$$

$$y^{(3)}=\left((2-3x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}+(2x-x^3)e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)\right)'=\left((2-5x^2+x^4)e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'$$

$$y^{(3)}=(-10x+4x^3)e^{-\frac{x^2}{2}}+(2-5x^2+x^4)e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)=(-12x+9x^3-x^5)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Наћи трећи извод функције $y=\dfrac{e^x}{\sin x}$

$$y^{(3)}=\left(\frac{e^x}{\sin x}\right)^{(3)}=\left(\left(\frac{e^x}{\sin x}\right)'\right)''=\left(\frac{e^x\sin x-e^x\cos x}{\sin^2 x}\right)''=\left(\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{\sin^2 x}\right)''$$

$$y^{(3)}=\left(\frac{\left[e^x(\sin x-\cos x)+e^x(\cos x+\sin x)\right]\sin^2 x-e^x(\sin x-\cos x)2\sin x\cos x}{\sin^4 x}\right)'$$

$$y^{(3)}=\left(2\frac{e^x(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)}{\sin^3 x}\right)'=\left(2\frac{e^x(1-\sin x\cos x)}{\sin^3 x}\right)'$$

$$y^{(3)}=2\frac{\left[e^x(1-\sin x\cos x)+e^x(-\cos^2 x+\sin^2 x)\right]\sin^3 x-e^x(1-\sin x\cos x)3\sin^2 x\cos x}{\sin^6 x}$$

$$y^{(3)}=2\frac{e^x(2\sin^2 x-\sin x\cos x)\sin^3 x-e^x(1-\sin x\cos x)3\sin^2 x\cos x}{\sin^6 x}$$

$$y^{(3)}=2\frac{e^x(2\sin^3 x-\sin^2 x\cos x-3\cos x+3\sin x\cos^2 x)}{\sin^4 x}$$

Наћи други извод функције $y=e^{\sin x^3}$

$$y''=\left(e^{\sin x^3}\right)''=\left(\left(e^{\sin x^3}\right)'\right)'=\left(e^{\sin x^3}\cos x^3 3x^2\right)'=\left(e^{\sin x^3}\right)'\cos x^3 3x^2+e^{\sin x^3}\left(\cos x^3\right)'3x^2+e^{\sin x^3}\cos x^3\left(3x^2\right)'$$

$$y''=\left(e^{\sin x^3}\cos x^3 3x^2\right)\cos x^3 3x^2+e^{\sin x^3}\left(-\sin x^3 3x^2\right)3x^2+e^{\sin x^3}\cos x^3\left(6x\right)'$$

$$y''=e^{\sin x^3}\left(\cos^2 x^3 9x^4-\sin x^3 9x^4+\cos x^3 6x\right)$$

Монотоност функције и екстремне вриједности

$f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ расте

$f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ опада

Одредити интервале монотоности и екстремне вриједности функције $y=-x^3-4x^2-4x$.

$y' = \left(-x^3 - 4x^2 - 4x\right)' = -3x^2 - 8x - 4$

$y' = 0$ за $-3x^2 - 8x - 4 = 0$. Из $x_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{-6} = \frac{8 \pm 4}{-6} = \frac{4 \pm 2}{-3}$ добијамо $x_1 = -\frac{2}{3}$ и $x_2 = -2$ па је $y' = -3(x+\frac{2}{3})(x+2)$

$x \in$	$-\infty \quad -2$	$-2 \quad -\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3} \quad \infty$
$y' = -3(x+\frac{2}{3})(x+2)$	-	+	-
$y = -x^3 - 4x^2 - 4x$	↘	↗	↘

$y' = -3(x+\frac{2}{3})(x+2) < 0$ за $x \in (-\infty;-2) \cup (-\frac{2}{3};\infty)$ и тада функција опада

$y' = -3(x+\frac{2}{3})(x+2) > 0$ за $x \in (-2;-\frac{2}{3})$ и тада функција расте

$y_{\min} = y(-2) = 0$, $y_{\max} = y(-\frac{2}{3}) = \frac{32}{27}$

Одредити интервале монотоности и екстремне вриједности функције $y = \frac{2x+5}{x+2}$.

Домен функције је $x + 2 \neq 0$ тј. $x \in (-\infty;-2) \cup (-2;\infty)$

$$y' = \frac{2(x+2) - (2x+5)}{(x+2)^2} = \frac{-3}{(x+2)^2} < 0 \qquad \forall x \in (-\infty;-2) \cup (-2;\infty)$$

Функција је опадајућа на читавом домену и нема екстремних вриједности

Одредити интервале монотоности и екстремне вриједности функције $y = x^4 - x^3$.

$y' = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x-3)$

$y' = 0$ за $x^2(4x-3) = 0$. Очигледно $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{3}{4}$.

$x \in$	$-\infty \quad 0$	$0 \quad \frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} \quad \infty$
x^2	+	+	+
$4x-3$	-	-	+
$y' = x^2(4x-3)$	-	-	+
$y = x^4 - x^3$	↘	↘	↗

$y' = x^2(4x-3) < 0$ за $x \in (-\infty; \frac{3}{4})$ и тада функција опада

$y' = x^2(4x-3) > 0$ за $x \in (\frac{3}{4}; \infty)$ и тада функција расте

$y_{\min} = y(\frac{3}{4}) = -\frac{27}{26}$.

Конвексност и конкавност и превојне тачке функција

$f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ конвексна

$f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ конкавна

Одредити интервале конвексности и конкавности и превојне тачке функције $y = x^5 + 5x + 5$

$y' = 5x^4 + 5$, $y'' = 20x^3$

$y'' = 20x^3 < 0$ за $x \in (-\infty; 0)$ и тада је функција конкавна

$y' = 20x^3 > 0$ за $x \in (0; \infty)$ и тада је функција конвексна

Тачка са координатама $x = 0$, $y = y(0) = 5$ је превојна тачка.

Одредити интервале конвексности и конкавности и превојне тачке функције $y = \frac{2x-1}{(1-x)^2}$

Домен функције је $1 - x \neq 0$ тј. $x \in (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$

$$y' = \frac{2(1-x)^2 - (2x-1)2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

$$y' = \left(\frac{2x}{(1-x)^3} \right)' = \frac{2(1-x)^3 - 2x3(1-x)^2(-1)}{(1-x)^6} = \frac{4x+2}{(1-x)^4}$$

$y'' = \frac{4x+2}{(1-x)^4} < 0$ за $4x + 2 < 0$ тј за $x \in (-\infty; -\frac{1}{2})$ и тада је функција конкавна

$y'' = \frac{4x+2}{(1-x)^4} > 0$ за $x \in (-\frac{1}{2}; 1) \cup (1; \infty)$ и тада је функција конвексна

Тачка са координатама $x = -\frac{1}{2}$, $y = y(-\frac{1}{2}) = -\frac{8}{9}$ је превојна тачка.

Асимптоте функција

.