

Aktuarska matematika

PMF, Podgorica

Zimski semestar 2021-22

Literatura

Gerber, Hans U. *Life insurance mathematics*. (2013)

Ocjenjivanje

Kolokvijum 70 + projekat 30

Izlet u uslovna očekivanja i vjerovatnoće

- ▶ X – s.v.
- ▶ $E[X] = \int X dP$
- ▶ $E[X \mid C] = \int X dP|_C = \int_C X dP|_C$
- ▶ Ako je $A \subset C$ i $X = \mathbb{1}_A$ onda je:

$$\begin{aligned} E[\mathbb{1}_A \mid C] &= \int_C \mathbb{1}_A dP|_C \\ &= \int_A dP|_C = P(A \mid C) = \frac{P(A)}{P(C)} = \frac{E[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_C]}{P(C)} \end{aligned}$$

Izlet u uslovna očekivanja i vjerovatnoće

- ▶ Ako je $X = \mathbb{1}_A$ ond je $E[X \mid C] = \frac{E[X\mathbb{1}_C]}{P(C)}$
- ▶ Ako je $X \neq \mathbb{1}_A$ možemo aproksimirati $X = \sum x_i \mathbb{1}_{A_i}$
- ▶ Svakako važi $E[X \mid C] = \frac{E[X\mathbb{1}_C]}{P(C)}$

Izlet u uslovna očekivanja i vjerovatnoće

Konstruktivna definicija

- ▶ $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ – pod- σ -algebra
- ▶ $E[X \mid \mathcal{B}]$ je s.v. i to:
 - ▶ $\mathcal{B}$ mjerljiva s.v.
 - ▶ $\int_B E[X \mid \mathcal{B}] dP = \int_B X dP$ za svako $B \in \mathcal{B}$

Slučajno očekivanje u odnosu na s.v.

- ▶ Y – s.v.
- ▶ $\sigma(Y)$ – σ -algebra generisana s.v. Y (originali skupova)
- ▶ $E[X \mid Y] := E[X \mid \sigma(Y)]$

Izlet u uslovna očekivanja i vjerovatnoće

Uslovno očekivanje

- ▶ Značenje uslovnog očekivanja?
- ▶ Kakve veze ima sa uslovnom vjerovatnoćom?
- ▶ Kakve veze ima sa očekivanjem uslovljenim događajem?

Izlet u uslovna očekivanja i vjerovatnoće

- ▶ I dalje je:
 - ▶ $C \in \mathcal{A}$ događaj, $P(C) \neq 0$
 - ▶ $A \in \mathcal{A}$ događaj
- ▶ Neka je $Y = \mathbb{1}_C$
 - ▶ $\sigma(\mathbb{1}_C) = \{\emptyset, C, C^C, \Omega\}$
- ▶ $E[X \mid \mathbb{1}_C]$ je $\sigma(\mathbb{1}_C)$ -mjerljivo
 - ▶ $E[X \mid \mathbb{1}_C]$ je konstantno na C i C^C :

$$E[X \mid \mathbb{1}_C](\omega) = c_1, \omega \in C, \quad E[X \mid \mathbb{1}_C](\omega) = c_2, \omega \in C^C$$

Dakle: $E[X \mid \mathbb{1}_C] = c_1 \mathbb{1}_C + c_2 \mathbb{1}_{C^C}$

Zašto? $c_1 = ?$ $c_2 = ?$

Izlet u uslovna očekivanja i vjerovatnoće

$c_1 = ?$ $c_2 = ?$

Koristeći jednakost: $E[X | \mathbb{1}_C] = c_1 \mathbb{1}_C + c_2 \mathbb{1}_{C^c}$

$$\int_C E[X | \mathbb{1}_C] dP = c_1 \int_C dP = c_1 P(C)$$

Koristeći definiciju uslovnog očekivanja

$$\int_C E[X | \mathbb{1}_C] dP = \int_C X dP$$

Izlet u uslovna očekivanja i vjerovatnoće

Kombinujući prethodne jednakosti

$$c_1 = \frac{1}{P(C)} \int_C X dP = E[X | C]$$

Slično:

$$c_2 = E[X | C^C]$$

Zaključak:

$$E[X | \mathbb{1}_C] = E[X | C] \mathbb{1}_C + E[X | C^C] \mathbb{1}_{C^C}$$

Izlet u uslovna očekivanja i vjerovatnoće

$$E[\mathbb{1}_A \mid \mathbb{1}_C]$$

Na osnovu prethodnog slajda:

$$\begin{aligned} E[\mathbb{1}_A \mid \mathbb{1}_C] &= E[\mathbb{1}_A \mid C]\mathbb{1}_C + E[\mathbb{1}_A \mid C^C]\mathbb{1}_{C^C} \\ &= P(A \mid C)\mathbb{1}_C + P(A \mid C^C)\mathbb{1}_{C^C} \end{aligned}$$

Kraj izleta.

Kamatni račun

- ▶ C – kapital, glavnica
- ▶ i – (godišnja) kamatna stopa, efektivna
- ▶ i je "cijena korištenja kapitala"...
- ▶ $C \longrightarrow C(1+i) \longrightarrow C(1+i)^2 \longrightarrow \dots$
- ▶ Kamata se obračunava na kraju godine (obračunskog perioda) tj *dekurzivno* (in arrears).
- ▶ $C(1+i)^k$ – vrijednost kapitala nakon k godina
- ▶ $(1+i)^k$ – akumulacioni faktor

Akumulacija kapitala, fond

- ▶ r_k – iznos koji se ulaže u fond na kraju svake godine
- ▶ i – kamatna stopa
- ▶ $C = F_0$ – početni kapital
 - ▶ $F_1 = F_0(1 + i) + r_1$
 - ▶ $F_k = F_{k-1}(1 + i) + r_k$
 - ▶

$$F_n = (1 + i)^n F_0 + \sum_{k=1}^n (1 + i)^{n-k} r_k$$

Interpretacija?



$$F_n = F_0 + \sum_{k=1}^n r_k + \sum_{k=1}^n i F_{k-1}$$

Interpretacija?

Sadašnja vrijednost, diskontni faktor

- ▶ C_0 – početni kapital
- ▶ i – kamatna stopa
- ▶ $C_1 = C_0(1 + i)$ vrijednost kapitala nakon jedne godine
- ▶ $v = \frac{1}{1+i}$ diskontni faktor.
- ▶ $C_0 = vC_1$ sadašnja vrijednost kapitala C_1 !
- ▶ $C_n = (1 + i)^n C_0$, $C_0 = v^n C_n$ Interpretacija?
- ▶ Važan koncept!

Nominalna kamatna stopa

- ▶ Nominalna (godišnja) kamatna stopa koja se obračunava m puta godišnje se označava sa $i^{(m)}$
- ▶ Akumulacioni faktor za svaki period dužine $1/m$ godine je $\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)$:

$$C \longrightarrow C \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right) \longrightarrow C \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^2 \longrightarrow \dots$$

- ▶ *Relativna kamatna stopa* je efektivna kamatna stopa za period dužine $\frac{1}{m}$: $\frac{i^{(m)}}{m}$
- ▶ Nakon jedne godine kapital C se uveća do: $C \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$

Nominalna i efektivna godišnja kamatna stopa

- ▶ Ako je $i^{(m)}$ nominalna godišnja kamatna stopa, odgovarajuća efektivna godišnja kamatna stopa i zadovoljava jednakost:

$$C \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m} \right)^m = C(1 + i)$$

- ▶
$$i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m} \right)^m - 1$$

- ▶ Ako je data efektivna godišnja kamatna stopa i onda je odgovarajuća *konformna* kamatna stopa za m -ti dio godine:

$$i^{(m)} = \frac{(1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1}{\frac{1}{m}}.$$

Intenzitet kamate

Definicija

Intenzitet kamate (force of interest) : $\delta = \lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)}$

$$i^{(m)} = \frac{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1}{\frac{1}{m}} \Rightarrow \delta = \lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)} = \ln(1+i)$$

Zašto?

Intenzitet kamate

Definicija

Intenzitet kamate (force of interest) : $\delta = \lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)}$

$$i^{(m)} = \frac{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1}{\frac{1}{m}} \Rightarrow \delta = \lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)} = \ln(1+i)$$

Zašto?

$$\delta = \left((1+i)^x \right)'_x \Big|_{x=0}$$

Akumulacija kapitala i intenzitet kamate

Konstantni intenzitet kamate δ

- ▶ $e^\delta = 1 + i$
- ▶ Akumulacija nakon k godina $C(1 + i)^k = Ce^{\delta k}$

Promjenljivi intenzitet kamate $\delta(t)$, neprekidni slučaj

- ▶ $F(0) = C$, početni kapital
- ▶ U trenutku t akumulirani kapital je:

$$F(t) = F(0) \exp \left(\int_0^t \delta(s) ds \right)$$

- ▶ Princip konzistencije!

Neprekidna plaćanja

Rate of payment

$F(0) = C$, početni kapital

Intenzitet plaćanja $r(t)$

Ideja: U periodu od t do $t + dt$ u fond se uplati $r(t)dt$ novca.

$\delta = 0$ – nema kamaćenja: $dF(t) = r(t)dt$

$$F(t) = C + \int_0^t r(s)ds$$

$\delta > 0$ – neprekidno kamaćenje: $dF(t) = F(t)\delta(t)dt + r(t)dt$

$$F(t) = C \cdot \exp\left(\int_0^t \delta(s) ds\right) + \int_0^t \exp\left(\int_s^t \delta(u) du\right) r(s) ds$$

Anticipativna plaćanja, diskontna stopa

- ▶ i godišnja kamatna stopa
- ▶ C_0 i C_1 kapital na početku i kraju godine
- ▶ $C_1 = C_0(1 + i)$
- ▶ Diskontna stopa d je definisana jednačom: $C_0 = C_1(1 - d)$
- ▶ $\frac{1}{1 - d} = 1 + i$
- ▶ $d = \frac{i}{1 + i} = 1 - v$
- ▶ $\frac{1}{d} = 1 + \frac{1}{i}$
- ▶ Anticipativni obračun kamate! Interpretacija?

Nominalna diskontna stopa $d^{(m)}$

- ▶ $i^{(m)}$ nominalna godišnja kamatna stopa
- ▶ C i C' kapital na početku i kraju perioda dužine $\frac{1}{m}$
- ▶ $C = C' \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m} \right)$
- ▶ Nominalna diskontna stopa $d^{(m)}$ je definisana jednačom:
$$C' = C \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m} \right)$$

Nominalna diskontna stopa $d^{(m)}$

$$\blacktriangleright \frac{1}{1 - \frac{d^{(m)}}{m}} = 1 + \frac{i^{(m)}}{m}, \quad d^{(m)} = \frac{i^{(m)}}{1 + \frac{i^{(m)}}{m}}$$

$$\blacktriangleright \frac{1}{d^{(m)}} = \frac{1}{m} + \frac{1}{i^{(m)}}$$

$\blacktriangleright$ Iz posljednje jednakosti slijedi:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)} = \delta$$

Interpretacija?

Perpetuiteti

Beskonačni niz (jednakih) uplata

Anticipativni perpetuitet (perpetuity due)

- ▶ Godišnje uplate vrijednosti 1 počev od početka prve godine.
- ▶ Sadašnja vrijednost se označava sa $\ddot{a}_{\infty|}$:

$$\ddot{a}_{\infty|} = 1 + v + v^2 + \dots = \frac{1}{1 - v} = \frac{1}{d}$$

Dekurzivni perpetuitet (immediate perpetuity)

- ▶ Godišnje uplate vrijednosti 1 počev od kraja prve godine.
- ▶ Sadašnja vrijednost se označava sa $a_{\infty|}$:

$$a_{\infty|} = v + v^2 + v^3 + \dots = \frac{v}{1 - v} = \frac{1}{i}$$

Perpetuiteti sa m godišnjih plaćanja

Anticipativni perpetuitet sa m godišnjih plaćanja

- ▶ m godišnjih uplata vrijednosti $\frac{1}{m}$ počev od početka prvog perioda dužine $\frac{1}{m}$.
- ▶ Sadašnja vrijednost se označava sa $\ddot{a}_{\infty|}^{(m)}$:

$$\ddot{a}_{\infty|}^{(m)} = \frac{1}{m} + \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m} + \frac{v^{\frac{2}{m}}}{m} + \dots = \frac{1}{m} \frac{1}{1 - v^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{d^{(m)}}$$

Dekurzivni perpetuitet sa m godišnjih plaćanja

- ▶ m godišnjih uplata vrijednosti $\frac{1}{m}$ počev od kraja prvog perioda dužine $\frac{1}{m}$
- ▶ Sadašnja vrijednost se označava sa $a_{\infty|}^{(m)}$:

$$a_{\infty|}^{(m)} = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m} + \frac{v^{\frac{2}{m}}}{m} + \frac{v^{\frac{3}{m}}}{m} + \dots = \frac{1}{m} \frac{v^{\frac{1}{m}}}{1 - v^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{i^{(m)}}$$

Neprekidni perpetuitet

- ▶ Neprekidna plaćanja počev od trenutka $t = 0$.
- ▶ Konstantan intenzitet plaćanja $r(t) = 1$.
- ▶ Sadašnja vrijednost se označava sa $\bar{a}_{\infty|}$:

$$\bar{a}_{\infty|} = \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} dt = \frac{1}{\delta}$$

Standardni rastući perpetuitet

Anticipativni standardni rastući perpetuitet

- ▶ Godišnje uplate vrijednosti $1, 2, 3, \dots$ redom počevši od početka prve godine.
- ▶ Sadašnja vrijednost se označava sa $(I\ddot{a})_{\overline{\infty}|}$.

$$(I\ddot{a})_{\overline{\infty}|} = 1 + 2v + 3v^2 + 4v^3 + \dots = \frac{1}{(1-v)^2} = \frac{1}{d^2}$$

Dekurzivni standardni rastući perpetuitet

- ▶ Godišnje uplate vrijednosti $1, 2, 3, \dots$ redom počevši od pokraja prve godine.
- ▶ Sadašnja vrijednost se označava sa $(Ia)_{\overline{\infty}|}$.

$$(Ia)_{\overline{\infty}|} = v + 2v^2 + 3v^3 + 4v^4 + \dots = \frac{v}{(1-v)^2} = \frac{1-d}{d^2}$$

Rastući perpetuiteti

Dokazi jednakosti sa prethodnog slajda?!

Rastući perpetuiteti sa m godišnjih uplata, koji rastu q puta godišnje: SAMI.

Neprekidni rastući perpetuiteti: SAMI.

Anuiteti

Konačni niz (jednakih) uplata

Anticipativni annuitet (annuity due)

- ▶ n godišnjih uplate vrijednosti 1 počev od početka prve godine.
- ▶ Sadašnja vrijednost se označava sa $\ddot{a}_{\overline{n}|}$:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \dots + v^{n-1} = \ddot{a}_{\infty|} - v^n \ddot{a}_{\infty|} = \frac{1 - v^n}{d}$$

Dekurzivni annuitet (immediate annuity)

- ▶ n godišnjih uplate vrijednosti 1 počev od kraja prve godine.
- ▶ Sadašnja vrijednost se označava sa $a_{\overline{n}|}$:

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + v^3 + \dots + v^n = \frac{1 - v^n}{i}$$

Anuiteti sa više godišnjih uplata

- ▶ Analogno perpetuitetima se definišu anuiteti sa m jednakih uplata m puta godišnje.
- ▶ Sadašnje vrijednosti se označavaju sa: $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}$ i $a_{\overline{n}|}^{(m)}$.

Rastući i opadajući anuiteti

- ▶ Prirodno se definišu i rastući anuiteti (analogno rastućim perpetuitetima)
- ▶ Za sadašnje vrijednosti se koriste oznake: $(I\ddot{a})\overline{n}$ i $(Ia)\overline{n}$.
- ▶ Razmatraju se i opadajući anuiteti sa uplatama $n, n-1, \dots, 1$
- ▶ Za sadašnje vrijednosti se koriste oznake: $(D\ddot{a})\overline{n}$ i $(Da)\overline{n}$.

Ukupna vrijednost anuiteta

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{d} \quad \text{;} \quad s_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{(1+i)^n - 1}{d^{(m)}} \quad \text{;} \quad s_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{(1+i)^n - 1}{i^{(m)}}$$

$$(I\ddot{s})\overline{n}|, \quad (Is)\overline{n}|, \quad (D\ddot{s})\overline{n}|, \quad (Ds)\overline{n}|, \dots$$

Kamatni račun

- ▶ C – kapital, glavnica
- ▶ i – (godišnja) kamatna stopa, efektivna
- ▶ i je "cijena korištenja kapitala"...
- ▶ $C \longrightarrow C(1+i) \longrightarrow C(1+i)^2 \longrightarrow \dots$
- ▶ Kamata se obračunava na kraju godine (obračunskog perioda) tj *dekurzivno* (in arrears).
- ▶ $C(1+i)^k$ – vrijednost kapitala nakon k godina
- ▶ $(1+i)^k$ – akumulacioni faktor

Akumulacija kapitala, fond

- ▶ r_k – iznos koji se ulaže u fond na kraju svake godine
- ▶ i – kamatna stopa
- ▶ $C = F_0$ – početni kapital
 - ▶ $F_1 = F_0(1 + i) + r_1$
 - ▶ $F_k = F_{k-1}(1 + i) + r_k$
 - ▶

$$F_n = (1 + i)^n F_0 + \sum_{k=1}^n (1 + i)^{n-k} r_k$$

Interpretacija?



$$F_n = F_0 + \sum_{k=1}^n r_k + \sum_{k=1}^n i F_{k-1}$$

Interpretacija?

Sadašnja vrijednost, diskontni faktor

- ▶ C_0 – početni kapital
- ▶ i – kamatna stopa
- ▶ $C_1 = C_0(1 + i)$ vrijednost kapitala nakon jedne godine
- ▶ $v = \frac{1}{1 + i}$ diskontni faktor.
- ▶ $C_0 = vC_1$ sadašnja vrijednost kapitala C_1 !
- ▶ $C_n = (1 + i)^n C_0$, $C_0 = v^n C_n$ Interpretacija?
- ▶ Važan koncept!

Nominalna kamatna stopa

- ▶ Nominalna (godišnja) kamatna stopa koja se obračunava m puta godišnje se označava sa $i^{(m)}$
- ▶ Akumulacioni faktor za svaki period dužine $1/m$ godine je $\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)$:

$$C \longrightarrow C \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right) \longrightarrow C \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^2 \longrightarrow \dots$$

- ▶ *Relativna kamatna stopa* je efektivna kamatna stopa za period dužine $\frac{1}{m}$: $\frac{i^{(m)}}{m}$
- ▶ Nakon jedne godine kapital C se uveća do: $C \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$

Nominalna i efektivna godišnja kamatna stopa

- ▶ Ako je $i^{(m)}$ nominalna godišnja kamatna stopa, odgovarajuća efektivna godišnja kamatna stopa i zadovoljava jednakost:

$$C \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m} \right)^m = C(1 + i)$$

- ▶ $i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m} \right)^m - 1$

- ▶ $i^{(m)} = \frac{(1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1}{\frac{1}{m}}.$

Intenzitet kamate

Definicija

Intenzitet kamate (force of interest) : $\delta = \lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)}$

$$i^{(m)} = \frac{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1}{\frac{1}{m}} \Rightarrow \delta = \lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)} = \ln(1+i)$$

Zašto?

Intenzitet kamate

Definicija

Intenzitet kamate (force of interest) : $\delta = \lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)}$

$$i^{(m)} = \frac{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1}{\frac{1}{m}} \Rightarrow \delta = \lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)} = \ln(1+i)$$

Zašto?

$$\delta = \left((1+i)^x \right)' \Big|_{x=0}$$

Akumulacija kapitala i intenzitet kamate

Konstantni intenzitet kamate δ

- ▶ $e^\delta = 1 + i$
- ▶ Akumulacija nakon k godina $C(1 + i)^k = Ce^{\delta k}$

Promjenljivi intenzitet kamate $\delta(t)$, neprekidni slučaj

- ▶ $F(0) = C$, početni kapital
- ▶ U trenutku t akumulirani kapital je:

$$F(t) = F(0) \exp \left(\int_0^t \delta(s) ds \right)$$

- ▶ Princip konzistencije!

Neprekidna plaćanja

Rate of payment

$F(0) = C$, početni kapital

Intenzitet plaćanja $r(t)$

Ideja: U periodu od t do $t + dt$ u fond se uplati $r(t)dt$ novca.

$\delta = 0$ – nema kamaćenja: $dF(t) = r(t)dt$

$$F(t) = C + \int_0^t r(s)ds$$

$\delta > 0$ – neprekidno kamaćenje: $dF(t) = F(t)\delta(t)dt + r(t)dt$

$$F(t) = C \cdot \exp\left(\int_0^t \delta(s) ds\right) + \int_0^t \exp\left(\int_s^t \delta(u) du\right) r(s) ds$$

Anticipativna plaćanja, diskontna stopa

- ▶ i godišnja kamatna stopa
- ▶ C_0 i C_1 kapital na početku i kraju godine
- ▶ $C_1 = C_0(1 + i)$
- ▶ Diskontna stopa d je definisana jednačom: $C_0 = C_1(1 - d)$
- ▶ $\frac{1}{1 - d} = 1 + i$
- ▶ $d = \frac{i}{1 + i} = 1 - v$
- ▶ $\frac{1}{d} = 1 + \frac{1}{i}$
- ▶ Anticipativni obračun kamate! Interpretacija?

Nominalna diskontna stopa $d^{(m)}$

- ▶ $i^{(m)}$ nominalna godišnja kamatna stopa
- ▶ C i C' kapital na početku i kraju perioda dužine $\frac{1}{m}$
- ▶ $C' = C \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m} \right)$
- ▶ Nominalna diskontna stopa $d^{(m)}$ je definisana jednačom:
$$C' = C \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m} \right)$$

Nominalna diskontna stopa $d^{(m)}$

$$\blacktriangleright \frac{1}{1 - \frac{d^{(m)}}{m}} = 1 + \frac{i^{(m)}}{m}, \quad d^{(m)} = \frac{i^{(m)}}{1 + \frac{i^{(m)}}{m}}$$

$$\blacktriangleright \frac{1}{d^{(m)}} = \frac{1}{m} + \frac{1}{i^{(m)}}$$

$\blacktriangleright$ Iz posljednje jednakosti slijedi:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)} = \delta$$

Interpretacija?

Perpetuiteti

Beskonačni niz (jednakih) uplata

Anticipativni perpetuitet (perpetuity due)

- ▶ Godišnje uplate vrijednosti 1 počev od početka prve godine.
- ▶ Sadašnja vrijednost se označava sa $\ddot{a}_{\infty|}$:

$$\ddot{a}_{\infty|} = 1 + v + v^2 + \dots = \frac{1}{1 - v} = \frac{1}{d}$$

Dekurzivni perpetuitet (immediate perpetuity)

- ▶ Godišnje uplate vrijednosti 1 počev od kraja prve godine.
- ▶ Sadašnja vrijednost se označava sa $a_{\infty|}$:

$$a_{\infty|} = v + v^2 + v^3 + \dots = \frac{v}{1 - v} = \frac{1}{i}$$

Perpetuiteti sa m godišnjih plaćanja

Anticipativni perpetuitet sa m godišnjih plaćanja

- ▶ m godišnjih uplata vrijednosti $\frac{1}{m}$ počev od početka prvog perioda dužine $\frac{1}{m}$.
- ▶ Sadašnja vrijednost se označava sa $\ddot{a}_{\infty|}^{(m)}$:

$$\ddot{a}_{\infty|}^{(m)} = \frac{1}{m} + \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m} + \frac{v^{\frac{2}{m}}}{m} + \dots = \frac{1}{m} \frac{1}{1 - v^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{d^{(m)}}$$

Dekurzivni perpetuitet sa m godišnjih plaćanja

- ▶ m godišnjih uplata vrijednosti $\frac{1}{m}$ počev od kraja prvog perioda dužine $\frac{1}{m}$
- ▶ Sadašnja vrijednost se označava sa $a_{\infty|}^{(m)}$:

$$a_{\infty|}^{(m)} = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m} + \frac{v^{\frac{2}{m}}}{m} + \frac{v^{\frac{3}{m}}}{m} + \dots = \frac{1}{m} \frac{v^{\frac{1}{m}}}{1 - v^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{i^{(m)}}$$

Neprekidni perpetuitet

- ▶ Neprekidna plaćanja počev od trenutka $t = 0$.
- ▶ Konstantan intenzitet plaćanja $r(t) = 1$.
- ▶ Sadašnja vrijednost se označava sa $\bar{a}_{\infty|}$:

$$\bar{a}_{\infty|} = \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} dt = \frac{1}{\delta}$$

Standardni rastući perpetuitet

Anticipativni standardni rastući perpetuitet

- ▶ Godišnje uplate vrijednosti $1, 2, 3, \dots$ redom počevši od početka prve godine.
- ▶ Sadašnja vrijednost se označava sa $(I\ddot{a})_{\overline{\infty}|}$.

$$(I\ddot{a})_{\overline{\infty}|} = 1 + 2v + 3v^2 + 4v^3 + \dots = \frac{1}{(1-v)^2} = \frac{1}{d^2}$$

Dekurzivni standardni rastući perpetuitet

- ▶ Godišnje uplate vrijednosti $1, 2, 3, \dots$ redom počevši od pokraja prve godine.
- ▶ Sadašnja vrijednost se označava sa $(Ia)_{\overline{\infty}|}$.

$$(Ia)_{\overline{\infty}|} = v + 2v^2 + 3v^3 + 4v^4 + \dots = \frac{v}{(1-v)^2} = \frac{1-d}{d^2}$$

Anuiteti

Konačni niz (jednakih) uplata

Anticipativni annuitet (annuity due)

- ▶ n godišnjih uplate vrijednosti 1 počev od početka prve godine.
- ▶ Sadašnja vrijednost se označava sa $\ddot{a}_{\overline{n}|}$:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \dots + v^{n-1} = \ddot{a}_{\infty|} - v^n \ddot{a}_{\infty|} = \frac{1 - v^n}{d}$$

Dekurzivni annuitet (immediate annuity)

- ▶ n godišnjih uplate vrijednosti 1 počev od kraja prve godine.
- ▶ Sadašnja vrijednost se označava sa $a_{\overline{n}|}$:

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + v^3 + \dots + v^n = \frac{1 - v^n}{i}$$

Anuiteti sa više godišnjih uplata

- ▶ Analogno perpetuitetima se definišu anuiteti sa m jednakih uplata m puta godišnje.
- ▶ Sadašnje vrijednosti se označavaju sa: $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}$ i $a_{\overline{n}|}^{(m)}$.

Rastući i opadajući anuiteti

- ▶ Prirodno se definišu i rastući anuiteti (analogno rastućim perpetuitetima)
- ▶ Za sadašnje vrijednosti se koriste oznake: $(I\ddot{a})\overline{n}$ i $(Ia)\overline{n}$.
- ▶ Razmatraju se i opadajući anuiteti sa uplatama $n, n-1, \dots, 1$
- ▶ Za sadašnje vrijednosti se koriste oznake: $(D\ddot{a})\overline{n}$ i $(Da)\overline{n}$.

Ukupna vrijednost anuiteta

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{d} \quad \text{; } s_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{(1+i)^n - 1}{d^{(m)}} \quad \text{; } s_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{(1+i)^n - 1}{i^{(m)}}$$

$$(I\ddot{s})\overline{n}|, \quad (Is)\overline{n}|, \quad (D\ddot{s})\overline{n}|, \quad (Ds)\overline{n}|, \dots$$

Uvodni pojmovi

(x) – Život starosti x (godina)

$$T = T(x) = T_x$$

- ▶ T je buduće trajanje života (x)
- ▶ T je slučajna veličina
- ▶ $T + x$ – starost u trenutku smrti
- ▶ $G(t) = P(T \leq t)$, $t \geq 0$ raspodjela
- ▶ Pretpostavke:
 - ▶ G je neprekidna funkcija
 - ▶ G ima gustinu
 - ▶ $g(t)dt \approx P(t < T < t + dt)$

Osnovne oznake

$${}_tq_x := G(t) = P(T \leq t)$$

Vjerovatnoća da će lice starosti x godina umrijeti u narednih t godina.

► Ako je $t = 1$ koristimo oznaku: ${}_1p_x = p_x$

$${}_tp_x := 1 - G(t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - {}_tq_x$$

Vjerovatnoća da će lice starosti x doživjeti narednih t godina.

► Ako je $t = 1$ koristimo oznaku: ${}_1q_x = q_x$

$${}_{s|t}q_x := P(s < T < s + t) = G(s + t) - G(s) = {}_{s+t}q_x - {}_tq_x$$

Vjerovatnoća da će lice starosti x doživjeti narednih s godina, a zatim umrijeti u sljedećih t godina.

Osnovne oznake

$${}_tq_x = G(t), \quad {}_tp_x := 1 - G(t)$$

$${}_tq_{x+s} := P(T < t + s | T > s) = P(T - s < t | T - s > 0)$$

Uslovna vjerovatnoća da će lice starosti x godina koje je doživjelo narednih s godina, umrijeti u t godina nakon toga.

$${}_tp_{x+s} := P(T > t + s | T > s) = P(T - s > t | T - s > 0)$$

Uslovna vjerovatnoća da će lice starosti x godina koje je doživjelo narednih s godina, doživjeti i t godina nakon toga.

Komentar o prethodnim oznakama

Zbir $\leftrightarrow$ uslovna vjerovatnoća

- ▶ ${}_tq_x = G(t) = P(T \leq t) = P(T - 0 \leq t \mid T > 0)$
- ▶ ${}_tq_x = P(\text{preos. trajanje} \leq t \mid \text{preos. trajanje} > 0)$
- ▶ ${}_tq_{x+s} = P(T - s \leq t \mid T - s > 0) = P(T \leq t + s \mid T > s)$
- ▶ Slično za ${}_tp_{x+s}$

Da je T starost lica u trenutku smrti, onda bi bilo:

- ▶ ${}_tq_x := P(T < t + x \mid T > x)$
- ▶ ${}_tp_x := P(T > t + x \mid T > x)$
- ▶ Komplikovanje osnovnih pojmova...?

Neke jednakosti

$$s+t p_x = s p_x \cdot t p_{x+s}$$

Dokaz?

$$s|t q_x = s p_x \cdot t q_{x+s}$$

Dokaz?

Očekivano trajanje života

$$\dot{e}_x = E[T]$$

$$\begin{aligned}\dot{e}_x &= E[T] \\ &= \int_0^{+\infty} t g(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} (1 - G(t)) dt \\ &= \int_0^{+\infty} {}_t p_x dt\end{aligned}$$

Dokaz treće jednakosti?

Intenzitet smrtnosti

Motivacija

$${}_tq_{x+s} := P(T < t + s | T > s) = P(s < T < t + s | T > s)$$

Na intervalu Δt

$$\begin{aligned}\Delta tq_{x+t} &= P(t < T < t + \Delta t | T > t) \\ &= \frac{G(t + \Delta t) - G(t)}{1 - G(t)} \\ &= \frac{G(t + \Delta t) - G(t)}{\Delta t} \cdot \frac{1}{1 - G(t)} \cdot \Delta t\end{aligned}$$

Aproksimacija (za "malo" Δt)

$$\Delta tq_{x+t} \approx \frac{G'(t)}{1 - G(t)} \cdot \Delta t = \frac{g(t)}{1 - G(t)} \cdot \Delta t$$

Intenzitet smrtnosti

Definicija

$$\mu_{x+t} := \frac{g(t)}{1-G(t)}$$

$$\begin{aligned}\mu_{x+t} &= \frac{g(t)}{1-G(t)} = -\frac{(1-G(t))'}{1-G(t)} \\ &= -\left(\ln(1-G(t))\right)' = -\left(\ln({}_t p_x)\right)'_t\end{aligned}$$

Reprezentacija ${}_t p_x$ preko μ_{x+t}

$${}_t p_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s} ds\right)$$

Intenzitet smrtnosti

Veza sa prethodnim pojmovima

$$\mu_{x+t} := \frac{g(t)}{1-G(t)}$$

Gustina g :

$$g(t) = \mu_{x+t} \cdot (1 - G(t)) = {}_t p_x \mu_{x+t}$$

Očekivano trajanje života $\dot{e}_x$

$$\dot{e}_x = \int_0^{+\infty} t g(t) dt = \int_0^{+\infty} t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

Ranije smo dokazali: $\dot{e}_x = \int_0^{+\infty} {}_t p_x dt$.

Da li je onda: $t {}_t p_x \mu_{x+t} = t p_x \dots$?

Analitički izraz za distribuciju od T

- ▶ Realnost pretpostavke?

Cjelobrojno trajanje života K

Oznaka: $K := [T]$

$$P(K = k) = P(k \leq T < k + 1) = {}_k p_x \cdot q_{x+k}$$

Očekivano cjelobrojno trajanje života

$$e_x := \sum_{k=1}^{\infty} P(K \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x$$

- ▶ Lakše računanje
- ▶ Dovoljna je distribucija s.v. K
- ▶ Korisna aproksimacija: $\hat{e}_x \approx e_x + 1/2$

$$T = K + S$$

Dio godine smrti do smrti:

$$S := T - K$$

Pretpostavka

Slučajne veličine S i K su nezavisne.

Posljedica pretpostavke

Postoji funkcija H takva da je ${}_uq_{x+k} = H(u)q_{x+k}$, $u \in [0, 1)$.

► Dokaz?

(Posmatrati $P(S \leq u | K = k)$ i koristiti nezavisnost S i K)

Ako je $S \sim \mathcal{U}([0, 1))$ onda je:

► $H(u) = u$

► $E[S] = 1/2$

► $\ddot{e}_x = e_x + 1/2$

Diskretna verzija promjenljive S

$$S^{(m)} := \frac{1}{m}[mS + 1]$$

- ▶ Diskretizacija promjenljive S
- ▶ Korisno u praksi
- ▶ Nezavisnost K i S povlači nezavisnost K i $S^{(m)}$
- ▶ Ako je $S \sim \mathcal{U}([0, 1))$ onda je $S^{(m)} \sim \mathcal{U}(\{\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, 1\})$

Tehničke pretpostavke iz prakse

Ako su poznate vrijednosti p_{x+n} za $k \in \mathbb{N}_0$ onda ${}_k p_x$ možemo računati:

$${}_k p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \dots \cdot p_{x+k-1}$$

Pretpostavka 1: Linearnost ${}_u q_x$ za $u \in [0, 1)$

$${}_u q_x = u \cdot q_x$$

► Posljedica:
$$\mu_{x+u} = \frac{q_x}{1 - u q_x}$$

Pretpostavka 2: Konstantno μ_{x+u} za $u \in [0, 1)$

Oznaka: $\mu_{x+\frac{1}{2}}$

$$\mu_{x+\frac{1}{2}} = -\ln p_x; \quad {}_u p_x = (p_x)^u.$$

Očekivanje i cijena

Očekivana dobit

- ▶ X – s.v. koja opisuje vrijednost nekog ugovora/igre
- ▶ $E[X]$ – je "prosječni dobitak"
- ▶ Primjer: $P(X = 2) = P(X = 0) = 0.5$, $E[X] = 1$
- ▶ $E[X]$ – je fer cijena ugovora (fair price)
 - ▶ Cijena manja od $E[X]$ je povoljna za kupca
 - ▶ Cijena veća od $E[X]$ je nepovoljna je nepovoljna za kupca
- ▶ Prosječna dobit je $E[X - E[X]] = 0$
- ▶ Problemi? Paradoksi?
- ▶ Bezrizična procjena; cijena rizika
- ▶ St. Petersburg paradox
- ▶ Funkcije korisnosti (utility functions) – $E[u(X)]$

Očekivanje i cijena

Očekivana sadašnja vrijednost

Ako se X realizuje u budućnosti (npr. za godinu dana) onda je fair cijena danas $E[vX]$

Neto jednokratna premija, miza

- ▶ Novčana svota koju osiguranik plaća za ugovor o osiguranju je *premija*
- ▶ U praksi se premija često plaća (više puta) godišnje
- ▶ *Jednokratna premija* se plaća jednom u trenutku sklapanja ugovora
- ▶ *Neto jednokratna premija (ili miza)* je fer cijena ugovora.
 - ▶ Ugovor o osiguranju je slučajna veličina
 - ▶ Očekivana sadašnja vrijednost ugovora je miza
 - ▶ Interpretacija?

Jednostavni tipovi osiguranja

Tipovi osiguranja

- ▶ Osiguranje života
(Osiguranje kapitala za slučaj smrti)
- ▶ Osiguranje života na n godina
(Privremeno osiguranje kapitala za slučaj smrti)
- ▶ Osiguranje doživljenja
(Osiguranje kapitala za slučaj doživljenja)
- ▶ Mješovito osiguranje
- ▶ Odloženo osiguranje
- ▶ ...

Pretpostavka konstantne kamatne stope

- ▶ Kamatna stopa $i = \text{const.}$
- ▶ Faktor diskontovanja $v = \frac{1}{1+i}$
- ▶ Očekivana sadašnja vrijednost

Oznake

Međunarodne aktuarske oznake

$$A_x, \quad A_{x:\overline{n}|}^1, \quad A_{x:\overline{n}|}^{\overline{1}}, \dots$$

Oznake za potrebe kursa

$$Z_{\infty}^q, \quad Z_n^q, \quad Z_n^p, \quad Z_n, \dots$$

Osiguranje života

Whole life insurance

Neograničeno osiguranje života

Vrijednost 1 se isplaćuje na kraju godine smrti

$$Z_{\infty}^q = v^{K+1} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \mathbb{1}_{K=k}$$

Neto jednokratna premija, miza

$$\begin{aligned} A_x &:= E[Z_{\infty}^q] = E[v^{K+1}] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} P(K = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} \end{aligned}$$

Osiguranje života

Disperzija

$$\text{Var}[Z_{\infty}^q] = E[(Z_{\infty}^q)^2] - E[Z_{\infty}^q]^2$$

"Računski ekvivalentno" sa A_x :

$$E[(Z_{\infty}^q)^2] = E[(v^{K+1})^2] == E[(v^2)^{K+1}]$$

Intermezzo/podsjetnik

$X_1, X_2, \dots$ niz slučajnih veličina

Kada je $E \left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n \right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n]$?

Intermezzo/podsjetnik

$X_1, X_2, \dots$ niz slučajnih veličina

Kada je $E \left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n \right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n]$?

- ▶ Fubini?
- ▶ $S_n = X_1 + \dots + X_n$
- ▶ $S_n \rightarrow S$ (pointwise)
- ▶ Teorema o monotonj konvergenciji
 - ▶ S_n monotono neopadajući niz (pointwise)
- ▶ Teorema o dominantnoj konvergenciji
 - ▶ Postoji apsolutno integrabilna s.v. S' tako da je : $|S_n| < S'$

Osiguranje života na n godina

Term insurance of duration n

Vrijednost 1 se isplaćuje na kraju godine smrti
ako se smrt dogodi u prvih n godina

$$Z_n^q = \begin{cases} v^{K+1}, & K < n \\ 0, & K \geq n \end{cases} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \mathbb{1}_{K=k}$$

Neto jednokratna premija, miza

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}|}^1 &:= E[Z_n^q] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} P(K = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} \end{aligned}$$

Osiguranje života na n godina (ograničeno osiguranje)

Disperzija

$$\text{Var}[Z_n^q] = E[(Z_n^q)^2] - E[Z_n^q]^2$$

"Računski ekvivalentno" sa A_x zbog:

$$\begin{aligned} (Z_n^q)^2 &= \begin{cases} (v^{K+1})^2, & K < n \\ 0, & K \geq n \end{cases} \\ &= \begin{cases} (v^2)^{K+1}, & K < n \\ 0, & K \geq n \end{cases} \end{aligned}$$

Osiguranje doživljenja (na n godina)

Pure endowment

Vrijednost 1 se isplaćuje na kraju n godina
ako je osiguranik živ u tom trenutku

$$Z_n^p = \begin{cases} 0, & K < n \\ v^n, & K \geq n \end{cases} = \sum_{k=n}^{\infty} v^n \mathbb{1}_{K=k} = v^n \mathbb{1}_{K \geq n}$$

Neto jednokratna premija, miza

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}|}^1 &:= E[Z_n^p] \\ &= E[v^n \mathbb{1}_{K \geq n}] \\ &= v^n P(K \geq n) \\ &= v^n {}_n p_x \end{aligned}$$

Osiguranje doživljenja (na n godina)

Disperzija

$$\text{Var}[Z_n^p] = E[(Z_n^p)^2] - E[Z_n^p]^2$$

► $Z_n^p = v^n \mathbb{1}_{K \geq n},$

► $\mathbb{1}_{K \geq n} \sim \mathcal{B}({}_np_x)$

$$\begin{aligned}\text{Var}[Z_n^p] &= (v^n)^2 \text{Var}[\mathbb{1}_{K \geq n}] \\ &= v^{2n} {}_np_x(1 - {}_np_x) \\ &= v^{2n} {}_np_x {}_nq_x\end{aligned}$$

Mješovito osiguranje (na n godina)

Endowment

Vrijednost 1 se isplaćuje na kraju godine smrti ako osiguranik umre u toku prvih n godina; u protivnom na kraju n -te godine.

$$\begin{aligned} Z_n &= \begin{cases} v^{K+1}, & K < n \\ v^n, & K \geq n \end{cases} \\ &= Z_n^q + Z_n^p \end{aligned}$$

Neto jednokratna premija, miza

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}|} &:= E[Z_n] = E[Z_n^q + Z_n^p] \\ &= A_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^{\overline{1}} \end{aligned}$$

Mješovito osiguranje (na n godina)

Disperzija

$$\text{Var}[Z_n] = E[(Z_n^q)^2] + E[(Z_n^p)^2] + 2\text{Cov}[Z_n^q Z_n^p]$$

► $\text{Cov}[Z_n^q Z_n^p] = E[Z_n^q Z_n^p] - E[Z_n^q]E[Z_n^p]$

► $Z_n^q Z_n^p = 0$ Zašto?

► $\text{Cov}[Z_n^q Z_n^p] = -A_{x:\overline{n}|}^1 A_{x:\overline{n}|}^{\frac{1}{n}}$

$$\text{Var}[Z] = E[(Z_n^q)^2] + E[(Z_n^p)^2] - 2A_{x:\overline{n}|}^1 A_{x:\overline{n}|}^{\frac{1}{n}}$$

Odloženo osiguranje života (za m godina)

Vrijednost 1 se isplaćuje na kraju godine smrti samo ako osiguranik ne umre u toku prvih m godina.

$$Z_{m,\infty}^q = \begin{cases} 0, & K < m \\ v^{K+1}, & K \geq m \end{cases} = \sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1} \mathbb{1}_{K=k}$$

Neto jednokratna premija, miza

$$\begin{aligned} {}_m|A_x &:= E[Z_{m,\infty}^q] \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1} P(K = k) \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} \end{aligned}$$

Podsjetnik

$$\blacktriangleright A_{x+m} = E[v^{K-m+1} \mid K \geq m]$$

$$\blacktriangleright {}_m|A_x = E[\sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1} \mathbb{1}_{K=k}] = [v^{K+1} \mathbb{1}_{K \geq m}]$$

$${}_m|A_x = v^m {}_m p_x A_{x+m}$$

$$\begin{aligned} A_{x+m} &= E[v^{K-m+1} \mid K \geq m] \\ &= \frac{E[v^{K-m+1} \mathbb{1}_{K \geq m}]}{P(K \geq m)} \\ &= \frac{v^{-m}}{{}_m p_x} E[v^{K+1} \mathbb{1}_{K \geq m}] \\ &= \frac{{}_m|A_x}{v^m {}_m p_x} \end{aligned}$$

A_{x+m}

Po uzoru na ${}_t p_{x+m}$ i ${}_t q_{x+m}$ definišemo:

$$A_{x+m} := E[v^{K-m+1} \mid K \geq m]$$

Komentar

- ▶ $A_x = E[v^{K+1}] = E[v^{K+1} \mid T > 0] = E[v^{K-0+1} \mid K - 0 \geq 0]$
- ▶ $A_x = E[v^{\text{preos. cjelob. trajanje}+1} \mid \text{preos. cjelob. t.} \geq 0]$
- ▶ $A_{x+m} = E[v^{K-m+1} \mid K - m \geq 0] = E[v^{K-m+1} \mid K \geq m]$
- ▶ Pogrešno: $E[v^{K+1} \mid K \geq m]$

Odloženo osiguranje života (za m godina)

Veza ${}_m|A_x$ i A_{x+m}

$$\blacktriangleright A_{x+m} = E[v^{K-m+1} \mid K \geq m]$$

$$\blacktriangleright {}_m|A_x = E[\sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1} \mathbb{1}_{K=k}] = [v^{K+1} \mathbb{1}_{K \geq m}]$$

$${}_m|A_x = v^m {}_m p_x A_{x+m}$$

$$\begin{aligned} A_{x+m} &= E[v^{K-m+1} \mid K \geq m] \\ &= \frac{E[v^{K-m+1} \mathbb{1}_{K \geq m}]}{P(K \geq m)} \\ &= \frac{v^{-m}}{{}_m p_x} E[v^{K+1} \mathbb{1}_{K \geq m}] \\ &= \frac{{}_m|A_x}{v^m {}_m p_x} \end{aligned}$$

Rekurzivne formule

$$A_x = vq_x + vA_{x+1}p_x$$

$$\begin{aligned}A_x &= E[v^{K+1}] \\&= E[\mathbb{1}_{K=0}v^{K+1} + \mathbb{1}_{K>0}v^{K+1}] \\&= vE[\mathbb{1}_{K=0}] + vE[v^K\mathbb{1}_{K>0}] \\&= vP(K=0) + vE[v^K|K>0]P(K>0) \\&= vq_x + vE[v^{K-1+1}|K\geq 1]P(K\geq 0) \\&= vq_x + vA_{x+1}p_x\end{aligned}$$

Rekurzivne formule

Interpretacije

$$A_x = vq_x + vA_{x+1}p_x$$

Očekivana vrijednost zbir sadašnjih vrijednosti

- ▶ Štete u slučaju smrti u prvoj godini
- ▶ Novog ugovora u slučaju doživljenja sljedeće godine

Rekurzivne formule

Interpretacije

$$A_x = vA_{x+1} + v(1 - A_{x+1})q_x$$

Zbir sadašnjih vrijednosti

- ▶ Novog ugovora sljedeće godine
- ▶ Očekivane doplate za štetu u slučaju smrti u prvoj godini

O drugom sabirku: očekivana doplata kao osiguranje života

$v(1 - A_{x+1})q_x$ – sadašnja vrijednost novog ugovora

- ▶ Osiguranje života na 1 godinu ($n = 1$)
- ▶ $vq_x = E[Z_1^q] = A_{x:\overline{1}|}^1$
- ▶ Osigurana suma je $1 - A_{x+1}$ (a ne 1 kao do sada)

Rekurzivne formule

Interpretacije

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k v(1 - A_{x+k+1})q_{x+k}$$

- ▶ $A_x - vA_{x+1} = v(1 - A_{x+1})q_x$ (prethodni slajd!)
- ▶ $A_{x+1} - vA_{x+2} = v(1 - A_{x+2})q_{x+1}$
- ▶ ...
- ▶ $A_{x+k} - vA_{x+k+1} = v(1 - A_{x+k+1})q_{x+k} \dots$
- ▶ Sumiranje jednakosti nakon množenja sa v^k !

Interpretacija: "zbir diskontovanih jednogodišnjih osiguranja"

- ▶ $v(1 - A_{x+k+1})q_{x+k}$ – jednogodišnji ugovor (kao u prehodnom slajdu)
- ▶ A_x – neto premija osiguranja života
- ▶ $\sum_{k=0}^{\infty} v^k v(1 - A_{x+k+1})q_{x+k}$ – zbir diskontovanih neto premija jednogodišnjih osiguranja

Rekurzivne formule

Interpretacije

$$dA_{x+1} = (A_{x+1} - A_x) + v(1 - A_{x+1})q_x$$

Interpretacija?

- ▶ $v(1 - A_{x+1})q_x$ – fiktivni jednogodišnji ugovor
- ▶ dA_{x+1} – zarada od kamate. Zašto/kako?
- ▶ $A_{x+1} - A_x$ – povećanje cijene ugovora?

Opšti tipovi osiguranja

► c_{k+1} – šteta u slučaju smrti u toku k -te godine

► $Z = c_{K+1}v^{K+1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{K+1}v^{k+1}\mathbb{1}_{K=k}$

$$E[Z] = E[c_{K+1}v^{K+1}] = \sum_{k=0}^{\infty} c_{K+1}v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$$

Opšti tipovi osiguranja

$$c_0 = 0$$

Veza sa odloženim osiguranjem

$$E[Z] = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k - c_{k-1}) {}_k|A_x$$

Veza sa ograničenim osiguranjem

Ako osiguranje traje n godina ($c_k = 0, k > n$):

$$E[Z] = c_n A_{x:\overline{n}|}^1 + (c_{n-1} - c_n) A_{x:\overline{n-1}|}^1 + \dots + (c_1 - c_2) A_{x:\overline{1}|}^1$$

Interpretacije? Dokazi?

Opšti tipovi osiguranja

Veza sa odloženim osiguranjem

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k - \text{data suma; } x_0 = y_0 = 0$$

$$y_k = y_k - y_{k-1} + y_{k-1} - \dots - y_1 + y_1 - y_0$$

$$y_k = \sum_{i=1}^k (y_i - y_{i-1})$$

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k = \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1}) \sum_{i=k}^n x_i$$

Zašto?

Opšti tipovi osiguranja

Veza sa odloženim osiguranjem

x_1	$y_1 - y_0$				
x_2	$y_1 - y_0$	$y_2 - y_1$			
x_3	$y_1 - y_0$	$y_2 - y_1$	$y_3 - y_2$		
$\dots$	$\dots$				
x_n	$y_1 - y_0$	$y_2 - y_1$	$y_2 - y_1$	$\dots$	$y_n - y_{n-1}$

$$y_k - y_{k-1} \longrightarrow \sum_{i=k}^n x_i$$

Opšti tipovi osiguranja

Veza sa odloženim osiguranjem

► Pretpostavimo $x_k \geq 0$, $y_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, y_k ograničen niz

► $S = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \leq +\infty$

► $X = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \leq +\infty$

► $X_n = \sum_{k=n}^{\infty} x_k = X - \sum_{k=1}^{n-1} x_k$

► Jer je $X_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^N x_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^N x_k - \sum_{k=1}^{n-1} x_k \right)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(X - \sum_{k=n}^{\infty} x_k \right) = X - X = 0$$

Opšti tipovi osiguranja

Veza sa odloženim osiguranjem

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (y_k - y_{k-1}) \sum_{i=k}^{\infty} x_i$$

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k y_k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1}) \sum_{i=k}^n x_i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1}) (X_k - X_{n+1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n ((y_k - y_{k-1}) X_k - (y_k - y_{k-1}) X_{n+1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1}) X_k = \sum_{k=1}^{\infty} (y_k - y_{k-1}) \sum_{i=k}^{\infty} x_i \end{aligned}$$

Opšti tipovi osiguranja

Veza sa odloženim osiguranjem

Iskoristili smo:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1}) X_{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} X_{n+1} \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} X_{n+1} y_n = 0\end{aligned}$$

Posljednja jednakost?

$$E[Z] = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k - c_{k-1}) {}_kA_x$$

Primjena prethodnih razmatranja o sumiranju!

Standardno rastuće osiguranje

Neograničeno standardno rastuće osiguranje

Vrijednost k se isplaćuje na kraju k -te godine ako osiguranik umre u toku te godine.

- ▶ $c_k = k$
- ▶ $(K + 1)v^{K+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k + 1)v^{k+1} \mathbb{1}_{K=k}$ - sadašnja vrijednost
- ▶ $(IA)_x = \sum_{k=0}^{\infty} (k + 1)v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$ - jednokrata neto premija
- ▶ $(IA)_x = \sum_{k=0}^{\infty} {}_k|A_x$

Standardno rastuće osiguranje

Ograničeno standardno rastuće osiguranje

Vrijednost k se isplaćuje na kraju k -te godine ako osiguranik umre u toku te godine, $k \leq n$.

- ▶ $c_k = k$
- ▶ $(K + 1)v^{K+1}\mathbb{1}_{K \leq n} = \sum_{k=1}^n (k + 1)v^{k+1}\mathbb{1}_{K=k}$ - sadašnja vrijednost
- ▶ $(IA)_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} (k + 1)v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$ - jednokrata neto premija
- ▶ $(IA)_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} {}_k|A_x - {}_n|A_x$
- ▶ $(IA)_{x:\overline{n}|}^1 = nA_{x:\overline{n}|}^1 - A_{x:\overline{n-1}|}^1 - A_{x:\overline{n-2}|}^1 - \dots - A_{x:\overline{1}|}^1$

Standardno opadajuće osiguranje

Vrijednost $n - k + 1$ se isplaćuje na kraju k -te godine ako osiguranik umre u toku te godine, $k \leq n$.

- ▶ $c_k = n - k + 1$
- ▶ $(n - K)v^{K+1}\mathbb{1}_{K \leq n} = \sum_{k=0}^{n-1} (n - k)v^{k+1}\mathbb{1}_{K=k}$ - sadašnja vrijednost
- ▶ $(Da)_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} (n - k)v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$ - jednokrata neto premija
- ▶ $(Da)_{x:\overline{n}|}^1 = nA_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n-1}|}^1 + A_{x:\overline{n-2}|}^1 + \dots + A_{x:\overline{1}|}^1$

Rastuća i opadajuća osiguranja

Rastuća osiguranja

Svako rastuće osiguranje čije štete formiraju aritmetički niz se može predstaviti kao (afina) transformacija standardnog rastućeg osiguranja.

Opadajuća osiguranja

Svako opadajuće osiguranje čije štete formiraju aritmetički niz se može predstaviti kao (afina) transformacija standardnog opadajućeg osiguranja.