Aktuarska matematika

PMF, Podgorica

Zimski semestar 2019-20

Prva nedjelja

Literatura

Gerber, Hans U. *Life insurance mathematics*. (2013)

Ocjenjivanje

Kolokvijum 70 + projekat 30

Kamatni račun

- C – kapital, glavnica
- i – (godišnja) kamatna stopa, efektivna
- i je "cijena korištenja kapitala"...
- $C \quad \longrightarrow \quad C(1+i) \quad \longrightarrow \quad C(1+i)^2 \quad \longrightarrow \dots$
- Kamata se obračunava na kraju godine (obračunskog perioda) tj *dekurzivno* (in arrears).
- $C(1+i)^k$ – vrijednost kapitala nakon k godina
- $(1+i)^k$ – akumulacioni faktor

Akumulacija kapitala, fond

- r_k – iznos koji se ulaže u fond na kraju svake godine
- i – kamatna stopa
- $C = F_0$ – početni kapital
  - $F_1 = F_0(1+i) + r_1$
  - $F_k = F_{k-1}(1+i) + r_k$
  - $$F_n = (1+i)^n F_0 + \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{n-k} r_k$$

    Interpretacija?
  - $$F_n = F_0 + \sum_{k=1} r_k + \sum_{k=1}^{n} i_F k - 1$$

    Interpretacija?

Sadašnja vrijednost, diskontni faktor

- C_0 – početni kapital
- i – kamatna stopa
- $C_1 = C_0(1+i)$ vrijednost kapitala nakon jedne godine
- $v = \dfrac{1}{1+i}$ diskontni faktor.
- $C_0 = vC_1$ sadačnja vrijednost kapitala C_1!
- $C_n = (1+i)^n C_0, \qquad C_0 = v^n C_n$ Interpretacija?
- Važan koncept!

Nominalna kamatna stopa

- Nominalna (godiňja) kamatna stopa koja se obračunava m puta godišnje se označava sa $i^{(m)}$
- Akumulacioni faktor za svaki period dužine $1/m$ godine je $\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)$:

$$C \quad \longrightarrow \quad C\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right) \longrightarrow C\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^2 \longrightarrow \ldots$$

- *Relativna kamatna stopa* je efektivna kamatna stopa za period dužine $\frac{1}{m}$: $\frac{i^{(m)}}{m}$
- Nakon jedne godine kapital C se uveća do: $C\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$

Nominalna i efektivna godišnja kamatna stopa

- Ako je $i^{(m)}$ nominalna godišnja kamatna stopa, odgovarajuća efektivna dogišnja kamatna stopa i zadovoljava jednakost:

$$C\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = C(1+i)$$

- $i = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1$
- Ako je data efektivna godišnja kamatna stopa i onda je odgovarajuća *konformna* kamatna stopa za m-ti dio godine:

$$i^{(m)} = \frac{(1+i)^{\frac{1}{m}}-1}{\frac{1}{m}}.$$

Intenzitet kamate

Definicija

Intenzitet kamate (force of interest) : $\delta = \lim_{m\to\infty} i^{(m)}$

$$i^{(m)} = \frac{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1}{\frac{1}{m}} \Rightarrow \delta = \lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \ln(1+i)$$

Zašto?

Intenzitet kamate

Definicija

Intenzitet kamate (force of interest) : $\delta = \lim_{m\to\infty} i^{(m)}$

$$i^{(m)} = \frac{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1}{\frac{1}{m}} \Rightarrow \delta = \lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \ln(1+i)$$

Zašto?

$$\delta = \left((1+i)^x\right)'_x \Big|_{x=0}$$

Akumulacija kapitala i intenzitet kamate

Konstantni intenzitet kamate δ

- $e^{\delta} = 1 + i$
- Akumulacija nakon k godina $C(1+i)^k = Ce^{\delta k}$

Promjenljivi intenzitet kamate $\delta(t)$, neprekidni slučaj

- $F(0) = C$, početni kapital
- U trenutku t akumulirani kapital je:

$$F(t) = F(0) exp \left(\int_0^s \delta(s)\, ds \right)$$

- Princip konzistencije!

Neprekidna plaćanja

Rate of payment

$F(0) = C$, početni kapital

Intenzitet plaćanja $r(t)$

Ideja: U periodu od t do $t + dt$ u fond se uplati $r(t)dt$ novca.

$\delta = 0$ – nema kamaćenja: $dF(t) = r(t)d$

$$F(t) = C + \int_0^t r(s)ds$$

$\delta > 0$ – neprekidno kamaćenje: $dF(t) = F(t)\delta(t)dt + r(t)dt$

$$F(t) = C \cdot exp\left(\int_0^t \delta(s)\, ds\right) + \int_0^t exp\left(\int_s^t \delta(u)\, du\right) r(s)\, ds$$

Anticipativna plaćanja, diskontna stopa

- i godišnja kamatna stopa
- C_0 i C_1 kapital na početku i kraju godine
- $C_1 = C_0(1 + i)$
- Diskontna stopa d je definisana jednaǩošću: $C_0 = C_1(1 - d)$
- $\dfrac{1}{1 - d} = 1 + i$
- $d = \dfrac{i}{1 + i} = 1 - v$
- $\dfrac{1}{d} = 1 + \dfrac{1}{i}$
- Anticipativni obračun kamate! Interpretacija?

Nominalna diskontna stopa $d^{(m)}$

- $i^{(m)}$ nominalna godišnja kamatna stopa
- C i C' kapital na početku i kraju perioda dužine $\frac{1}{m}$
- $C' = C\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)$
- Nominalna diskontna stopa $d^{(m)}$ je definisana jednaǩošću:
  $C' = C\left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)$

Nominalna diskontna stopa $d^{(m)}$

- $$\frac{1}{1-\frac{d^{(m)}}{m}} = 1 + \frac{i^{(m)}}{m}, \qquad d^{(m)} = \frac{i^{(m)}}{1+\frac{i^{(m)}}{m}}$$
- $$\frac{1}{d^{(m)}} = \frac{1}{m} + \frac{1}{i^{(m)}}$$
- Iz posljednje jednakosti slijedi:

$$\lim_{m\to\infty} d^{(m)} = \lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \delta$$

Interpretacija?

Anticipativni perpetuitet (perpetuity due)

- Godišnje uplate vrijednosti 1 počev od početka prve godine.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $\ddot{a}_{\overline{\infty}|}$:

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = 1 + v + v^2 + \ldots = \frac{1}{1-v} = \frac{1}{d}$$

Dekurzivni perpetuitet (immediate perpetuity)

- Godišnje uplate vrijednosti 1 počev od kraja prve godine.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $a_{\overline{\infty}|}$:

$$a_{\overline{\infty}|} = v + v^2 + v^3 + \ldots = \frac{v}{1-v} = \frac{1}{i}$$

Perpetuiteti sa m godišnjih plaćanja

Anticipativni perpetuitet sa m godišnjih plaćanja

- m godišnjih uplata vrijednosti $\frac{1}{m}$ počev od početka prvog perioda dužine $\frac{1}{m}$.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|}$:

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{m} + \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m} + \frac{v^{\frac{2}{m}}}{m} + \ldots = \frac{1}{m}\frac{1}{1 - v^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{d^{(m)}}$$

Dekurzivni perpetuitet sa m godišnjih plaćanja

- m godišnjih uplata vrijednosti $\frac{1}{m}$ počev od kraja prvog perioda dužine $\frac{1}{m}$
- Sadašnja vrijednost se označava sa $a^{(m)}_{\overline{\infty}|}$:

$$a^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m} + \frac{v^{\frac{2}{m}}}{m} + \frac{v^{\frac{3}{m}}}{m} + \ldots = \frac{1}{m}\frac{v^{\frac{1}{m}}}{1 - v^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{i^{(m)}}$$

Neprekidni perpetuitet

- Neprekidna plaćanja počev od trenutka $t = 0$.
- Konstantan intenzitet plaćanja $r(t) = 1$.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $\bar{a}_{\overline{\infty}|}$:

$$\bar{a}_{\overline{\infty}|} = \int_0^{+\infty} e^{-\delta t}\, dt = \frac{1}{\delta}$$

Standardni rastući perpetuitet

Anticipativni standardni rastući perpetuitet

- Godišnje uplate vrijednosti $1, 2, 3, \ldots$ redom počevši od početka prve godine.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $(I\ddot{a})_{\overline{\infty}|}$.

$$(I\ddot{a})_{\overline{\infty}|} = 1 + 2v + 3v^2 + 4v^3 + \ldots = \frac{1}{(1-v)^2} = \frac{1}{d^2}$$

Dekurzivni standardni rastući perpetuitet

- Godišnje uplate vrijednosti $1, 2, 3, \ldots$ redom počevši od pokraja prve godine.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $(Ia)_{\overline{\infty}|}$.

$$(Ia)_{\overline{\infty}|} = v + 2v^2 + 3v^3 + 4v^4 + \ldots = \frac{v}{(1-v)^2} = \frac{1-d}{d^2}$$

Rastući perpetuiteti

Dokazi jednakosti sa prethodnog slajda?!

Rastući perpetuiteti sa m godišnjih uplata, koji rastu q puta godiňje: SAMI.

Neprekidni rastući perpetuiteti: SAMI.

Anticipativni annuitet (annuity due)

- n godišnjih uplate vrijednosti 1 počev od početka prve godine.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $\ddot{a}_{\overline{n}|}$:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1} = \ddot{a}_{\overline{\infty}|} - v^n \ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1 - v^n}{d}$$

Dekurzivni annuitet (immediate annuity)

- n godišnjih uplate vrijednosti 1 počev od kraja prve godine.
- Sadašnja vrijednost se označava sa $a_{\overline{n}|}$:

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + v^3 + \ldots + v^n = \frac{1 - v^n}{i}$$

Anuiteti sa više godišnjih uplata

- Analogno perpetuitetima se definišu anuiteti sa m jednakih uplata m puta godišnje.
- Sadašnje vrijednosti se označavaju sa: $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}$ i $a^{(m)}_{\overline{n}|}$.

Rastući i opadajući anuiteti

- Prirodno se definišu i rastući anuiteti (analogno rastućim perpetuitetima)
- Za sadašnje vrijednosti se koriste oznake: $(I\ddot{a})_{\overline{n}|}$ i $(Ia)_{\overline{n}|}$.
- Razmatraju se i opadajući anuiteti sa uplatama $n, n-1, \ldots, 1$
- Za sadašnje vrijednosti se koriste oznake: $(D\ddot{a})_{\overline{n}|}$ i $(Da)_{\overline{n}|}$.

Ukupna vrijednost anuiteta

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{d} \text{ i } s_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{(1+i)^n - 1}{d^{(m)}} \text{ i } s_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{(1+i)^n - 1}{i^{(m)}}$$

$$(I\ddot{s})_{\overline{n}|}, \quad (Is)_{\overline{n}|}, \quad (D\ddot{s})_{\overline{n}|}, \quad (Ds)_{\overline{n}|}, \ \ldots$$