Aktuarska matematika

PMF, Podgorica

Zimski semestar 2019-20

Druga nedjelja

Uvodni pojmovi

(x) – Život starosti x (godina)

$T = T(x) = T_x$

- T je buduće trajanje života (x)
- T je slučajna veličina
- $T + x$ – starost u trenutku smrti
- $G(t) = P(T \leq t)$, $t \geq 0$ raspodjela
- Pretpostavke:
  - G je neprekidna funkcija
  - G ima gustinu
  - $g(t)dt \approx P(t < T < t + dt)$

Osnovne oznake

$${}_tq_x := G(t) = P(T \leq t)$$

Vjerovatnoća da će lice starosti x godina umrijeti u narednih t godina.

- Ako je $t = 1$ koristimo oznaku: ${}_1p_x = p_x$

$${}_tp_x := 1 - G(t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - {}_tq_x$$

Vjerovatnoća da će lice starosti x doživjeti narednih t godina.

- Ako je $t = 1$ koristimo oznaku: ${}_1q_x = q_x$

$${}_{s|t}q_x := P(s < T < s + t) = G(s + t) - G(s) = {}_{s+t}q_x - {}_tq_x$$

Vjerovatnoća da će lice starosti x doživjeti narednih s godina, a zatim umrijeti u sljedećih t godina.

Osnovne oznake

$$_tq_x = G(t), \qquad _tp_x := 1 - G(t)$$

$$_tq_{x+s} := P(T < t + s | T > s)$$

Uslovna vjerovatnoća da će lice starosti x godina koje je doživjelo narednih s godina, umrijeti u t godina nakon toga.

$$_tp_{x+s} := P(T < t + s | T > s)$$

Uslovna vjerovatnoća da će lice starosti x godina koje je doživjelo narednih s godina, doživjeti i t godina nakon toga.

Da je T starost lica u trenutku smrti, onda bi bilo:

- ${}_tq_x := P(T < t + x | T > x)$
- ${}_tp_x := P(T > t + x | T > x)$
- Komplikovanje osnovnih pojmova...?

Neke jednakosti

${}_{s+t}p_x = {}_s p_x \cdot {}_t p_{x+s}$

Dokaz?

${}_{s|t}q_x = {}_s p_x \cdot {}_t q_{x+s}$

Dokaz?

Očekivano trajanje života

$\mathring{e}_x = E[T]$

$$
\begin{aligned}
\mathring{e}_x &= E[T] \\
&= \int_0^{+\infty} tg(t)\,dt \\
&= \int_0^{+\infty} (1 - G(t))\,dt \\
&= \int_0^{+\infty} {}_t p_x\,dt
\end{aligned}
$$

Dokaz treće jednakosti?

Intenzitet smrtnosti

Motivacija

$${}_tq_{x+s} := P(T < t+s | T > s) = P(s < T < t+s | T > s)$$

Na intervalu Δt

$$\begin{aligned}
{}_{\Delta t}q_{x+t} &= P(t < T < t+\Delta t | T > t) \\
&= \frac{G(t+\Delta t) - G(t)}{1 - G(t)} \\
&= \frac{G(t+\Delta t) - G(t)}{\Delta t} \cdot \frac{1}{1 - G(t)} \cdot \Delta t
\end{aligned}$$

Aproksimacija (za "malo" Δt)

$${}_{\Delta t}q_{x+t} \approx \frac{G'(t)}{1 - G(t)} \cdot \Delta t = \frac{g(t)}{1 - G(t)} \cdot \Delta t$$

Intenzitet smrtnosti

Definicija

$\mu_{x+t} := \frac{g(t)}{1-G(t)}$

$$\begin{aligned}\mu_{x+t} &= \frac{g(t)}{1-G(t)} = -\frac{(1-G(t))'}{1-G(t)} \\ &= -\Big(\ln(1-G(t))\Big)' = -\Big(\ln({}_tp_x)\Big)'_t\end{aligned}$$

Reprezentacija ${}_tp_x$ preko μ_{x+t}

$$ {}_tp_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}\,ds\right)$$

Intenzitet smrtnosti

Veza sa prethodnim pojmovima

$\mu_{x+t} := \frac{g(t)}{1-G(t)}$

Gustina g:

$$g(t) = \mu_{x+t} \cdot (1 - G(t)) = {}_tp_x \mu_{x+t}$$

Očekivano trajanje života $\mathring{e}_x$

$$\mathring{e}_x = \int_0^{+\infty} t g(t)\, dt = \int_0^{+\infty} t\, {}_tp_x \mu_{x+t}\, dt$$

Ranije smo dokazali: $\mathring{e}_x = \int_0^{+\infty} {}_tp_x\, dt$.
Da li je onda: $t\, {}_tp_x \mu_{x+t} = {}_tp_x \ldots$?

Analitički izraz za distribuciju od T

- Realnost pretpostavke?

Cjelobrojno trajanje života K

Oznaka: $K := [T]$

$$P(K = k) = P(k \leq T < k + 1) = {}_k p_x \cdot q_{x+k}$$

Očekivano cjelobrojno trajanje života

$$e_x := \sum_{k=1}^{\infty} P(K \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x$$

- Lakše računanje
- Dovoljna je distribucija s.v. K
- Korisna aproksimacija: $\mathring{e}_x \approx e_x + 1/2$

$T = K + S$

Dio godine smrti do smrti:

$S := T - K$

Pretpostavka

Slučajne veličine S i K su nezavisne.

Posljedica pretpostavke

Postoji funkcija H takva da je ${}_u q_{x+k} = H(u) q_{x+k}$, $u \in [0, 1)$.

- Dokaz?
  (Posmatrati $P(S \leq u | K = k)$ i koristiti nezavisnost S i K)

Ako je $S \sim \mathcal{U}([0, 1))$ onda je:

- $H(u) = u$
- $E[S] = 1/2$
- $\mathring{e}_x = e_x + 1/2$

Diskretna verzija promjenljive S

$$S^{(m)} := \frac{1}{m}[mS + 1]$$

- Diskretizacija promjenljive S
- Korisno u praksi
- Nezavisnost K i S povlači nezavisnost K i $S^{(m)}$
- Ako je $S \sim \mathcal{U}([0,1))$ onda je $S^{(m)} \sim \mathcal{U}(\{\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, 1\})$

Tehničke pretpostavke iz prakse

Ako su poznate vrijednosti p_{x+n} za $k \in \mathbb{N}_0$ onda ${}_k p_x$ možemo računati:

$$ {}_k p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+k-1} $$

Pretpostavka 1: Linearnost ${}_u q_x$ za $u \in [0, 1)$

$$ {}_u q_x = u \cdot q_x $$

- Posljedica: $\mu_{x+u} = \dfrac{q_x}{1 - u q_x}$

Pretpostavka 2: Konstantno μ_{x+u} za $u \in [0, 1)$

Oznaka: $\mu_{x+\frac{1}{2}}$

$$ \mu_{x+\frac{1}{2}} = -\ln p_x; \qquad {}_u p_x = (p_x)^u. $$