Aktuarska matematika

PMF, Podgorica

Zimski semestar 2019-20

Treća nedjelja

Očekivanje i cijena

Očekivana dobit

- X – s.v. koja opisuje vrijednost nekog ugovora/igre
- $E[X]$ – je "prosječni dobitak"
- Primjer: $P(X=2)=P(X=0)=0.5$, $E[X]=1$
- $E[X]$ – je fer cijena ugovora (fair price)
  - Cijena manja od $E[X]$ je povoljna za kupca
  - Cijena veća od $E[X]$ je nepovoljna je nepovoljna za kupca
- Prosječna dobit je $E[X-E[X]]=0$
- Problemi? Paradoksi?
- Bezrizična procjena; cijena rizika
- St. Petersburg paradox
- Funkcije korisnosti (utility functions) – $E[u(X)]$

Očekivanje i cijena

Očekivana sadašnja vrijednost

Ako se X realizuje u budućnosti (npr. za godinu dana) onda je fair cijena danas $E[vX]$

Neto jednokratna premija, miza

- Novčana svota koju osiguranik plaća za ugovor o osiguranju je *premija*
- U praksi se premija često plaća (više puta) godišnje
- *Jednokratna premija* se plaća jednom u trenutku sklapanja ugovora
- *Neto jednokratna premija (ili miza)* je fer cijena ugovora.
  - Ugovor o osiguranju je slučajna veličina
  - Očekivana sadašnja vrijednost ugovora je miza
  - Interpretacija?

Jednostavni tipovi osiguranja

Tipovi osiguranja

- Osiguranje života
  (Osiguranje kapitala za slučaj smrti)
- Osiguranje života na n godina
  (Privremeno osiguranje kapitala za slučaj smrti)
- Osiguranje doživljenja
  (Osiguranje kapitala za slučaj doživljenja)
- Mješovito osiguranje
- Odloženo osiguranje
- ...

Pretpostavka konstantne kamatne stope

- Kamatna stopa $i = const.$
- Faktor diskontovanja $v = \frac{1}{1+i}$
- Očekivana sadašnja vrijednost

Oznake

Međunarodne aktuarske oznake

$$A_x, \quad A^{1}_{x:\overline{n}|}, \quad A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}, \ldots$$

Oznake za potrebe kursa

$$Z^q_\infty, \quad Z^q_n, \quad Z^p_n, \quad Z_n, \ldots$$

Neograničeno osiguranje života

Vrijednost 1 se isplaćuje na kraju godine smrti

$$Z^q_\infty = v^{K+1} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \mathbb{1}_{K=k}$$

Neto jednokratna premija, miza

$$\begin{aligned} A_x := E[Z^q_\infty] &= E[v^{K+1}] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} P(K=k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x \, q_{x+k} \end{aligned}$$

Osiguranje života

Disperzija

$$Var[Z_{\infty}^{q}] = E\left[(Z_{\infty}^{q})^2\right] - E[Z_{\infty}^{q}]^2$$

''Računski ekvivalentno'' sa A_x:

$$E\left[(Z_{\infty}^{q})^2\right] = E\left[(v^{K+1})^2\right] == E\left[(v^2)^{K+1}\right]$$

Intermezzo/podsjetnik

$X_1, X_2, \ldots$ niz slučajnih veličina

Kada je $E\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n]$ **?**

Intermezzo/podsjetnik

$X_1, X_2, \ldots$ niz slučajnih veličina

Kada je $E\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n]$ **?**

- Fubini?
- $S_n = X_1 + \ldots + X_n$
- $S_n \to S$ (pointwise)
- Teorema o monotonoj konvergenciji
  - S_n monotono neopadajući niz (pointwise)
- Teorema o dominantnoj konvergenciji
  - Postoji apsolutno integrabilna s.v. S' tako da je : $|S_n| < S'$

Osiguranje života na n godina

Term insurance of duration n

Vrijednost 1 se isplaćuje na kraju godine smrti
ako se smrt dogodi u prvih n godina

$$Z_n^q = \begin{cases} v^{K+1}, & K < n \\ 0, & K \geq n \end{cases} = \sum_{k=0}^{n} v^{k+1} \mathbb{1}_{K=k}$$

Neto jednokratna premija, miza

$$\begin{aligned} A^1_{x:\overline{n}|} &:= E[Z_n^q] \\ &= \sum_{k=0}^{n} v^{k+1} P(K = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} v^{k+1} {}_k p_x \, q_{x+k} \end{aligned}$$

Osiguranje života na n godina (ograničeno osiguranje)

Disperzija

$$Var[Z_n^q] = E\left[(Z_n^q)^2\right] - E[Z_n^q]^2$$

"Računski ekvivalentno" sa A_x zbog:

$$(Z_n^q)^2 = \begin{cases} (v^{K+1})^2, & K < n \\ 0, & K \geq n \end{cases}$$
$$= \begin{cases} (v^2)^{K+1}, & K < n \\ 0, & K \geq n \end{cases}$$

Osiguranje doživljenja (na n godina)

Pure endowment

Vrijednost 1 se isplaćuje na kraju n godina
ako je osiguranik živ u tom trenutku

$$Z_n^p = \begin{cases} 0, & K < n \\ v^n, & K \geq n \end{cases} = \sum_{k=n}^{\infty} v^n \mathbb{1}_{K=k} = v^n \mathbb{1}_{K \geq n}$$

Neto jednokratna premija, miza

$$\begin{aligned} A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} := {} & E[Z_n^p] \\ = {} & E[v^n \mathbb{1}_{K \geq n}] \\ = {} & v^n P(K \geq n) \\ = {} & v^n {}_n p_x \end{aligned}$$

Osiguranje doživljenja (na n godina)

Disperzija

$$Var[Z_n^p] = E\left[(Z_n^p)^2\right] - E[Z_n^p]^2$$

- $Z_n^p = v^n \mathbb{1}_{K \geq n}$,
- $\mathbb{1}_{K \geq n} \sim \mathcal{B}({}_n p_x)$

$$\begin{aligned} Var[Z_n^p] &= (v^n)^2 Var[\mathbb{1}_{K \geq n}] \\ &= v^{2n} {}_n p_x (1 - {}_n p_x) \\ &= v^{2n} {}_n p_x {}_n q_x \end{aligned}$$

Mješovito osiguranje (na n godina)

Endowment

Vrijednost 1 se isplaćuje na kraju godine smrti
ako osiguranik umre u toku prvih n godina;
u protivnom na kraju n-te godine.

$$\begin{aligned} Z_n &= \begin{cases} v^{K+1}, & K < n \\ v^n, & K \geq n \end{cases} \\ &= Z_n^q + Z_n^p \end{aligned}$$

Neto jednokratna premija, miza

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}|} :&= E[Z_n] = E[Z_n^q + Z_n^p] \\ &= A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \end{aligned}$$

Mješovito osiguranje (na n godina)

Disperzija

$$Var[Z] = E\left[(Z_n^q)^2\right] + E\left[(Z_n^p)^2\right] + 2Cov[Z_n^q Z_n^p]$$

- $Cov[Z_n^q Z_n^p] = E[Z_n^q Z_n^p] - E[Z_n^q]E[Z_n^p]$
- $Z_n^q Z_n^p = 0$ Zašto?
- $Cov[Z_n^q Z_n^p] = -A^1_{x:\overline{n}|} A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$

$$Var[Z] = E\left[(Z_n^q)^2\right] + E\left[(Z_n^p)^2\right] - 2A^1_{x:\overline{n}|} A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

Odloženo osiguranje života (za m godina)

Vrijednost 1 se isplaćuje na kraju godine smrti
samo ako osiguranik ne umre u toku prvih m godina.

$$Z^q_{m,\infty} = \begin{cases} 0, & K < m \\ v^{K+1}, & K \geq m \end{cases} = \sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1} \mathbb{1}_{K=k}$$

Neto jednokratna premija, miza

$$\begin{aligned} {}_{m|}A_x := & \; E[Z^q_{m,\infty}] \\ = & \sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1} P(K = k) \\ = & \sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x \, q_{x+k} \end{aligned}$$

A_{x+m}

$Z_{\infty}^{q} = v^{K+1}$

Po uzoru na ${}_t p_{x+m}$ i ${}_t q_{x+m}$ definišemo:

$$A_{x+m} = E[Z_{\infty}^{q} \mid K \geq m]$$

Očekivanje uslovljeno događajem?

Izlet u uslovna očekivanja i vjerovatnoće

- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – vjerovatnostni prostor

- $C \in \mathcal{A}$ događaj, $P(C) \neq 0$
- $A \in \mathcal{A}$ događaj
- Uslovna vjerovatnoća: $P(A \mid C) = \dfrac{P(A \cap C)}{P(C)}$

- Ako je $A \cap C = \emptyset$ onda je $P(A \mid C) = 0$

- $P_{|C} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ – uslovna mjera: $P_{|C}(A) = P(A \mid C)$

- $P_{|C}$ je vjerovatnosna mjera

Izlet u uslovna očekivanja i vjerovatnoće

- X – s.v.
- $E[X] = \int X\, dP$
- $E[X \mid C] = \int X\, dP_{|C} = \int_C X\, dP_{|C}$
- Ako je $A \subset C$ i $X = \mathbb{1}_A$ onda je:

$$\begin{aligned} E[\mathbb{1}_A \mid C] &= \int_C \mathbb{1}_A\, dP_{|C} \\ &= \int_A dP_{|C} = P(A \mid C) = \frac{P(A)}{P(C)} = \frac{E[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_C]}{P(C)} \end{aligned}$$

Izlet u uslovna očekivanja i vjerovatnoće

- Ako je $X = \mathbb{1}_A$ ond je$E[X \mid C] = \dfrac{E[X\mathbb{1}_C]}{P(C)}$
- Ako je $X \neq \mathbb{1}_A$ možemo aproksimirati $X = \sum x_i \mathbb{1}_{A_i}$
- Svakako važi $E[X \mid C] = \dfrac{E[X\mathbb{1}_C]}{P(C)}$

Izlet u uslovna očekivanja i vjerovatnoće

Konstruktivna definicija

- $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ – pod-σ-algebra
- $E[X \mid \mathcal{B}]$ je s.v. i to:
  - $\mathcal{B}$ mjerljiva s.v.
  - $\int_B E[X \mid \mathcal{B}]\, dP = \int_B X\, dP$ za svako $B \in \mathcal{B}$

Slučajno očekivanje u odnosu na s.v.

- Y – s.v.
- $\sigma(Y)$ – σ-algebra generisana s.v. Y (originali skupova)
- $E[X \mid Y] := E[X \mid \sigma(Y)]$

- Značenje uslovnog očekivanja?
- Kakve veze ima sa uslovnom vjerovatnoćom?
- Kakve veze ima sa očekivanjem uslovljenim događajem?

Izlet u uslovna očekivanja i vjerovatnoće

- I dalje je:
  - $C \in \mathcal{A}$ događaj, $P(C) \neq 0$
  - $A \in \mathcal{A}$ događaj

- Neka je $Y = \mathbb{1}_C$
  - $\sigma(\mathbb{1}_C) = \{\emptyset, C, C^C, \Omega\}$

- $E[X \mid \mathbb{1}_C)]$ je $\sigma(\mathbb{1}_C)$-mjerljivo
  - $E[X \mid \mathbb{1}_C]$ je konstantno na C i C^C:

$$E[X \mid \mathbb{1}_C](\omega) = c_1,\ \omega \in C, \qquad E[X \mid \mathbb{1}_C](\omega) = c_2,\ \omega \in C^C$$

Dakle: $E[X \mid \mathbb{1}_C] = c_1 \mathbb{1}_C + c_2 \mathbb{1}_{C^C}$

Zašto? $\quad c1 = ? \quad\quad c2 = ?$

Izlet u uslovna očekivanja i vjerovatnoće

$c1 = ?$ $c2 = ?$

Koristeći jednakost: $E[X \mid \mathbb{1}_C] = c_1 \mathbb{1}_C + c_2 \mathbb{1}_{C^C}$

$$\int_C E[X \mid \mathbb{1}_C] \, dP = c_1 \int_C dP = c_1 P(C)$$

Koristeći definiciju uslovnog očekivanja

$$\int_C E[X \mid \mathbb{1}_C] \, dP = \int_C X \, dP$$

Izlet u uslovna očekivanja i vjerovatnoće

Kombinujući prethodne jednakosti

$$c_1 = \frac{1}{P(C)} \int_C X \, dP = E[X \mid C]$$

Slično:

$$c_2 = E[X \mid C^C]$$

Zaključak:

$$E[X \mid \mathbb{1}_C] = E[X \mid C]\mathbb{1}_C + E[X \mid C^C]\mathbb{1}_{C^c}$$

Izlet u uslovna očekivanja i vjerovatnoće

$E[\mathbb{1}_A \mid \mathbb{1}_C]$

Na osnovu prethodnog slajda:

$$\begin{aligned} E[\mathbb{1}_A \mid \mathbb{1}_C] &= E[\mathbb{1}_A \mid C]\mathbb{1}_C + E[\mathbb{1}_A \mid C^C]\mathbb{1}_{C^C} \\ &= P(A \mid C)\mathbb{1}_C + P(A \mid C^C)\mathbb{1}_{C^C} \end{aligned}$$

Kraj izleta.

Odloženo osiguranje života (za m godina)

- $Z^q_{m,\infty} = \sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1}\mathbb{1}_{K=k} = \begin{cases} 0, & K < m \\ v^{K+1}, & K \geq m \end{cases}$
- $Z^q_{\infty} = v^{K+1} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\mathbb{1}_{K=k}$
- ${}_{m|}A_x = E[Z^q_{m,\infty}] = \sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1}\, {}_kp_x\, q_{x+k}$
- $P(K = k \mid K \geq m) = \frac{{}_kp_x q_{x+k}}{{}_mp_x}$ Zašto?

Veza ${}_{m|}A_x$ i A_{x+m}

$$A_{x+m} = E[Z^q_{\infty} \mid K \geq m] = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\mathbb{1}_{K=k} \mid K \geq m\right]$$

$$= \sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1} E\left[\mathbb{1}_{K=k} \mid K \geq m\right] = \sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1} P(K = k \mid K \geq m)$$

$$= \frac{1}{{}_mp_x} \sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1}\, {}_kp_x\, q_{x+k} = \frac{1}{{}_mp_x}\, {}_{m|}A_x$$

Rekurzivne formule

$$A_x = v q_x + v A_{x+1} p_x$$

$$\begin{aligned} A_x &= E[v^{K+1}] \\ &= E[\mathbb{1}_{K=0} v^{K+1} + \mathbb{1}_{K>0} v^{K+1}] \\ &= vE[\mathbb{1}_{K=0}] + vE[v^K \mathbb{1}_{K>0}] \\ &= vP(K=0) + vE[v^K | K \leq 1] P(K>0) \\ &= v q_x + v A_{x+1} p_x \end{aligned}$$

Rekurzivne formule

Interpretacije

$A_x = v q_x + v A_{x+1} p_x$

Očekivana vrijednost zbir sadašnjih vrijednosti

- Štete u slučaju smrti u prvoj godini
- Novog ugovora u slučaju doživljenja sljedeće godine

Rekurzivne formule

Interpretacije

$$A_x = vA_{x+1} + v(1 - A_{x+1})q_x$$

Zbir sadašnjih vrijednosti

- Novog ugovora sljedeće godine
- Očekivane doplate za štetu u slučaju smrti u prvoj godini

O drugom sabirku: očekivana doplata kao osiguranje života

$v(1 - A_{x+1})q_x$ – sadašnja vrijednost novog ugovora

- Osiguranje života na 1 godinu ($n = 1$)
- $vq_x = E[Z_1^q] = A^{1}_{x:\overline{1|}}$
- Osigurana suma je $1 - A_{x+1}$ (a ne 1 kao do sada)

Rekurzivne formule

Interpretacije

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k v(1 - A_{x+k+1}) q_{x+k}$$

- $A_x - vA_{x+1} = v(1 - A_{x+1}) q_x$ (prethodni slajd!)
- $A_{x+1} - vA_{x+2} = v(1 - A_{x+2}) q_{x+1}$
- ...
- $A_{x+k} - vA_{x+k+1} = v(1 - A_{x+k+1}) q_{x+k}$ ...

- Sumiranje jednakosti nakon množenja sa v^k!

Interpretacija: "zbir diskontovanih jednogodišnjih osiguranja"

- $v(1 - A_{x+k+1}) q_{x+k}$ – jednogodišnji ugovor (kao u prehodnom slajdu)
- A_x – neto premija osiguranja života
- $\sum_{k=0}^{\infty} v^k v(1 - A_{x+k+1}) q_{x+k}$ – zbir diskontovanih neto premija jednogodišnjih osiguranja

Rekurzivne formule
Interpretacije

$$dA_{x+1} = (A_{x+1} - A_x) + v(1 - A_{x+1})q_x$$

Interpretacija?

- $v(1 - A_{x+1})q_x$ – fiktivni jednogodišnji ugovor
- dA_{x+1} – zarada od kamate. Zašto/kako?
- $A_{x+1} - A_x$ – povećanje cijene ugovora?