Aktuarska matematika

PMF, Podgorica

Zimski semestar 2019-20

Četvrta nedjelja

Opšti tipovi osiguranja

- c_{k+1} – šteta u slučaju smrti u toku k-te godine
- $Z = c_{K+1} v^{K+1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{K+1} v^{k+1} \mathbb{1}_{K=k}$

$$E[Z] = E[c_{K+1} v^{K+1}] = \sum_{k=0}^{\infty} c_{K+1} v^{k+1} {}_k p_x \, q_{x+k}$$

Opšti tipovi osiguranja

$c_0 = 0$

Veza sa odloženim osiguranjem

$$E[Z] = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k - c_{k-1})\, {}_{k|}A_x$$

Veza sa ograničenim osiguranjem

Ako osiguranje traje n godina ($c_k = 0,\ k > n$):

$$E[Z] = c_n A^1_{x:\overline{n}|} + (c_{n-1} - c_n) A^1_{x:\overline{n-1}|} + \ldots + (c_1 - c_2) A^1_{x:\overline{1}|}$$

Interpretacije? Dokazi?

Opšti tipovi osiguranja

Veza sa odloženim osiguranjem

$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ – data suma; $x_0 = y_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
y_k &= y_k - y_{k-1} + y_{k-1} - \ldots - y_1 + y_1 - b_0 \\
y_k &= \sum_{i=1}^{k} (y_i - y_{i-1}) \\
\sum_{k=1}^{n} x_k y_k &= \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}) \sum_{i=k}^{n} x_i
\end{aligned}
$$

Zašto?

Opšti tipovi osiguranja

Veza sa odloženim osiguranjem

$$
\begin{array}{c|lllll}
x_1 & y_1 - y_0 & & & & \\
x_2 & y_1 - y_0 & y_2 - y_1 & & & \\
x_3 & y_1 - y_0 & y_2 - y_1 & y_3 - y_2 & & \\
\dots & \dots & & & & \\
x_n & y_1 - y_0 & y_2 - y_1 & y_2 - y_1 & \dots & y_n - y_{n-1}
\end{array}
$$

$$
y_k - y_{k-1} \qquad \longrightarrow \qquad \sum_{i=k}^{n} x_i
$$

Opšti tipovi osiguranja

Veza sa odloženim osiguranjem

- Pretpostavimo $x_k \geq 0$, $y_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, y_k ograničen niz
- $S = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \leq +\infty$
- $X = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \leq +\infty$
- $X_n = \sum_{k=n}^{\infty} x_k = X - \sum_{k=1}^{n-1} x_k$
  - Jer je $X_n = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{k=n}^{N} x_k = \lim\limits_{N\to\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{N} x_k - \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k \right)$

$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} (X - \sum_{k=n}^{\infty} x_k) = X - X = 0$$

Opšti tipovi osiguranja

Veza sa odloženim osiguranjem

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (y_k - y_{k-1}) \sum_{i=k}^{\infty} x_i$$

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}) \sum_{i=k}^{n} x_i \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1})(X_k - X_{n-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} ((y_k - y_{k-1})X_k - (y_k - y_{k-1})X_{n-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1})X_k = \sum_{k=1}^{\infty} (y_k - y_{k-1}) \sum_{i=k}^{\infty} x_i
\end{aligned}$$

Opšti tipovi osiguranja
Veza sa odloženim osiguranjem

Iskoristili smo:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(y_k - y_{k-1})X_{n-1} = \lim_{n\to\infty} X_{n-1}\sum_{k=1}^{n}(y_k - y_{k-1})$$
$$= \lim_{n\to\infty} X_{n-1}y_n = 0$$

Posljednja jednakost?

$E[Z] = \sum_{k=1}^{\infty}(c_k - c_{k-1})_{k|}A_x$

Primjena prethodnih razmatranja o sumiranju!

Standardno rastuće osiguranje

Neograničeno standardno rastuće osiguranje

Vrijednost k se isplaćuje na kraju k-te godine ako osiguranik umre u toku te godine.

- $c_k = k$
- $(K+1)v^{K+1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^{k+1}\mathbb{1}_{K=k}$ - sadašnja vrijednost
- $(IA)_x = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^{k+1}{}_kp_x\,q_{x+k}$ – jednokrata neto premija
- $(IA)_x = \sum_{k=0}^{\infty}{}_{k|}A_x$

Standardno rastuće osiguranje

Ograničeno standardno rastuće osiguranje

Vrijednost k se isplaćuje na kraju k-te godine ako osiguranik umre u toku te godine, $k \leq n$.

- $c_k = k$
- $(K+1)v^{K+1}\mathbb{1}_{K \leq n} = \sum_{k=1}^{n}(k+1)v^{k+1}\mathbb{1}_{K=k}$ - sadašnja vrijednost
- $(IA)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)v^{k+1}{}_kp_x q_{x+k}$ – jednokrata neto premija
- $(IA)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k|}A_x - n_{n|}A_x$
- $(IA)^1_{x:\overline{n}|} = nA^1_{x:\overline{n}|} - A^1_{x:\overline{n-1}|} - A^1_{x:\overline{n-2}|} - \ldots - A^1_{x:\overline{1}|}$

Standardno opadajuće osiguranje

Vrijednost $n-k+1$ se isplaćuje na kraju k-te godine ako osiguranik umre u toku te godine, $k \leq n$.

- $c_k = n-k+1$
- $(n-K)v^{K+1}\mathbb{1}_{K\leq n} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)v^{k+1}\mathbb{1}_{K=k}$ - sadašnja vrijednost
- $(Da)^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)v^{k+1}{}_k p_x q_{x+k}$ – jednokrata neto premija
- $(Da)^{1}_{x:\overline{n}|} = nA^{1}_{x:\overline{n}|} + A^{1}_{x:\overline{n-1}|} + A^{1}_{x:\overline{n-2}|} + \ldots + A^{1}_{x:\overline{1}|}$

Rastuća i opadajuća osiguranja

Rastuća osiguranja

Svako rastuće osiguranje čije štete formiraju aritmetički niz se može predstaviti kao (afina) transformacija standardnog rastućeg osiguranja.

Opadajuća osiguranja

Svako opadajuće osiguranje čije štete formiraju aritmetički niz se može predstaviti kao (afina) transformacija standardnog rastućeg osiguranja.