Aktuarska matematika

PMF, Podgorica

Zimski semestar 2019-20

Peta nedjelja

Osiguranja sa isplatom štete u trenutku smrti

Neograničeno osiguranje života

Vrijednost 1 se isplaćuje u trenutku smrti.

Sadašnja vrijednost:

$$\overline{Z}^{q}_{\infty} = v^T$$

Neto jednokratna premija

$$\begin{aligned}\bar{A}_x := E[\overline{Z}^{q}_{\infty}] &= E[v^T] \\ &= \int_0^{\infty} v^t g(t)\, dt \\ &= \int_0^{\infty} v^t\, {}_tp_x \mu_{x+t}\, dt\end{aligned}$$

- $T = K + S = K + 1 + S - 1$
- K i S nezavisne
- $S \sim \mathcal{U}([0,1])$

$1 - S \sim \mathcal{U}([0,1])$:

$$P(1 - S \leq s) = P(S \geq 1 - s) = 1 - P(S \leq 1 - s) = s$$

Osiguranja sa isplatom štete u trenutku smrti

Veza $\bar{A}_x$ i A_x

$\delta = \ln(1+i)$

$E[v^{S-1}]$

$$E[v^{S-1}] = E[(1+i)^{1-S}] = \int_0^1 (1+i)^s \, ds$$
$$= \left. \frac{(1+i)^s}{\ln(1+i)} \right|_0^1 = \frac{i}{\delta}$$

$E[v^T]$

$$E[v^T] = E[v^{K+1+S-1}] = E[v^{K+1}]E[v^{S-1}] = \frac{i}{\delta} A_x$$

Osiguranja sa isplatom štete u trenutku smrti

Ograničeno osiguranje života

Vrijednost 1 se isplaćuje u trenutku smrti, ukoliko se smrt desi u prvih n godina, $n \in \mathbb{N}$.

Sadašnja vrijednost:

$$\overline{Z}_n^q = v^T \mathbb{1}_{T \leq n}$$

Neto jednokratna premija

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} := E[\overline{Z}_n^q] = E[v^T \mathbb{1}_{T \leq n}] = \int_0^n v^t {}_t p_x \mu_{x+t} \, dt$$

Osiguranja sa isplatom štete u trenutku smrti

Veza $\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$ i $A^1_{x:\overline{n}|}$

$$A^1_{x:\overline{n}|} = E[v^{K+1}\mathbb{1}_{K<n}]$$

$$\begin{aligned}
\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} &= E[v^{T}\mathbb{1}_{T\leq n}] \\
&= E[v^{K+1+S-1}\mathbb{T} \leq] \\
&= E[v^{K+1}\mathbb{1}_{K<n}v^{S-1}] \\
&= E[v^{K+1}\mathbb{1}_{K<n}]E[v^{S-1}] \\
&= A^1_{x:\overline{n}|} \cdot \frac{i}{\delta}
\end{aligned}$$

Mješovito osiguranje života

Za dato $n \in \mathbb{N}$, vrijednost 1 se isplaćuje:

- u trenutku smrti, ukoliko se smrt desi u prvih n godina
- u trenutku n, ukoliko je osiguranik doživio n godina

Sadašnja vrijednost:

$$\overline{Z}_n = v^T \mathbb{1}_{T \leq n} + v^n \mathbb{1}_{T > n}$$

Neto jednokratna premija

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{x:\overline{n}|} &:= E[\overline{Z}_n] \\
&= E[v^T \mathbb{1}_{T \le n} + v^n \mathbb{1}_{T > n}] \\
&= \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \\
&= \frac{i}{\delta} A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \\
&= A_{x:\overline{n}|} + \left(\frac{i}{\delta} - 1\right) \bar{A}^1_{x:\overline{n}|}
\end{aligned}$$

Posljednja jednakost?

Osiguranja sa isplatom štete u trenutku smrti

Optšte osiguranje

Neograničeno opšte osiguranje

Vrijednost $c(t)$ se isplaćuje ako smrt nastupi u trenutku $t \in \mathbb{R}^+$.

Sadašnja vrijednost:

$$c(T)v^T$$

Jednokratna neto premija

$$E[c(T)v^T] = \int_0^\infty v^t c(t) {}_t p_x \mu_{x+t} \, dt$$

Optšte osiguranje sa isplatom štete na kraju godine smrti

- c_k – šteta u slučaju smrti u toku k-te godine
- $c_{K+1}v^{K+1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{K+1}v^{k+1}\mathbb{1}_{K=k}$ – sadašnja vrijednost
- $E[c_{K+1}v^{K+1}] = \sum_{k=0}^{\infty} c_{K+1}v^{k+1}{}_kp_x q_{x+k}$ – jednokratna neto premija

Da li postoji osiguranje sa isplatom štete na kraju godine smrti čija je jednokratna neto premija jednaka $E[c(T)v^T]$?

Osiguranja sa isplatom štete u trenutku smrti

Veza sa optštim osiguranjem sa isplatom štete na kraju godine smrti

$$c_{k+1} = E[c(k+S)v^{S-1} \mid K = k]$$

$$\begin{aligned} E[c(T)v^T] &= \sum_{k=0}^{\infty} E[c(T)v^T \mid K = k]P(K = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E[c(k+S)v^{k+S} \mid K = k]_k p_x q_{x+k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} E[c(k+S)v^{S-1} \mid K = k]_k p_x q_{x+k} \end{aligned}$$

Ako su K i S nezavisni i $S \sim \mathcal{U}((0,1))$:

$$c_{k+1} = E[c(k+S)v^{S-1}] = \int_0^1 c(k+u)(1+i)^{1-u}\, du$$

Osiguranja sa isplatom štete u trenutku smrti

Ograničena osiguranja

- $c(t) = 0$ za $t > n$ za neko $n \in \mathbb{N}$
- $E[c(T)v^T] = \int_0^n v^t c(t) {}_t p_x \mu_{x+t} \, dt$
- Veza sa ograničenim optštim osiguranjem sa isplatom štete na kraju godine smrti

Osiguranja sa isplatom štete u trenutku smrti

Rastuća osiguranja

- $c(t) = 0$ za $t > n$ za neko $n \in \mathbb{N}$
- $E[c(T)v^T] = \int_0^n v^t c(t) {}_tp_x \mu_{x+t}\, dt$
- Veza sa ograničenim optštim osiguranjem sa isplatom štete na kraju godine smrti

Osiguranja sa isplatom štete u trenutku smrti

Rastuća osiguranja

Osigurana suma se povećava diskretno

$$c(t) = [t] + 1$$

Osigurana suma se povećava neprekidno

$$c(t) = t$$

Osiguranja sa isplatom štete u trenutku smrti

Rastuća osiguranja – diskretni rast

- $c(t) = [t] + 1$
- $(K+1)v^T$ – sadašnja vrijednost
- $(I\bar{A})_x := E[(K+1)v^T]$ – jednokratna neto premija
- $(I\bar{A})_x = E[(K+1)v^{K+1}]E[v^{S-1}] = \dfrac{i}{\delta}(IA)_x$
- Ograničeni slučaj
  - Analogno sa dosadašnjom teorijom
  - $(I\bar{A})^1_{x:\overline{n}|}$

Osiguranja sa isplatom štete u trenutku smrti

Rastuća osiguranja – neprekidni rast

- $c(t) = t$
- Tv^T – sadašnja vrijednost
- $(\bar{I}\bar{A})_x := E[Tv^T]$ – jednokratna neto premija
- Ograničeni slučaj
  - Analogno sa dosadašnjom teorijom
  - $(\bar{I}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|}$

Osiguranja sa isplatom štete u trenutku smrti

Rastuća osiguranja – neprekidni rast

Na osnovu opšteg osiguranja:

$(\bar{I}\bar{A})_x = E[c_{K+1} v^{K+1}]$

$$
\begin{aligned}
c_{k+1} &= E[c(k+S)v^{S-1} \mid K = k] \\
&= \int_0^1 c(k+u)(1+i)^{1-u}\, du \\
&= \int_0^1 (k+u)(1+i)^{1-u}\, du \\
&= k\frac{i}{\delta} + \frac{i-\delta}{\delta^2}
\end{aligned}
$$

Osiguranja sa isplatom štete u trenutku smrti

Rastuća osiguranja – neprekidni rast

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \tfrac{i}{\delta}(IA)_x - \tfrac{i}{\delta}A_x + \tfrac{i-\delta}{\delta^2}A_x$$

$$\begin{aligned}
(\bar{I}\bar{A})_x &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} v^{k+1} {}_k p_x \, q_{x+k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i}{\delta} k + \frac{i-\delta}{\delta^2} \right) v^{k+1} {}_k p_x \, q_{x+k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i}{\delta}(k+1) v^{k+1} - \frac{i}{\delta} v^{k+1} + \frac{i-\delta}{\delta^2} v^{k+1} \right) {}_k p_x \, q_{x+k} \\
&= \frac{i}{\delta}(IA)_x - \frac{i}{\delta} A_x + \frac{i-\delta}{\delta^2} A_x
\end{aligned}$$

Osiguranja sa isplatom štete u trenutku smrti

$$\bar{A}_{x+h} = E[v^T \mid T > h]$$

$$\begin{aligned}
\bar{A}_x &= E[v^T] \\
&= E[v^T \mid T \leq h] P(T \leq h) + E[v^T \mid T > h] P(T > h) \\
&= E[v^T \mid T \leq h] \cdot {}_h q_x + v^h \bar{A}_{x+h} \cdot {}_h p_x .
\end{aligned}$$

$$\bar{A}_{x+h} - \bar{A}_x = (1 - v^h {}_h p_x) \bar{A}_{x+h} - E[v^T \mid T \leq h] \cdot {}_h q_x$$

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{A}_{x+h} - \bar{A}_x}{h} &= \frac{1 - v^h {}_h p_x}{h} \bar{A}_{x+h} - E[v^T \mid T \leq h] \cdot \frac{{}_h q_x}{h} \\
\frac{d}{dx} \bar{A}_x &= (\delta + \mu_x) \bar{A}_x - \mu_x
\end{aligned}$$