2.17. Izvesti i grafički predstaviti algoritam za brzo računanje iz grupe 'Decimation in frequency' (razbijanje po frekvenciji) za diskretnu Hartley-evu transformaciju DHT, koja se definiše izrazom:

$$H(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\left(\cos\frac{2\pi nk}{N}+\sin\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

Uzeti da je $N=2^n$ i izvršiti razbijanje u dvije DHT po $N/2$ članova.

Rješenje:

Za $k=2r$ diskretna Hartley-eva transformacija se može napisati u obliku:

$$H(2r)=\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n)\left[\cos\frac{2\pi rn}{N/2}+\sin\frac{2\pi rn}{N/2}\right]+\sum_{n=N/2}^{N-1}x(n)\left[\cos\frac{2\pi rn}{N/2}+\sin\frac{2\pi rn}{N/2}\right]=$$
$$=\sum_{n=0}^{N/2-1}\left(x(n)+x(n+N/2)\right)\left[\cos\frac{2\pi rn}{N/2}+\sin\frac{2\pi rn}{N/2}\right]$$

Dakle $H(2r)$ se može zapisati kao:

$$H(2r)=\sum_{n=0}^{N/2-1}g(n)\left[\cos\frac{2\pi rn}{N/2}+\sin\frac{2\pi rn}{N/2}\right]$$

gdje je $g(n)$ dato kao:

$$g(n)=x(n)+x(n+N/2)$$

što je oblik DHT sa $N/2$ odbiraka. Za $k=2r+1$ imamo:

$$H(2r+1)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\left[\cos\frac{2\pi(2r+1)n}{N}+\sin\frac{2\pi(2r+1)n}{N}\right]$$

Primjenjujući osnovne adicione trigonometrijske formule dobijamo:

$$H(2r+1)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\left[\cos\frac{2\pi rn}{N/2}+\sin\frac{2\pi rn}{N/2}\right]\cos\frac{2\pi n}{N}+$$
$$+\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\left[\cos\frac{2\pi rn}{N/2}-\sin\frac{2\pi rn}{N/2}\right]\sin\frac{2\pi n}{N}$$

Posmatrajmo odvojeno ove dvije sume i izvršimo njihovo razbijanje na dvije podsume. Označimo prvu sumu sa S_1 a drugu sa S_2.

$$S_1=\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n)\left[\cos\frac{2\pi rn}{N/2}+\sin\frac{2\pi rn}{N/2}\right]\cos\frac{2\pi n}{N}+$$
$$+\sum_{n=N/2}^{N-1}x(n)\left[\cos\frac{2\pi rn}{N/2}+\sin\frac{2\pi rn}{N/2}\right]\cos\frac{2\pi n}{N}$$

$$S_1 = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n)\left[\cos\frac{2\pi rn}{N/2} + \sin\frac{2\pi rn}{N/2}\right]\cos\frac{2\pi n}{N} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n+N/2)\left[\cos\frac{2\pi r(n+N/2)}{N/2} + \sin\frac{2\pi r(n+N/2)}{N/2}\right]\cos\frac{2\pi(n+N/2)}{N}$$

$$S_1 = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) - x(n+N/2)]\left[\cos\frac{2\pi nr}{N/2} + \sin\frac{2\pi nr}{N/2}\right]\cos\frac{2\pi n}{N}$$

Slično za S_2:

$$S_2 = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\left[\cos\frac{2\pi nr}{N} - \sin\frac{2\pi nr}{N}\right]\sin\frac{2\pi n}{N}$$

Uvedeći smijenu: $m = N - n$, jednostavnim transformacijama dobijamo:

$$S_2 = \sum_{m=1}^{N} x(N-m)\left[\cos\frac{2\pi(N-m)r}{N/2} - \sin\frac{2\pi(N-m)r}{N/2}\right]\sin\frac{2\pi(N-m)}{N}$$

$$S_2 = -\sum_{n=0}^{N-1} x(N-n)\left[\cos\frac{2\pi nr}{N/2} + \sin\frac{2\pi nr}{N/2}\right]\sin\frac{2\pi n}{N}$$

$$S_2 = -\sum_{n=0}^{N/2-1} x(N-n)\left[\cos\frac{2\pi nr}{N/2} + \sin\frac{2\pi nr}{N/2}\right]\sin\frac{2\pi n}{N} -$$

$$- \sum_{n=N/2}^{N-1} x(N-n)\left[\cos\frac{2\pi nr}{N/2} + \sin\frac{2\pi nr}{N/2}\right]\sin\frac{2\pi n}{N}$$

$$S_2 = -\sum_{n=0}^{N/2-1} x(N-n)\left[\cos\frac{2\pi nr}{N/2} + \sin\frac{2\pi nr}{N/2}\right]\sin\frac{2\pi n}{N} -$$

$$- \sum_{n=0}^{N/2-1} x(N/2-n)\left[\cos\frac{2\pi(n+N/2)r}{N/2} + \sin\frac{2\pi(n+N/2)r}{N/2}\right]\sin\frac{2\pi(n+N/2)}{N}$$

$$S_2 = -\sum_{n=0}^{N/2-1} [x(N-n) - x(N/2-n)]\left[\cos\frac{2\pi nr}{N/2} + \sin\frac{2\pi nr}{N/2}\right]\sin\frac{2\pi n}{N}$$

$$H(2r+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) - x(n+N/2)]\left[\cos\frac{2\pi nr}{N/2} + \sin\frac{2\pi nr}{N/2}\right]\cos\frac{2\pi n}{N} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(N/2-n) - x(N-n)]\left[\cos\frac{2\pi nr}{N/2} + \sin\frac{2\pi nr}{N/2}\right]\sin\frac{2\pi n}{N}$$

Dakle:

$$H(2r+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} f(n)\left[\cos\frac{2\pi nr}{N/2} + \sin\frac{2\pi nr}{N/2}\right]$$

gdje je:

$$f(n) = f_1(n)\cos\frac{2\pi n}{N} + f_2(n)\sin\frac{2\pi n}{N}$$

dok su $f_1(n)$ i $f_2(n)$ dati sa:

$$f_1(n) = x(n) - x(n + N/2) \qquad f_2(n) = x(N/2 - n) - x(N - n)$$

Dijagram razbijanja DHT od N elemenata na dvije DHT od $N/2$ elemenata za $N=8$ dat je na slici. Za $N=8$ funkcija $f(n)$ ima slijedeće vrijednosti:

$$f(0) = f_1(0) = x(0) - x(4) \qquad f(1) = (x(1) - x(5) + x(3) - x(7))\sqrt{2}/2$$

$$f(2) = x(2) - x(6) \qquad f(3) = (-x(3) + x(7) + x(1) - x(5))\sqrt{2}/2$$