* Neprekidnost funkcije *

Ako $f: X \to R \quad (x \leq R)$

$a \in X$

$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = f(a) \Rightarrow f$ je neprekidna u tački $x = a$

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ $\quad f$ - je neprekidna u $x = a$

① Ispitati da li je f-ja $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$, neprekidna na cijelom skupu R

$y = x^2 + x$

$a = 1 > 0$

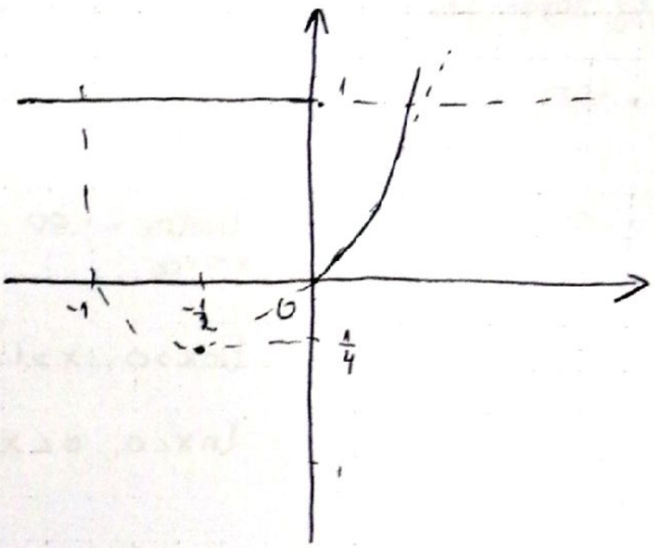
$b = 1$

$c = 0$

$D = 1 > 0$

$y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor x = -1$

$T\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$



- Na intervalu $(0, +\infty)$ f-ja f se poklapa sa polinomom $x^2 + x$, a to je neprekidna f-ja.

- Na intervalu $(-\infty, 0)$ f-ja f se poklapa sa konstantnom funkcijom $y = 1$, pa je neprekidna.

$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} (x^2 + x) = 0$

$\lim_{x \to 0-} (f(x)) = \lim_{x \to 0-} 1 = 1$

$\lim_{x \to 0+} f(x) \neq \lim_{x \to 0-} f(x) \Rightarrow$ funkcija f u tački $x = 0$ ima prekid I vrste ; to Neotklonjiv !

$\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x) \neq f(a)$, u $x=a$ otklonjiv prekid I vrste

$\lim\limits_{x\to a+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a-} f(x)$ u $x=a$ neotklonjiv prekid I vrste

ne postoji $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ ili ne postoji $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$, u $x=a$ prekid II vrste

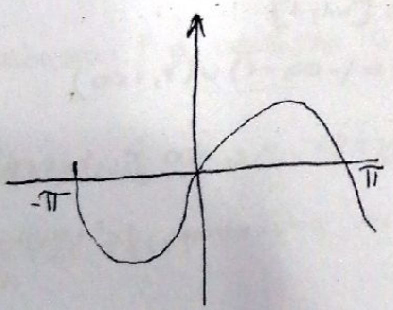
(2) Ispitati neprekidnost sljed. funkcija

a) $f(x) = \begin{cases} \left|\frac{\sin x}{x}\right|, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|\sin x|}{|x|}, & x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

- Na intervalu $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ f-ja je neprekidna kao kompozicija neprekidnih u oblasti definisanosti.

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = \frac{|\sin x|}{|x|} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{|\sin x|}{|x|} = \lim_{x\to 0-} \frac{-\sin x}{-x} = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$f(0) = 1$

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = f(0) \Rightarrow$ f je neprekidna u $x=0$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim\limits_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} \frac{\sin x}{|x|} = \lim\limits_{x \to 0-} \frac{\sin x}{-x} = -\lim\limits_{x \to 0-} \frac{\sin x}{x} = -1$

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0+} f(x) \Rightarrow$ f u tački $x=0$, neotklonjiv prekid I vrste.

3. Ako je moguće odrediti konstante a i b, tako da f-ja $f(x) = \ldots$ neprekidna u svakom domenu

$f(x) = \begin{cases} 2x, & -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 + ax + b, & x > 1 \text{ ili } x < -1 \end{cases} = \begin{cases} 2x, & x \in [-1, 1] \\ x^2 + ax + b & x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \end{cases}$

Na intervalu $(-1, 1)$ f-ja je poklapa sa f-jom $y = 2x$ a ona je neprekidna

Na intervalu $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ f-ja se poklapa sa polinomom $x^2 + ax + b$ pa je neprekidna.

$\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+} (x^2 + ax + b) = 1 + a + b$

$\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-} 2x = 2$

$f(1) = 2 \cdot 1 = 2$

Da bi f-ja f bila neprekidna u tački $x=1$, potrebno je i dovoljno da važi $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-} f(x) = f(1)$ tj

$1 + a + b = 2$
$a + b = 1$

$$\lim_{x \to -1+} f(x) \cdot 2x = -2$$

$$\lim_{x \to -1-} f(x) = \lim_{x \to -1-} (x^2 + ax + b) = 1 - a + b$$

$f(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$ Da bi f-ja bila neprekidna u tački $x = -1$, potrebno je i dovoljno da važi $\lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1-} f(x) = f(-1)$ tj

$$1 - a + b = -2$$
$$-a + b = -3$$

Dobili smo sistem:

$$a + b = 1$$
$$-a + b = -3$$

$$2b = -2$$
$$b = -1 \Rightarrow a = 2$$ Dakle $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [-1, 1] \\ x^2 + 2x - 1, & x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \end{cases}$

je neprekidna na $\mathbb{R}$.

(1.) Definisati f-ju $f(x) = \dfrac{3x - 3}{\sqrt{2x+7} - 3}$ tako da bude neprekidna u tački $x = 1$

R: Uočimo da je $Df = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Napomena: F-ja neprekidna u tački $x = 0$ ako je ? samo ako važi $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Definisaćemo funkciju f tako da važi:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x - 3}{\sqrt{2x+7} - 3} \cdot \frac{\sqrt{2x+7} + 3}{\sqrt{2x+7} + 3} = \lim_{x \to 1} \frac{3x - 3 \cdot (\sqrt{2x+7} + 3)}{2x + 7 - 9} = \lim_{x \to 1} \frac{3(x-1)(\sqrt{2x+7} + 3)}{2(x-1)} = \frac{3}{2} \cdot 6 = 9$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x-3}{\sqrt{2x+7} - 3}, & x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \\ 9, & x = 1 \end{cases}$$

Odrediti parametre a i b tako da f-ja f bude neprekidna na R.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\sin x}-1}{\arcsin 3x}, & x>0 \\ a, & x=0 \\ b\cdot\left(\dfrac{1-\cos x}{e^{x^2}-1}\right), & x<0 \end{cases}$$

Na intervalu $(0,+\infty)$ f-ja je neprekidna kao kompozicija neprekidnih f-ja u oblasti definisanosti.

Na intervalu od $(-\infty,0)$ neprekidna je iz istih razloga.

Da bi f-ja bila neprekidna u $x_0=0$, potrebno je i dovoljno da važi:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \quad (*)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sin x}-1}{\arcsin 3x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot \sin x \cdot$$

$$\frac{1}{\frac{\arcsin 3x}{3x}\cdot 3x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\frac{1}{\frac{\arcsin 3x}{3x}}\cdot\frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\frac{\arcsin 3x}{3x}}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} \overset{(*)}{=} \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x} = \left[\begin{matrix}\sin x = t\\ x\to 0,\ t\to 0\end{matrix}\right] = \lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\frac{\arcsin 3x}{3x}} = \left[\begin{matrix}\arcsin 3x = t\\ 3x = \sin t\\ x\to 0 \Rightarrow t\to 0\end{matrix}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{t}{\sin t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}} =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} b \cdot \left(\frac{1-\cos x}{e^{x^2}-1} \right) \overset{*}{=} b \lim_{x \to 0^-} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \cancel{x^2} \cdot \frac{1}{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}}$$

$$\overset{*}{=} b \frac{1}{2} \cdot 1 = b \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \dots = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} = \left[\begin{array}{l} x^2 = t \\ x \to 0,\ t \to 0 \end{array} \right] = \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

$$\boxed{f(0) = a}$$

Iz (*) slijedi da $a = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{2} b = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{b = \frac{2}{3}}$

f-ja $f(x)$ je:
$$f(x) \begin{cases} \frac{e^{\sin x}-1}{\arcsin 3x}, & x > 0 \\ \frac{1}{3}, & x = 0 \\ \frac{2}{3} \left(\frac{1-\cos x}{e^{x^2}-1} \right), & x < 0 \end{cases}$$