

Dr Gojko L. Dimić

Mr Mihailo D. Mitrinović

ZBIRKA ZADATAKA  
IZ FIZIKE

D

*viši kurs*

IRO „Građevinska knjiga“ • Beograd

ZBIRKA ZADATAKA  
IZ FIZIKE D

viši kurs

Autori:

Dr Gojko L. Dimić  
profesor Univerziteta  
u Beogradu

Mr Mihailo D. Mitrinović  
asistent Univerziteta  
u Beogradu

Recenzenti:

Dr Boško Pavlović  
profesor Univerziteta  
u Beogradu

Dr Mita Sekulić  
docent Univerziteta  
u Beogradu

Za izdavača

Glavni urednik:  
Milan Višnjić

Odgovorni urednik:  
Milica Dodić

Urednik:  
Olga Vasiljević

Lektor:  
Zdenka Pleša

Grafički dizajn:  
Velimir Dimić

Tehnički urednik:  
Jovan Karadžić

Obim: 29 štamp. tabaka

Tiraž: 2000

Izdanja: 1962, 1965, 1968, 1971, 1975, 1978,  
1979, 1984.

Izdaje: Izdavačka radna organizacija  
»Građevinska knjiga«  
Beograd  
Trg Marksa i Engelsa 8/11  
Poštanski fah 798

Štampa: Beogradski izdavačko-grafički zavod  
Beograd  
Bulevar vojvode Mišića 17

Prvo izdanje ovog udžbenika odobrila je Komisija za univerzitetske udžbenike svojim rešenjem br. 1141/2 od juna 1962. godine kao privremeni udžbenik za tehničke fakultete.

SADRŽAJ

Međunarodni sistem jedinica ..... 5

Z A D A C I

MEHANIKA

|   |    |
|---|----|
| 1. Kinematika translatornog kretanja                    | 11 |
| 2. Kinematika rotacionog kretanja ..                    | 13 |
| 3. Kinematika kretanja tela u gravitacionom polju ..... | 24 |
| 4. Dinamika translatornog kretanja                      | 29 |
| 5. Gravitaciono polje .....                             | 47 |
| 6. Statika .....  | 51 |
| 7. Dinamika rotacionog kretanja ..                      | 58 |
| 8. Elastičnost .....                                    | 65 |
| 9. Mehaničke oscilacije .....                           | 69 |
| 10. Mehanički talasi .....                              | 77 |
| 11. Mehanika fluida .....                               | 83 |
| — Statika fluida .....                                  | 83 |
| — Dinamika fluida .....                                 | 89 |

TOPLOTA

|  |     |
|--|-----|
| 1. Termičko širenje. Kalorimetrija ..                | 95  |
| 2. Molekulska-kinetička teorija. Termodinamika ..... | 102 |
| 3. Prenosnje unutrašnje energije ..                  | 115 |

ELEKTRICITET

|  |     |
|--|-----|
| 1. Električno polje .....                              | 118 |
| 2. Jednosmerna električna struja ..                    | 132 |
| 3. Magneto polje .....                                 | 143 |
| 4. Naizmjenična struja .....                           | 162 |
| 5. Elektromagnetne oscilacije .....                    | 167 |
| 6. Elektromagnetno polje. Elektromagnetni talasi ..... | 169 |

OPTIKA

|                              |     |
|------------------------------|-----|
| 1. Fotometrija .....         | 173 |
| 2. Geometrijska optika ..... | 178 |
| 3. Talasna optika .....      | 189 |
| 4. Toplotno zračenje .....   | 194 |

TEORIJA RELATIVNOSTI

|  |     |
|--|-----|
| 1. Specijalna i opšta teorija relativnosti ..... | 197 |
| 2. Doplerov efekat .....                         | 200 |
| 3. Ubrzavači naelektrisanih čestica ..           | 202 |

ATOMSKA I NUKLEARNA FIZIKA

|  |     |
|--|-----|
| 1. Kvantna priroda elektromagnetnog zračenja. Talasna svojstva čestica ..... | 204 |
| 2. Borova teorija. Rendgensko zračenje .....                                 | 207 |
| 3. Hajzenbergova relacija neodređenosti ..                                   | 209 |
| 4. Radioaktivnost .....  | 211 |
| 5. Nuklearne reakcije .....  | 214 |

REŠENJA I ODGOVORI

MEHANIKA

|   |     |
|---|-----|
| 1. Kinematika translatornog kretanja                    | 217 |
| 2. Kinematika rotacionog kretanja                       | 226 |
| 3. Kinematika kretanja tela u gravitacionom polju ..... | 231 |
| 4. Dinamika translatornog kretanja                      | 264 |
| 5. Gravitaciono polje .....                             | 270 |
| 6. Statika .....  | 278 |
| 7. Dinamika rotacionog kretanja ..                      | 288 |
| 8. Elastičnost .....                                    | 292 |
| 9. Mehaničke oscilacije .....                           | 303 |
| 10. Mehanički talasi .....                              | 307 |
| 11. Mehanika fluida .....                               | 307 |

TOPLOTA

|  |     |
|--|-----|
| 1. Termičko širenje. Kalorimetrija ..                | 319 |
| 2. Molekulska-kinetička teorija. Termodinamika ..... | 324 |
| 3. Prenosnje unutrašnje energije ..                  | 339 |

ELEKTRICITET

|  |     |
|--|-----|
| 1. Električno polje .....                              | 342 |
| 2. Jednosmerna električna struja .....                 | 356 |
| 3. Magneto polje .....                                 | 367 |
| 4. Naizmjenična struja .....                           | 378 |
| 5. Elektromagnetne oscilacije .....                    | 382 |
| 6. Elektromagnetno polje. Elektromagnetni talasi ..... | 384 |

OPTIKA

|                              |     |
|------------------------------|-----|
| 1. Fotometrija .....         | 386 |
| 2. Geometrijska optika ..... | 390 |
| 3. Talasna optika .....      | 401 |
| 4. Toplotno zračenje .....   | 405 |

TEORIJA RELATIVNOSTI

|   |     |
|---|-----|
| 1. Specijalna i opšta teorija relativnosti .. | 406 |
| 2. Doplerov efekat .....                      | 411 |
| 3. Ubrzavači naelektrisanih čestica ..        | 412 |

ATOMSKA I NUKLEARNA FIZIKA

|   |     |
|---|-----|
| 1. Kvantna priroda elektromagnetnog zračenja. Talasna svojstva čestica .. | 415 |
| 2. Borova teorija. Rendgensko zračenje ..                                 | 418 |
| 3. Hajzenbergova relacija neodređenosti ..                                | 420 |
| 4. Radioaktivnost .....   | 422 |
| 5. Nuklearne reakcije .....   | 424 |

PRILOZI

|   |     |
|---|-----|
| 1. Greške merenja i određivanja fizičkih veličina ..... | 427 |
| 2. Dimenziona analiza .....                             | 435 |
| 3. Tablice .....  | 446 |
| Literatura .....  | 464 |

## PREDGOVOR

Ova Zbirka zadataka je rezultat našeg višegodišnjeg rada u nastavi fizike na Tehnološko-metalurškom fakultetu u Beogradu i u neposrednoj je vezi sa zbirka zadataka za srednji i osnovni kurs fizike, takođe u izdanju IRO „Građevinska knjiga“ — Beograd. Tako one predstavljaju jedinstvenu pedagošku i programsku celinu, namenjenu izučavanju fizike od nivoa osnovne škole do nivoa nastave fizike na fakultetima.

U ovoj Zbirki je dosledno primenjen Međunarodni sistem jedinica, kao i domaće i međunarodne preporuke koje regulišu ovu problematiku. Osim toga, u Zbirku su unete i sve značajnije odluke 16. i 17. Generalne konferencije za tegove i mere, želeći da ova Zbirka bude savremena, a da njenim korisnicima omogućimo što efikasniji način prilagodavanja promenama koje neminovno prate sadržaje ovakve vrste.

Uvođenje Međunarodnog sistema jedinica i pomenutih preporuka uslovalo je neke promene u metodološkom prilazu obradi nekih delova Zbirke u kojima se obrađuje pojam mase, težine, pritiska, gustine i dr. Isto tako, primenjene su najnovije preporuke i tendencije u terminologiji i oznakama fizičkih veličina.

Svako poglavlje u Zbirki sadrži uvod sa osnovnim uputstvima, koja se odnose na teorijski deo problema, kao i jedinice pojedinih fizičkih veličina, uz pretpostavku da su čitaoci već informisani o njima opširnije. Većina zadataka ima rešenje. Rešavanje zadataka sa svim pratećim detaljima, naravno, nije bilo moguće sprovesti iz više razloga, a osnovni je pedagoški, jer bi Zbirka time izgubila pretpostavljenu namenu. Zbog toga preporučujemo proradu svih „preskočenih“ delova u procesu rešavanja zadataka, jer samo tako može da se očekuje temeljno razumevanje problema i trajna korist.

I ovom prilikom izražavamo zahvalnost recenzentima prof. dr Bošku Pavloviću i dr Miti Sekuliću na dragocenim savetima i pomoći koju smo dobili prilikom izrade ove Zbirke. Takođe zahvaljujemo lektoru ove Zbirke Zdenki Pleša na njenoj stručnoj pomoći, savetima i zalaganjima prilikom našeg višegodišnjeg rada na ovom rukopisu.

Molimo čitaoce da svoje primedbe i sugestije šalju na adresu: Katedra za fiziku TMF, Beograd, Karnedžijeva 4, na čemu ćemo im biti najsrdačnije zahvalni.

12. jun 1984.

Autori

## MEĐUNARODNI SISTEM JEDINICA

Fizička veličina  $A$  određena je svojom brojnom vrednošću  $\{A\}$  i svojom jedinicom  $[A]$ , što znači da je

$$A = \{A\} [A]$$

odakle proizlazi da je brojna vrednost  $\{A\}$  veća ukoliko je upotrebljena jedinica  $[A]$  manja, i obratno.

Ako je fizička veličina  $B$  neimenovana, kao npr. koeficijent trenja, stepen korisnog dejstva, ugao i dr., onda je za nju

$$[B] = 1$$

Međusobno usaglašene jedinice fizičkih veličina predstavljaju sistem jedinica i po svom značaju spadaju u domen stalnih međunarodnih dogovaranja s obzirom na to da je upotreba jedinica zastupljena u svim oblastima ljudske delatnosti.

Generalna konferencija za tegove i mere (Conférence générale des poids et mesures, skraćeno CGPM) usvojila je 1960. godine Međunarodni sistem jedinica (Système International, skraćeno SI) kao zvanični sistem u svim oblastima ljudske delatnosti. Kod nas je SI zakonski uveden 1. jula 1976. godine.

Osnovne fizičke veličine SI jesu: dužina  $l$ , masa  $m$ , vreme  $t$ , jačina električne struje  $I$ , termodinamička temperatura  $T$ , svetlosna jačina  $I_{sv}$  i količina supstance  $n$ .

Osnovne jedinice SI jesu jedinice odgovarajućih osnovnih veličina. Naime, osnovna jedinica za:

|                              |    |               |
|------------------------------|----|---------------|
| — dužinu                     | je | metar (m)     |
| — masu                       |    | kilogram (kg) |
| — vreme                      |    | sekunda (s)   |
| — jačinu električne struje   |    | amper (A)     |
| — termodinamičku temperaturu |    | kelvin (K)    |
| — jačinu svetlosti           |    | kandela (cd)  |
| — količinu supstance         |    | mol (mol)     |

a to znači da je  $[l] = m$ ,  $[m] = kg$ ,  $[t] = s$ ,  $[I] = A$ ,  $[T] = K$ ,  $[I_{sv}] = cd$ ,  $[n] = mol$ .

Osnovne jedinice SI su definisane odgovarajućim etalonima. Definicija ovih etalona je sledeća.

- Metar je dužina putanje koju u vakuumu pređe svetlost za vreme od  $1/299\,792\,458$  sekundi.
- Kilogram je masa međunarodnog etalona mase.
- Sekunda je trajanje od  $9\,192\,631\,770$  perioda zračenja koje odgovara prelazu između dva hiperfina nivoa osnovnog stanja atoma cezijuma-133.
- Amper je jačina stalne električne struje koja, kada se održava u dvama pravim paralelnim provodnicima, neograničene dužine i zanemarljivog kružnog preseka, koji se nalaze u vakuumu na međusobnom rastojanju 1 metar, proizvodi između tim provodnicima silu koja je jednaka  $2 \cdot 10^{-7}$  njutna po metru dužine provodnika.
- Kelvin je termodinamička temperatura koja je jednaka  $1/273,16$  termodinamičke temperature trojne tačke vode.
- Kandela je svetlosna jačina, u datom pravcu, izvora koji emituje monohromatsko zračenje frekvencije  $540 \cdot 10^{12}$  herca čija je energijska jačina u tom pravcu  $1/683$  vata po steradianu.

- Mol je količina supstancije sistema koji sadrži toliko elementarnih jedinica koliko ima atoma u 0,012 kilograma ugljenika-12.

Na osnovu 7 osnovnih jedinica SI izvode se jedinice svih ostalih — izvedenih veličina u fizici, primenjujući relacije koje na pogodan način povezuju odgovarajuće veličine.

Osnovna veličina u geometriji je dužina, a jedinica — metar, pa se na osnovu njih izvode jedinice za izvedene veličine u geometriji. Tako, na primer, izvedena jedinica za površinu može da se odredi na osnovu relacije za površinu kvadrata  $S = a^2$ , prema kojoj je

$$[S] = [a]^2 = m^2$$

a jedinica za zapreminu — primenom relacije za zapreminu kocke  $V = a^3$ , prema kojoj je

$$[V] = [a]^3 = m^3$$

itd.

Osnovne veličine u kinematici su dužina i vreme, a jedinice — metar i sekunda, pa se na osnovu njih izvode jedinice ostalih veličina u kinematici. Tako je, na primer, izvedena jedinica za brzinu

$$[v] = \frac{[\Delta r]}{[\Delta t]} = \frac{m}{s}$$

za ubrzanje

$$[a] = \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} = \frac{m/s}{s} = \frac{m}{s^2}$$

itd.

Osnovne veličine u dinamici su dužina, vreme i masa, a osnovne jedinice — metar, sekunda i kilogram, pa se na osnovu njih izvode jedinice ostalih dinamičkih veličina. Tako se, na primer, jedinica za silu izvodi primenom II Njutnovog zakona  $F = ma$ , prema kome je

$$[F] = [m][a] = kg \cdot \frac{m}{s^2}$$

Ova jedinica se naziva njutn (N), pa je

$$\frac{kg \cdot m}{s^2} = N$$

Na isti način je jedinica za gustinu

$$[\rho] = \frac{[m]}{[V]} = \frac{kg}{m^3}$$

a jedinica za rad

$$[A] = [F][s] = N \cdot m$$

I ova jedinica ima poseban naziv — džul (J), pa je  $N \cdot m = J$ . Isti je slučaj sa jedinicom pritiska

$$[p] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{N}{m^2}$$

koja se naziva paskal (Pa), pa je  $N/m^2 = Pa$ , itd.

Na isti način se izvode jedinice u ostalim oblastima fizike. Neke od njih su dobile posebne nazive (tablica 1), neke su izvedene samo na osnovu osnovnih jedinica, a neke na osnovu osnovnih i izvedenih jedinica sa posebnim nazivima (tablica 2).

IZVEDENE JEDINICE SI  
sa posebnim nazivima

Tablica 1

| Izvedena fizička veličina                    | Naziv jedinice | Oznaka jedinice |
|--|----------------|-----------------|
| Frekvencija                                  | herc           | Hz              |
| Sila   | njutn          | N               |
| Pritisak                                     | paskal         | Pa              |
| Energija, rad, količina toplote              | džul           | J               |
| Snaga, energijski fluks                      | vat            | W               |
| Količina elektriciteta                       | kulon          | C               |
| Električni napon, električni potencijal, emf | volt           | V               |
| Električna kapacitivnost                     | farad          | F               |
| Električna otpornost                         | om             | $\Omega$        |
| Električna provodnost                        | simens         | S               |
| Magnetna indukcija                           | tesla          | T               |
| Magnetni fluks                               | veber          | Wb              |
| Induktivnost                                 | henri          | H               |
| Svetlosni fluks                              | lumen          | lm              |
| Osvetljenost                                 | luks           | lx              |
| Aktivnost radioaktivne supstancije           | bekerel        | Bq              |
| Apsorpciona doza jonizujućeg zračenja        | grej           | Gy              |
| Ekvivalentna doza jonizujućeg zračenja       | sivert         | Sv              |

IZVEDENE JEDINICE SI  
na osnovu samo osnovnih jedinica i osnovnih i izvedenih jedinica  
sa posebnim nazivom

Tablica 2

| Izvedena fizička veličina           | Izvedena jedinica             | Oznaka jedinice             |
|-------------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|
| Površina                            | kvadratni metar               | $m^2$                       |
| Zapremina                           | kubični metar                 | $m^3$                       |
| Ugao u ravni*                       | radijan                       | rad                         |
| Prostorni ugao*                     | steradijan                    | sr                          |
| Poduzna masa                        | kilogram po metru             | $kg \cdot m^{-1}$           |
| Površinska masa                     | kilogram po kvadratnom metru  | $kg \cdot m^{-2}$           |
| Gustina (zapreminska masa)          | kilogram po kubnom metru      | $kg \cdot m^{-3}$           |
| Brzina                              | metar u sekundi na kvadrat    | $m \cdot s^{-1}$            |
| Ubrzanje                            | metar u sekundi na kvadrat    | $m \cdot s^{-2}$            |
| Ugaona brzina, kružna frekvencija   | radijan u sekundi             | $rad \cdot s^{-1}$          |
| Ugaono ubrzanje                     | radijan u sekundi na kvadrat  | $rad \cdot s^{-2}$          |
| Zapreminski protok                  | kubični metar u sekundi       | $m^3 \cdot s^{-1}$          |
| Maseni protok                       | kilogram u sekundi na kvadrat | $kg \cdot s^{-1}$           |
| Površinski napon                    | njutn po metru                | $N \cdot m^{-1}$            |
| Jačina gravitacionog polja          | njutn po kilogramu            | $N \cdot kg^{-1}$           |
| Gravitacioni potencijal             | džul po kilogramu             | $J \cdot kg^{-1}$           |
| Kinetička viskoznost                | kvadratni metar u sekundi     | $m^2 \cdot s^{-1}$          |
| Dinamička viskoznost                | paskal-sekunda                | $Pa \cdot s$                |
| Moment sile                         | metar-njutn                   | $m \cdot N$                 |
| Zapreminska gustina energije        | džul po kubnom metru          | $J \cdot m^{-3}$            |
| Toplotna kapacitivnost, entropija   | džul po kelvinu               | $J \cdot K^{-1}$            |
| Latentna specifična toplota         | džul po kilogramu             | $J \cdot kg^{-1}$           |
| Specifična toplotna kapacitivnost   | džul po kilogramu-kelvinu     | $J \cdot (kg \cdot K)^{-1}$ |
| Termička provodnost                 | vat po metar-kelvinu          | $W \cdot (m \cdot K)^{-1}$  |
| Energijska jačina zračenja          | vat po steradijanu            | $W \cdot sr^{-1}$           |
| Jačina talasa, energijski osvetljaj | vat po kvadratnom metru       | $W \cdot m^{-2}$            |
| Površinska gustina naelektrisanja   | kulon po kvadratnom metru     | $C \cdot m^{-2}$            |
| Električni moment                   | kulomb-metar                  | $C \cdot m$                 |
| Jačina električnog polja            | volt po metru                 | $V \cdot m^{-1}$            |

\* Neimenovane jedinice, ali je usvojen naziv jedinice da bi se znalo kojom jedinicom je ugao izražen.

|   |                             |                     |
|---|-----------------------------|---------------------|
| Permitivnost                            | farad po metru              | F/m                 |
| Površinska gustina električne struje    | amper po kvadratnom metru   | A/m <sup>2</sup>    |
| Magnetni moment                         | ampermetar                  | A·m                 |
| Specifična električna otpornost         | ohmometar                   | Ω·m                 |
| Specifična električna provodnost        | simens po metru             | S/m                 |
| Permeabilnost                           | henri po metru              | H/m                 |
| Jačina magnetnog polja                  | amper po metru              | A/m                 |
| Luminancija (sjajnosti)                 | kandela po kvadratnom metru | cd/m <sup>2</sup>   |
| Osvjetljaj                              | lumen po kvadratnom metru   | lm/m <sup>2</sup>   |
| Ekspozicijska doza jonizujućeg zračenja | kulon po kilogramu          | C/kg                |
| Molarna masa                            | kilogram po molu            | kg/mol              |
| Molarna zapremina                       | kubni metar po molu         | m <sup>3</sup> /mol |
| Molarna toplotna kapacitivnost          | džul po molkelvinu          | J/(mol·K)           |
| Koncentracija količine supstancije      | mol po kubnom metru         | mol/m <sup>3</sup>  |

Osim jedinica SI, zakonom je dozvoljena i upotreba nekih drugih jedinica koje se koriste u praksi (tablica 3).

JEDINICE KOJE NE PRIPADAJU SI  
ali je njihova upotreba dozvoljena

Tablica 3

| Veličina                        | Naziv jedinice                                   | Oznaka | Odnos jedinice koja ne pripada SI i jedinice SI   |
|---------------------------------|--|--------|---|
| Dužina                          | morska milja                                     | —      | 1 morska milja = 1 852 m  |
|                                 | ar   | a      | 1 a = 100 m <sup>2</sup> = 10 <sup>2</sup> m <sup>2</sup>   |
| Površina                        | hektar   | ha     | 1 ha = 10 000 m <sup>2</sup> = 10 <sup>4</sup> m <sup>2</sup>   |
|                                 | Zapremina  | lijar* | 1 L = 1 dm <sup>3</sup> = 10 <sup>-3</sup> m <sup>3</sup>   |
| Ugao u ravni                    | pun ugao   | —      | 1 puni ugao = 2π rad  |
|                                 | prav ugao  | —      | L = (π/2) rad   |
|                                 | stepen   | °      | 1° = (π/180) rad  |
|                                 | minut  | '      | 1' = (1/60)° = (π/10 800) rad   |
|                                 | sekunda  | "      | 1" = (1/60)' = (π/648 000) rad  |
|                                 | gradus, ili gon                                  | g      | 1g = (π/200) rad  |
| Masa                            | tona   | t      | 1 t = Mg = 10 <sup>3</sup> kg   |
|                                 | jedinica atomske mase                            | u      | 1 u = 1/12 mase atoma nukleida <sup>12</sup> C<br>1 u ≈ 1,660 53 · 10 <sup>-27</sup> kg                       |
| Poduzna masa                    | teks   | tex    | 1 tex = 1 g/km = 10 <sup>-6</sup> kg/m  |
| Vreme                           | minut  | min    | 1 min = 60 s  |
|                                 | čas  | h      | 1 h = 3 600 s   |
|                                 | dan  | d      | 1 d = 86 400 s  |
|                                 | sedmica, meseci, godina gregorijanskog kalendara |        |   |
| Brzina                          | čvor   | —      | 1 čvor = morska milja na čas =<br>$\frac{1 852 \text{ m}}{3 600 \text{ s}} = 0,514 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ |
|                                 | Pritisak   | bar    | 1 bar = 100 000 Pa  |
| Energija, rad, količina toplote | vatčas   | Wh     | 1 Wh = 3 600 J  |
|                                 | elektronvolt                                     | eV     | 1 eV = 1,602 19 · 10 <sup>-19</sup> J   |
| Snaga                           | voltamper  | VA     | 1 VA = 1 W  |
|                                 | var  | var    | 1 var = 1 W   |
| Temperatura                     | stepen Celzijusa                                 | °C     | 1°C = 1 K<br>temperatura od 0°C jednaka je temperaturi od 273,15 K  |

\* 1 L = 1 dm<sup>3</sup> (tačno).

Korišćenje SI podrazumeva upotrebu i decimalnih jedinica, bez obzira na to da li je reč o osnovnim jedinicama SI sa posebnim nazivom, ili o jedinicama koje ne pripadaju SI a imaju posebnu oznaku ili naziv, čija je upotreba zakonski dozvoljena.

Decimalne jedinice su decimalni delovi ili decimalni umnošci odgovarajućih jedinica, a obrazuju se stavljanjem međunarodno usvojenog predmetka ispred odgovarajuće jedinice (tablica 4).

Tablica 4

| Naziv predmetka koji se stavlja ispred raziva jedinice | Oznaka predmetka koji se stavlja ispred oznake jedinice | Činilac kojim se množi jedinica (vrednost predmetka) |
|--|---|--|
| eksa   | E   | 1 000 000 000 000 000 000 = 10 <sup>18</sup>         |
| peta   | P   | 1 000 000 000 000 000 = 10 <sup>15</sup>             |
| tera   | T   | 1 000 000 000 000 = 10 <sup>12</sup>                 |
| giga   | G   | 1 000 000 000 = 10 <sup>9</sup>                      |
| mega   | M   | 1 000 000 = 10 <sup>6</sup>                          |
| kilo   | k   | 1 000 = 10 <sup>3</sup>                              |
| hekto  | h   | 100 = 10 <sup>2</sup>                                |
| deka   | da  | 10 = 10 <sup>1</sup>                                 |
| deci   | d   | 0,1 = 10 <sup>-1</sup>                               |
| centi  | c   | 0,01 = 10 <sup>-2</sup>                              |
| mili   | m   | 0,001 = 10 <sup>-3</sup>                             |
| mikro  | μ   | 0,000 001 = 10 <sup>-6</sup>                         |
| nano   | n   | 0,000 000 001 = 10 <sup>-9</sup>                     |
| piko   | p   | 0,000 000 000 001 = 10 <sup>-12</sup>                |
| femto  | f   | 0,000 000 000 000 001 = 10 <sup>-15</sup>            |
| ato  | a   | 0,000 000 000 000 000 001 = 10 <sup>-18</sup>        |

Tako, na primer, decimalne jedinice su: mm, nm, kN, μPa, MW, mW, daA, nA, mT, aJ, pF, fF, μC, ml, cl, kVA, kWh, mbar, GeV, keV itd.

#### OPŠTE NAPOMENE

Usvojena su i određena pravila kako treba pisati jedinice. Naime, jedinice treba pisati uspravnim a ne kosim slovima, kao na primer,

m, N, A, H a ne *m, N, A, H*

Osim toga, oznaka predmetka i jedinice pišu se zajedno, tj. bez razmaka među njima, kao na primer,

kg, nm, μPa, mN, a ne kg, nm, μPa, mN

Izložilac (eksponent) koji se stavlja samo na oznaku jedinice odnosi se na celu jedinicu, pa treba pisati

dm<sup>3</sup>, kg<sup>2</sup>, μC<sup>2</sup>, a ne (dm)<sup>3</sup>, (kg)<sup>2</sup>, (μC)<sup>2</sup>

Iza jedinica se ne piše tačka, osim ako se njome ne završava rečenica, kao, na primer, u rečenici

... odgovarajuće jedinice su V, W, T i Pa.

Predmetak i naziv jedinice pišu se i izgovaraju zajedno, kao, na primer,

kWh (kilovatčas)  
kg (kilogram)  
ml (mililitar)  
μm (mikrometar)  
daN (dekanjutn) itd.

Proizvod dve jedinice se obeležavaju tačkom kao simbolom množenja, kao na primer

$$m \cdot N, N \cdot s, \Omega \cdot A, J \cdot s, \text{ itd}$$

Ako se jedinica obrazuje međusobnim deljenjem dveju jedinica, onda se kao simbol deljenja koristi horizontalna razlomačka crta (—), a kosa razlomačka crta (/) samo ako je u pitanju ušteda u prostoru prilikom mašinskog pisanja ili štampanja. Dakle, treba pisati

$$\frac{m}{s^2}, \frac{J}{kg \cdot K}, \frac{W}{m^2} \text{ ili } m/s^2, J/(kg \cdot K), W/m^2$$

a ne treba pisati m/s/s, J/kg·K i sl.

Mogu se upotrebljavati eksponenti sa negativnim znakom, kao, na primer,

$$m \cdot s^{-2}, J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}, W \cdot m^{-2}, \text{ itd}$$

Nije dozvoljena upotreba dvosrukkih predmetaka, kao, na primer,

$$\begin{array}{ll} \mu\mu m & \text{umesto } pm \\ mkg & g \\ mnF & pF \\ kkWh & MWh \text{ i sl.} \end{array}$$

Prilikom korišćenja fizičkih veličina, pri merenju ili računanju, pored njene brojne vrednosti neophodno je napisati i odgovarajuću jedinicu. Tako, na primer, ne treba pisati

$$\begin{array}{ll} l = 20,1 & \text{već} & l = 20,1 \text{ mm} \\ m = 4,62 & & m = 4,62 \text{ cg} \end{array}$$

Isto tako je pogrešno pisati

$$\begin{array}{ll} l \text{ (mm)} = 20,1; & l \text{ [mm]} = 20,1; \quad l = 20,1 \text{ [mm]} \\ c \text{ (J/kg} \cdot \text{°C)} = 982; & c \text{ [J/(kg} \cdot \text{°C)}] = 982; \quad c = 982 \text{ [J/(kg} \cdot \text{°C)}] \end{array}$$

već treba napisati

$$l = 20,1 \text{ mm}; \quad c = 982 \frac{J}{kg \cdot ^\circ C} \text{ ili } c = 982 \text{ J/(kg} \cdot \text{°C)}$$

Prilikom izračunavanja fizičkih veličina neophodno je pored brojnih vrednosti pojedinih fizičkih veličina (koje su poznate) pisati i njihove SI jedinice. Tako, na primer, ne treba pisati

$$T = \frac{pVA}{NR} = \frac{0,2 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-6} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{4 \cdot 10^{20} \cdot 8,3} = 1088 \text{ K}$$

već

$$T = \frac{pVA}{NR} = \frac{0,2 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot 3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}}{4 \cdot 10^{20} \cdot 8,3 \frac{J}{\text{mol} \cdot K}} = 1088 \text{ K}$$

a takođe ne treba pisati

$$T = \frac{pVA}{NR} = \frac{0,2 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot 3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}}{4 \cdot 10^{20} \cdot 8,3 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}} = 1088 \text{ K}$$

# ZADACI

## MEHANIKA

### 1. Kinematika translatornog kretanja

Ako se vektor položaja  $\vec{r}$  tela (materijalne tačke) menja tokom vremena, to znači da se telo kreće, pa je opšti oblik jednačine kretanja tela

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Kako je

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

gde su  $x, y, z$ —intenziteti komponenti vektora  $\vec{r}$  ili koordinate njegovog kraja, a  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ —jedinичni vektori X, Y, Z-osa, jednačine kretanja u skalarom obliku su

$$\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array}$$

Brzina  $\vec{v}$  kretanja tela naziva se brzina kojom se menja u vremenu njegov vektor položaja  $\vec{r}$  ili, u matematičkom smislu, prvi izvod vektora položaja tela po vremenu. Dakle,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Ako su  $v_x, v_y, v_z$ —intenziteti komponenti brzine  $\vec{v}$ , onda je

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

pri čemu je

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

a intenzitet brzine

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Likoliko je pri kretanju tela  $v_x \neq 0, t_1 \neq 0, v_z \neq 0$ , onda telo ima tri stepena slobode u pogledu translatorsnog kretanja.

Ako se u toku vremena  $\Delta t$  vektor položaja tela promeni za  $\Delta \vec{r}$ , onda je srednja brzina tela u tom vremenskom intervalu

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

odakle proizlazi da je jedinica brzine

$$[\vec{v}] = \frac{[\Delta \vec{r}]}{[\Delta t]} = \frac{m}{s}$$

Ubrzanje  $\vec{a}$  tela naziva se brzina kojom se menja u vremenu njegova brzina  $\vec{v}$  ili, u matematičkom smislu, prvi izvod brzine tela po vremenu. Dakle,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

ili, imajući u vidu definiciju brzine  $\vec{v}$ ,

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Ako su  $a_x, a_y, a_z$ —intenziteti komponenti ubrzanja  $\vec{a}$ , onda je

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

pri čemu je

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

a intenzitet ubrzanja

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Ako se u toku vremena  $\Delta t$  brzina tela promeni za  $\Delta \vec{v}$ , onda je srednje ubrzanje tela u tom vremenskom intervalu

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

odakle proizlazi da je jedinica ubrzanja

$$[\vec{a}] = \frac{[\Delta \vec{v}]}{[\Delta t]} = \frac{m}{s^2}$$

Pri ravnomernom pravolinijskom kretanju tela je  $v = \text{const}$ . U ovom slučaju se vektor pomeraja  $d\vec{r}$  (nastao za vreme  $dt$ ) često obeležava sa  $d\vec{s}$  i naziva vektor pređenog puta, a njegov intenzitet  $ds$ —pređeni put, pa je odgovarajući vektor brzine

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$$

a njen intenzitet

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Krećući se stalnom brzinom  $v$ , telo za vreme  $dt$ , prema prethodnoj relaciji, pređe put

$$ds = v dt$$

odakle je ukupni pređeni put za vreme  $t$

$$s = \int v dt = vt + C$$

gde je  $C$ —konstanta integriranja, čija je vrednost određena početnim uslovima kretanja. Na primer, ako telo započne kretanje iz koordinatnog početka, onda je  $C=0$ , pa je tada

$$s = vt$$

dok je u svakom drugom slučaju  $s = vt + s_0$ , gde je  $s_0$ —početno rastojanje tela od koordinatnog početka.

Pri ravnomerno promenljivoj pravolinijskom kretanju je  $a = \text{const}$ .

Iz relacije za intenzitet ubrzanja

$$a = \frac{dv}{dt}$$

nalazi se da je promena brzine tela  $dv$  za vreme  $dt$

$$dv = a dt$$

odakle je brzina tela posle vremena  $t$

$$v = \int a dt = at + C$$

gde je  $C$ —konstanta integriranja, čija se vrednost nalazi iz početnih uslova. Na primer, ako telo započne kretanje brzinom  $v_0$ , onda je  $C=v_0$ , pa je tada

$$v = v_0 + at$$

Pređeni put tela za vreme  $t$  je

$$s = \int v dt = \int (v_0 + at) dt$$

odakle je

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

ako je telo započelo kretanje iz koordinatnog početka.

Eliminisanjem vremena iz prethodnih relacija za  $v(t)$  i  $s(t)$ , dobija se relacija

$$v^2 = v_0^2 + 2as$$

koja ima praktični značaj, pri čemu treba imati u vidu da u ovim relacijama može da bude  $a > 0$  i  $a < 0$ , zavisno od toga da li se brzina tela povećava ili smanjuje tokom kretanja.

1. Tokom prve polovine vremena kretanja automobil ima brzinu  $v_1 = 54$  km/h, a tokom druge polovine vremena brzinu  $v_2 = 36$  km/h. Kolika je srednja brzina kretanja automobila?

2. Brzina automobila na prvoj polovini puta je  $v_1 = 36$  km/h, a na drugoj  $v_2 = 54$  km/h. Kolika je srednja brzina automobila na putu?

3. Telo se kreće po pravoj putanji i na sukcesivnim deonicama puta, jednake dužine  $s$ , ima stalne brzine  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ . Kolika je srednja brzina tela?

4. Telo se kreće po pravoj putanji tako što u jednakim sukcesivnim vremenskim intervalima, koji traju  $\Delta t$ , ima stalne brzine  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ . Kolika je srednja brzina tela?

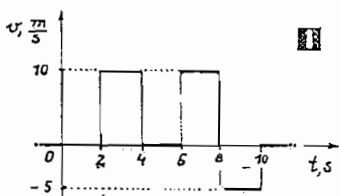
5. Na prvoj trećini puta automobil se kreće brzinom  $v_1$ , a na ostalom delu puta brzinom  $v_2 = 54$  km/h. Srednja brzina automobila na celom putu je  $\langle v \rangle = 36$  km/h. Kolika je brzina  $v_1$ ?

6. Brzina nekog tela se menja prema dijagramu na slici 17.

a) Koliki ukupni put telo pređe tokom kretanja?

b) Ako se telo kreće u jednom pravcu, izračunati rastojanje krajnjeg i početnog položaja tela.

c) Nacrtati dijagram pređenog puta tela i dijagram rastojanja tela od početnog položaja, pod uslovom da se pravac kretanja ne menja.



7. Lokomotiva se kreće brzinom  $v_1 = 54$  km/h. Nasuprot njoj naiđe voz, dužine  $l = 150$  m, koji se kreće brzinom  $v_2 = 36$  km/h. Koliko će vremena kompozicija voza prolaziti pored mašinoveđe lokomotive?

8. Iz grada A krene prema gradu B, svakog vremenskog intervala od  $\Delta t = 10$  min, po jedan automobil. Oni se kreću brzinom  $v = 60$  km/h. Rastojanje između gradova je  $d = 60$  km.

a) Nacrtati dijagram zavisnosti pređenog puta automobila od vremena.

b) Koliku brzinu bi trebalo da ima četvrti automobil u koloni, pri polasku iz grada A, da bi stigao u grad B kada i prvi automobil? Kada i gde će ovaj automobil sustizati automobile u koloni koji su ispred njega?

9. Rastojanje između gradova A i B iznosi  $d = 250$  km. Istovremeno iz oba grada krene po jedan automobil. Automobil iz grada A ima brzinu  $v_A = 60$  km/h, a iz grada B brzinu  $v_B = 40$  km/h. Nacrtati dijagram zavisnosti pređenog puta od vremena za svaki automobil, pa na osnovu njega odrediti mesto susreta.

10. Čamac pređe put  $s = 24$  km uz reku krećući se stalnom brzinom  $v_1 = 8$  km/h u odnosu na vodu. Pri vraćanju čamac ima istu brzinu u odnosu na vodu. Kolika je brzina reke ako je vraćanje čamca trajalo  $t = 2,5$  h?

11. Između dva grada koji leže na istoj reci saobraća parobrod. Putovanje između gradova uzvodno traje  $t_1 = 9$  h, a nizvodno  $t_2 = 4$  h. Kolika je srednja brzina reke u odnosu na obalu, a kolika brzina parobroda u odnosu na vodu? Rastojanje između gradova je  $d = 72$  km.

12. Čovek, visine  $h = 1,8$  m, prođe stalnom brzinom  $v = 0,75$  m/s ispod uhlebe sijalice koja je na visini  $H = 4$  m iznad zemlje. Kolika je brzina vrha čovekove senke po zemlji?

13. Operu sluša gledalac u pozorištu i slušalac pored radio-aparata.

a) Na kom rastojanju od orkestra treba da sedi gledalac u pozorištu da bi prvi zvuk uvertire čuo istovremeno kada i slušalac pored radio-aparata koji se nalazi na udaljenosti  $d = 7500$  m od pozorišta?

b) Na kom rastojanju od prijemnika treba da se nalazi radio-slušalac da bi čuo prvi zvuk uvertire istovremeno kada i gledalac koji sedi u pozorištu na udaljenosti  $l_1 = 30$  m od orkestra?

Smatrati da je brzina prostiranja zvuka  $c = 340$  m/s, a svetlosti  $c_0 = 3 \cdot 10^8$  m/s.

14. Dva aviona lete jedan za drugim po istoj putanji, na rastojanju  $d = 1080$  m, jednakim brzinama  $v_1 = 1200$  km/h u odnosu na zemlju. Iz zadnjeg aviona se ispali granata na prvi avion. Brzina granate je  $v_2 = 300$  m/s u odnosu na avion. Posle kog vremena će granata da udari u prvi avion? Koliki put će da pređe avion za to vreme?

15. Protivtenkovsko oruđe gađa tenk. Granata udara u tenk posle vremena  $t_1 = 0,6$  s, dok se zvuk eksplozije čuje tek posle  $t_2 = 2,1$  s od trenutka ispaljivanja granate. Koliko je rastojanje oruđa od tenka? Kolika je srednja brzina granate? Smatrati da je brzina zvuka  $c = 340$  m/s.

16. Dužina jednog voza je  $l_1 = 500$  m, a drugog  $l_2 = 100$  m. Vozovi se kreću jedan prema drugom brzinama  $v_1 = 16$  m/s i  $v_2 = 20$  m/s. Za koje vreme će da prođe prvi voz pored jednog prozora drugog voza? Koliki put pređe drugi voz za ovo vreme?

17. Dva aviona lete jedan za drugim, jednakim brzinama, na rastojanju  $d = 750$  m. Sa prvog aviona ispali se metak čiji pucanj čuje pilot drugog aviona posle vremena  $t = 1$  s. Kolika je brzina aviona? Smatrati da je brzina zvuka  $c = 340$  m/s.

18. Dva grada se nalaze pored reke na rastojanju  $d = 1$  km. Brzina broda koji saobraća na ovoj relaciji, u odnosu na vodu, iznosi  $v_1 = 8$  km/h. Otvaranjem

i zatvaranjem brane na reci, voda je u jednom slučaju pokretna i teče brzinom  $v_2 = 2 \text{ km/h}$ , a u drugom slučaju je mirna. Naći odnos vremena koja su potrebna brodu da bi prešao ovu relaciju uzvodno i nizvodno u oba slučaja.

19. Izračunati dužinu puta koji pređe brod po reci (u odnosu na vodu) prema uslovima prethodnog zadatka.

20. Ako se brod kreće stalnom brzinom, u odnosu na vodu, na relaciji između dva grada, vožnja traje uzvodno  $t_1 = 6 \text{ h}$ , a nizvodno  $t_2 = 3 \text{ h}$ . Za koje vreme će brod da pređe ovu relaciju nizvodno sa isključenim motorima?

21. Dva tela se kreću po istoj pravoj. Kada se tela kreću jedno od drugog, rastojanje im se promeni za  $\Delta d_1 = 16 \text{ m}$  za vreme  $\Delta t_1 = 10 \text{ s}$ . U slučaju kada se tela kreću jedno ka drugom, rastojanje im se promeni za  $\Delta d_2 = 3 \text{ m}$  za vreme  $\Delta t_2 = 3 \text{ s}$ . Kolike su brzine tela?

22. Dva tela (1 i 2) krenu istovremeno iz iste tačke, u međusobno normalnim pravcima, brzinama  $v_1 = 30 \text{ km/h}$  i  $v_2 = 40 \text{ km/h}$ . Kako se menja rastojanje između tela u vremenu? Koliko je ovo rastojanje u trenutku kada prvo telo pređe put  $s_1 = 90 \text{ km}$ ?

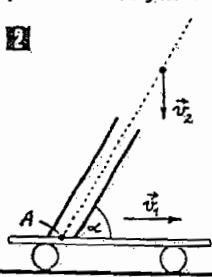
23. Dve čestice (1 i 2) kreću se stalnim brzinama  $v_1$  i  $v_2$  po dvema uzajamno normalnim pravolinijskim putanjama, i to prema tački njihovog preseka. U trenutku  $t = 0$  čestice su se nalazile na rastojanjima  $l_1$  i  $l_2$  od tačke preseka njihovih putanja.

a) Posle kog vremena će rastojanje između čestica da bude najmanje?

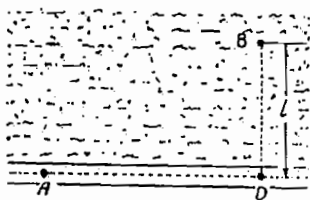
b) Koliko je ovo rastojanje?

24. Kolikom brzinom treba da leti avion i kakav kurs mora da održava da bi za vreme  $t = 1 \text{ h}$  preleteo u pravcu severa put od  $s = 300 \text{ km}$  ako za vreme puta duva severoistočni vetar brzinom  $v = 35 \text{ km/h}$ , pod uglom  $\alpha = 40^\circ$  prema meridijanu?

2



3



25. Na vagonu koji se kreće stalnom brzinom  $v_1 = 2 \text{ m/s}$  postavljena je uzana cev. Vrh cevi je postavljen u smer kretanja vagona i nalazi se pod uglom  $\alpha = 70^\circ$  prema horizontu. Kolika je brzina kapljice, koja pada stalnom brzinom  $v_2$  ako ona padne u tačku A ne dodirujući zidove cevi?

26. Iz tačke A, koja se nalazi na asfaltnom putu, biciklista treba da stigne u tačku B za najkraće vreme. Tačka B se nalazi na travnatom terenu i rastojanju  $l$  od puta. Brzina bicikliste je  $k$  puta manja na travnatom terenu nego na asfaltnom putu. Na kom rastojanju  $x$  od tačke D biciklista treba da side sa asfaltnog puta i da se uputi po pravoj putanji ka tački B?

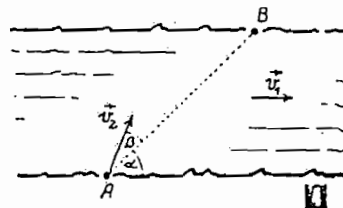
27. Motorni čamac prelazi reku širine  $d = 1 \text{ km}$ . Ako je prosečna brzina čamca u odnosu na vodu  $v_1 = 4 \text{ km/h}$ , a prosečna brzina rečnog toka  $v_2 = 2 \text{ km/h}$ , izračunati:

a) ugao pod kojim će se kretati čamac po reci ako se usmeri u pravcu koji je normalan na rečni tok,

b) ugao pod kojim bi trebalo da se usmeri čamac da bi se kretao po putanji koja je normalna na rečni tok,

c) odnos vremena prelazanja reke u ova dva slučaja.

28. Motorni čamac prelazi reku između tačaka A i B, koje su na rastojanju  $d = 400 \text{ m}$ . Brzina rečnog toka je  $v_1 = 2 \text{ m/s}$  i stalna je duž puta AB. Ugao putanje čamca prema obali je  $\alpha = 45^\circ$ . Kolikom brzinom  $v_2$  i pod kojim uglom  $\beta$  treba da se usmeri čamac da bi put ABA prešao za vreme  $t = 4 \text{ min}$ ? Ugao  $\beta$  je isti pri kretanju čamca u oba smera.



29. Dva čamca krenu iz istog mesta stalnim brzinama  $v_1$  i  $v_2$  u pravcima koji međusobno zaklapaju ugao  $\alpha$ .

a) Kolika je relativna brzina čamaca?

b) Koliko je njihovo rastojanje posle vremena  $t_0$  od polaska?

30. Na prvoj polovini pravolinijskog puta, koji zaklapa ugao  $\alpha_1 = 60^\circ$  prema referentnom pravcu, automobil se kreće brzinom  $v_1 = 72 \text{ km/h}$ . Međutim, na drugoj polovini pravolinijskog puta, koji zaklapa ugao  $\alpha_2 = 30^\circ$  prema istom referentnom pravcu, automobil se kreće brzinom  $v_2 = 36 \text{ km/h}$ . Kolika je srednja brzina automobila?

31. U toku prve polovine vremena kretanja, automobil se kreće brzinom  $v_1 = 54 \text{ km/h}$  po pravoj putanji koja zaklapa ugao  $\alpha_1 = 45^\circ$  prema referentnom pravcu. U toku druge polovine vremena kretanja, ovaj automobil se kreće brzinom  $v_2 = 72 \text{ km/h}$  po pravoj putanji koja zaklapa ugao  $\alpha_2 = 60^\circ$  prema istom referentnom pravcu. Kolika je srednja brzina automobila?

32. Na slici dat je dijagram brzine nekog tela. Nacrtati odgovarajući dijagram ubrzanja.

33. Dijagram ubrzanja nekog tela dat je na slici. Nacrtati odgovarajući dijagram brzine, smatrajući da je telo prethodno mirovalo.

34. Automobil se kreće stalnom brzinom  $v = 12 \text{ m/s}$ . Kočenjem se automobil zaustavi na putu dužine  $s = 60 \text{ m}$ .

a) Koliko je srednje ubrzanje automobila pri ovome?

b) Nacrtati dijagram brzine i ubrzanja automobila.

35. Iz pušćane cevi, dužine  $l = 0,6 \text{ m}$ , izleti metak brzinom  $v = 600 \text{ m/s}$ . Koliko je vreme kretanja metka kroz cev?

36. Telo se kreće stalnim ubrzanjem  $a = 14 \text{ cm/s}^2$ . Posle vremena  $t_1 = 3 \text{ s}$  od početka kretanja ima brzinu  $v_1 = 82 \text{ cm/s}$ .

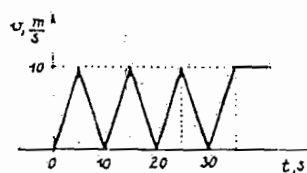
a) Kolika je početna brzina tela i pređeni put za vreme  $t_2 = 10 \text{ s}$ ?

b) Nacrtati dijagram brzine tela u funkciji vremena.

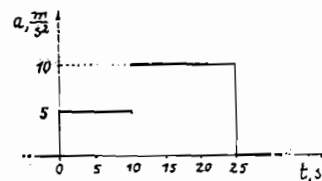
37. Sa rampe, dužine  $l = 7 \text{ m}$ , izbacila se raketa, čiji zadnji deo napusti rampu posle vremena  $t_1 = 0,35 \text{ s}$  od trenutka početka kretanja. Kolika je brzina rakete pri napuštanju rampe? Koliki će put raketa da pređe za vreme  $t_2 = 2 \text{ s}$  ako održava istu ubrzanje?

38. Telo ima srednje ubrzanje  $\langle a \rangle = 1 \text{ m/s}^2$  i brzinu  $v = 20 \text{ m/s}$  na kraju vremenskog intervala  $\Delta t = 10 \text{ s}$  od početka kretanja. Kolika je početna brzina tela, a koliki pređeni put tela za vreme  $t = 100 \text{ s}$ ?

3



3





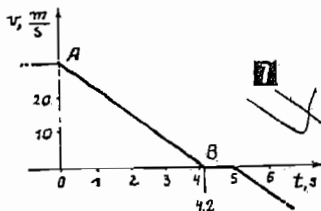
39. Ako ubrzanje trolejbusa pri polasku i kočenju ne sme da bude veće od  $a=1,2 \text{ m/s}^2$ , a njegova najveća brzina je  $v_{\text{max}}=40 \text{ km/h}$ , naći najkraće vreme za koje će trolejbus preći put između dve susedne stanice koje se nalaze na rastojanju  $l=2 \text{ km}$ .

40. Od trenutka zapažanja signala „stop“ pa do primene kočnice vozaču je potrebno vreme  $t_1=0,7 \text{ s}$ . Ako kočnice automobila mogu da ostvare usporenje od  $a=5 \text{ m/s}^2$ , izračunati dužinu puta koji će automobil preći od trenutka zapažanja signala pa do zaustavljanja. Brzina automobila pre početka kočenja iznosi  $v_0=100 \text{ km/h}$ .

41. Pored neke kontrolne stanice prođe automobil brzinom  $v=25 \text{ m/s}$ . Za njim krene motociklista ubrzanjem  $a=5 \text{ m/s}^2$ , i to posle vremena  $\Delta t=1 \text{ s}$  od trenutka prolaska automobila. Izračunati i prikazati grafički vreme i mesto gde će motociklista da stigne automobil, pod uslovom da motociklista održava stalno ubrzanje.

42. Telo se gurne uz strmu ravan početnom brzinom  $v_0=48 \text{ m/s}$ . Ako je ugao strme ravni  $\alpha=30^\circ$ , odrediti koliki će put telo preći po njoj do zaustavljanja, pod uslovom da je trenje zanemarljivo.

43. Automobil A pođe iz servisne stanice ubrzanjem  $a=4 \text{ m/s}^2$ . Za njim krene automobil B u istom smeru početnom brzinom  $v_0$  i istim ubrzanjem, ali posle vremena  $\Delta t=9 \text{ s}$  od trenutka polaska automobila A. Izračunati uslov pod kojim će automobil B stići automobil A. Posle kog vremena i na kom mestu će ga stići ako početna brzina drugog automobila iznosi  $v_0=40 \text{ m/s}$ ?



44. Na slici prikazan je dijagram brzine nekog tela. Odrediti karakteristiku ovog kretanja.

45. Dva tela krenu istovremeno iz iste tačke, međusobno normalnim pravcima. Jedno se kreće stalnom brzinom  $v=10 \text{ m/s}$ , dok se drugo kreće ubrzanjem  $a=5 \text{ m/s}^2$  bez početne brzine. Kako se menja rastojanje između tela? Koliko je ovo rastojanje posle vremena  $t=2 \text{ s}$  od početka kretanja?

46. Niz strmu ravan, nagibnog ugla  $\alpha=45^\circ$ , kreće se telo ubrzanjem  $a_1=10 \text{ m/s}^2$ . Strma ravan se istovremeno kreće po horizontalnom tlu ubrzanjem  $a_2=10\sqrt{2} \text{ m/s}^2$ . Smerovi kretanja strme ravni i tela su isti. Koliko je ubrzanje tela u odnosu na tle?

47. Pri ravnomerno ubrzanom kretanju, telo pređe u toku dva uzastopna vremenska intervala od  $\Delta t_1=\Delta t_2=\Delta t=4 \text{ s}$  puteve  $s_1=24 \text{ m}$  i  $s_2=64 \text{ m}$ . Kolika je početna brzina i ubrzanje tela?

48. Voz pođe iz stanice ravnomerno povećavajući svoju brzinu. Posmatrač koji se nalazi pored pruge na početku kompozicije ustanovi da je prvi vagon prošao pored njega za vreme  $t_1=4 \text{ s}$ . Koliko će vremena trajati prolazak 5. vagona pored posmatrača?

49. Vektor položaja tela menja se u toku vremena po zakonu

$$\vec{r}(t) = At^2\vec{i} + Bt\vec{j} + C\vec{k}$$

gde je  $A=5 \text{ m/s}^2$ ;  $B=3 \text{ m/s}$ ;  $C=2 \text{ m}$ , dok su  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — jedinični vektori X, Y, Z-osa. Odrediti:

- vektore brzine i ubrzanja tela,
- intenzitet brzine tela posle vremena  $t=2 \text{ s}$  od početka kretanja,
- intenzitet ubrzanja tela.

50. Vektor položaja tačke A u odnosu na koordinatni početak menja se u toku vremena po zakonu

$$\vec{r}(t) = bt\vec{i} - ct^2\vec{j}$$

gde su  $b, c$  — pozitivne konstante,  $\vec{i}, \vec{j}$  — jedinični vektori X, Y-osa. Odrediti:

- jednačinu putanje  $y=y(x)$  tačke A,
- vektore brzine i ubrzanja, kao i njihove intenzitete u funkciji vremena.

51. Vektor položaja tela menja se u toku vremena po zakonu

$$\vec{r}(t) = (1 - bt)kt\vec{r}_0$$

gde je  $\vec{r}_0$  — jedinični vektor,  $b$  i  $k$  — pozitivne konstante. Odrediti:

- vektor brzine i ubrzanja tela u funkciji vremena,
- vreme  $\Delta t$  posle koga se telo vraća u početni položaj,
- put koji telo pređe za vreme  $\Delta t$ .

52. Vektori početne i krajnje brzine tela određeni su relacijama

$$\vec{v}_0 = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} \quad \text{ i } \quad \vec{v}_k = E\vec{i} + F\vec{j} + G\vec{k}$$

gde je  $A=2 \text{ m/s}$ ;  $B=5 \text{ m/s}$ ;  $C=3 \text{ m/s}$ ;  $E=1 \text{ m/s}$ ;  $F=5 \text{ m/s}$  i  $G=7 \text{ m/s}$ , dok su

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — jedinični vektori X, Y, Z-osa.

a) Nacrtati vektore brzine ovog kretanja u Dekartovom koordinatnom sistemu.

- Odrediti vektor priraštaja brzine tokom kretanja tela.
- Koliki je intenzitet vektora priraštaja brzine?

53. Jednačina kretanja tela po X-osi ima oblik  $x(t)=kt^2$ , gde je  $k=10 \text{ m/s}^2$ . Kolika je brzina tela posle vremena  $t=5 \text{ s}$  od početka kretanja?

54. Jednačine kretanja tela su  $x(t)=bt^2$  i  $y(t)=ct^2$ , gde je  $b=4 \text{ m/s}^2$  i  $c=2 \text{ m/s}^2$ .

- Ustanoviti jednačinu putanje tela  $y=y(x)$  i nacrtati odgovarajuću zavisnost.
- Ustanoviti zavisnosti  $v=v(t)$  i  $a=a(t)$ .

55. Jednačina kretanja tela po X-osi ima oblik

$$x(t) = A + Bt^2 + Ct^3$$

gde je  $A=-1 \text{ m}$ ,  $B=3 \text{ m/s}^2$  i  $C=-2 \text{ m/s}^3$ . Koliki su:

- brzina i ubrzanje tela,
- vreme kretanja tela do zaustavljanja,
- maksimalna brzina tela i vreme za koje telo dostigne tu brzinu?

56. Vektor brzine tela određen je relacijom

$$\vec{v}(t) = A\vec{i} + Bt\vec{j} + Bt^2\vec{k}$$

gde su  $A, B, C$  — konstante,  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — jedinični vektori X, Y, Z-osa. Kolika je promena vektora položaja tela u vremenskom intervalu od trenutka  $t_1$  do trenutka  $t_2$ ?

57. Telo se kreće po XOY-ravni brzinom

$$\vec{v}(x) = b\vec{i} + cx\vec{j}$$

gde su  $b, c$  — pozitivne konstante,  $\vec{i}, \vec{j}$  — jedinični vektori X, Y-osa. U početku kretanja telo se nalazilo u koordinatnom početku. Ustanoviti jednačinu putanje tela  $y=y(x)$ .

58. Telo se kreće u pozitivnom smeru X-ose, tako što se intenzitet njegove brzine menja po zakonu  $v(x) = b\sqrt{x}$ , gde je  $b$  — pozitivna konstanta. Ustanoviti zavisnost:

- brzine i ubrzanja tela od vremena  $t$ ,
- srednje brzine tela od pređenog puta  $x$ .

59. Telo se kreće ravnomerno promenljivo ubrzanjem čiji intenzitet zavisi od brzine po zakonu  $a(x) = -k\sqrt{v}$ , gde je  $k$  — pozitivna konstanta. U početnom trenutku brzina tela je  $v_0$ .

- Koliko vremena se kreće telo do zaustavljanja?
- Koliki put pređe telo za to vreme?

60. U trenutku  $t=0$  telo je počelo da se kreće iz koordinatnog početka u pozitivnom smeru X-ose. Brzina tela menja se u toku kretanja po zakonu

$$v(t) = v_0 \left( 1 - \frac{t}{k} \right)$$

gde je  $v_0 = 16 \text{ m/s}$  i  $k = 8 \text{ s}$ .

- Ustanoviti zavisnost  $x = x(t)$ , tj. zavisnost pređenog puta tela od vremena.
- Koliko je ubrzanje tela?

## 2. Kinematika rotacionog kretanja

Ako se  $\vec{\theta}$  vektor ugaonog položaja tela (materijalne tačke) menja tokom vremena, to znači da telo rotira, pa je opšti oblik jednačine kretanja tela u ovom slučaju

$$\vec{\theta} = \vec{\theta}(t)$$

ili

$$\vec{\theta} = \theta(t) \vec{n}_0$$

gde je  $\vec{n}_0$  — jedinični vektor normalan na ravan putanje tela (ili paralelan osi rotacije). Prema tome, jednačina rotacionog kretanja u skalarnom obliku je

$$\theta = \theta(t)$$

gde je  $\theta$  — intenzitet vektora ugaonog položaja, ili ugaoni pomeraj.

Jedinica ugaonog pomeraja je

$$[\theta] = \text{rad}$$

Ugaona brzina tela  $\vec{\omega}$  naziva se brzina kojom se menja u vremenu njegov vektor ugaonog položaja  $\vec{\theta}$  ili, u matematičkom smislu, prvi izvod vektora ugaonog položaja tela po vremenu. Naime,

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$$

pri čemu su vektori  $\vec{\omega}$  i  $\vec{\theta}$  kolinearni i normalni na ravan putanje.

Ukoliko telo tokom rotacije poseduje tri stepena slobode, onda vektor njegove ugaone brzine ima tri komponente, čiji su intenziteti  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ , pri čemu je

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

tj.

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$$

U praksi je najčešća rotacija tela oko stalne ose rotacije, tj. rotacije u jednoj ravni, npr. XOY-ravni, kada je  $\omega_x = \omega_y = 0$ .

Ako se u toku vremena  $\Delta t$  vektor ugaonog položaja tela promeni za  $\Delta\vec{\theta}$ , onda je srednja ugaona brzina tela u tom vremenskom intervalu

$$\langle \vec{\omega} \rangle = \frac{\Delta\vec{\theta}}{\Delta t}$$

Jedinica ugaone brzine je

$$[\omega] = \frac{[\Delta\theta]}{[\Delta t]} = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Ugaono ubrzanje  $\vec{\alpha}$  tela naziva se brzina kojom se menja u vremenu njegova ugaona brzina  $\vec{\omega}$  ili, u matematičkom smislu, prvi izvod ugaone brzine tela po vremenu. Dakle,

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

a imajući u vidu definiciju brzine  $\vec{\omega}$ , dobija se da je

$$\vec{\alpha} = \frac{d^2\vec{\theta}}{dt^2}$$

Ako u toku vremena  $\Delta t$  nastane promena ugaone brzine  $\Delta\vec{\omega}$ , onda je odgovarajuće ugaono ubrzanje

$$\langle \vec{\alpha} \rangle = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$$

Jedinica ugaonog ubrzanja je

$$[\alpha] = \frac{[\Delta\omega]}{[\Delta t]} = \frac{\frac{\text{rad}}{\text{s}}}{\text{s}} = \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Ako je  $\vec{r}$  vektor položaja tela koje se kreće u ravni putanje brzinom  $\vec{v}$  (linijska brzina), pri čemu je njegova ugaona brzina  $\vec{\omega}$ , onda je

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

odakle je intenzitet linijske brzine

$$v = \omega r \sin(\omega, \vec{r})$$

Normalno (radijalno) ubrzanje  $\vec{a}_n$  tela koje rotira posledica je promene pravca kretanja, tj. pravca linijske brzine  $\vec{v}$ . Ako je u datom trenutku linijska brzina tela  $\vec{v}$ , a odgovarajuća ugaona brzina  $\vec{\omega}$ , onda je normalno (radijalno) ubrzanje tela

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

odakle je njegov intenzitet

$$a_n = \omega v \sin(\omega, \vec{v})$$

Kako je  $\vec{\omega} \perp \vec{v}$  i  $v = \omega r$ , to je

$$a_n = \omega v = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

Tangencijalno ubrzanje  $\vec{a}_t$  tela posledica je promene intenziteta linijske brzine  $\vec{v}$ , usled čega telo poseduje odgovarajuće ugaono ubrzanje  $\vec{\alpha}$ . Veza između njih je

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

ili

$$a_t = \alpha r \sin(\alpha, \vec{r})$$

Kako je  $\vec{\alpha} \perp \vec{r}$ , to je

$$a_t = \alpha r$$

pri čemu je

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

Ukupno ubrzanje tela koje rotira je

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$

a njegov intenzitet

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

Pri ravnomernom kružnom kretanju je  $\vec{\omega} = \text{const}$ . Intenzitet ugaone brzine je

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

odakle je elementarni ugaoni pomeraj

$$d\theta = \omega dt$$

a ukupni pomeraj za vreme  $t$

$$\theta = \int \omega dt = \omega t + \theta_0$$

gde je  $\theta_0$  — početni ugao. Najčešće je  $\theta_0 = 0$ , pa je, tada

$$\theta = \omega t$$

ili

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

Vreme  $t$  koje odgovara ugaonom pomeraju  $\theta = 2\pi$  rad obeležava se sa  $T$  i naziva period rotacije, dok se njena recipročna vrednost  $1/T$  naziva frekvencija rotacije i obeležava sa  $\nu$ . Dakle, prema prethodnoj relaciji je

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Jedinica frekvencije je herc (Hz), pa je

$$[\nu] = \frac{1}{[T]} = \frac{1}{\text{s}} = \text{Hz}$$

Pri ravnomerno promenljivo kružnom kretanju je  $\vec{\alpha} = \text{const}$ .

Iz relacije za intenzitet ugaonog ubrzanja

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

nalazi se da je promena ugaone brzine tela  $d\omega$  za vreme  $dt$

$$d\omega = \alpha dt$$

odakle je ugaona brzina tela posle vremena  $t$

$$\omega = \int \alpha dt = \alpha t + C$$

gde je  $C$  — konstanta integraljenja. Kako je konstanta  $C$  jednaka početnoj ugaonoj brzini tela  $\omega_0$ , to je

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

Ugaoni pomeraj tela za vreme  $t$  je

$$\theta = \int \omega dt = \int (\omega_0 + \alpha t) dt$$

odakle je

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

ako je telo započelo rotaciju iz referentnog položaja.

Eliminisanjem vremena iz jednačina  $\omega = \omega(t)$  i  $\theta = \theta(t)$ , dobija se relacija

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$$

koja ima praktičan značaj.

Potrebno je imati u vidu da u svim prethodnim relacijama može da bude  $\alpha > 0$  ili  $\alpha < 0$ , zavisno od toga da li se ugaona brzina tela povećava ili smanjuje tokom rotacije.

### ANALOGNE RELACIJE KINEMATIKE TRANSLATORNOG I ROTACIONOG KRETANJA

| Translatorno kretanje                                     | Rotaciono kretanje   |
|---|--|
| $\vec{r} = \vec{r}(t)$                                    | $\vec{\theta} = \vec{\theta}(t)$   |
| $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$                           | $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$                                |
| $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2}$ | $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\theta}}{dt^2}$ |
| $v = at$  | $\omega = \alpha t$  |
| $v = v_0 + at$  | $\omega = \omega_0 + \alpha t$   |
| $s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$                            | $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$                           |
| $v^2 = v_0^2 + 2as$                                       | $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$                                  |

61. Kolikom se brzinom kreće neka tačka u Beogradu usled rotacije Zemlje oko sopstvene ose? Geografska širina Beograda je  $44^\circ 45'$ , dok je poluprečnik Zemlje 6 470 km.

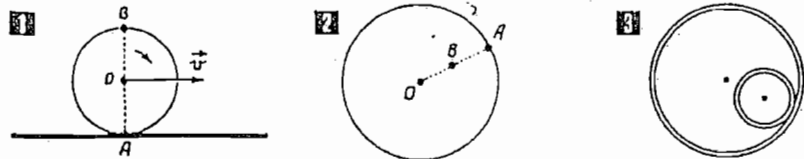
62. Dužina minutne kazaljke nekog časovnika je  $R=1,2$  m, a časovne  $r=1$  m. Kolike su ugaone brzine kazaljki, kao i brzine njihovih vrhova?

63. Kolike su brzine tačaka A i B na tačku bicikla koji se kreće brzinom  $v=40$  km/h?

64. Brzina tačke A na zamajcu je  $v_A=50$  m/s, a tačke B je  $v_B=10$  m/s. Ako je radijalno rastojanje  $AB=20$  cm, kolika je ugaona brzina zamajca, a koliki njegov poluprečnik?

65. U šupljem cilindru, poluprečnika  $R=18$  cm, nalazi se manji cilindar. Ugaona brzina većeg cilindra je  $\omega_1=10,5$  rad/s, a manjeg  $\omega_2=31,4$  rad/s. Ako između cilindara nema klizanja, izračunati poluprečnik manjeg cilindra.

66. Kalem konca je postavljen na horizontalnu ravan na dva načina prikazana na slici. Izračunati brzinu ose kalema u oba slučaja ako se namotani konac vuče brzinom  $v_1=0,5$  m/s. Poluprečnici kalema su  $R=4$  cm i  $r=R/2$ .



67. Frekvencija rotacije nekog tela je  $\nu=100$  Hz.  
a) Kolika je brzina tela ako ono rotira po kružnoj putanji poluprečnika  $r=1$  m?

b) Koliko je normalno ubrzanje tela?

c) Koliko treba da je ugaono ubrzanje tela da bi se ono zaustavilo posle trećeg obrtaja?

d) Koliko je ubrzanje tela neposredno posle početka kočenja?

68. Po horizontalnom glatkom putu kotrlja se točak poluprečnika  $R=0,5$  m, bez klizanja. Brzina tačka je  $v=2$  m/s. Izračunati linijske brzine tačaka na obodu točka, koje su pomerene za ugaon  $(\pi/2)$  rad u odnosu na tačku dodira točka sa zemljom.

69. Na slici dat je dijagram ugaone brzine nekog tela.

a) Objasniti ovo kretanje i napisati odgovarajuće jednačine.

b) Nacrtati dijagram ugaonog ubrzanja tela.

c) Koliko obrtaja učini telo za vreme  $t=8$  s?

70. Ugaona brzina nekog tela menja se prema dijagramu koji je prikazan na slici.

a) Nacrtati dijagram ugaonog ubrzanja tela u toku kretanja.

b) Koliko će obrtaja učiniti telo u toku kretanja?

71. Automobil se kreće po horizontalnoj kružnoj putanji, poluprečnika  $R=43$  m, ubrzanjem  $a=2$  m/s<sup>2</sup>. Početna brzina automobila je  $v_0=36$  km/h. Za koje vreme će automobil preći prvi krug?

72. Oko točka poluprečnika  $R=35$  cm namotano je uže na čijem kraju visi teret  $Q$ . U jednom trenutku teret počne da pada ubrzanjem  $a=2,5$  m/s<sup>2</sup>.

a) Kolika je ugaona brzina točka i linijska brzina tačaka na obodu točka u trenutku kada teret pređe put  $h=10$  m?

b) Koliko je ubrzanje tačke A u tom trenutku?

73. Osovina nekog motora obrće se stalnom ugaonom brzinom  $\omega_1=6000$  ob/min. Kočenjem se ugaona brzina osovine smanji na  $\omega_2=4800$  ob/min za vreme  $t=4$  s. Koliko je ugaono ubrzanje osovine i broj učinjenih obrtaja za vreme kočenja?

74. Ugaona brzina nekog točka smanji se ravnomerno od  $\omega_1=1200$  ob/min do  $\omega_2=600$  ob/min u vremenu  $\Delta t=10$  s.

a) Za koje će se vreme točak zaustaviti?

b) Koliko je vreme trajanja poslednjeg obrtaja?

75. Krećući se stalnom ugaonom brzinom  $\omega_0=4$  rad/s, telo dobije ugaono usporenje  $\alpha=0,5$  rad/s<sup>2</sup>. Kolika će da bude brzina tela posle:

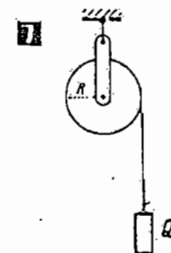
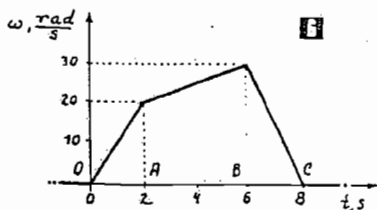
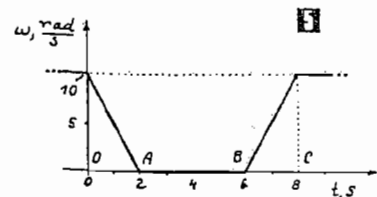
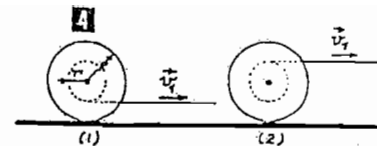
a) vremena  $t=1$  s.

b) ugaonog pomeraja od  $\theta=(\pi/3)$  rad.

c)  $N=2$  obrtaja?

d) Posle kog vremena će telo da stane?

e) Nacrtati dijagram ugaone brzine i ugaonog ubrzanja.



76. Zamajac, poluprečnika  $R=0,8\text{ m}$ , obrće se stalnom ugaonom brzinom  $\omega_0=7,5\text{ rad/s}$ . Pokretačka mašina zamajca u jednom trenutku prestane da deluje, ali se on još obrće tokom vremena  $t=24\text{ s}$ , pod dejstvom inercijalne sile. Koliko je ugaono ubrzanje zamajca, kao i tangencijalno ubrzanje tačke na periferiji zamajca tokom kočenja?

77. Automobil, čiji točkovi imaju prečnik  $D=0,60\text{ m}$ , kreće se po pravom putu brzinom  $v=60\text{ km/h}$ . Pri kočenju se automobil zaustavi posle pređenog puta  $s=20\text{ m}$ . Pod pretpostavkom da je usporenje automobila ravnomerno, izračunati ugaono ubrzanje njegovih točkova tokom kočenja.

78. Voz se kreće po kružnom železničkom koloseku, poluprečnika  $R=0,5\text{ km}$ , ugaonim ubrzanjem  $\alpha=0,0049\text{ rad/s}^2$ . Koliko je ubrzanje voza u trenutku kada je njegova brzina  $v=60\text{ km/h}$ ? Kolika je tada ugaona brzina točkova vagona ako je njihov poluprečnik  $r=0,5\text{ m}$ ?

79. Disk, poluprečnika  $R=12\text{ cm}$ , počne da se obrće ugaonim ubrzanjem  $\alpha=2\text{ rad/s}^2$ . Izračunati ubrzanje tačke na obodu diska posle vremena  $t=2\text{ s}$  od trenutka početka kretanja.

80. Točak, poluprečnika  $R=20\text{ cm}$ , počne da se obrće stalnim ugaonim ubrzanjem  $\alpha=6,28\text{ rad/s}^2$ . Kolika je brzina i ubrzanje tačke na obodu točka posle vremena  $t=5\text{ s}$  od početka kretanja?

81. Prilikom rotacionog kretanja materijalne tačke vektor njenog ugaonog pomeraja menja se tokom vremena po zakonu

$$\vec{\theta}(t) = Bt^3 \vec{n}_0$$

gde je  $B$  — konstanta, a  $\vec{n}_0$  — jedinični vektor normalan na ravan putanje materijalne tačke. Odrediti vektor:

- ugaone brzine i njegov intenzitet posle vremena  $t=t_0$ ,
- ugaonog ubrzanja i njegov intenzitet posle vremena  $t=t_0/6$ .

82. Prilikom uključivanja elektromotora njegov zamajac započne rotaciju tako da se vektor njegovog ugaonog pomeraja menja tokom vremena po zakonu

$$\vec{\theta}(t) = A\sqrt{t} \vec{n}_0$$

gde je  $A=2\text{ rad/s}^{1/2}$ ,  $\vec{n}_0$  — jedinični vektor kolinearan osi rotacije rotora. Koliki je intenzitet:

- ugaone brzine,
- ugaonog ubrzanja rotora posle vremena  $t=4\text{ s}$  od uključivanja motora?

83. Točak se obrće oko nepokretne ose tako da njegov ugaoni pomeraj zavisi od vremena po zakonu

$$\theta(t) = kt^2$$

gde je  $k=1\text{ rad/s}^2$ . Koliko je ukupno ubrzanje tačke na obodu točka posle vremena  $t=5\text{ s}$  od početka kretanja kada je linijska brzina ove tačke  $v=1\text{ m/s}$ ?

84. Prilikom rotacije ugaoni pomeraj tela menja se sa vremenom po zakonu

$$\theta(t) = A + Bt^2$$

gde su  $A=0,1\text{ rad}$  i  $B=0,2\text{ rad/s}^2$ .

- Kolika je ugaona brzina tela posle vremena  $t=3\text{ s}$  od početka kretanja?
- Koliko je ugaono ubrzanje tela?

85. Telo se kreće po kružnoj putanji ugaonom brzinom  $\omega$  čiji intenzitet zavisi od ugaonog pomeraja  $\theta$  po zakonu

$$\omega(\theta) = \omega_0 - k\theta$$

gde je  $\omega_0$  — početna ugaona brzina, a  $k=2\text{ 1/s}$ , pri čemu je ugaoni otklon  $\theta=0$  u trenutku  $t=0$ . Ustanoviti zavisnosti:

- $\theta(t)$ ,
- $\omega(t)$ .
- Posle kog vremena će ugaona brzina tela da opadne na  $\omega_0/2$ ?

86. Materijalna tačka se kreće po krugu, brzinom  $v(t)=bt$ , gde je  $b=1\text{ m/s}^2$ . Koliko je ukupno ubrzanje tačke u trenutku kada ona učini ugaoni pomeraj od  $\theta=0,6\pi\text{ rad}$ ?

87. Telo se kreće po krugu, poluprečnika  $R$ , tako da njegova brzina zavisi od pređenog puta  $s$  po zakonu  $v(s)=k\sqrt{s}$ , gde je  $k$  — konstanta. Ustanoviti zavisnost ugla  $\theta$  između vektora ukupnog ubrzanja i vektora brzine od pređenog puta.

88. Normalno ubrzanje tela koje se kreće po krugu, poluprečnika  $R$ , menja se sa vremenom po zakonu

$$a_n(t) = At + Bt^2$$

gde su  $A$  i  $B$  — konstante.

- Kolika je ugaona brzina tela?
- Koliko je tangencijalno, a koliko ukupno ubrzanje tela?

89. Jednačine kretanja tela su:

$$x(t) = A \cos \omega t; \quad y(t) = A \sin \omega t; \quad z(t) = Bt$$

gde je  $A=2\text{ m}$ ,  $B=4\text{ m/s}$  i  $\omega=5\text{ rad/s}$ . Koliki je poluprečnik krivine putanje ovog tela?

90. Vektor položaja materijalne tačke određen je relacijom

$$\vec{r}(t) = A + Bt^2 \vec{i} + Ct \vec{j}$$

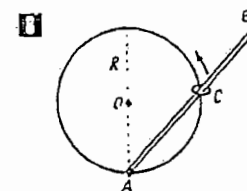
gde su  $A, B, C$  — konstante,  $\vec{i}, \vec{j}$  — jedinični vektori X i Y-osa. Odrediti:

- jednačinu putanje materijalne tačke,
- vektor brzine i ubrzanja materijalne tačke, kao i njihove intenzitete,
- intenzitet normalnog i tangencijalnog ubrzanja materijalne tačke.

91. Telo se kreće po krugu, poluprečnika  $R$ , tako što je u svakom trenutku njegovo tangencijalno ubrzanje po intenzitetu jednako normalnom ubrzanju. U početnom trenutku, tj. za  $t=0$ , brzina tela je  $v_0$ . Ako je kretanje tela usporeno, odrediti:

- brzinu tela u zavisnosti od vremena i pređenog puta,
- ukupno ubrzanje tela u funkciji brzine i pređenog puta.

92. Glatki metalni обруч, poluprečnika  $R=0,8\text{ m}$ , nalazi se u horizontalnoj ravni. Oko tačke A na обручу obrće se štap AB, stalnom ugaonom brzinom  $\omega=8\text{ rad/s}$ . Kolika je brzina i ubrzanje alke C na обручу kroz koju je provučen štap?



### 3. Kinematika kretanja tela u gravitacionom polju

Ako se telo izbací početnom brzinom  $\vec{v}_0$  u vertikalnom pravcu naniže, onda je  $\vec{a}=\vec{g}$ , gde je  $\vec{g}$  — ubrzanje slobodnog padanja, pa je za ovaj slučaj kretanja

$$v = v_0 + gt$$

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2gh$$

gde je  $h$  — visinska razlika koju pređe telo tokom vremena  $t$ .

Za slobodan pad tela je  $v_0 = 0$ , pa je tada

$$v = gt$$

$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

Kod vertikalnog hica naviše je  $\vec{a} = -\vec{g}$ , pa je

$$v = v_0 - gt$$

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v^2 = v_0^2 - 2gh$$

Ako se telo izbací početnom brzinom  $v_0$  u horizontalnom pravcu, njegova brzina  $v_x$  u tom pravcu neće se menjati tokom kretanja. Kako na ovo telo u vertikalnom pravcu de-

luje sila težće, ona telu saopštava ubrzanje  $\vec{a}=\vec{g}$  sa smerom naniže, pa se brzina tela  $v_y$  u ovom pravcu povećava ravnomerno tokom kretanja tela. Naime, komponente brzine tela kod horizontalnog hica su

$$v_x = v_0$$

$$v_y = -gt$$

odakle su jednačine kretanja tela

$$x = v_0 t$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2$$

93. Dva tela (A i B) slobodno padaju. Telo B pada sa visine  $h_B = 150$  m i padne ranije za vreme  $\Delta t = 3,5$  s od tela A. Sa koje visine je pušteno telo A?

94. Na visini  $H = 980$  m „stoji“ helikopter iz koga se ispusti bomba koja slobodno pada. Posle kog vremena će pilot helikoptera da čuje eksploziju bombe? Uzeti da je brzina zvuka  $c = 340$  m/s.

95. U neki ponor se pusti kamen da slobodno pada. Zvuk udara kamena o vodu čuje se posle vremena  $t = 4,9$  s od trenutka puštanja kamena. Kolika je dubina ponora? Smatrati da je brzina zvuka  $c = 340$  m/s.

Eliminisanjem vremena  $t$  iz prethodnih jednačina nalazi se jednačina putanje horizontalnog hica

$$y = -\frac{g x^2}{2v_0^2}$$

Kod kosog hica je, analogno,

$$v_x = v_0 \cos \alpha$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt$$

gde je  $\alpha$  — ugao — pod kojim je telo izbačeno. Odgovarajuće jednačine kretanja su

$$x = v_0 t \cos \alpha$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

a jednačina putanje kosog hica

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

Iz uslova  $v_y = 0$  nalazi se da je vreme kretanja tela do položaja najveće visine

$$t_0 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

i da je ona

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

odakle se nalazi da je visina optimalna za  $\alpha = 90^\circ$  i da je

$$y_{\text{opt}} = \frac{v_0^2}{2g}$$

što znači da je jednaka maksimalnoj visini kod vertikalnog hica naviše.

Iz uslova  $t = 2t_0$  dobija se da je domet tela

$$x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

odakle se nalazi da je domet optimalan za  $\alpha = 45^\circ$  i da je

$$x_{\text{opt}} = \frac{v_0^2}{g}$$

96. Čelična kuglica se pusti sa visine  $h = 1$  m na čeličnu ploču od koje se odbije, pri čemu smanji svoju brzinu za 10%. Isto se dešava i pri sledećem odbijanju kuglice od ploče. Koliko će da bude treće vreme padanja kuglice?

97. Telo slobodno pada sa visine  $h$ . U tački A ima brzinu  $v_A = 29,43$  m/s, a u tački B brzinu  $v_B = 49,05$  m/s. Kolika je visinska razlika tačaka A i B? Za koje će vreme telo preći put AB?

98. Dva tela padaju sa visine  $H = 7900$  m. Jedno telo je počelo da pada bez početne brzine, dok je drugom saopštena početna brzina  $v_0 = 200$  m/s sa smerom naniže. Kako se menja rastojanje između tela ako su počela da padaju istovremeno i iz iste tačke? Koliko je ovo rastojanje kada drugo telo padne na zemlju?

99. Jedno telo je pušteno slobodno sa visine  $H = 8000$  m, dok je istovremeno sa zemlje izbačeno drugo telo vertikalno naviše, početnom brzinom  $v_0$ , po istoj putanji po kojoj pada prvo telo. Kolika treba da bude brzina  $v_0$  pa da se tela sretnu na polovini puta?

100. Kolika je brzina prvog tela u odnosu na drugo telo iz prethodnog zadatka u trenutku njihovog susreta?

101. Telo, koje pada slobodno, pređe drugu polovinu puta za vreme  $\Delta t = 1$  s. a) Koliko je ukupno vreme padanja tela? b) Sa koje je visine pušteno telo?

102. Telo se baci početnom brzinom  $v_0 = 10$  m/s vertikalno naviše,

a) Koliku će visinu dostići telo?

b) Posle kog vremena će telo pasti na zemlju?

c) Kolika će biti brzina tela pri padu?

d) Nacrtati dijagram brzine i ubrzanja tela u toku kretanja.

103. Telo je bačeno vertikalno naviše, početnom brzinom  $v_0 = 10$  m/s, sa tornja visokog  $H = 25$  m. Koliko je vreme padanja tela, a kolika njegova brzina pri padu na zemlju?

104. Sa iste visine i u istom trenutku počnu da padaju dve kuglice, i to jedna kuglica bez početne brzine, a druga sa početnom brzinom  $v_0 = 20$  m/s. Prva kuglica padne kasnije za vreme  $\Delta t = 2$  s. Sa koje visine su kuglice puštene? Koliko je vreme padanja kuglica?

105. Na visini  $H = 400$  m iznad jezera „stoji“ helikopter iz koga se ispusti bomba. Bomba se kroz vazduh kreće bez trenja, a kroz vodu ubrzanjem  $a = 4,5$  m/s<sup>2</sup>. Bomba eksplodira pri udaru o dno jezera posle vremena  $t_2 = 22$  s od trenutka otpuštanja.

a) Kolika je dubina jezera?

b) Nacrtati dijagram brzine bombe.

106. Sa koje visine je pušteno telo da slobodno pada ako deonicu puta iznad zemlje, dužine  $\Delta h = 30$  m, pređe za vreme  $\Delta t = 0,6$  s?

107. U bunar nepoznate dubine baci se kamen brzinom  $v_0 = 20$  m/s. Zvuk udara kamena o vodu čuje se posle vremena  $t = 2$  s od trenutka bacanja kamena. Kolika je dubina bunara? Smatrati da je brzina zvuka  $c = 340$  m/s.

108. Balon se kreće vertikalno uvis brzinom  $v = 5$  m/s. U trenutku kada balon dođe na visinu  $H = 30$  m iz njega se izbací teret bez početne brzine.

a) Na kojoj visini se nalazi teret posle vremena  $t_1 = 2$  s od trenutka njegovog izbacivanja?

b) Koliko je vreme padanja tereta na zemlju?

109. Dva tela bačena su istovremeno iz jedne tačke na zemlji, i to jedno — vertikalno naviše, drugo — pod uglom  $\theta = 45^\circ$  prema horizontu. Njihove početne brzine su jednake i iznose  $v_0 = 30$  m/s. Koliko je rastojanje između tela posle vremena  $t = 2$  s od trenutka kada su bačena?

110. Ako organizam pilota može da izdrži najveće ubrzanje  $a_{max}=4,6g$ , izračunati najmanji poluprečnik krivine putanje aviona pri obrušavanju ako on leti stalnom brzinom  $v=200$  km/h.

111. Koliku je horizontalnu brzinu potrebno saopštiti telu na ekvatoru u smeru rotacije Zemlje da bi se ono kretalo paralelno Zemljinoj površini? Ubrzanje Zemljine teže na ekvatoru je  $g=9,78$  m/s<sup>2</sup>, a poluprečnik Zemlje u ekvatorijalnoj ravni  $R=6378,4$  km.

112. Na bregu, visine  $H=120$  m, iznad jezera nalazi se top iz koga se puca u horizontalnom pravcu prema jezeru. Početna brzina granate je  $v_1=320$  m/s. Izračunati mesto pada granate u vodu, njenu brzinu pri padu i ugao pod kojim granata padne na površinu vode.

113. Iz aviona, koji leti stalnom brzinom  $v=250$  km/h u horizontalnoj ravni, ispusti se bomba. Odrediti:

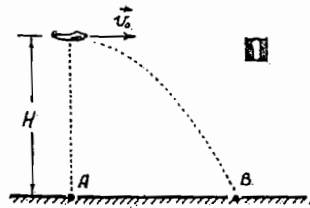
- položaj bombe posle vremena  $t=10$  s,
- brzinu bombe u tom trenutku,
- pravac kretanja bombe prema horizontu u tom trenutku.

114. Iz tri tačke na vertikalnoj obali istovremeno su izbačene tri jednake kuglice u horizontalnom pravcu, početnim brzinama  $v_{01}=50$  m/s,  $v_{02}=75$  m/s i  $v_{03}=100$  m/s. Prva kuglica padne na površinu vode na horizontalnom rastojanju od obale  $D_1=100$  m. Ako sve tri kuglice istovremeno padnu na vodu, izračunati:

- vreme padanja svake kuglice,
- visine  $h_1, h_2, h_3$  sa kojih su kuglice izbačene,
- brzine kuglice  $v_1, v_2, v_3$  u trenutku pada u vodu.

115. Avion leti na visini  $H=2000$  m po horizontalnom pravcu stalnom brzinom  $v_0=300$  m/s. Iznad tačke A avion ispusti bombu koja slobodno pada. Koliko je:

- vreme padanja bombe,
- rastojanje AB?



116. Avion i brod se kreću u istoj vertikalnoj ravni, po paralelnim pravolinijskim putanjama, brod brzinom  $v_1$ , a avion brzinom  $v_2$ . Visina putanje aviona je  $h$ . Odrediti horizontalni razmak između broda i aviona pri kome je potrebno iz aviona ispustiti bombu da bi ona pala na brod, i to ako je smer kretanja broda i aviona:

- isti,
- suprotan.

117. Telo se baci u horizontalnom pravcu sa visine  $h=6$  m u odnosu na horizontalno tle. Telo padne na tle na udaljenosti  $l=10$  m od mesta bacanja.

- Kolika je početna brzina tela?
- Pod kojim uglom će telo pasti na tle?
- Ustanoviti jednačinu putanje tela.

118. Telo se baci pod uglom  $\alpha=30^\circ$  prema horizontu. Ako je brzina tela  $v=400$  m/s posle vremena  $t=2$  s od trenutka izbacivanja, izračunati njegovu početnu brzinu  $v_0$ .

119. Telo se baci početnom brzinom  $v_0=200$  m/s pod uglom  $\alpha=60^\circ$  prema horizontu. Izračunati komponente brzine tela  $v_x$  i  $v_y$  u početku kretanja, u trenutku kada se telo nalazi na najvećoj visini i u trenutku pada tela na horizontalnu ravan.

120. Topovsko zrno izleti iz cevi brzinom  $v_0=400$  m/s pod uglom  $\alpha=30^\circ$  prema horizontu. Izračunati udaljenost mesta pada zrna na horizontalnu ravan, kao i vreme kretanja zrna do mesta pada.



121. Iz topa se ispale dve rakete: jedna pod uglom  $\alpha_1=45^\circ$ , a druga pod uglom  $\alpha_2=30^\circ$  prema horizontu. Koliki je odnos:

- maksimalnih visina koje dostižu ove granate,
- dometa granata,
- vremena kretanja granata?

122. Raketa se izbaci pod uglom  $\alpha=70^\circ$  prema horizontu. Za vreme  $t_m=80$  s ona dostigne najveću visinu. Izračunati početnu brzinu rakete i položaj mesta pada na horizontalnu ravan.

123. Telo se izbaci početnom brzinom  $v_0$  pod uglom  $\alpha$  prema horizontu. Izračunati ugao pod kojim će telo da padne na horizontalnu ravan na rastojanju  $x$  od mesta izbacivanja.

124. Pod kojim uglom je potrebno baciti telo da bi:

- njegova najveća visina bila jednaka daljini mesta pada na horizontalnu ravan,
- daljina mesta pada na horizontalnu ravan bila jednaka visini koju telo dostigne pri izbacivanju vertikalno uvis, istom početnom brzinom?

125. Na kojoj će visini granata da udari u vertikalnu stenu koja se nalazi na udaljenosti  $x=4$  km od topa? Granata se izbaci početnom brzinom  $v_0=400$  m/s pod uglom  $\alpha=14^\circ$  prema horizontu.

126. Granata se izbaci početnom brzinom  $v_0=200$  m/s pod uglom  $\alpha=45^\circ$  prema horizontu. Koliko je potrebno da bude vreme „tempiranja“ granate da bi ona eksplodirala na visini  $h=10$  m pre pada na zemlju?

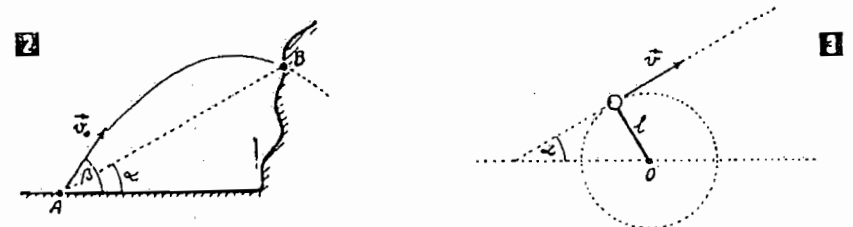
127. Raketa, mase  $m=8400$  kg, ispali se sa zemlje početnom brzinom  $v_0=350$  m/s, pod uglom  $\alpha=80^\circ$  prema horizontu. U trenutku kada raketa dostigne najveću visinu, iz nje se izbaci jedan njen deo, mase  $m_1=40$  kg, u suprotnom smeru, brzinom  $v=200$  m/s u odnosu na raketu. Kolika je brzina rakete neposredno posle izbacivanja ovog njenog dela?

128. Sa broda koji se kreće pravolinijski stalnom brzinom  $v$  izbaci se granata početnom brzinom  $v_0$  u smeru kretanja broda, pod uglom  $\alpha$  prema horizontu.

- Kolika je udaljenost broda od mesta eksplozije granate pri padu na vodu?
- Pod kojim je uglom  $\alpha_2$  potrebno izbaciti granatu da bi ona pala na brod? Napisati jednačinu putanje granate za ovaj slučaj.
- Koliko je vreme kretanja granate do pada na vodu (brod) u oba slučaja?
- Kolika bi trebalo da bude brzina broda u drugom slučaju da bi maksimalna visina granate bila jednaka putu koji pređe brod do trenutka kada granata padne na njega? Dimenzije broda zanemariti.

129. Iz minobacača se gađa objekt B. Izračunati položaj ovog objekta ako je početna brzina mine  $v_0=150$  m/s, a uglovi  $\alpha=30^\circ$  i  $\beta=60^\circ$ .

130. Tenk se kreće po pravoj putanji prema topu, stalnom brzinom  $v=3,6$  km/h. Izračunati početnu brzinu granate ispaljene iz topa pod uglom  $\alpha=30^\circ$ , pod uslovom da pogodi tenk koji se nalazio na rastojanju  $d=8$  km u trenutku ispaljivanja granate.



131. Sa morske obale, visine  $H=80$  m, izbaci se telo početnom brzinom  $v_0=100$  m/s pod uglom  $\alpha=45^\circ$  prema horizontu. Izračunati mesto pada tela na vodu, kao i vreme kretanja tela do trenutka pada na vodu.

132. Poluga, dužine  $l=1$  m, rotira stalnom ugaonom brzinom,  $\omega=314$  rad/s, oko ose koja prolazi kroz jedan njen kraj. Na drugom kraju poluge nalazi se malo telo, koje u jednom trenutku spadne sa poluge i počne da se kreće u tangencijalnom pravcu koji sa horizontom zaklapa ugao  $\alpha=45^\circ$ .

- a) Na kojoj udaljenosti će ono da padne na horizontalnu ravan?  
b) Koliku će najveću visinu dostići telo?

133. Raketa počne da se kreće vertikalno uvis stalnim ubrzanjem  $a_1=4g$ . Posle vremena  $t_0=8$  s od rakete se odvoji jedan njen deo koji se izbaci u stranu brzinom  $v_0=80$  m/s. Na kom mestu će da padne ovaj deo rakete na zemlju? Trenje zanemariti.

134. Iz aviona koji leti na visini  $H=1$  km, brzinom  $v_0=720$  km/h, pusti se bomba. Koliko je potrebno da bude vreme „tempiranja“ bombe da bi ona eksplodirala na visini  $h=100$  m pre pada na zemlju?

135. Sa obale, visine  $H=5$  m, baci se kamen u horizontalnom pravcu početnom brzinom  $v_0=25$  m/s. Kamen se pri padu na vodu odbije od nje pod istim uglom pod kojim je pao na nju. Izračunati položaj mesta ponovnog pada kamena na vodu.

136. Telo se baci sa morske obale početnom brzinom  $v_0=10$  m/s i pod uglom  $\alpha=-30^\circ$  prema horizontu. Izračunati položaj tela i njegovu brzinu posle vremena  $t=2$  s od trenutka izbacivanja.

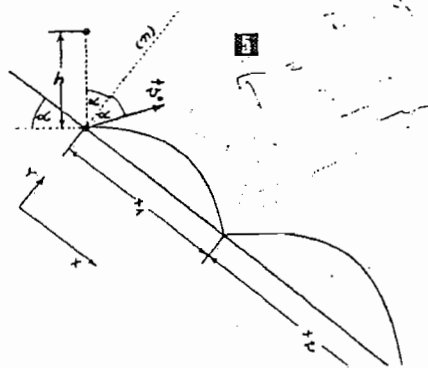
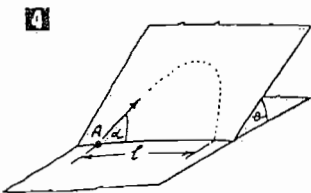
137. Kolikom najmanjom brzinom je potrebno baciti telo da bi palo na rastojanju  $D=64$  m? Zanemariti otpor vazduha i pretpostaviti da se mesto bacanja tela i mesto pada nalaze u istoj horizontalnoj ravni.

138. Telo se baci pod nekim uglom prema horizontu nekom početnom brzinom i padne na horizontalno tle posle vremena  $t=6$  s. Kolika je maksimalna visina tokom kretanja tela?

139. Metak iz puške probije dva vertikalno postavljena lista hartije koji se nalaze na međusobnom rastojanju  $d=20$  m. Mesto proboja na drugom listu hartije je  $h=2$  cm niže od mesta proboja na prvom listu hartije. Pod pretpostavkom da se metak kretao horizontalno pri proboju prvog lista, odrediti brzinu metka.

140. Iz tačke A na početku strme ravni, nagibnog ugla  $\theta=30^\circ$ , izbaci se telo početnom brzinom  $v_0=5$  m/s pod uglom  $\alpha=45^\circ$ .

- a) Na kojoj će udaljenosti  $l$  od tačke A telo ponovo doći na horizontalnu ravan?  
b) Do koje će maksimalne visine u odnosu na horizontalnu ravan dospeti telo?



141. Dva čelična bloka, visine  $h=0,5$  m, postavljena su tako da obrazuju vertikalnu pukotinu širine  $d=3$  cm. Ka pukotini se kotrlja čelična kuglica, brzinom  $v_0=1$  m/s, i propada u nju, nekoliko puta udara o zidove pukotine i pada na podlogu. Pravac kretanja kuglice pre pada u pukotinu normalan je na nju. Poluprečnik kuglice iznosi  $R=0,3$  cm.

Ako se udari kuglice o zidove pukotine mogu smatrati elastičnim, odrediti koliko će puta kuglica da udari u zidove pukotine pre pada na podlogu.

142. Kolikom najmanjom brzinom može da se prebaci kamen preko stene u vidu kvadra, širine  $l$  i visine  $H$ , ako se izbacuje sa visine  $h$ ?

143. Sa visine  $h$  telo padne na strmu ravan nagibnog ugla  $\alpha$ , od koje se odbije ne promenivši intenzitet brzine. Kolika su rastojanja  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  susjednih tačaka dodira tela i strme ravni?

## 4. Dinamika translatorskog kretanja

Ako telo ima masu  $m$  i ako je njegova zapremina  $V$ , onda je gustina supstancije od koje je ono načinjeno

$$\rho = \frac{m}{V}$$

dok je specifična zapremina tela

$$V_1 = \frac{V}{m}$$

Jedinice gustine i specifične zapemine su

$$[\rho] = \frac{[m]}{[V]} = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$[V_1] = \frac{[V]}{[m]} = \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

Impuls tela  $\vec{p}$ , čija je masa  $m$ , prilikom kretanja brzinom  $\vec{v}$ , određen je proizvodom

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Jedinica impulsa je

$$[p] = [m][v] = \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

Ako na telo deluju sile  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ , onda je rezultanta ovih sila

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

Ukoliko je rezultanta sila koje deluju na telo jednaka nuli, tj. ako je poligon sila zatvoren, tada su ove sile u ravnoteži.

Telo je izolovano ako na njega ne deluje ni jedna sila, a ako deluje više sila, one treba da budu u ravnoteži.

Prema I Njutnovom zakonu, izolovano telo se kreće ravnomerno pravolinijski, tj brzina izolovanog tela je

$$\vec{v} = \text{const}$$

što važi i za njegov impuls, pa je

$$\vec{p} = \text{const}$$

Prema II Njutnovom zakonu, sila  $\vec{F}$  koja deluje na telo jednaka je proizvodu mase tela  $m$  i ubrzanja  $\vec{a}$  koje ono dobija pod dejstvom sile, tj.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

ili

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Što znači da je sila koja deluje na telo jednaka brzini promene njegovog impulsa ili, u matematičkom smislu, prvom izvodu impulsa tela po vremenu.

Imajući u vidu da je  $\vec{p} = m\vec{v}$ , prema prethodnoj relaciji je

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

Kako je u većini slučajeva  $m = \text{const}$ , to je najčešće

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Dejstvo sile  $\vec{F} = m\vec{a}$  oseća se u inercijalnom sistemu referencije, dok u neinercijalnom sistemu referencije (sistemu referencije vezanom

za telo) na telo deluje i inercijalna sila  $\vec{F}_I = -m\vec{a}$ . Tako je u ovom sistemu, prema D'alamberovom principu, uspostavljena dinamička ravnoteža sila  $\vec{F}$  i  $\vec{F}_I$ , te je u njemu

$$\vec{F} + \vec{F}_I = 0, \text{ tj. } F = F_I$$

Jedinica sile je njutn (N), pa se prema relaciji  $F = ma$  dobija da je

$$[F] = [m][a] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{N}$$

Slobodna tela padaju ubrzanjem  $g$ , tj. ubrzanjem slobodnog padanja. Ono je posledica uzajamnog dejstva Zemlje i tela, tj. sile teže  $\vec{P}$  na telo. Prema II Njutnovom zakonu je

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

pri čemu treba imati u vidu da je napadna tačka sile teže težište tela.

Težišna tela  $\vec{Q}$  je sila kojom telo deluje na podlogu (ili zateže uže o kome visi) usled uzajamnog dejstva tela i Zemlje. Uzrok dejstva tela na podlogu jeste deformacija graničnog sloja tela i podloge na mestu dodira, što znači da je težina tela rezultat uzajamnog dejstva tela i podloge. Napadna tačka težine tela nalazi se u podlozi na mestu njenog dodira sa telom.

Sila teže  $\vec{P}$  deluje na svako telo i njeno dejstvo ne može da se otkloni, dok težina tela  $\vec{Q}$  zavisi od stanja kretanja podloge. Sila  $\vec{P}$  je gravitaciona, a sila  $\vec{Q}$  električne prirode. Ove sile mogu stoga da se upoređuju jedino po intenzitetu. Naime, njihovi intenziteti su jednaki samo onda kada je podloga u mirovanju ili se kreće ravnomerno pravolinijski ( $\vec{v} = \text{const}$ ). Tada je

$$P = Q = mg$$

Ako se podloga kreće naniže ubrzanjem  $a$ , težina tela je

$$Q = m(g - a)$$

a ako se kreće naviše istim ubrzanjem, onda je

$$Q = m(g + a)$$

Ako je u prvom slučaju  $a = g$ , tj. ako podloga sa telom pada slobodno, onda je  $Q = 0$  i takvo telo se nalazi u jednom od vidova tzv. bestežinskog stanja.

Prema III Njutnovom zakonu, sile uzajamnog dejstva između dva tela jednake su po intenzitetu, istog su pravcu a suprotnog smera, pa je

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$$

gde je  $\vec{F}_{1,2}$  — sila kojom prvo telo deluje na drugo, a  $\vec{F}_{2,1}$  — sila kojom drugo telo deluje na prvo. O ravnoteži sila  $\vec{F}_{1,1}$  i  $\vec{F}_{2,1}$  ne može se govoriti jer one ne deluju na isto telo.

Ako se telo mase  $m$  kreće po krivolinijskoj putanji i ako u jednom trenutku ima normalno ubrzanje  $\vec{a}_n$ , prema II Njutnovom zakonu na telo deluje centripetalna sila

$$\vec{F}_{cp} = m\vec{a}_n$$

u inercijalnom sistemu referencije.

Ukoliko je u datom trenutku brzina tela  $v$ , a poluprečnik krivine njegove putanje  $r$ , intenzitet centripetalne sile je

$$F_{cp} = \frac{mv^2}{r}$$

U slučaju da se telo kreće po kružnoj putanji poluprečnika  $r$  ugaonom brzinom  $\omega$ , tj. linijskom brzinom  $v$ , intenzitet centripetalne sile je

$$F_{cp} = mv\omega = mr\omega^2$$

Centrifugalna sila  $\vec{F}_{cf}$  kao inercijalna sila javlja se u neinercijalnom sistemu u slučaju postojanja centripetalne sile  $\vec{F}_{cp}$ . To znači da je u sistemu referencije vezanom za telo uspostavljena dinamička ravnoteža sila  $\vec{F}_{cp}$  i  $\vec{F}_{cf}$ , pa je u njemu

$$\vec{F}_{cp} + \vec{F}_{cf} = 0, \text{ tj. } F_{cp} = F_{cf}$$

Centripetalnom silom telo deluje na podlogu po kojoj se kreće (ili zateže uže za koje je vezano), dok podloga deluje na telo centrifugalnom silom, prisiljavajući ga da se kreće po krivolinijskoj putanji.

Na telo koje se kreće u odnosu na neinercijalni sistem koji rotira, osim centrifugalne sile deluje i Koriolisova sila

$$\vec{F}_c = 2m(\vec{v} \times \vec{\omega})$$

čiji je intenzitet

$$F_c = 2mv\omega \sin(\vec{v}, \vec{\omega})$$

gde je  $m$  — masa tela,  $v$  — njegova brzina,  $\omega$  — ugaona brzina sistema.

Elastična sila  $\vec{F}_{el}$ , nastala pri elastičnoj deformaciji tela, određena je relacijom

$$\vec{F}_{el} = -k\vec{x}$$

gde je  $k$  — koeficijent krutosti elastičnog tela,  $\vec{x}$  — vektor pomeraja napadne tačke spoljašnje sile koja izvrši deformaciju  $x$  u pravcu svog dejstva.

Intenzitet sile trenja je

$$F_{tr} = \mu N$$

gde je  $\mu$  — koeficijent trenja,  $N$  — intenzitet normalne sile koja deluje na podlogu.

Ako je intenzitet vučne sile:

$$F < F_{tr} \text{ — telo stoji } (v = 0),$$

$$F = F_{tr} \text{ — telo se kreće stalnom brzinom } (v = \text{const}), \text{ pri čemu može i da stoji ako je ravnoteža sile uspostavljena pri stajanjju tela,}$$

$$F > F_{tr} \text{ — telo se kreće ravnomerno promenljivo, ubrzanjem}$$

$$a = (F - F_{tr})/m$$

gde je  $m$  — masa tela.

Ako na telo deluje sila  $\vec{F}$  tokom vremena  $dt$ , onda je odgovarajući impuls sile

$$d\vec{I}_F = \vec{F} dt$$

a ako sila deluje u vremenskom intervalu  $\Delta t = t_2 - t_1$ , odgovarajući ukupni impuls sile je

$$\vec{I}_F = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

Ukoliko na telo, mase  $m$ , deluje stalna sila ( $\vec{F} = \text{const}$ ) tokom vremenskog intervala  $\Delta t$ , pri čemu se impuls tela promeni od  $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$  do  $\vec{p}_2 = m\vec{v}_2$ , na osnovu II Njutnovog zakona je  $\vec{F} dt = m d\vec{v}$ , pa je

$$\vec{F} \cdot \Delta t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

tj.

$$\vec{I}_F = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

što znači da je impuls sile koji je delovao na telo jednak promeni impulsa tela.

Impuls sistema  $n$  tela jednak je zbiru impulsa pojedinih tela  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \dots, \vec{p}_n$ , tj.

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$$

Izolovan sistem je onaj na koji ne deluju spoljašnje sile, ili ako deluju, one treba da budu u ravnoteži. Prema zakonu održanja impulsa, impuls izolovanog sistema tela je stalan, tj.

$$\sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \text{const}$$

Na putu  $d\vec{s}$  sila  $\vec{F}$  izvrši rad

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cdot ds \cos(\vec{F}, d\vec{s})$$

pri čemu je ukupan rad na putu  $s = s_2 - s_1$

$$A = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Ukoliko je  $\vec{F} = \text{const}$ , ukupan rad je

$$A = Fr \cos(\vec{F}, \vec{s})$$

Jedinica rada je džul (J), pa je

$$[A] = [F][s] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$$

Kinetička energija tela, mase  $m$ , pri kretanju brzinom  $v$  je

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

Elastična potencijalna energija tela, čiji je koeficijent krutosti  $k$ , pri elastičnoj deformaciji za  $x$ , je

$$E_p = \frac{kx^2}{2}$$

Gravitaciona potencijalna energija tela, mase  $m$ , kada se nalazi na visini  $h$  u odnosu na referentni nivo (u slučaju da je  $h \ll R_Z$ , gde je  $R_Z$  — poluprečnik Zemlje) data je relacijom

$$E_p = mgh$$

gde je  $g$  — ubrzanje slobodnog padanja na putanji tela.

Jedinica energije je  $[E] = [A] = \text{J}$ .

Prema zakonu održanja mehaničke energije, mehanička energija izolovanog sistema tela je stalna, tj.

$$\sum_{i=1}^n (E_k + E_p)_i = \text{const}$$

Ako neka mašina izvrši rad  $dA$  za vreme  $dt$ , onda je snaga mašine u ovom vremenskom intervalu

$$P = \frac{dA}{dt}$$

što znači da je snaga mašine jednaka brzini kojom ona vrši rad.

Ukoliko mašina izvrši rad  $A$  za vreme  $t$ , onda je srednja snaga mašine u ovom vremenskom intervalu

$$\langle P \rangle = \frac{A}{t}$$

Imajući u vidu da je rad sile  $A = \vec{F} \cdot \vec{s}$ , onda je snaga mašine koja vrši rad (ako je  $\vec{F} = \text{const}$ )

$$P = \frac{d(\vec{F} \cdot \vec{s})}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

gde je  $\vec{v}$  — brzina tela nad kojim se vrši rad



u posmatranom trenutku. Dakle,

$$P = Fv \cos(\vec{F}, \vec{v})$$

Stepen korisnog dejstva mašine je

$$\eta = \frac{A_k}{A_{ul}} = \frac{P_k}{P_{ul}}$$

gdje su  $A_k, P_k$  — koristan rad, odnosno snaga, a  $A_{ul}, P_{ul}$  — uloženi rad, odnosno snaga.

Jedinica snage je vat (W), pa se prema relaciji  $P = A/t$  nalazi da je

$$[P] = \frac{[A]}{[t]} = \frac{J}{s} = W$$

144. Grumen kvarca sa zlatom mase  $m = 51$  g ima gustinu  $\rho = 8\,500$  kg/m<sup>3</sup>. Koliko ima zlata u ovom grumenu?

145. Koliki treba da bude odnos kličina destilovane vode i alkohola da bi se dobila tečnost gustine  $\rho = 800$  kg/m<sup>3</sup>? Pri mešanju vode i alkohola nastaje smanjenje zapremine smeše za 3% u odnosu na prvobitne zapremine komponenta.

146. Telo u obliku kocke, ivica  $a = 10$  cm, načinjeno je od metala gustine  $\rho = 8\,600$  kg/m<sup>3</sup>. Kolika je:

a) masa ove kocke na Zemlji a kolika na Meseću,

b) težina ove kocke na Zemljinom a kolika na Mesečevom tlu?

Ubrzanje slobodnog padanja na površini Zemlje iznosi  $g_Z = 9,81$  m/s<sup>2</sup>, a na površini Meseca  $g_M = 1,62$  m/s<sup>2</sup>?

147. Telo, mase  $m = 10$  kg, preneto je sa Zemlje na Mesec.

a) Kolika sila teže deluje na ovo telo na Zemlji a kolika na Meseću?

b) Koliku silu će pokazivati nepokretni dinamometar ako se o njega okači ovo telo na Zemlji a koliku ako se okači na Meseću?

c) Kolika je težina ovog tela kada se postavi na tle oba nebeska tela?

d) Kolika je težina ovog tela u raketi, pri njenom lansiranju sa Zemlje, u trenutku kada se raketa kreće vertikalno uvis ubrzanjem  $a = 4$  g?

e) Ako su isti uslovi lansiranja rakete i sa Meseca, kolika će tada biti težina ovog tela u raketi?

Ubrzanje Zemljine teže je  $g_Z = 9,81$  m/s<sup>2</sup>, a Mesečeve teže  $g_M = 1,62$  m/s<sup>2</sup>.

148. Dve lopte jednakih masa,  $m_1 = m_2 = 2$  g, kreću se jednakim brzinama,  $v_1 = v_2 = 20$  cm/s, po putanjama koje su međusobno normalne. Koliki je impuls obe lopte?

149. Padajući sa visine  $h = 2$  m loptica, mase  $m = 20$  g, udara u strmu ravan, nagibnog ugla  $\alpha = 45^\circ$ , od koje se odbije u horizontalnom pravcu ne promenivši intenzitet brzine. Kolika je promena impulsa loptice pri odbijanju?

150. Na telo, mase  $m = 200$  g, deluje sila intenziteta  $F = 20$  N u vremenskom intervalu  $\Delta t = 0,03$  s. Koliki je impuls sile i brzina tela posle prestanka dejstva sile ako je telo prethodno mirovalo?

151. Na telo deluje sila intenziteta  $F = 4$  N u toku vremena  $\Delta t = 4$  s. Kolika je masa tela ako se tokom dejstva sile njegova brzina promenila za  $\Delta v = 2$  m/s?

152. Lopta, mase  $m = 20$  g, udara brzinom  $v = 10$  cm/s u stenu pod pravim uglom, od koje se odbije u istom pravcu. Ako je udar trajao  $\Delta t = 0,1$  s, izračunati impuls sile koji je stena saopštila lopti, kao i veličinu srednje sile kojom lopta deluje na stenu.

153. Metalna kuglica, mase  $m = 10$  g, slobodno pada sa visine  $H = 30$  m. Kuglica padne na glatku metalnu ploču, od koje se odbije ne promenivši intenzitet brzine. Ako je dodir kuglice sa pločom trajao  $\Delta t = 1$  ms, izračunati intenzitet impulsa sile, kao i srednji intenzitet sile kojom kuglica deluje na ploču.

154. Dva čamca se nalaze na jezeru. Masa prvog čamca je  $m_1 = 200$  kg. a drugog  $m_2 = 450$  kg. Između čamaca se nalazi razapeto uže. Čovek iz prvog čamca vuče uže silom intenziteta  $F = 200$  N. Izračunati brzinu prvog čamca u od-

nosu na obalu i u odnosu na drugi čamac, posle vremena  $t = 2$  s od početka vučenja. Pretpostaviti da su čamci prethodno mirovali.

155. Iz topa, mase  $m_1 = 1,8$  t, ispalili se granata mase  $m_2 = 1$  kg, pod uglom  $\alpha = 30^\circ$  prema horizontu početnom brzinom  $v_0 = v_2 = 360$  m/s. Kolika je:

a) brzina trzaja topa,

b) srednje usporenje topa ako on posle trzaja pređe put  $s = 2$  m?

156. Na zaustavljenom železničkom vagonu, mase  $m_1 = 8$  t, nalazi se raketna rampa sa koje rakete poleću brzinom  $v_0 = 1000$  m/s. Istovremeno se lansiraju dve rakete, svaka mase  $m_1 = 80$  kg, u horizontalnom pravcu, koji se poklapaju sa pravcem šina. Za koliko se pomeri vagon pri ovome ako je ukupni koeficijent trenja pri kretanju vagona  $\mu = 0,06$ ?

157. Granata leti u horizontalnom pravcu brzinom  $v_0 = 15$  m/s. Ona se pri eksploziji raspadne na dva dela, čije su mase  $m_1 = 0,5$  kg a  $m_2 = 1$  kg. Brzina većeg dela granate je  $v_2 = 30$  m/s. Pravci kretanja delova granate se poklapaju sa prvobitnim pravcem kretanja granate. Kolika je brzina manjeg dela granate?

158. Na helikopteru, mase  $m_1 = 2,5$  t, koji „stoji“ u vazduhu, vise lestvice na kojima se nalazi čovek, mase  $m_2 = 80$  kg. Izračunati brzinu i smer kretanja helikoptera ako se čovek penje uz lestvice stalnom brzinom  $v = 0,5$  m/s u odnosu na njih.

159. Preko kotura je prebačeno elastično uže. U tačkama A i B na užetu nalaze se dva čoveka jednakih masa,  $m_A = m_B = m$ . Šta će se desiti sa čovekom B ako čovek A počne da se penje uz užu stalnom brzinom  $v$  u odnosu na užu? Poluprečnik kotura je  $R$ . Masu užeta, kotura i trenje zanemariti.

160. Dva jednaka čamca, čije su mase po  $m = 180$  kg, kreću se paralelnim pravcima, jedan drugom u susret jednakim brzinama  $v_0 = 3$  m/s u odnosu na obalu jezera. U trenutku mimoilaženja, sa jednog čamca se prebaci paket, mase  $m_1 = 20$  kg, na drugi čamac, a zatim se isti paket prebaci sa drugog čamca na prvi. Pri sledećem susretu jednaki paketi se razmenjuju istovremeno. Ako se zanemari trenje između čamaca i vode, pri kojem će susretu brzine čamaca posle prebacivanja paketa da budu veće?

161. Krećući se brzinom  $v = 400$  m/s granata se u jednom trenutku raspadne na dva jednaka dela, pri čemu svaki od njih krene po pravcu koji zaklapa ugao  $\alpha = 30^\circ$  prema prvobitnom pravcu. Kolike su brzine kretanja delova granate?

162. Pri lansiranju rakete, mase  $m = 200$  kg, trenutno sagori 1/4 njene sadržine i izbacila se u suprotnom smeru (od smera kretanja rakete) u vidu produkata sagorevanja. Ako je brzina produkata sagorevanja u odnosu na raketu  $v_1 = 1800$  m/s, kolika je početna brzina rakete? Na kojoj udaljenosti od mesta lansiranja će pasti raketa ako je lansirana pod uglom  $\alpha = 30^\circ$  prema horizontu?

163. Telo, mase  $m = 200$  g, vezano za užu dužine  $l = 0,5$  m, rotira u vertikalnoj ravni. Izračunati najveću ugaonu brzinu sistema pod uslovom da se uže ne prekine. Uže kojim je vezano telo kida se pri sili zatezanja intenziteta  $F_{max} = 295$  N.

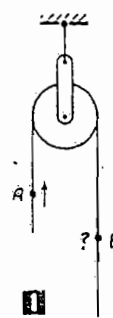
164. Automobil, mase  $m$ , kreće se stalnom brzinom  $v$  po:

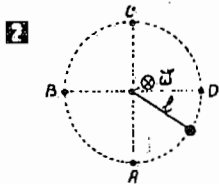
a) horizontalnom putu,

b) ispupčenom mostu, poluprečnika krivine  $R$ ,

c) po ulegnutom mostu istog poluprečnika krivine.

Kolikom silom deluje automobil na podlogu, tj. kolika je težina automobila u sva tri slučaja? Odrediti intenzitet ovih sila kada se automobil nalazi na sredini mosta.





165. Telo, mase  $m=1$  kg, vezano je na kraju užeta dužine  $l=0,5$  m. Uže sa telom rotira u vertikalnoj ravni stalnom ugaonom brzinom  $\omega=10$  rad/s. Kolika je sila zatezanja užeta kada je telo u tačkama A, B, C, D?

166. Leteći brzinom  $v=600$  km/h avion napravi „petlju“ u vertikalnoj ravni poluprečnika  $R=600$  m. Kolikom silom deluje pilot, mase  $m=80$  kg, na svoje sedište u trenutku kada se avion nalazi u najvišoj, a kolikom kada se nalazi u najnižoj tački putanje?

167. Na osovini motora koji rotira stalnom ugaonom brzinom  $\omega=6000$  ob/min nalaze se dva jednaka tela mase  $m=0,5$  kg. Rastojanje od centra rotacije do težišta tela je  $R=0,3$  m. U početku rotacije položaj tela je simetričan, pa na osovinu motora ne deluje nikakva sila kao posledica rotacije sistema. U nekom trenutku jedno telo poveća svoje rastojanje za 10%. Kolikom silom ovako neuravnotežen sistem deluje na osovinu? Masu poluge zanemariti.

168. Dva tela, jednakih masa  $m$ , povezana su užetom kroz otvor na horizontalnoj podlozi. Jedno telo se nalazi na podlozi i po njoj rotira, dok drugo visi u vazduhu. Koliku ugaonu brzinu treba da ima telo koje rotira da bi telo koje visi ostalo na istom nivou? Poluprečnik putanje tela na podlozi je  $R$ . Sva trenja zanemariti.

169. Matematičko klatno, dužine  $l$ , izvedeno je iz ravnotežnog položaja za ugao  $\theta=60^\circ$  pa je pušteno da slobodno osciluje. Pri prolasku klatna kroz ravnotežni položaj, konac klatna naiđe na osovinu O, koja je na rastojanju  $l/2$  od tačke vešanja klatna. Kolika je promena intenziteta sile zatezanja konca pri njegovom udaru o osovinu O?

170. Na dnu šuplje sfere, unutrašnjeg poluprečnika  $R$ , nalazi se mala količina peska. Odrediti gde će se nalaziti pesak u sferi tokom njene rotacije oko vertikalne ose ugaonom brzinom  $\omega$ . Trenje peska o zidove sfere zanemariti.

171. Da bi se odredio koeficijent trenja između asfaltnog puta i gume, izveden je sledeći ogled. Na put je postavljeno telo, mase  $m=100$  kg, obloženo gumom. Pod dejstvom vučne sile, intenziteta  $F=196$  N, telo se po putu kretalo ravnomerno. Koliki je koeficijent trenja između gume i puta?

172. Čovek, mase  $m=85$  kg, stoji na podu tramvaja koji se kreće stalnim ubrzanjem  $a=3$  m/s<sup>2</sup>. Koeficijent trenja između poda tramvaja i čovekovih cipela iznosi  $\mu=0,1$ . Izračunati intenzitet:

- inercijalne sile koja deluje na čoveka,
- sile koju čovek treba da savlada držeći se za ručicu pored sebe,

c) normalne sile kojom bi čovek trebalo da se odupre u vertikalnom pravcu (sa smerom naniže) da bi sprečio klizanje.

173. Na platformi sa točkovima, mase  $m_1=40$  kg, nalazi se telo mase  $m_2=4$  kg. Koeficijent trenja između tela i platforme je  $\mu=0,2$ . Ako se na telo deluje silom intenziteta  $F_1=2$  N, telo se po platformi ne pomeri, dok pri dejstvu silom intenziteta  $F_2=100$  N dolazi do pomeranja tela. Izračunati intenzitet sile trenja i ubrzanje platforme u oba slučaja. Trenje platforme o podlogu zanemariti.

174. Da bi lokomotiva povukla dugu i tešku kompoziciju, najpre se lokomotivom deluje unapred pa unazad itd. Objasniti ovaj postupak.

175. Kuglica, mase  $m=20$  g, nalazi se na vertikalnoj ploči koja se kreće translatorsno ubrzanjem  $a_1=4g$  u horizontalnom pravcu.

- Kolikom silom kuglica deluje na ploču?
- Ako je koeficijent trenja između kuglice i ploče  $\mu=0,5$ , odrediti ubrzanje ploče  $a_2$  pri kome će kuglica početi da pada.
- Ako je ubrzanje ploče  $a_3=g$ , koliko će vremena kuglica padati sa visine  $h=10$  cm?

176. Tegljač, mase  $m_2$ , vuče stenu, mase  $m_1=7$  t, po horizontalnom zemljištu. Ako je koeficijent trenja između stene i podloge  $\mu_1=0,4$ , a između tegljača i podloge  $\mu_2=0,2$ , izračunati potrebnu masu tegljača da bi vučenje bilo moguće.

177. Koliki je najveći ugao koji može da zauzme biciklista prema putu (ako se kreće po pravoj putanji) bez bojazni da padne? Koeficijent trenja između bicikla i puta je  $\mu$ .

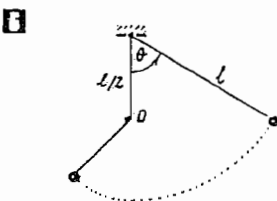
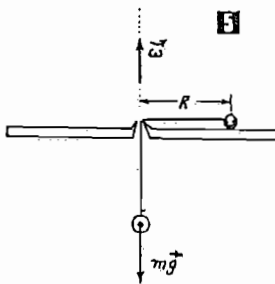
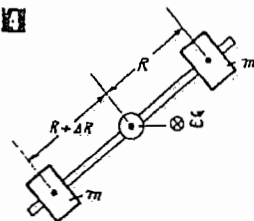
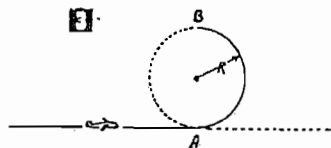
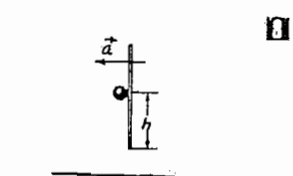
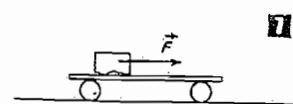
178. Motociklista uleti u vertikalni „cilindar smrti“, poluprečnika  $R=15$  m, brzinom  $v$ . Ako je koeficijent trenja između podloge i točkova motocikla  $\mu=0,4$ , kolika treba da bude brzina  $v$  pa da motociklista ne padne?

179. Kolikom najvećom brzinom može da se kreće automobil po horizontalnoj kružnoj putanji, poluprečnika  $R=30$  m, pod uslovom da ne klizi? Koeficijent trenja između podloge i točkova je  $\mu=0,25$ .

180. Na platformi, koja se obrće stalnom ugaonom brzinom  $\omega=10$  rad/s, nalazi se telo, mase  $m=20$  kg, na rastojanju  $R=0,5$  m od centra rotacije. Platforma rotira u horizontalnoj ravni. Kolika centrifugalna sila deluje na telo? Odrediti ugaonu brzinu platforme pri kojoj će telo početi da klizi po njoj ako je koeficijent trenja između tela i podloge  $\mu=0,2$ .

181. Na platformi kamiona bez bočnih strana nalazi se sanduk mase  $m=1200$  kg. Kolikim najvećim ubrzanjem kamion sme da krene bez opasnosti da sanduk padne sa platforme? Koeficijent trenja između sanduka i platforme je  $\mu=0,3$ .

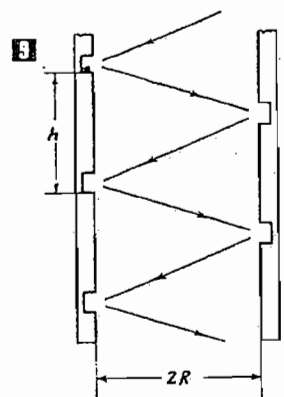
182. U dugoj metalnoj cevi, poluprečnika  $r=2$  cm, nalazi se metalni čep, dužine  $l=4$  cm, koji je postavljen u cev dok je ona imala višu temperaturu nego čep. Posle hlađenja čep trpi pritisak  $p=40$  kPa. Izračunati intenzitet aksijalne sile kojom se čep može izvući. Smatrati da pri ovome ne nastaje trajna deformacija cevi i čepa. Koeficijent trenja između cevi i čepa je  $\mu=0,3$ .



183. Lokomotiva sa vagonima ima masu  $m=400\text{ t}$ , dok je koeficijent trenja između točkova i šina  $\mu=0,04$ . Kolika treba da bude vučna sila lokomotive da bi kompozicija dobila brzinu  $v=40\text{ km/h}$  u toku vremena  $t=120\text{ s}$ ?

184. Da bi se odredio koeficijent trenja između hrastove daske i tela načinjenog od istog materijala, izveden je sledeći ogled. Drvena kocka, mase  $m=2\text{ kg}$ , postavi se na dasku čiji se jedan krak diže, pri čemu se obrazuje štrma ravan. Tokom dizanja lupka se po dasci čekićem. Kada je ugao strme ravni  $\alpha=32^\circ$ , kocka počne da se kreće ravnomerno niz dasku. Koliki je koeficijent trenja između kecke i daske?

185. Automobil se kreće uz strmu ravan, nagibnog ugla  $\alpha=10^\circ$ , brzinom  $v_1=6\text{ m/s}$ . Pri kretanju niz strmu ravan brzina automobila je  $v_2=30\text{ m/s}$ , uz istu snagu njegovog motora. Kolika će da bude brzina automobila po horizontalnom putu uz iste uslove kretanja? Pretpostaviti da vučna sila ne zavisi od brzine, kao i da je koeficijent trenja jednak u sva tri slučaja.



186. Niz spiralni žleb  $R$ , poluprečnika  $R$  i koraka  $h$ , klizi malo telo. Koeficijent trenja između tela i zidova žleba je  $\mu$ . Kolika je brzina kojom se spušta telo niz žleb?

187. Železnička kompozicija, mase  $m=400\text{ t}$ , kreće se po šinama, pri čemu je koeficijent trenja takav da intenzitet sile trenja iznosi  $6/1000$ -ti deo intenziteta sile teže koja deluje na kompoziciju. Koliku će brzinu imati kompozicija ako se na nju deluje silom intenziteta  $F=60\text{ kN}$  tokom vremena  $\Delta t=50\text{ s}$ ? Pretpostaviti da je lokomotiva krenula iz mirovanja.

188. Kameni blok, mase  $m=200\text{ kg}$ , nalazi se na strmoj ravni nagibnog ugla  $\alpha=15^\circ$ . Da bi se blok kretao niz strmu ravan, potrebno je na njega delovati tangencijalnom silom  $F=490\text{ N}$ .

a) Koliki je koeficijent trenja između bloka i strme ravni ako je kretanje bloka ravnomerno?

b) Kolikom silom bi se mogao vući isti blok uz strmu ravan?

189. Na telo, mase  $m=1\text{ kg}$ , deluje stalna vertikalna sila intenziteta  $F=10,81\text{ N}$  sa smerom naviše. Do koje visine će telo dospeti ako na njega deluje ova sila tokom vremena  $t=10\text{ s}$ ?

190. Telo, mase  $m=160\text{ g}$ , baci se vertikalno naviše početnom brzinom  $v_0=100\text{ m/s}$ . Ono dostigne najveću visinu posle vremena  $t=80\text{ s}$ . Kolika je srednja otporna sila vazduha?

191. Pod dejstvom sile  $F$  telo pređe put  $s=30\text{ m}$  za vreme  $t=2\text{ s}$ . Masa tela je  $m=50\text{ g}$ . Koliki je intenzitet sile ako je telo pošlo iz mirovanja?

192. Lift, mase  $m=600\text{ kg}$ , koristi se u rudničkom šahtu, pri čemu je dozvoljeno ubrzanje lifta  $a=\pm 1,2\text{ m/s}^2$ . Kolika je:

a) najveća sila zatezanja užeta,

b) ova sila kada bi bilo  $a=g$ ,

c) sila zatezanja užeta kada lift stoji, a kolika kada se kreće ravnomerno?

193. Telo, mase  $m=50\text{ kg}$ , kreće se brzinom  $v_0=4\text{ m/s}$ . Na ovo telo deluje sila stalnog intenziteta  $F=30\text{ N}$ , tokom vremena  $t_0=2\text{ s}$  u suprotnom smeru od smera kretanja tela.

a) Za koliko će se smanjiti brzina tela usled dejstva sile?

b) Koliki bi trebalo da bude intenzitet sile da se telo (tokom njenog dejstva) zaustavi?

c) Nacrtati dijagram ubrzanja i brzine tela u ova dva slučaja.

194. Na telo, mase  $m=100\text{ kg}$ , deluje sila čiji je dijagram dejstva prikazan na slici. Nacrtati dijagram brzine i ubrzanja tela pod uslovom da je telo prethodno:

a) bilo u mirovanju,

b) imalo brzinu  $v=10\text{ m/s}$  u suprotnom smeru od početnog smera dejstva sile.

195. Na telo, mase  $m=5\text{ kg}$ , koje se nalazi u mirovanju, počne da deluje sila stalnog intenziteta  $F=100\text{ N}$ , čiji je dijagram dejstva prikazan na slici.

a) Koliko je ubrzanje tela tokom dejstva ove sile?

b) Koliku brzinu stekne telo tokom dejstva sile?

c) Nacrtati dijagram brzine i ubrzanja tela.

196. Dijagram brzine lifta prikazan je na slici. Masa lifta je  $m=600\text{ kg}$ . Kolika je sila zatezanja užeta lifta tokom njegovog kretanja?

197. Kolikom je silom potrebno delovati na lift, mase  $m=1000\text{ kg}$ , da bi se on kretao ubrzanjem  $a=2\text{ m/s}^2$ ?

198. Matematičko klatno se nalazi u vagonu koji se kreće ubrzanjem  $a$ . Kakva je zavisnost ugla odklona klatna  $\theta$  (u odnosu na vertikalni pravac) od ubrzanja vagona?

199. Vazdušni balon ima na svom donjem delu teret mase  $m$ . Pod dejstvom potisne sile  $F_p$  balon

sa teretom pada ubrzanjem  $a$ . Izračunati masu tereta  $\Delta m$  koju je potrebno odbaciti iz korpe balona da bi se on kretao nagore ubrzanjem istog intenziteta.

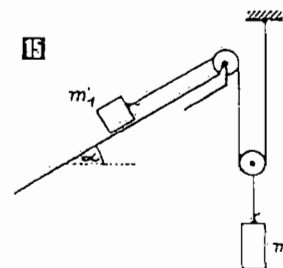
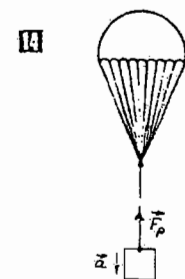
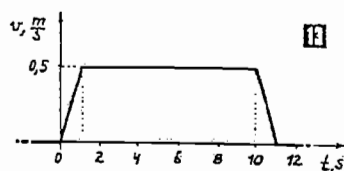
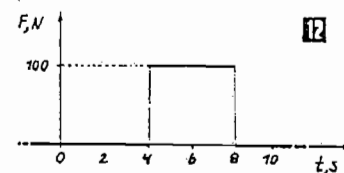
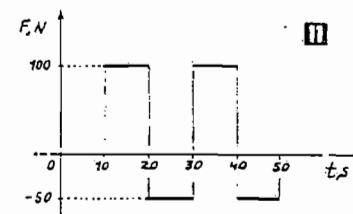
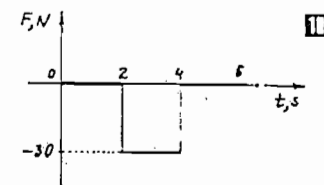
200. Dva tela, mase  $m_1=1\text{ kg}$  i  $m_2=5\text{ kg}$ , povezana su međusobno lakim nerastegljivim užetom na način prikazan na slici. Jedan kraj užeta pričvršćen je i nepokretan. Telo, mase  $m_1$ , klizi po strmoj ravni nagibnog ugla  $\alpha=30^\circ$ . Odrediti ubrzanje  $a_2$  tela mase  $m_2$ . Trenje i masu kotura zanemariti.

201. Telo, mase  $m$ , bačeno je pod uglom  $\alpha$  prema horizontu, početnom brzinom  $v_0$ . Zanemarujući otpor vazduha, odrediti koliki je priraštaj impulsa  $\Delta p$  tela tokom vremena  $t$  od početka kretanja.

202. Jednačine kretanja tela, mase  $m$ , jesu:

$$x = A \sin \omega t; \quad y = B \cos \omega t; \quad z = 0$$

gde su  $A, B, \omega$  — konstante.



Odrediti intenzitet i pravac sile  $\vec{F}$  koja deluje na telo u funkciji koordinata tela  $x, y$ .

203. Na telo u mirovanju, mase  $m$ , počne da deluje sila intenziteta  $F = A \sin \omega t$ , gde su  $A$  i  $\omega$  konstante.

a) Odrediti brzinu tela u funkciji vremena.

b) Koliki put pređe telo za vreme  $t$  od početka kretanja?

204. Na telo, mase  $m = 1$  kg, koje se nalazi na glatkoj horizontalnoj podlozi, deluje sila intenziteta  $F = mg/2$ . U toku pravolinijskog kretanja tela, ugao  $\theta$  između pravca dejstva sile i horizontalne podloge menja se po zakonu  $\theta = (\pi k)t$ , gde je  $s$  pređeni put tela (od početnog položaja), a  $k = 8$  m. Kolika je brzina tela u trenutku kada je ugao  $\theta = (\pi/2)$  rad?

205. Na telo u mirovanju, mase  $m = 1$  kg, počne da deluje sila čiji se intenzitet menja sa vremenom po zakonu  $F = kt^2$ , gde je  $k = 10$  N/s<sup>2</sup>. Sila deluje na telo tokom vremena  $\tau = 3$  s.

a) Koliki je impuls tela posle prestanka dejstva sile?

b) Koliki put pređe telo za vreme dejstva sile?

206. Na malo telo, mase  $m$ , koje se nalazi na glatkoj horizontalnoj podlozi, u trenutku  $t = 0$  počne da deluje sila  $\vec{F}$ , čiji se intenzitet menja tokom vremena po zakonu  $F = kt$ , gde je  $k$  konstanta. Pravac sile  $\vec{F}$  je stalan i zaklapa ugao  $\theta$  prema horizontalnoj ravni.

a) Kolika je brzina tela u trenutku kada ono napušta podlogu?

b) Koliki put pređe telo do tog trenutka?

207. Čamac, mase  $m$ , kreće se po jezeru brzinom  $v_0$  i jednog trenutka se isključi njegov motor. Ako je intenzitet otporne sile pri kretanju čamca srazmeran njegovoj brzini, tj.  $F_{ot} = -kv$ , gde je  $k$  konstanta, odrediti:

a) vreme kretanja čamca, do zaustavljanja,

b) brzinu čamca, u funkciji pređenog puta,

c) pređeni put čamca do zaustavljanja.

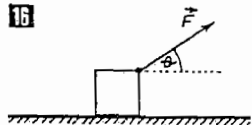
208. Prilikom probijanja grede, debljine  $D = 5$  cm, brzina metka se smanji od  $v_0 = 350$  m/s na  $v_1 = 250$  m/s. Otporna sila pri kretanju metka kroz gredu je  $F = -kv^2$ , tj. proporcionalna je kvadratu brzine metka, gde je  $k$  konstanta.

a) Ustanoviti zavisnost brzine metka od pređenog puta u gredi ako je masa metka  $m$ .

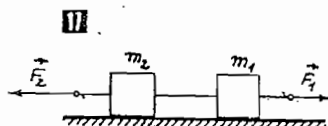
b) Koliko je vreme kretanja metka kroz gredu?

209. U nekoj železničkoj kompoziciji nalazi se  $n$  identičnih vagona mase  $m$ . Kompozicija se vuče silom intenziteta  $F$ . Kolika je sila zatezanja na pojedinim spojnicama između vagona? Trenje zanemariti.

16



17



210. Dva tela, mase  $m_1 = 10$  kg i  $m_2 = 20$  kg, vezana su užetom i postavljena na horizontalnu podlogu. Ako se telo mase  $m_2$  vuče silom intenziteta  $F = 20$  N, kolika je sila zatezanja užeta, a koliko ubrzanje sistema?

211. Dva tela, mase  $m_1 = 2$  kg i  $m_2 = 3$  kg, povezana su užetom, koje može da izdrži maksimalnu silu zatezanja  $F_{max} = 350$  N. Na tela deluju sile  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$ , čiji se intenzitet u funkciji vremena menja po zakonu  $F_1 = kt$  i  $F_2 = 2kt$ , gde je  $k = 10$  N/s. Posle koliko vremena od početka kretanja će doći do pucanja užeta? Trenje između tela i podloge je zanemarljivo.

212. Kojim minimalnim ubrzanjem treba da se kreće u horizontalnom pravcu telo A pod uslovom da se tela (1) i (2) ne kreću u odnosu na njega? Mase tela (1) i (2) su međusobno jednake, a koeficijent trenja između tela (1) i (2) i tela A iznosi  $\mu$ .

213. U sistemu prikazanom na slici mase tela su  $m_1 = 10$  kg i  $m_2 = 5$  kg. Koeficijent trenja između tela mase  $m_1$  i podloge iznosi  $\mu = 0,2$ , dok je naznačeni ugao  $\alpha = 30^\circ$ .

a) Koliko je ubrzanje sistema?

b) Kolika je sila zatezanja užeta?

214. Telo klizi niz strmu ravan nagibnog ugla  $\alpha = 30^\circ$  dužine  $l = 30$  m. Koeficijent trenja između tela i podloge je  $\mu = 0,17$ .

a) Za koje vreme će telo da pređe put  $l$ ?

b) Kolika je brzina tela pri napuštanju strme ravni?

215. Dva tela, mase  $m_1$  i  $m_2$ , vezana su užetom i postavljena na podlogu. Koeficijent trenja između tela i podloge je  $\mu$ . Kolika je sila zatezanja užeta, a koliko ubrzanje sistema?

216. Na krajeve užeta, prebačenog preko pokretnog kotura, obešena su dva tela, čije su mase  $m_1 = 200$  g i  $m_2 = 300$  g. Masa kotura se može zanemariti. Koliko je ubrzanje sistema?

217. Dva tela, jednakih masa  $m$ , vezana su užetom koje je prebačeno preko kotura. Ako se jednom telu doda preteg mase  $\Delta m$ , izračunati:

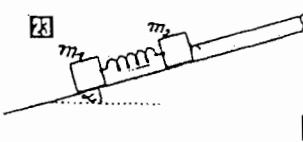
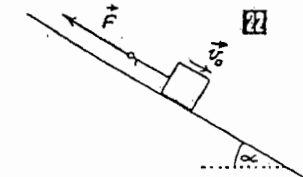
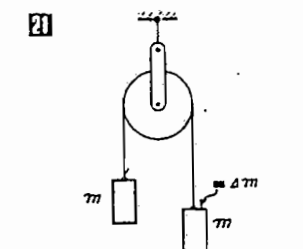
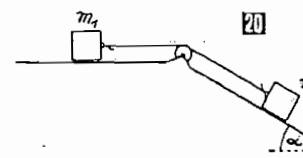
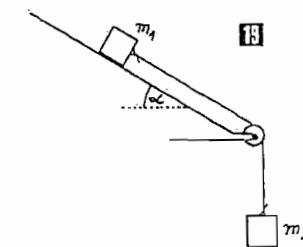
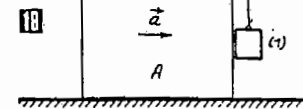
- ubrzanje sistema,
- intenzitet sile zatezanja užeta,
- intenzitet sile kojom će preteg delovati na telo,
- intenzitet sile kojom sistem deluje na osovinu kotura.

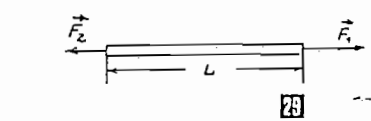
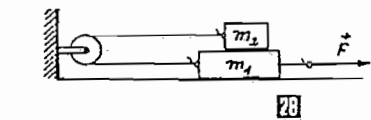
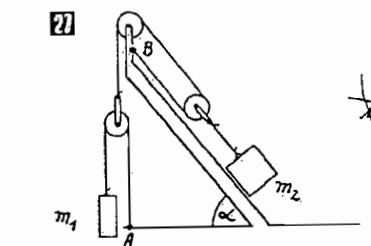
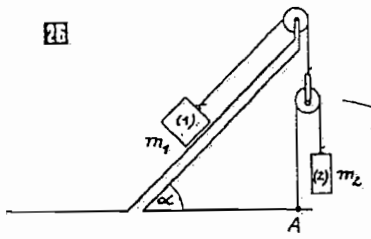
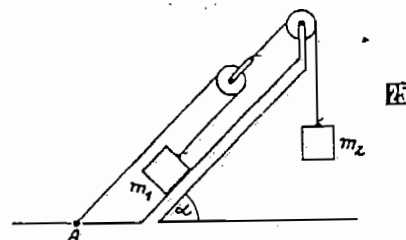
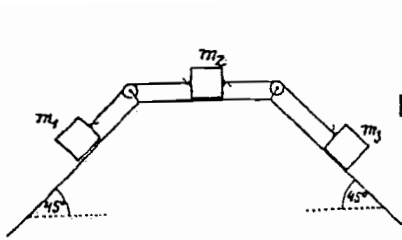
Trenje i masu kotura zanemariti.

218. Na strmoj ravni, nagibnog ugla  $\alpha = 30^\circ$ , nalazi se telo mase  $m = 500$  kg. Koeficijent trenja između tela i podloge je  $\mu = 0,1$ . Telo se gurne niz strmu ravan brzinom  $v_0 = 2$  m/s. Kolikom tangencijalnom silom  $F$  treba delovati na telo da bi se ono zaustavilo posle vremena  $t_0 = 5$  s?

219. Telo, mase  $m = 2$  kg, nalazi se na strmoj ravni nagibnog ugla  $\alpha = 30^\circ$ . Koeficijent trenja između tela i strme ravni je  $\mu = 0,2$ . Kolikom najmanjom horizontalnom silom treba delovati na telo da bi ono mirovalo na strmoj ravni?

220. Tri tela, mase  $m_1 = 3$  kg,  $m_2 = 2$  kg i  $m_3 = 5$  kg, postavljena su na strmu ravan. Prvo i drugo telo vezani su oprugom koeficijenta krutosti  $k = 1$  kN/m, dok su drugo i treće telo vezani užetom koje je prebačeno preko kotura. Ugao strme ravni je  $\alpha = 30^\circ$ . Koliko je izduženje opruge tokom kretanja ovog sistema? Trenje zanemariti.





221. Tri tela, mase  $m_1 = 4 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 16 \text{ kg}$  i  $m_3 = 8 \text{ kg}$ , vezana su užetom i postavljena na podlogu prikazanu na slici 24. Koeficijent trenja između tela i podloge iznosi  $\mu = 0,1$ . Odrediti smer kretanja sistema i njegovo ubrzanje.

222. U sistemu prikazanom na slici 25, kreće se po strmoj ravni, nagibnog ugla  $\alpha$  telo, mase  $m_1$ . Ako je koeficijent trenja između tela i strme ravni  $\mu$  odrediti:

- a) ubrzanje tela mase  $m_2$ ,
- b) silu zatezanja užeta na kome visi telo mase  $m_2$ ,
- c) otpor oslonca A.

223. a) Koliko je ubrzanje  $a_2$  tela (2) u sistemu prikazanom na slici 26?

b) Koliko je otpor oslonca A? Odnos masa tela u sistemu je  $m_2/m_1 = k$ , ugao strme ravni  $\alpha = 45^\circ$ . Koeficijent trenja između tela (1) i strme ravni iznosi  $\mu = 0,2$ .

224. Telo, mase  $m_1 = 1 \text{ kg}$  27, kreće se naviše jer ga povlači telo, mase  $m_2 = 9 \text{ kg}$ , koje klizi niz strmu ravan nagibnog ugla  $\alpha = 60^\circ$ . Koeficijent trenja između tela mase  $m_2$  i strme ravni je  $\mu = 0,2$ . Zanimajući masu koturača i užeta, odrediti:

- a) ubrzanje tela mase  $m_2$ ,
- b) otpore oslonaca A i B.

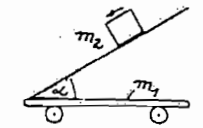
225. Na glatkom horizontalnom stolu nalaze se dva tela, masa  $m_1 = 2 \text{ kg}$  i  $m_2 = 1 \text{ kg}$  28. Oba tela vezana su lakim užetom prebačenim preko kotura. Zanimajući masu kotura i užeta, odrediti silu kojom je potrebno delovati na donje telo da bi se ono kretalo stalnim ubrzanjem  $a = g/2$ . Koeficijent trenja između tela je  $\mu = 0,5$ . Trenje između tela i stola je zanemarljivo.

226. Na slobodan homogen tanak štap, dužine  $L$  i mase  $m$ , deluju sile  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  (pri čemu je  $F_1 > F_2$ ). Napadna linija sile poklapa se sa osom štapa, smer sile je suprotan, dok im se napadne tačke nalaze na krajevima štapa 29. Koliko je intenzitet sile  $\vec{F}_2$ , koja deluje na poprečni presek štapa koji se nalazi na udaljenosti  $l$  od jednog njegovog kraja?

227. Telo malih dimenzija počne da se kreće niz strmu ravan nagibnog ugla  $\alpha$ . Koeficijent trenja između tela i strme ravni zavisi od predenog puta  $s$  po zakonu  $\mu = ks$ , gde je  $k$  — konstanta.

- a) Koliki put telo pređe do zaustavljanja?
- b) Kolika je maksimalna brzina tela na tom putu?

228. Na vagonetu, mase  $m_1$ , nalazi se strma ravan nagibnog ugla  $\alpha$ . Na strmoj ravni nalazi se telo, mase  $m_2$ , koje se kreće niz nju pod dejstvom sile teže 30. Koeficijent trenja između strme ravni i tela je  $\mu$ , a između vagoneta i podloge je zanemarljivo mali. Koliki će put da pređe vagonet za vreme kretanja tela od vrha do podnožja strme ravni pod uslovom da je kretanje započeto iz mirovanja?



229. Mlazna letilica, mase  $m$ , treba da se održava u mirovanju na nekoj visini. Ovo se postiže izbacivanjem naniže produkata sagorevanja iz mlaznog motora. Kojom brzinom treba da izlaze produkti sagorevanja iz mlaznog motora da bi se ovo postiglo? Površina otvora kroz koji izlaze produkti sagorevanja je  $S$ , a njihova gustina  $\rho$ .

230. Sud sa vodom, mase  $m$ , nalazi se na horizontalnoj podlozi, po kojoj se kreće stalnom brzinom usled isticanja vode kroz njegov bočni otvor. Visina vodenog stuba u sudu, u odnosu na bočni otvor, jeste  $h$ , a površina otvora na sudu je  $S$ . Koliki je koeficijent trenja između suda i podloge? Visinu vodenog stuba smatrati stalnom.

231. Raketa, početne mase  $m_0 = 600 \text{ t}$ , ima potrošnju goriva  $k = 3 \text{ t/s}$ , pri čemu je brzina produkata sagorevanja  $u = 2000 \text{ m/s}$  (u odnosu na raketu).

a) Koliko je početno ubrzanje rakete (pri startu) ako se ona usmeri u vertikalnom pravcu?

b) Da li ova raketa može da dostigne prvu kosmičku brzinu ako je masa omotača rakete i pribora  $m'_0 = 60 \text{ t}$ ?

Smatrati da je ubrzanje slobodnog padanja na putanji rakete stalno i da iznosi  $g = 9,80 \text{ m/s}^2$ .

232. Raketa, početne mase  $m_0 = 2 \text{ t}$ , ima potrošnju goriva  $k = 250 \text{ kg/s}$ , pri čemu je brzina produkata sagorevanja  $u = 1 \text{ km/s}$  u odnosu na raketu.

a) Posle koliko vremena će brzina rakete da iznosi  $v = 200 \text{ m/s}$ ?

b) Ako je početna masa goriva  $m_1 = 1,5 \text{ t}$ , koliku će krajnju brzinu da dostigne raketa?

Zanimariti uticaj spoljašnjih sila na kretanje rakete.

233. Kosmički brod, mase  $m_0$ , kreće se stalnom brzinom  $v_0$ . Za izmenu pravca kretanja uključen je reaktivni motor, koji počne da izbacuje produkte sagorevanja pogonskog goriva stalnom brzinom  $u$  (u odnosu na kosmički brod) u pravcu koji je normalan na pravac kretanja broda. Na kraju rada motora masa kosmičkog broda se smanji na  $m_k$ . Odrediti ugao skretanja kosmičkog broda u roku rada bočnog motora.

234. Telo, mase  $m = 2 \text{ kg}$ , diže se vertikalno naviše silom stalnog intenziteta  $F$ , pri čemu do visine  $h = 1 \text{ m}$  ova sila izvrši rad  $A = 78,5 \text{ J}$ . Koliko je ubrzanje tela?

235. Sila, stalnog intenziteta  $F = 1 \text{ N}$ , daje telu ubrzanje  $a = 10 \text{ cm/s}^2$ . Ako je pre dejstva sile telo mirovalo, izračunati njegovu kinetičku energiju posle vremena  $t = 5 \text{ s}$  od početka kretanja.

236. Izračunati rad koji je potrebno izvršiti da bi se kamena kocka, mase  $m = 100 \text{ kg}$ , ivica  $a = 0,5 \text{ m}$ , prevrнула oko jedne svoje ivice.

237. Da bi mogao uzleteti, avion, mase  $m = 4 \text{ t}$ , na kraju piste treba da ima brzinu  $v = 144 \text{ km/h}$ . Dužina piste iznosi  $s = 100 \text{ m}$ . Kolika je potrebna snaga motora za uzletanje aviona? Kretanje aviona smatrati ravnomerno ubrzanim. Koeficijent trenja između točkova i aerodromske piste iznosi  $\mu = 0,2$ .

238. Automobil, mase  $m=4000$  kg, kreće se brzinom  $v_0=120$  km/h po horizontalnom putu. Ako je sila trenja pri kretanju automobila  $F_{tr}=10$  kN, odrediti dužinu puta koji će automobil da pređe posle prestanka rada motora.

239. Pri ispaljivanju granate u horizontalnom pravcu cev topa, mase  $m_1=1$  t, pomeri se unazad za  $l=25$  cm. Masa granate je  $m_2=40$  kg, a njena početna brzina  $v_0=800$  m/s. Kolika je srednja vrednost otporne sile u amortizerima topovske cevi?

240. Sud u obliku kocke, ivica  $a$ , napunjen je vodom do polovine. Kocka naleže jednom svojom stranom na horizontalnu podlogu. Koliki je rad potrebno uložiti da bi se kocka okrenula oko svoje ivice?

241. Sa vrha strme ravni, visine  $h$ , počne da klizi telo mase  $m$ . Kolika je kinetička energija tela na početku kretanja, na polovini puta i pri napuštanju strme ravni? Trenje zanemariti.

242. Tegljač vuče prikolicu stalnom brzinom,  $v_1=15$  km/h, po putu koeficijenta trenja  $\mu_1=0.01$ . Ukoliko tegljač dođe na put koeficijenta trenja  $\mu_2=0.1$ , koliku će brzinu imati ako za kretanje razvija istu snagu?

243. Koliku korisnu snagu treba da ima električni motor građevinske dizalice, koja podiže teret najveće mase  $m=1.2$  t na visinu  $h=18$  m za vreme  $t=40$  s? Sila trenja pri ovome je tolika da se na njeno savlađivanje troši 3% snage motora.

244. Hidrocentrala ima branu, visine  $h=70$  m, u čijem se podnožju nalazi hidroturbina iz koje izlazi voda brzinom  $v=22$  m/s. Koliki je stepen korisnog dejstva ovog hidrosistema?

245. Električni motor, stepena korisnog dejstva  $\eta_1=0.95$ , pokreće pumpu kojom se ubacuje voda u vodovodnu cev, čiji se kraj nalazi na visini  $h=10$  m u odnosu na pumpu. Protok vode kroz cev je  $Q=200$  dm<sup>3</sup>/s. Kolika je uložena snaga motora ako je stepen korisnog dejstva pumpe  $\eta_2=0.90$ ?

246. Železnička kompozicija sa lokomotivom ima masu  $m=400$  t. Koliko je potrebno najmanje povećanje snage lokomotive da bi se brzina kompozicije povećala od  $v_1=40$  km/h na  $v_2=60$  km/h, na horizontalnom putu dužine  $s=1$  km? Trenje zanemariti.

247. Telo, mase  $m$ , kreće se po krugu poluprečnika  $R$ , tako da mu normalno ubrzanje zavisi od vremena, po zakonu  $a_n=kr^2$ , gde je  $k$ —konstanta.

a) Odrediti ukupnu silu koja deluje na ovo telo u funkciji vremena.

b) Kolika je potrebna snaga za ovakvo kretanje tela?

c) Kolika je srednja vrednost ove snage u toku vremenskog intervala  $\Delta t$  od početka kretanja?

248. Dve elastične kuglice, masa  $m_1=10$  g i  $m_2=20$  g, obešene su na tankim nitima jednake dužine  $l=18$  cm, tako da se nalaze na istoj visini pa se dodiruju. Kuglica  $m_1$  se izvede iz ravnotežnog položaja tako da nit o koju je ona obešena i nit o koju je obešena druga kuglica zaklapaju ugao  $\alpha=60^\circ$ , pa se zatim otpusti. Koliki je maksimalni otklon kuglica posle njihovog elastičnog sudara?

249. Jedralica, mase  $m$ , kreće se pod dejstvom vetra stalne jačine, tako da je zavisnost puta koji pređe u funkciji vremena data izrazom  $s=At^2+Bt+C$ , gde su  $A, B, C$ —konstante.

a) Koliki rad izvrši vetar pri pokretanju jedralice tokom vremena  $t$  od početka kretanja?

b) Koliku trenutnu snagu razvija vetar?

250. Kinetička energija tela koje se kreće po krugu, poluprečnika  $R$ , zavisi od pređenog puta  $s$ , po zakonu  $E_k=ks^2$ , gde je  $k$ —konstanta. Odrediti zavisnost sile koja deluje na ovo telo od pređenog puta.

251. Na slici E1 je prikazan sistem od dve redno vezane elastične opruge koeficijenta krutosti  $k_1$  i  $k_2$ . Koliki je minimalni rad koji je potrebno uložiti da bi se sistem opruga istegao za  $\Delta x$ ?

E2. Telo klizi sa vrha strme ravni i zaustavi se u tački koja je udaljena  $h=25$  m od njenog podnožja, na horizontalnom putu. Ako je visina strme ravni  $h=6$  m, izračunati veličinu koeficijenta trenja između tela i podloge.

E3. Sa strme ravni E3 spuštaju se saonice bez početne brzine. Saonice pođu iz tačke A, a zaustave se u tački C, pri čemu je  $AB=BC$ . Ako je koeficijent trenja između saonica i podloge  $\mu=0.1$  i jednak je na putu ABC, izračunati ugao strme ravni.

254. Automobil, mase  $m=2$  t, kreće se uz brdo, nagiba  $h=4$  m na svakih  $l=100$  m puta. Koeficijent trenja između točkova i puta je  $\mu=0.08$ . Koliki su izvršeni rad i snaga motora automobila ako put od  $s=3$  km automobil pređe za vreme  $t=4$  min?

255. Dva tela, masa  $m_1=2$  kg i  $m_2=4$  kg, vezana su užetom koje je prebačeno preko kotura. Visinska razlika težišta tela pre početka kretanja je  $h=2$  m. Koliku kinetičku energiju poseduje ovaj sistem u trenutku kada tela dođu na istu visinu? Trenje i masu kotura zanemariti.

256. Na horizontalnom delu puta, dužine  $s=3$  km, brzina automobila se povećala sa  $v_1=36$  km/h na  $v_2=72$  km/h. Ako je masa automobila  $m=1.5$  t, a koeficijent trenja između automobilskih guma i puta iznosi  $\mu=0.02$ , izračunati:

a) rad koji izvrši automobilski motor na tom delu puta,

b) srednju snagu koju na tom delu puta razvija motor automobila.

E4. Iz strmu ravan, nagibnog ugla  $\theta$ , bačeno je telo, mase  $m$ , početnom brzinom  $v_0$ . Koeficijent trenja između tela i strme ravni iznosi  $\mu$ .

a) Koliki put pređe telo uz strmu ravan do zaustavljanja?

b) Koliki se rad izvrši na savlađivanju sile trenja na ovom putu?

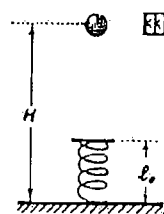
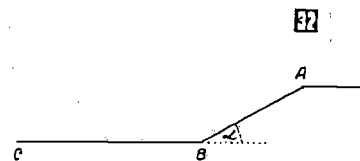
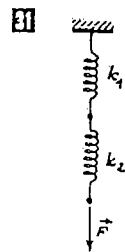
258. Telo, mase  $m$ , postavljeno je na visini  $H$  iznad stola. Ispod tela se nalazi nedeformisana opruga dužine  $l_0$  i koeficijenta krutosti  $k$  E5. Kolika je maksimalna deformacija opruge kada na nju padne telo?

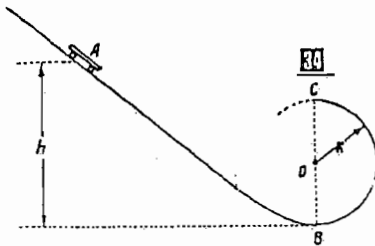
259. Matematičko klatno, dužine  $l=0.5$  m, izvede se iz ravnotežnog položaja za ugao  $\alpha=60^\circ$ , pa se kuglici klatna saopšti početna brzina  $v_0=3$  m/s sa smerom naniže, po pravcu koji je normalan na pravac konca. Odrediti krajnji položaj kuglice klatna pod uslovom da je trenje zanemarljivo.

260. Metalna lopta, mase  $m=30$  kg, visi o užetu dužine  $l=10$  m. Lopti se saopšti početna brzina  $v_0$  čiji je pravac normalan na pravac užeta, pri čemu uže načini otklon  $\alpha=60^\circ$ . Kolika je brzina  $v_0$ , a kolika predata energija lopti?

261. Matematičko klatno, dužine  $l=1$  m, izvedeno je iz ravnotežnog položaja za ugao  $\alpha=60^\circ$ , pa mu je saopštena početna brzina  $v_0$  sa smerom naniže, po pravcu koji je normalan na pravac konca. Kolika treba da bude brzina  $v_0$  da bi klatno opisalo pun krug?

262. Metak, mase  $m=20$  g, ispali se početnom brzinom  $v_0=1000$  m/s. Pri padu na zemlju metak ima brzinu  $v=200$  m/s. Kolika je energija metka utrošena na savlađivanje sile trenja i otporne sile prilikom njegovog kretanja kroz vazduh?





263

263. Telo vezano o užu rotira u vertikalnoj ravni stalnom ugaonom brzinom. Dokazati da je najveće zatezanje užeta pri ovom kretanju najmanje 6 puta veće od intenziteta sile teže koja deluje na ovo telo.

264. Čovek, mase  $m_1 = 80$  kg, stojeći na hrapavom zemljištu može da baci kamen, mase  $m_2 = 2$  kg, brzinom  $v_2 = 10$  m/s.

a) Koliku brzinu  $v_2'$  može da saopšti kamenu čovek, stojeći na ledu, pri čemu je koeficijent trenja između njegovih cipela i leda zanemarljivo mali?

b) Kolika će biti brzina kamena u odnosu na čoveka u slučaju (a)?

c) Da li će čovek u oba slučaja razviti istu snagu?

265. Po šinama položenim po putu ABC koji u tački B prelazi u polukrug, poluprečnika  $R$ , kreće se vagonet, mase  $m$ , bez početne brzine. Trenje se može zanemariti.

a) Kolika treba da bude visina  $h$  da bi vagonet prešao deo puta BC ne odvajajući se od podloge?

b) Koji je oblik zavisnosti sile pritiska vagoneta na podlogu u funkciji njegovog položaja na delu puta BC?

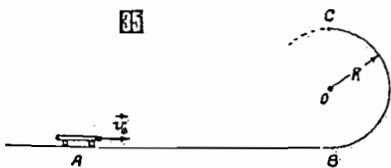
266. Iz tačke A gurne se vagonet, mase  $m$ , početnom brzinom  $v_0$  po šinama položenim po putanji ABC, koja u tački B prelazi u polukrug poluprečnika  $R$ . Koliku najmanju kinetičku energiju je potrebno predati vagonetu u tački A da bi prešao put ABC ne odvajajući se od podloge? Gubitak energije na savlađivanje sile trenja je 2%. Kolika je brzina vagoneta u tački C?

267. Kriva putanja se sastoji iz dva cilindrična dela, izdubljenog i ispupčenog, jednakih poluprečnika krivine  $R$ . Telo malih dimenzija, mase  $m$ , počne da se kreće niz krivu površinu bez trenja. Visinska razlika tačaka A i C u odnosu na tačku B je  $h$ . Kolika treba da bude ova visinska razlika  $h$  da bi se telo u tački C odvojilo od podloge?

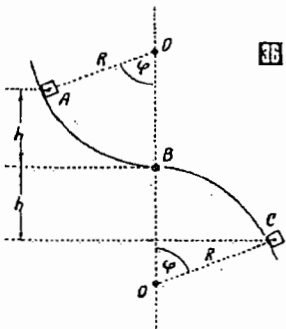
268. Telo, mase  $m = 2$  kg, počne da pada sa visine  $H = 200$  m, gde mu je saopštena početna brzina  $v_0 = 198$  m/s sa smerom naniže. Telo padne u pesak i propadne za  $h = 0,5$  m u njega. Izračunati srednju silu otpora peska.

269. Telo malih dimenzija, mase  $m$ , počne da klizi niz strmu podlogu AB, visine  $h$ , čiji je profil prikazan na slici. U tački B telo pređe na dasku, mase  $M$ , po kojoj nastavi da klizi. Usled trenja između tela i daske, ono pređe izvestan put pa se zaustavi u odnosu na dasku, ali nastavi da se kreće zajedno sa daskom.

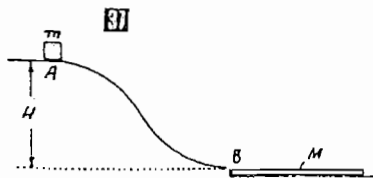
Kolika se energija utroši na savlađivanje sile trenja ako se zanemari trenje između tela i podloge na putu AB i između daske i podloge?



265



267



269

270. Sa vrha smučarske skakaonice spušta se skakač sa visine  $H$ , zanemarljivom početnom brzinom. Kolika treba da bude visina  $h$  „mosta“ skakaonice da bi skakač doskočio na zemlju na maksimalnoj udaljenosti? Kolika je ta maksimalna dužina skoka? Trenje i otpor vazduha zanemariti.

271. Kuglici malih dimenzija saopštena je brzina  $v_0 = 10$  m/s u horizontalnom pravcu. Kuglica na svom putu naiđe na cilindričnu površinu BC, poluprečnika krivine  $R = 2$  m. U tački C kuglica se odvoji od podloge i preleti neko rastojanje  $l$ . Ugao naznačen na slici iznosi  $\alpha = 45^\circ$ . Kolika je dužina preleta  $l$  kuglice?

272. Kolika je snaga hidroturbine koja radi pod sledećim uslovima:

- voda ulazi u nju brzinom  $v_1 = 4$  m/s, a izlazi brzinom  $v_2 = 1$  m/s,
- visinska razlika ulaznog i izlaznog otvora je  $h = 1,5$  m,
- maseni protok vode je  $Q' = 300$  kg/s,
- stepen korisnog dejstva je  $\eta = 0,85$ .

273. Kapljica vode, mase  $m = 0,1$  g, slobodno pada sa visine  $H = 500$  m bez početne brzine. Pri padanju se masa kapljice smanjuje usled isparavanja. Zakon promene mase je  $\Delta m = kt$ , gde je  $k = 0,01$  g/s — brzina smanjivanja (isparavanja) mase kapljice. Na kojoj visini kapljica ima najveću kinetičku energiju?

274. Automobil, mase  $m = 1400$  kg, kreće se stalnom brzinom  $v_1 = 40$  km/h. Za koliko je potrebno povećati vučnu silu motora da bi se brzina automobila povećala dva puta na putu  $s = 280$  m? Trenje zanemariti.

275. Telo, mase  $m = 2$  kg, nalazi se na vrhu polukružne kupole, visine  $H = 10$  m.

a) Koliku je najmanju brzinu  $v_0$  potrebno saopštiti telu pa da se ono ne kreće po kupoli?

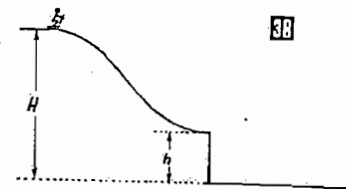
b) Ako se telu saopšti upola manja brzina, na kom mestu će da se odvoji od kupole?

276. Malo telo klizi sa vrha polusfere, poluprečnika  $R$ , bez početne brzine. Pri padu na horizontalnu podlogu telo odskoči ne promenivši intenzitet brzine.

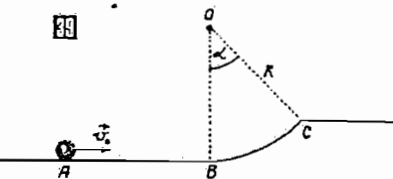
a) Na kojoj visini će se telo odvojiti od poluge?

b) Do kolike visine će telo odskočiti od podloge?

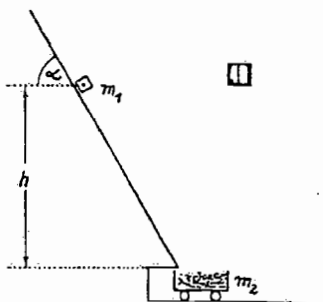
277. Telo, mase  $m_1 = 15$  kg, počne da klizi sa vrha strme ravni, nagibnog ugla  $\alpha = 60^\circ$ . Na kraju strme ravni, telo se zarije u nepokretna kolica napunjena peskom, mase  $m_2 = 90$  kg, koja se nalaze na horizontalnoj podlozi. Ako je visinska razlika tela i kolica u početnom položaju  $h = 10$  m, odrediti brzinu kojom će se kretati kolica zajedno sa telom. Trenje zanemariti.



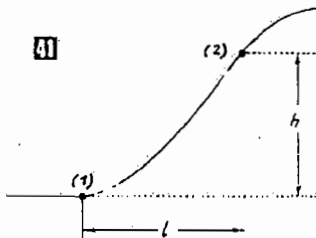
270



271



275



276

278. Telo, mase  $m$ , pod dejstvom sile  $\vec{F}$ , ravnomerno se penje uz površinu čiji je profil prikazan na slici III. Pravac sile  $\vec{F}$  u svakoj tački putanje tangencijalan je na putanju. Odrediti rad ove sile na putu između tačaka (1) i (2), koje se nalaze na visinskoj razlici  $h$  i horizontalnom razmaku  $l$ . Koeficijent trenja između tela i podloge je  $\mu$ .

279. Tramvaj, mase  $m$ , kreće se sa stanice. Njegova se brzina menja se u funkciji pređenog puta  $s$  po zakonu  $v = k\sqrt{s}$ , gde je  $k$  — konstanta. Odrediti:  
a) ubrzanje tramvaja?  
b) rad svih sila koje deluju na tramvaj u toku vremena  $t$  od početka kretanja.

280. Telo, mase  $m$ , bačeno je pod uglom  $\alpha$  prema horizontu, početnom brzinom  $v_0$ . Kolika je trenutna snaga koju razvija sila teže u funkciji vremena?

281. Vektor položaja materijalne tačke je  $\vec{r}_1 = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ , gde su  $A = B = C = 1$  m. Pod dejstvom sile  $\vec{F} = n\vec{i}$ , gde je  $n = 5$  N, materijalna tačka počne da se kreće i u nekom trenutku njen vektor položaja je  $\vec{r}_2 = D\vec{i} + F\vec{j} + G\vec{k}$ , gde je  $D = F = G = 6$  m. Koliki je rad izvršila sila  $\vec{F}$  za pomeranje materijalne tačke?

282. Telo, mase  $m$ , počne da se kreće pod dejstvom sile  $\vec{F} = At\vec{i} + Bt^2\vec{j}$ , gde su  $A, B$  — konstante,  $\vec{i}, \vec{j}$  — jedinični vektori X, Y-osa. Kolika je snaga koju razvije ova sila posle isteka vremena  $t$  od početka kretanja?

283. Telo, mase  $m_1 = 4$  kg, krećući se brzinom  $v_1 = 10$  m/s udara u telo dva puta veće mase ( $m_2 = 2m_1$ ), u kome se zadrži posle sudara. Drugo telo je pre sudara bilo u mirovanju. Za koliko se poveća unutrašnja energija ovog sistema posle sudara?

284. Tri loptice, masa  $m_1, m_2, m_3$ , nalaze se na nekom rastojanju i u mirovanju. Prvoj loptici je saopštena brzina  $v_1$ , i ona zatim udara u drugu lopticu, a ova u treću. Ako su sudari elastični i čeonni, odrediti onu vrednost mase  $m_2$  pri kojoj će treća loptica dobiti najveću brzinu.

285. Čekić, mase  $m_1 = 100$  kg, padne sa visine  $H = 3$  m na nakovanj, mase  $m_2 = 500$  kg, koji se nalazi na elastičnoj podlozi. Posle udara čekića o nakovanj oni se zajedno kreću nadole. Kolika je početna brzina nakovnja?

286. Po glatkoj horizontalnoj podlozi kreću se dve loptice jednakih masa,  $m_1 = m_2 = m$ , brzinama  $v_1 = 10$  m/s i  $v_2 = 20$  m/s. Kolika će da bude brzina loptica posle elastičnog čeonog sudara?

287. Čekić, mase  $m_1 = 1,2$  t, udara brzinom  $v_1 = 5$  m/s, o gvozdeno telo (radi njegove obrade) koje leži na nakovnju, mase  $m_2 = 25$  t,

- a) Kolika se energija utroši na deformaciju tela?  
b) Koliki je stepen korisnog dejstva pri obradi tela?

288. Telo, mase  $m_1 = 2$  kg, kreće se brzinom  $v_1 = 3$  m/s i udara u drugo telo, mase  $m_2 = 3$  kg, koje se kreće brzinom  $v_2 = 1$  m/s po istoj putanji i u istom smeru. Kolika je brzina ovih tela posle njihovog sudara ako je on: a) plastičan, b) elastičan?

289. Koliki treba da bude odnos masa  $m_1/m_2$  pri elastičnom sudaru tela (iz prethodnog zadatka) da bi se prvo telo zaustavilo?

290. Loptica od plastične mase padne sa visine  $h_1 = 1$  m na horizontalnu ploču, od koje se nekoliko puta odbije. Koliki je koeficijent odbijanja  $k$  ako protekne vreme  $t = 1$  s od trenutka puštanja kuglice do njenog drugog udara o ploču?

291. Telo mase  $m_1$  udara o telo mase  $m_2$ , koje je bilo u mirovanju. Ako je sudar plastičan i čeonni, ustanoviti zavisnost pretvorene kinetičke energije sistema u njegovu unutrašnju energiju pri sudaru od odnosa  $k = m_1/m_2$ .

292. Telo mase  $m_1$  udara u telo mase  $m_2$ , koje je bilo u mirovanju. Ako je sudar elastičan i čeonni, naći iznos energije koje prvo telo preda drugom telu posle sudara. Ako se količnik prvobitne i predate energije prvog tela izrazi odnosom njihovih masa  $k = m_1/m_2$ , uočiti slučaj kada je  $k = 1$ .

293. Koliko elastičnih čeonih sudara treba da izvrši loptica mase  $m$  sa telom mase  $15m$  da bi se njena energija smanjila 100 puta?

294. Metalna kuglica padne sa visine  $h = 2$  m na ravnu metalnu ploču, od koje se odbije bez gubitka brzine. Ako je kuglica slobodno padala, odrediti vreme između dva uzastopna udara kuglice o ploču. Masu kuglice smatrati zanemarljivom u odnosu na masu ploče.

295. Pri nekoj nuklearnoj reakciji potrebno je usporiti neutrone. Prema rešenju zadatka 292, odrediti najpovoljniju česticu sa kojom treba da se sudari neutron da bi se on što više usporio. Zadatak rešiti za sudar:

- a) neutrona i protona ( $m_p \approx m_n$ ),  
b) neutrona i  $\alpha$ -čestice ( $m_\alpha \approx 4m_n$ ).

296. Bombardovanjem  $\alpha$ -česticama nepoznatog gasa u Vilsonovoj komori dobio je fotografski snimak, koji pokazuje da se  $\alpha$ -čestica, mase  $m_\alpha$ , sudarila sa nepoznatom česticom mase  $m_x$  i skrenula za ugao  $\alpha_1 = 8^\circ 27'$  od prvobitnog pravca. Nepoznata čestica se posle sudara kreće po pravcu koji zaklapa ugao  $\alpha_2 = 60^\circ$  prema prvobitnom pravcu kretanja  $\alpha$ -čestice. Smatrajući brzinu nepoznate čestice pre sudara zanemarljivo malom u odnosu na brzinu  $\alpha$ -čestice, naći odnos njihovih masa, pa na osnovu toga zaključiti koje čestice su u pitanju. Koristiti podatke date na kraju knjige.

## 5. Gravitaciono polje

Prema Njutnovom zakonu gravitacije, intenzitet gravitacione sile  $\vec{F}_g$ , tj. sile uzajamnog dejstva između dva tačkasta tela srazmeran je njihovim masama  $m_1$  i  $m_2$ , a obrnuto srazmeran kvadratu rastojanja  $r$  između njih, tj.

$$F_g = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

gde je  $\gamma = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$  — gravitaciona konstanta, ili u vektorskom obliku

$$\vec{F}_{g,12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{1,2}^3} \vec{r}_{1,2} \quad \text{i} \quad \vec{F}_{g,21} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{2,1}^3} \vec{r}_{2,1}$$

gde je  $\vec{F}_{g,12}$  — gravitaciona (Njutnova) sila kojom prvo telo deluje na drugo,  $\vec{F}_{g,21}$  — gravitaciona (Njutnvska) sila kojom drugo telo deluje na prvo,  $\vec{r}_{1,2}$  — vektor položaja drugog tela u odnosu na prvo i  $\vec{r}_{2,1}$  — vektor položaja prvog tela u odnosu na drugo telo.

Jačina gravitacionog polja  $\vec{G}$  u nekoj tački gravitacionog polja jednaka je količniku gravitacione sile  $\vec{F}_g$  koja deluje na tačkasto telo

(mase  $m_p$ ), postavljeno u tu tačku polja, i mase  $m_p$  tog tačkastog tela, tj.

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}_g}{m_p}$$

Jedinica jačine gravitacionog polja je

$$[G] = \frac{[F]}{[m]} = \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

Jačina gravitacionog polja tačkastog tela (njutnovskog polja), mase  $m$ , na radijalnom rastojanju  $r$ , je

$$G = \frac{F_g}{m_p} = \gamma \frac{m}{r^2}$$

Ovakva raspodela jačine gravitacionog polja važi i za gravitaciono polje sfernog tela, za  $r > R$ , gde je  $R$  — njegov poluprečnik.

Ako se tačkasto telo mase  $m_1$  pomera u gravitacionom polju tačkastog tela mase  $m_2$  (dakle, u njutnovskom gravitacionom polju), i to tako da rad vrše gravitacione sile (pri čemu se rastojanje između tela smanjuje zbog toga što su gravitacione sile privlačne), izvršeni rad je

$$A = \gamma m_1 m_2 \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$



gde su  $r_1$  i  $r_2$  — početno i krajnje radijalno rastojanje između tela.

Gravitacioni potencijal  $\varphi$  neke tačke gravitacionog polja jednak je količniku gravitacione potencijalne energije  $E_p$ , koju stekne tačkasto telo (mase  $m_p$ ) kada se nađe u toj tački polja, i mase  $m_p$  tačkastog tela, tj.

$$\varphi = \frac{E_p}{m_p}$$

Jedinica gravitacionog potencijala je

$$[\varphi] = \frac{[E]}{[m]} = \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

Gravitacioni napon  $U$  između tačaka (1) i (2) gravitacionog polja jednak je razlici potencijala  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  tih tačaka, tj.

$$U_{1,2} = \Delta\varphi_{1,2} = \varphi_1 - \varphi_2$$

Gravitaciona potencijalna energija  $E_p$  ili energija uzajamnog dejstva između tačkastih tela, čije su mase  $m_1$  i  $m_2$ , posredstvom njihovih gravitacionih polja je

$$E_p = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

gde je  $r$  — rastojanje između tela.

Gravitacioni potencijal tačaka gravitacionog polja tačkastog tela (njutnovskog polja), mase  $m$ , na radijalnom rastojanju  $r$  od tela je

$$\varphi = -\gamma \frac{m}{r}$$

Ovakva raspodela gravitacionog potencijala važi i za gravitaciono polje sfernog tela, za  $r > R$ , gde je  $R$  — njegov poluprečnik.

Rad gravitacionih sila  $A_{1,2}$  utrošen za pomeranje tačkastog tela mase  $m$ , iz tačke (1) u tačku (2) gravitacionog polja, čiji su potencijali  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ , je

$$A_{1,2} = m\Delta\varphi_{1,2}$$

gde je  $\Delta\varphi_{1,2} = \varphi_1 - \varphi_2$  — razlika potencijala tačaka gravitacionog polja koje ne mora da bude njutnovsko.

Prema tome, ako se telo, mase  $m$ , nađe u nekoj tački gravitacionog polja čija je jačina u toj tački  $\vec{G}$  i potencijal  $\varphi$ , na telo će delovati gravitaciona sila

$$\vec{F}_g = m\vec{G}$$

a telo će steći gravitacionu potencijalnu energiju

$$E_p = m\varphi$$

Ako se telo, mase  $m$ , nađe u gravitacionom polju Zemlje (ili nekog drugog nebeskog tela mase  $M$  i poluprečnika  $R$ ), onda će na telo delovati gravitaciona sila intenziteta  $F_g = \gamma m M / R^2$ , odnosno  $F_g = \gamma m M / (R+h)^2$ , gde

je  $h$  — visina na kojoj se nalazi telo. Ako je telo slobodno, ono će imati ubrzanje

$$a_g = \frac{F_g}{m} = \gamma \frac{M}{R^2}$$

koje se naziva gravitaciono ubrzanje

Na ovo telo deluje rezultujuća sila — sila teže

$$\vec{P} = \vec{F}_g + \vec{F}_c$$

i ono usled toga ima rezultujuće ubrzanje

$$\vec{g} = \frac{\vec{P}}{m} = \vec{a}_g + \vec{a}_n$$

koje se naziva ubrzanje Zemljine teže ili ubrzanje slobodnog padanja, gde je  $\vec{F}_c$  — centrifugalna sila koja deluje na telo (usled rotacije

Zemlje oko sopstvene ose) a  $\vec{a}_n = \vec{F}_c / m$  — odgovarajuće ubrzanje (čiji je intenzitet  $a_n = r\omega^2$ , gde je  $r$  — poluprečnik putanje, a  $\omega$  — ugaona brzina rotacije Zemlje).

Ako se telo nalazi na geografskoj širini  $\varphi = \pm 90^\circ$ , onda je  $g = a_g$ , a ako je  $\varphi = 0^\circ$ , tada je  $g = a_g - a_n$ , dok se za  $0 < \varphi < 90^\circ$  prilikom izračunavanja intenziteta ubrzanja  $g(\varphi)$  mora upotrebiti kosinusna teorema.

• Prva kosmička brzina nebeskog tela je ona brzina koju je potrebno da ima veštački satelit tog nebeskog tela da bi se kretao neposredno iznad njegove površine (ili iznad njegove atmosfere ako je poseduje). Ona je određena relacijom  $v_1 = \sqrt{gR}$ , gde je  $g$  — ubrzanje slobodnog padanja na površini nebeskog tela, a  $R$  — njegov poluprečnik.

• Druga kosmička brzina nebeskog tela je najmanja brzina koju je potrebno saopštiti nekom telu da bi ono izašlo iz zone dejstva gravitacionog polja posmatranog nebeskog tela. Ona je određena relacijom

$$v_2 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2} v_1$$

• Treća kosmička brzina nebeskog tela je najmanja brzina koju je potrebno saopštiti nekom telu da bi ono izašlo iz zone dejstva gravitacionog polja Sunca. Ona je određena relacijom

$$v_3 = \sqrt{2\gamma \frac{M_S}{d}} = v_{orb}$$

gde je  $M_S$  — masa Sunca,  $d$  — trenutno rastojanje nebeskog tela od Sunca, a  $v_{orb}$  — trenutna brzina nebeskog tela na orbiti oko Sunca.

• Četvrta kosmička brzina nebeskog tela je ona najmanja brzina koju je potrebno saopštiti nekom telu da bi ono izašlo iz zone dejstva gravitacionog polja Galaktike i otišlo u vasionu. Ona iznosi  $v_4 \approx 290$  km/s.

297. Koliki je intenzitet gravitacione sile između dva elektrona koji se nalaze na rastojanju  $r = 0,2$  nm? Masa elektrona je  $m = 9 \cdot 10^{-31}$  kg. Gravitaciona konstanta je  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$  N·m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>.

298. Jačina gravitacionog polja u nekoj tački je  $G = 9,8$  N/kg, a gravitacioni potencijal  $\varphi = -67$  MJ/kg. Ako se u ovu tačku gravitacionog polja postavi telo mase  $m = 2$  kg:

a) kolika gravitaciona sila će delovati na telo,

b) koliku gravitacionu potencijalnu energiju će telo steći?

299. Kolika je jačina njutnovskog gravitacionog polja tela, mase  $m = 1$  kg, na rastojanju  $r = 10$  m?

300. Koliki je gravitacioni potencijal njutnovskog gravitacionog polja tela, mase  $m = 1$  kg, na rastojanju  $r = 6,67$  m?

301. Nacrtati dijagram zavisnosti jačine gravitacionog polja Zemlje od rastojanja posmatrane tačke od središta Zemlje, tj. dijagram zavisnosti  $G = G(r)$ .

302. Nacrtati dijagram zavisnosti gravitacionog potencijala Zemlje od rastojanja posmatrane tačke od središta Zemlje, tj. dijagram zavisnosti  $\varphi = \varphi(r)$ .

303. Koliki je odnos:

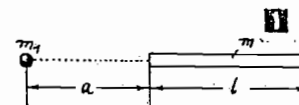
a) jačine gravitacionih polja,

b) gravitacionih potencijala,

tačaka koje se nalaze na visini  $h = 37$  km i tačaka na površini Zemlje? Srednji poluprečnik Zemlje je  $R = 6374$  km.

304. Tanka homogena žica, mase  $m_1 = 0,1$  kg, savijena je u obliku polukruga, poluprečnika  $r = 0,25$  m, u čijem se centru nalazi kuglica mase  $m_2 = 0,15$  kg. Odrediti intenzitet gravitacione sile koja deluje između kuglice i žičanog polukruga.

305. Tanak homogen prav štapić, dužine  $l = 1$  m i mase  $m = 2$  kg, nalazi se na rastojanju  $a = 10$  cm od sferne kuglice mase  $m_1 = 0,2$  kg. Izračunati gravitacionu silu uzajamnog dejstva ova dva tela.



306. Koliko je najmanje energije potrebno uložiti da bi se Zemljin veštački satelit, mase  $m = 2t$ , preveo iz orbite čija je visina  $h_1 = R_Z$  na orbitu čija je visina  $h_2 = 2R_Z$ , gde je  $R_Z$  — poluprečnik Zemlje? Uzeti da je srednja gustina supstancije od koje je obrazovana Zemlja  $\rho = 5500$  kg/m<sup>3</sup>, a srednji poluprečnik Zemlje  $R_Z = 6370$  km.

307. Koliki rad bi trebalo uložiti da bi se telo, mase  $m = 1$  kg, premestilo iz središta Zemlje na njenu površinu? Uzeti da je srednji poluprečnik Zemlje  $R_Z = 6370$  km, a srednja gustina supstancije od koje je ona obrazovana  $\rho = 5500$  kg/m<sup>3</sup>.

308. Ustanoviti zavisnost linijske brzine od geografske širine za tela na površini Zemlje. Kolika je ova brzina za geografsku širinu  $\varphi = 45^\circ$ ? Srednji poluprečnik Zemlje je  $R = 6374$  km.

309. a) Kolika je linijska brzina Zemlje po orbiti oko Sunca ako se zna da je masa Sunca  $m_S = 2 \cdot 10^{30}$  kg, a rastojanje od Sunca do Sunca  $d = 1,5 \cdot 10^{11}$  m?

b) Koliko je ubrzanje Sunčeve teže na površini Zemlje?

310. U avionu, koji leti na visini  $h = 16$  km, nalazi se telo mase  $m = 1$  kg.

a) Koliki je intenzitet gravitacione sile koja deluje na telo?

b) Ako avion leti stalnom brzinom u predelu pola ili ekvatora, kolika sila teže će da deluje na telo?

Srednji poluprečnik Zemlje je  $R = 6374$  km, a masa  $M = 6 \cdot 10^{24}$  kg.

311. Ustanoviti zavisnost sile Zemljine teže od geografske širine za tela na površini Zemlje.

312. Zanimajući uticaj rotacije Zemlje na veličinu sile teže, kojom Zemlja deluje na tela u svom gravitacionom polju, ustanoviti zavisnost sile teže od rastojanja tela od središta Zemlje.

313. Kolika je energija uzajamnog dejstva dva tačkasta tela, masa  $m_1$  i  $m_2$ , kada se nalaze na rastojanju  $r_0$ ?

314. Kolika je energija uzajamnog dejstva tačkastog tela, mase  $m$ , i tankog homogenog štapa, mase  $M$  i dužine  $l$ , ako se oni nalaze na jednoj pravoj, na rastojanju  $r_0$  jedno od drugog?

315. Ako je period kretanja Zemlje oko Sunca  $T=365$  dana, a rastojanje između njih  $d=1,5 \cdot 10^{11}$  m, izračunati masu Sunca.

316. Oceniti veličinu ukupne mehaničke energije koju poseduje Zemlja pri kretanju po svojoj eliptičkoj putanji oko Sunca. Mase Zemlje i Sunca su približno  $M_Z=6 \cdot 10^{24}$  kg i  $M_S=2 \cdot 10^{30}$  kg. Maksimalno rastojanje Zemlja — Sunce iznosi  $d=1,52 \cdot 10^{11}$  m.

317. Veštački Zemljin satelit kreće se po kružnoj putanji. U kom su odnosu kinetička i potencijalna energija satelita?

318. a) Koliku brzinu treba da ima veštački Zemljin satelit koji se kreće po kružnoj putanji na visini  $H$ ?

b) Koliki je period kretanja ovog satelita?

c) Kolika je prva kosmička brzina, a koliki odgovarajući period kretanja?

319. Odrediti period obilaska Meseca oko Zemlje ako je poznato da je:

— ubrzanje slobodnog padanja na Zemljinoj površini  $g_0=9,83$  m/s<sup>2</sup>,

— Zemljin poluprečnik  $R_Z=6,37 \cdot 10^6$  m,

— rastojanje od centra Zemlje do centra Meseca  $R=3,8 \cdot 10^8$  m.

320. Ako se zna da je srednja gustina supstancije od koje je obrazovana Zemlja  $\rho=5500$  kg/m<sup>3</sup>, a njen poluprečnik  $R=6,37 \cdot 10^6$  m, izračunati visinu na kojoj će se kretati veštački Zemljin satelit, čiji je period kretanja  $T=90$  min. Putanju satelita smatratu kružnom.

321. Koliki je period rotacije Zemljinog veštačkog satelita koji se kreće na visini  $h=nR_Z$ , gde je  $n=1, 2, 3, \dots$ ?

322. Rastojanje od Zemlje do Meseca iznosi približno  $R_{ZM}=3,85 \cdot 10^8$  m, a period obilaska Meseca oko Zemlje je  $T_M=27,3$  dana. Saturnov satelit Di-ona ima poluprečnik putanje oko Saturna  $R_{SD}=3,78 \cdot 10^8$  m, a period obilaska oko Saturna  $T_D=2,7$  dana. Na osnovu ovih podataka odrediti odnos masa Zemlje i Saturna.

323. Stacionarni Zemljin satelit kreće se oko Zemlje po kružnoj putanji.

a) Koliki je poluprečnik njegove putanje?

b) Koliki su njegova brzina i ubrzanje?

324. Planeta, mase  $m$ , kreće se po kružnoj putanji oko Sunca brzinom  $v=34,9$  km/s (u odnosu na Sunce). Odrediti period obilaska ove planete oko Sunca, smatrajući da je poznata masa Sunca.

325. Veštački Zemljin satelit kreće se u ekvatorijalnoj ravni Zemlje na udaljenosti  $R=2 \cdot 10^7$  m od njenog centra. Smer kretanja je od zapada na istok (isti je kao i smer rotacije Zemlje). Jednu istu tačku na ekvatoru satelit nadleće posle svakih  $T_s=11,6$  h. Kolika je na osnovu ovih podataka masa Zemlje?

326. a) Koliku najmanju brzinu treba da ima kosmički brod prilikom polaska sa Zemlje (pri izlasku iz Zemljine atmosfere, dakle na visini 200 km) da bi stigao do Meseca?

b) Ako je masa kosmičkog broda  $m=800$  t, izračunati koliku je najmanju kinetičku energiju (u kWh) potrebno saopštiti brodu pri lansiranju da bi stigao do Meseca.

327. Sa površine Zemlje, u vertikalnom pravcu, izbačeno je telo početnom brzinom  $v_0$ . Ako je poznat poluprečnik Zemlje  $R_Z$  i ubrzanje slobodnog pada-

nja  $g$ , na njenoj površini, odrediti maksimalnu visinu do koje će doći telo. Otpor vazduha zanemariti.

328. Koliku visinu će dostići raketa usmerena vertikalno uvis ako je njena početna brzina jednaka prvoj kosmičkoj brzini?

329. a) Koliku brzinu ima telo pri padu na Zemlju ukoliko dolazi iz kosmosa? Otpor vazduha zanemariti.

b) Kolika je ova brzina na visini  $H=R$  iznad Zemljine površine, gde je  $R$ —poluprečnik Zemlje zajedno sa atmosferom?

330. Telo se pusti da pada kroz zamišljeni vertikalni kanal koji prolazi kroz središte Zemlje i izlazi na njenu drugu stranu. Opisati kretanje ovog tela.

## 6. Statika

Sila  $\vec{F}$  u statici je određena svojim:

- intenzitetom  $F$  ili  $|\vec{F}|$ ,
- pravcem,
- smerom,
- napadnom tačkom,
- napadnom linijom.

Rezultanta sila  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$  je

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

pa je ravnotežna sila ovim silama

$$\vec{F}_R' = -\vec{F}_R$$

kojom se zatvara poligon posmatranih sila.

Ako na telo deluje sila  $\vec{F}$  i ako je  $\vec{r}$  vektor položaja napadne tačke ove sile u odnosu na neku tačku (osu), onda je moment sile  $\vec{F}$  u odnosu na tu tačku

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

a njegov intenzitet

$$M = rF \sin(\vec{r}, \vec{F})$$

Ukoliko na telo deluje spreg sila (dve sile jednakih intenziteta, istih pravaca a različitih smerova i napadnih linija), onda je odgovarajući moment sprega sila

$$\vec{M}_s = \vec{d} \times \vec{F}$$

gde je  $\vec{d}$ —vektor položaja na napadnoj liniji sile  $\vec{F}$  u odnosu na najbližu tačku druge sile ( $-\vec{F}$ ) sprega sila.

Intenzitet momenta sprega sila je

$$M_s = d \cdot F$$

pošto je  $\vec{d} \perp \vec{F}$ .

Jedinica momenta sile, tj. momenta sprega sila je

$$[M] = [r] [F] = m \cdot N$$

Rezultanta momenata  $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \vec{M}_3, \dots, \vec{M}_n$  je

$$\vec{M}_R = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i$$

dok je ravnotežni moment ovih momenata

$$\vec{M}_R' = -\vec{M}_R$$

kojim se zatvara poligon posmatranih momenata.

Ukoliko na telo deluju sile  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$  čije se napadne linije seku u jednoj tački, telo je u ravnoteži ako je

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$$

naime, tada je telo u statičkoj ravnoteži ako se ne kreće ( $v=0$ ), ili dinamičkoj ravnoteži

ako se kreće stalnom brzinom ( $\vec{v}=\text{const}$ ),

i to onom brzinom kojom se kretalo u trenutku uspostavljanja ravnoteže sile.

Međutim, ukoliko se napadne linije sila

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$  koje deluju na telo ne seku u jednoj tački, onda će ovo telo da bude u ravnoteži ako je vektorski zbir ovih sila jednak nuli (prethodni uslov) i zbir njegovih

momenata  $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \vec{M}_3, \dots, \vec{M}_n$  u odnosu na proizvoljnu tačku, jednak nuli. Naime, opšti uslov ravnoteže tela je

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0$$

U ovom slučaju telo je u statičkoj ravnoteži ako se ne kreće ( $v=0, \omega=0$ ) ili se kreće

stalnom brzinom ( $\vec{v}=\text{const}, \vec{\omega}=\text{const}$ ), i to onom brzinom kojom se kretalo u trenutku uspostavljanja ravnoteže sile odnosno njihovih momenata.

Ako na telo deluju tri sile koje su u ravnoteži, onda se njihove napadne linije seku u jednoj tački (teorema tri sile).

Koordinate centra mase sistema  $n$  tačkastih tela, čije su mase  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ , jesu

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

gde su  $x_i, y_i, z_i$  ( $i=1, 2, 3, \dots, n$ ) — koordinate tačkastih tela.

Koordinate centra mase tela, mase  $m$ , jesu

$$x_c = \frac{\int x dm}{m}; \quad y_c = \frac{\int y dm}{m}; \quad z_c = \frac{\int z dm}{m}$$

Telo se nalazi u stanju:

— stabilne ravnoteže ako se posle malog otklona iz ravnotežnog položaja spontano vraća u njega,

331. Kolika je rezultanta sila  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ , čiji su intenziteti  $F_1=170$  N,  $F_2=100$  N,  $F_3=240$  N? Pravci i smerovi dejstva ovih sila prikazani su na slici, gde su označeni uglovi  $\alpha=30^\circ$  i  $\theta=60^\circ$ .

332. O žicu ABC obešen je teret mase  $m=100$  kg. Kolike su sile zatezanja delova žice AB i BC?

333. Da bi izvukao automobil iz blata, vozač upotrebi užu čiji jedan kraj veže za prednji deo automobila, a drugi za obližnje drvo, udaljeno  $d=12$  m od automobila. Vozač, mase  $m=80$  kg, nalegne na sredinu užeta. pri čemu se na njemu napravi ugib od  $\Delta h=0,25$  m. Ako je užu pre ugibanja bilo horizontalno i u osi automobila, kolikom se silom deluje na automobil na ovaj način?

334. Od šest jednakih štapova načinjen je kran prikazan na slici. Štapovi su spojeni međusobno i sa zidom tako da spojevi čine zglob. O zglobu je obešen teret mase  $m$ .

- Kolikom je aksijalnom silom opterećen štap AB?
- Da li je štap AB opterećen na istezanje ili na sabijanje?

335. Cilindrično telo, mase  $m=80$  kg, nalazi se između dve glatke ploče koje su pod uglom  $\alpha=60^\circ$ . Kolikom silom deluje telo na ploče u oba slučaja prikazana na slici?

336. Na strmoj ravni, nagibnog ugla  $\alpha=45^\circ$ , nalazi se telo, mase  $m=40$  kg, koje klizi niz strmu ravan, pošto je koeficijent trenja između tela i podloge mali i iznosi  $\mu=0,1$ . Kolikom normalnom silom treba delovati na telo da bi se sprečilo njegovo kretanje?

— labilne ravnoteže ako se posle malog otklona iz ravnotežnog položaja ne vraća u njega, već se kreće ka drugom ravnotežnom položaju,

— indiferentne ravnoteže ako se posle otklona ne kreće, tj. ako ostane u istom položaju.

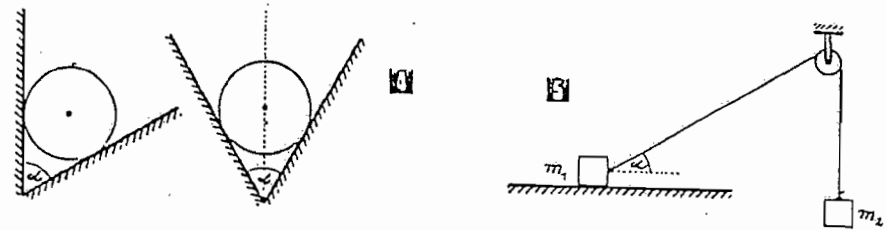
Proste mašine (poluge, strma ravan) omogućavaju da se silama malog intenziteta savladaju sile većeg intenziteta. Mehanička prednost  $\mathcal{Q}$  jeste kvantitativna karakteristika ovog svojstva prostih mašina (i mehanizama).

Naime, mehanička prednost proste mašine je

$$\mathcal{Q} = F_1 / F_2$$

gde je  $F_1$  — intenzitet sile kojom deluje prosta mašina, a  $F_2$  — intenzitet sile kojom se deluje na prostu mašinu.

Mehanička prednost poluge jednaka je odnosu kraka tereta  $l_D$  i kraka sile  $l_F$ , tj.  $\mathcal{Q} = l_D / l_F$ . Kod strme ravni je  $\mathcal{Q} = l / h$ , gde je  $l$  — dužina strme ravni, a  $h$  — njena visina.



337. Telo, mase  $m_1=5$  kg, nalazi se na horizontalnoj podlozi, pri čemu je koeficijent trenja između tela i podloge  $\mu=0,5$ . Ovo telo je vezano užetom za drugo telo, mase  $m_2=2,5$  kg, na način prikazan na slici. Do kog graničnog ugla  $\alpha_{max}$  će dospeti prvo telo?

338. Tri tela, masa  $m_1, m_2, m_3$ , vezana su užetom. Kolika treba da bude masa  $m_3$  trećeg tela da bi telo mase  $m_2$  krenulo uz strmu ravan? Koeficijent trenja između strme ravni i tela na njoj je  $\mu$ .

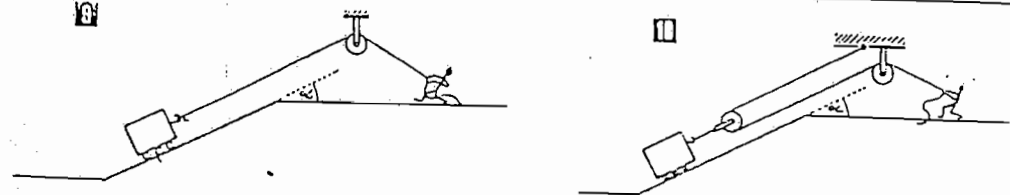
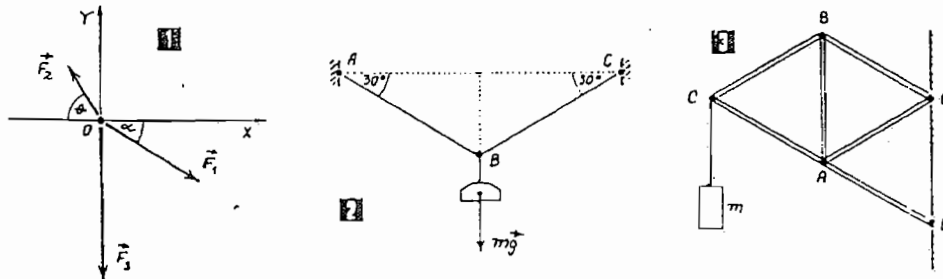
339. Telo, mase  $m_1=10$  kg, obešeno je o užu u tački A. Masa tela kojim je sistem uravnotežen je  $m_2=18$  kg. Kolika treba da bude masa  $m_3$  trećeg tela i ugao  $\alpha$  da bi užu levo od tačke A bilo horizontalno?

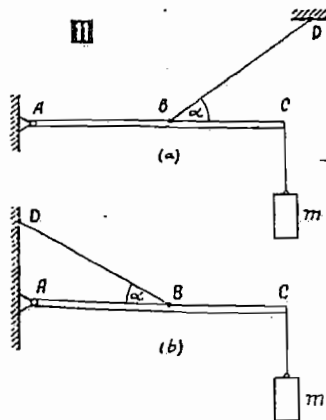
340. Na glatkoj sfernoj površini nalazi se metalna lopta mase  $m=10$  kg. Lopta je obešena o užu dužine  $l=AC=60$  cm. Ako je  $R=OB=20$  cm, a  $\angle C=55$  cm, odrediti silu reakcije sferne površine.

341. Da bi se telo diglo do neke visine, koristi se strma ravan nagibnog ugla  $\alpha=30^\circ$ , pri čemu je koeficijent trenja između tela i podloge  $\mu=0,1$ . Kolika je mehanička prednost ovog načina dizanja tereta?

342. Telo je potrebno podići vučenjem uz strmu ravan, nagibnog ugla  $\alpha=30^\circ$ , pomoću jedne koturače na način prikazan na slici. Koeficijent trenja između tela i podloge je  $\mu=0,1$ . Kolika je mehanička prednost ovakvog načina dizanja tereta?

343. Da bi se neko telo vuklo uz strmu ravan, potrebno je na njega delovati dva puta većom silom nego kada se vuče niz strmu ravan. Koliki je stepen korisnog dejstva ovakvog načina dizanja tereta?



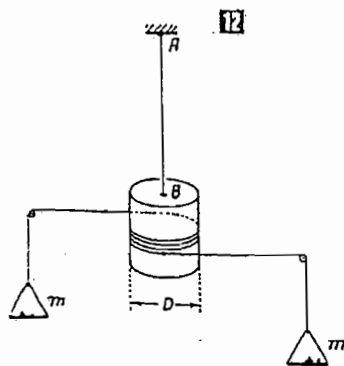


344. O gredu, dužine  $AC=l=4\text{ m}$ , obešen je teret, mase  $m=2\text{ t}$ , na način prikazan na slici 11, gde je  $\alpha=30^\circ$ . Sredina grede (tačka B) vezana je čeličnim užetom za oslonac D na dva načina. Kolika je sila zatezanja užeta u oba slučaja?

345. Na strmoj ravni, nagibnog ugla  $\alpha=45^\circ$ , nalazi se kockasto telo, ivica  $a$ . Koliki je najmanji rad potrebno uložiti da bi se telo jedanput prevrnulo nagore i nadole?

346. Homogeni kvadar ima dužine ivica  $a=d$ ,  $b=2d$  i  $c=3d$ . Kolika je potencijalna energija kvadra u sva tri njegova moguća položaja na horizontalnoj podlozi? Na osnovu dobijenih rezultata oceniti njegovu stabilnost. Gustina supstancije od koje je načinjen kvadar iznosi  $\rho$ .

347. Pri eksperimentalnom određivanju torzione konstante žice ostvaruje se torzioni spreg tegovima, koji se postavljaju na tzsove prikazane na slici 12. Prečnik cilindra je  $D=40\text{ mm}$ . Koliki moment sprega uvija žicu AB ako se na tasove stave tegovi mase  $m=40\text{ g}$ ?

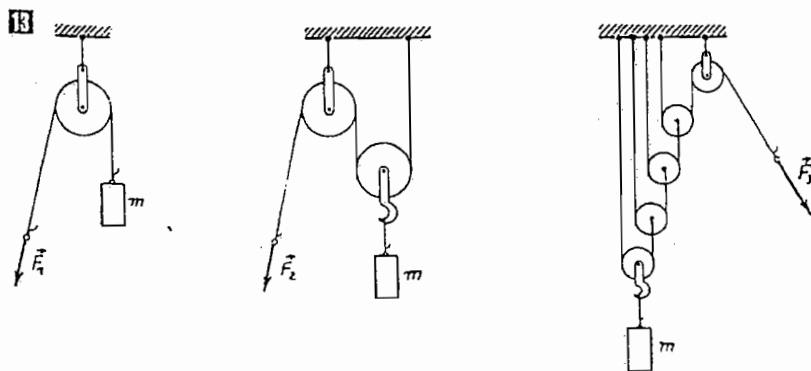


348. Na platformi železničkog vagona nalazi se automobil čija je masa  $m=920\text{ kg}$ . Koliki moment savlađuje kočnica automobila ako se voz kreće ubrzanjem  $a=0,8\text{ m/s}^2$ , a točkovi automobila imaju poluprečnik  $R=0,25\text{ cm}$ ?

349. Čovek, mase  $m=90\text{ kg}$ , raspolaže polugom dužine  $l=2\text{ m}$ . Koliki teret može čovek podići ovom polugom ako je njen oslonac na rastojanju  $d=0,25\text{ m}$  od kraja poluge koji nije u rukama čoveka? Kolika je mehanička prednost ove poluge?

350. Izračunati koliki treba da bude intenzitet vučnih sila  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$  13 da bi se dizao teret mase  $m$ ? Kolike su odgovarajuće mehaničke prednosti?

351. Ako se telo postavi najpre na jedan tas pa zatim na drugi, dobijaju se različiti rezultati merenja. U prvom slučaju se dobija da je masa merenog tela  $m_1=3\text{ kg}$ , a u drugom slučaju  $m_2=3,4\text{ kg}$ . Kolika je tačna vrednost mase merenog tela?



352. Dva spojena cilindra, ukupne mase  $M$ , različitih poluprečnika,  $r < R$ , povezani su užadima za oslonac i za telo mase  $m$ , na način prikazan na slici 14. Kolika treba da bude masa tela  $m$  da bi sistem mirovao?

353. Na kotūr načinjen od dva cilindra, poluprečnika  $r$  i  $R$  ( $r < R$ ) 15, prebačena su dva užeta na čijim krajevima se nalaze tela mase  $m_1$  i  $m_2$ . Koliki treba da bude odnos masa  $m_1, m_2$  da bi kotūr bio u ravnoteži? Nacrtati vektore odgovarajućih momenata.

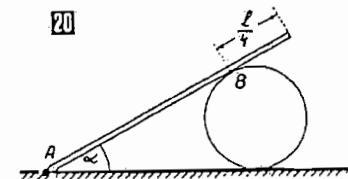
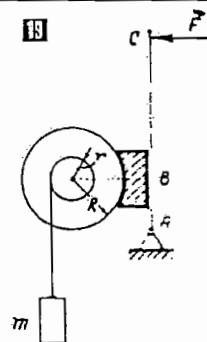
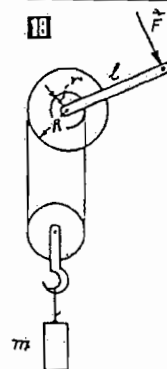
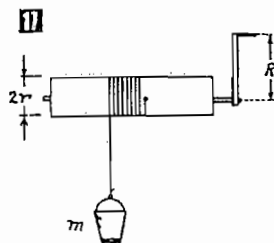
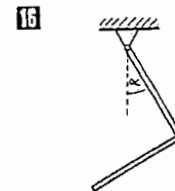
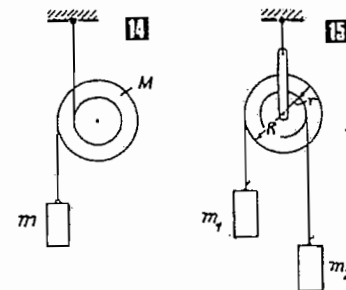
354. Homogen tanak štap, dužine  $l$  i mase  $m$ , savijen je po sredini pod pravim uglom i obešen za jedan svoj kraj 16. Odrediti ugao  $\alpha$  između vertikalne i gornjeg kraja štapa u položaju ravnoteže.

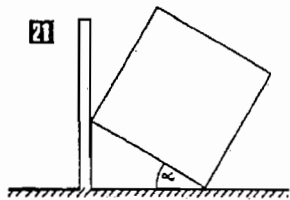
355. Iz bunara se izvlači voda pomoću proste mašine prikazane na slici 17. Masa kante sa vodom je  $m=20\text{ kg}$ . Poluprečnik cilindra je  $r=15\text{ cm}$ , dok je krak ručice  $R=30\text{ cm}$ . Kolikom je normalnom silom potrebno delovati na ručicu da bi se na ovaj način dizala kanta sa vodom?

356. Pomoću diferencijalne koturače 18 diže se teret mase  $m=1\text{ t}$ . Kolikom je normalnom silom  $\vec{F}$  potrebno delovati na ručicu valjka? Dužina ručice je  $l=40\text{ cm}$ , poluprečnik većeg valjka  $R=30\text{ cm}$ , a manjeg  $r=10\text{ cm}$ .

357. Drveni valjak za dizanje tereta 19 ima dva cilindrična dela poluprečnika  $r=15\text{ cm}$  i  $R=75\text{ cm}$ . Preko prvog valjka namotano je uže o čijem kraju visi teret mase  $m=1\text{ t}$ . Pored većeg valjka postavljena je kočnica čija poluga ima dužinu  $AC=2\text{ m}$ , dok je  $AB=0,2\text{ m}$ . Koeficijent trenja između kočnice i većeg cilindra je  $\mu=0,6$ . Kolikom silom  $\vec{F}$  može da se zaustavi kretanje valjka?

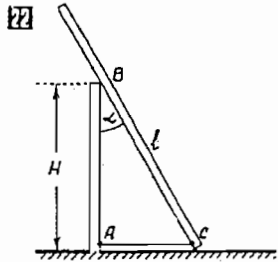
358. Greda, 20 mase  $m=200\text{ kg}$ , vezana je u tački A zglobom za horizontalno tle. Greda je oslonjena u tački B na gladak cilindar, zaklapajući pri tome ugao  $\alpha=30^\circ$  prema tlu. Kolika sila deluje na oslonac B?





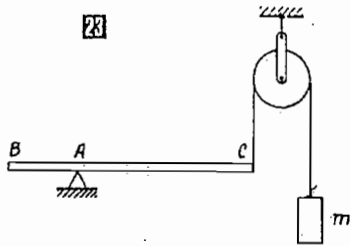
359. Kocka, stranica  $a$ , naslonjena je na vertikalni gladak zid na način prikazan na slici 21. Koeficijent trenja između kocke i horizontalnog tla je  $\mu$ . Pri kojim uglovima  $\alpha$  će kocka da bude u ravnoteži?

360. Homogene lestvice, mase  $m$ , postavljene su na gladak vertikalni zid. Koeficijent trenja između lestvice i horizontalnog tla je  $\mu$ . Odrediti najmanji ugao između lestvice i tla pri kome lestvice neće da klize.



361. Homogena greda, mase  $m=60$  kg i dužine  $l=4$  m, postavljena je pod uglom  $\alpha=30^\circ$  na gladak zid visine  $H=3$  m. Donji kraj grede vezan je užetom AC, kojim se sprečava klizanje grede. Kolika je sila zatezanja užeta AC a kolike su reakcije oslonaca B i C?

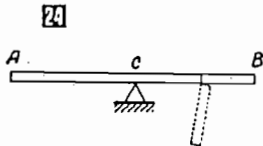
362. Homogena greda, mase  $m=400$  kg i dužine  $l$ , leži na horizontalnom tlu. Jedan kraj grede nalazi se pored vertikalnog zida visine  $H=l$ . Pravac grede je normalan na zid. Za drugi kraj grede vezano je uže kojim radnik, stojeći na zidu, treba da podigne gredu u vertikalni položaj. Kolikom silom radnik treba da vuče gredu da bi je pokrenuo? Kako intenzitet ove sile zavisi od položaja grede?



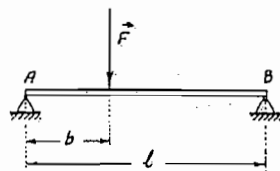
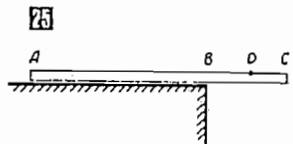
363. Daska, mase  $m=21$  kg i dužine  $l=8$  m, postavljena je na oslonac A na način prikazan na slici 23, gde je  $AB=2$  m. Kraj daske C vezan je užetom koje je prebačeno preko kotura o čijem drugom kraju visi teg mase  $m_1$ .

a) Kolika treba da bude masa tege  $m_1$  da bi daska ostala u horizontalnom položaju?  
b) Koliki je otpor oslonca A?

364. Homogena greda, dužine  $l$  i mase  $m$ , uravnotežena je na osloncu C. Jedna četvrtina grede se odseče i obesi na mestu preseka. Definirati vertikalnu silu  $\vec{F}$  kojom je potrebno delovati na kraj grede A da bi ona ostala u ravnoteži.



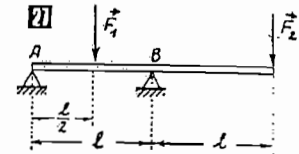
365. Homogena greda, dužine  $l=AC=12$  m i mase  $m=150$  kg, postavljena je na prepust. Dužina grede nad prepustom je  $BC=l/3$ . Od tačke B ka tački C kreće čovek mase  $m_1=80$  kg. Koliko je najveće rastojanje tačke D u kojoj se nalazi čovek (do tačke B) pri kome greda sa čovekom neće da padne niz prepust?



27

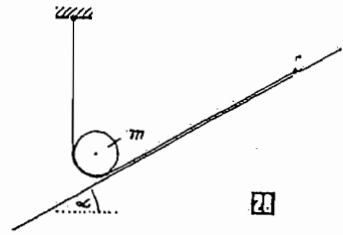
366. Prosta greda, dužine  $l$ , opterećena je vertikalnom silom  $\vec{F}$ , intenziteta  $F=0,3$  MN. Krak sile je  $b=l/3$ . Koliki su otpori oslonaca A i B?

367. Greda, mase  $m$  i dužine  $2l$ , postavljena je na dva oslonca (A i B). Greda je opterećena silama  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$ , čiji su intenziteti  $F_1$  i  $F_2$ , dok su krakovi ovih sila prikazani na slici. Koliki su otpori oslonaca A i B?

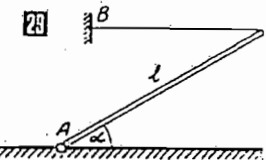


368. Na strmoj ravni, nagibnog ugla  $\alpha$ , nalazi se cilindar, mase  $m$ , koji se održava na njoj pomoću užeta na način prikazan na slici. Kolika je sila zatezanja užeta?

369. Štap, mase  $m$  i dužine  $l$ , jednim svojim krajem nalazi se u ležištu A, dok je drugi kraj vezan horizontalnim užetom za oslonac B. Ugao štapa prema horizontalnoj ravni je  $\alpha$ . Koliki su otpori oslonaca A i B?

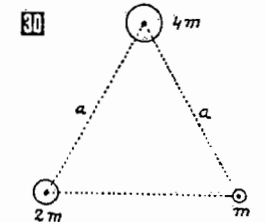


370. Tri tela malih dimenzija, masa  $m$ ,  $2m$  i  $4m$ , nalaze se u temenima jednakostraničnog trougla. a) Gde se nalazi centar mase sistema? b) U kom slučaju će centar mase da se poklopi sa težištem sistema?



371. Dve homogene kugle, jednakih poluprečnika  $R=10$  cm, jedna načinjena od gvožđa a druga od aluminijuma, postavljene su tako da se dodiruju. Ako je gustina gvožđa  $\rho_1=7800$  kg/m<sup>3</sup>, a aluminijuma  $\rho_2=2700$  kg/m<sup>3</sup>, odrediti položaj centra mase ovog sistema tela.

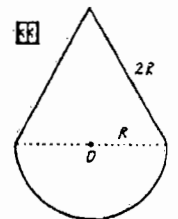
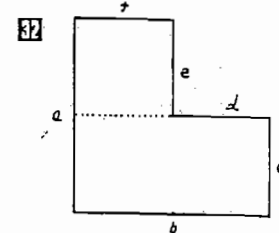
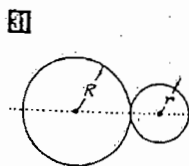
372. Dve homogene kuglice, načinjene od iste supstancije, nanizane su na tanak zategnut konac. Gde se nalazi centar mase sistema kuglica ako se one dodiruju? Odnos poluprečnika kuglica iznosi  $R/r=2$ .



373. Odrediti koordinate centra mase tanke homogene ploče, mase  $m$ , oblika kao na slici. Dužine stranica ploče su  $a=b=2l$  i  $c=d=e=f=l$ .

374. Odrediti koordinate centra mase tanke homogene ploče, mase  $m$ , oblika kružnog isečka sa centralnim uglom  $\alpha$  i poluprečnikom  $R$ .

375. Odrediti položaj centra mase tanke homogene ploče, mase  $m$ , oblika kao na slici, ako je



poluprečnik kružnog dela ploče  $R$ , a dužina krakova trouglastog dela ploče  $2R$ .  
 376. Odrediti koordinate centra mase tanke homogene ploče, mase  $m$ , oblika jednakokrakog trougla, visine  $h$  i ugla naspram osnovice  $2\alpha$ .

## 7. Dinamika rotacionog kretanja

Aksijalni moment inercije (ili skraćeno — moment inercije) materijalne tačke, mase  $dm$ , u odnosu na osu od koje je materijalna tačka udaljena za  $r$  je

$$dI = r^2 dm$$

dok je moment inercije tela u odnosu na istu osu

$$I = \int r^2 dm$$

Momenti inercije nekih geometrijski pravilnih tela, za osu koja prolazi kroz njihov centar mase, dati su na kraju knjige.

Jedinica momenta inercije je

$$[I] = [m][r^2] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

Moment inercije tela, mase  $m$ , za neku proizvoljnu osu je prema Štajnerovoj teoremi

$$I = I_0 + md^2$$

gde je  $I_0$  — moment inercije tela za osu koja prolazi kroz centar mase tela i paralelna je sa osom za koju se traži moment inercije,  $d$  — rastojanje između ovih osa.

Ako se telo (materijalna tačka) mase  $m$  kreće brzinom  $\vec{v}$ , onda je njegov impuls  $\vec{p} = m\vec{v}$ , a moment impulsa

$$\vec{L} = \vec{r} \cdot \vec{p}$$

gde je  $\vec{r}$  — vektor položaja tela u odnosu na tačku (osu rotacije) za koju se traži moment impulsa, koja je najčešće centar krivine putanje tela (ili osa rotacije).

Intenzitet momenta impulsa je, imajući u vidu da je  $\vec{r} \perp \vec{v}$ ,

$$L = rp \sin(\vec{r}, \vec{p}) = mrv = I\omega$$

gde je  $I$  — moment inercije tela, a  $\omega$  — ugaona brzina njegove rotacije. Isto tako je

$$L = I\dot{\omega}$$

Jedinica momenta impulsa je

$$[L] = [r][mv] = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} = \text{N} \cdot \text{s}$$

Prema II Njutnovom zakonu za rotaciju, moment sile  $\vec{M}$  koji deluje na telo jednak je proizvodu momenta inercije tela  $I$  u odnosu na osu rotacije i ugaonog ubrzanja  $\alpha$  koje telo dobija usled dejstva momenta, tj.

$$\vec{M}_O = I\alpha$$

ili

$$\vec{M}_O = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Ovo znači da je moment sile koji deluje na telo jednak brzini kojom se menja njegov moment impulsa ili, u matematičkom smislu, prvom izvodu momenta impulsa tela po vremenu.

Ako na telo tokom vremena  $dt$  deluje moment sile  $\vec{M}$ , odgovarajući impuls momenta je

$$d\vec{L} = \vec{M} dt$$

a njegov intenzitet  $dL = M dt$ .

Ako moment sile deluje na telo tokom vremenskog intervala  $\Delta t = t_2 - t_1$ , odgovarajući impuls momenta je

$$\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \vec{M} \Delta t$$

Ukoliko na telo, momenta inercije  $I$ , deluje stalni moment sile ( $M = \text{const}$ ) tokom vremenskog intervala  $\Delta t$ , pri čemu se moment impulsa tela promeni od  $L_1 = I\omega_1$  do  $L_2 = I\omega_2$ , onda je na osnovu II Njutnovog zakona za rotaciju  $M \Delta t = dL$ , tj.

$$M \Delta t = I\omega_2 - I\omega_1$$

odnosno

$$I\dot{\omega} = L_2 - L_1$$

što znači da je impuls momenta koji je delovao na telo jednak promeni momenta impulsa tela.

Moment impulsa sistema  $n$  tela čiji su momenti impulsa  $\vec{L}_1, \vec{L}_2, \vec{L}_3, \dots, \vec{L}_n$  je

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i$$

Prema zakonu održanja momenta impulsa, moment impulsa izolovanog sistema tela je stalan, tj.

$$\sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \text{const}$$

Rad momenta sile, čiji je intenzitet  $M$ , pri ugaonom pomeraju  $d\theta$  tela nad kojim se vrši rad je

$$dA = M d\theta$$

pri čemu je ukupan rad u toku ugaonog po-

meraja  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ ,

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$$

Za slučaj  $M = \text{const}$  ukupan rad je

$$A = M \cdot \Delta\theta$$

Kinetička energija tela, momenta inercije  $I$ , pri rotaciji ugaonom brzinom  $\omega$  je

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2}$$

Snaga mašine koja vrši rad nad telom, pri čemu ono rotira ugaonom brzinom  $\omega$ , je

$$P = M\omega$$

gde je  $M$  — intenzitet momenta sile koji vrši rad.

377. Dva jednaka cilindra, poluprečnika  $r$  i mase  $m$ , spojeni su na način prikazan na slici 1. Koristeći se tablicama na kraju knjige, odrediti moment inercije ovog tela za osu  $O$ .

378. Dva jednaka štapa, dužine  $l = 0,5$  m i mase  $m = 6$  kg, spojena su na način prikazan na slici 2. Koliki je moment inercije ovakvog tela u odnosu na osu  $O$ ? Moment inercije štapa u odnosu na osu koja prolazi kroz njegov centar mase a normalna je na njegovu geometrijsku osu je  $I_0 = ml^2/12$ .

379. Koliki je moment inercije tankog homogenog kružnog prstena, mase  $m = 1$  kg i poluprečnika  $r = 0,2$  m, u odnosu na osu koja leži u ravni prstena i prolazi kroz njegov centar?

380. Tanka homogena ploča, mase  $m = 2$  kg, ima oblik pravougaonika. Dužine stranica ploče su  $a = 10$  cm i  $b = 20$  cm. Koliki je moment inercije ove ploče u odnosu na osu koja se poklapa sa jednom od stranica?

381. Na valjak, poluprečnika  $r = 20$  cm i dužine  $l = 0,7$  m, koji može da rotira oko svoje geometrijske ose, deluje moment, čiji se intenzitet i smer menjaju na način prikazan na slici 3.

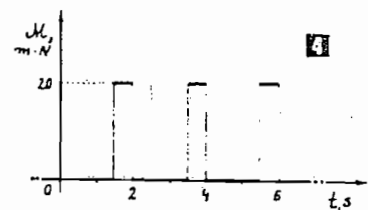
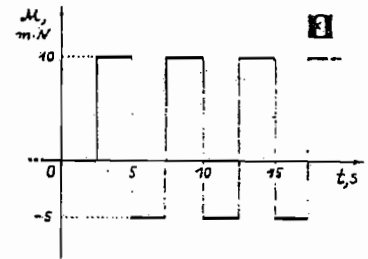
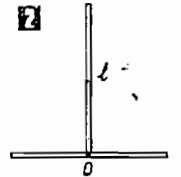
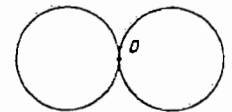
a) Koliku će ugaonu brzinu da ima valjak posle vremena  $t = 5$  s?

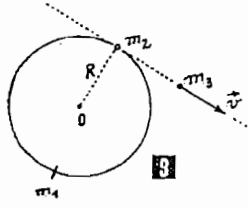
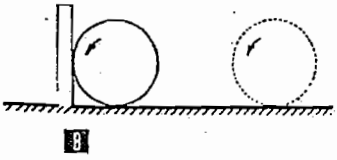
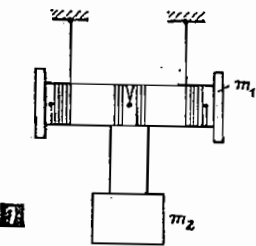
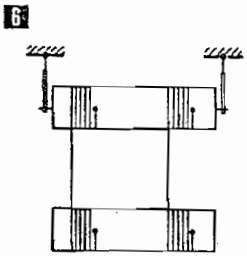
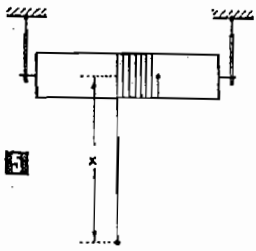
b) Nacrtati odgovarajući dijagram ugaone brzine. Valjak je načinjen od metalne legure gustine  $\rho = 8100$  kg/m<sup>3</sup>.

382. Na zamajac, čiji je moment inercije  $I = 100$  kg·m<sup>2</sup>, deluje impulsni moment sprega, čiji se intenzitet menja na način prikazan na slici 4.

a) Koliki je intenzitet jednog impulsa momenta sprega?

b) Nacrtati dijagram ugaonog ubrzanja i ugaone brzine zamajca, pod uslovom da je prethodno mirovao.





383. Homogeni tanak cilindar, poluprečnika  $R$  i mase  $M$ , može slobodno da rotira oko nepokretne horizontalne osovine **5**. Na cilindar je namotano homogeno tanko uže dužine  $l$  i mase  $m$ . Odrediti zavisnost:

- ugaonog ubrzanja cilindra,
  - intenziteta sile zatezanja užeta od dužine  $x$  odmotanog dela užeta.
- Smatrati da se centar mase namotanog dela užeta nalazi na osi cilindra.

384. Sistem prikazan na slici **6** sastoji se od dva jednaka homogena cilindra na koja su simetrično namotana dva užeta, zanemarljive mase. Kolika je sila zatezanja u svakom užetu ako su mase cilindra jednake i iznose  $m$ ? Trenje je zanemarljivo.

385. Kalem, mase  $m_1$ , unutrašnjeg poluprečnika  $r$  i momenta inercije  $I$ , obešen je pomoću dva užeta na način prikazan na slici **7**. Pomoću trećeg užeta, koje je takođe namotano na kalem, obešeno je telo mase  $m_2$ .

- Kolikim ubrzanjem pada kalem?
- Kolike su sile zatezanja svih užadi?

386. Metalni cilindar, poluprečnika  $R$ , rotirajući stalnom ugaonom brzinom  $\omega$  po horizontalnoj podlozi naiđe na vertikalni zid **8**. Zbog trenja o vertikalni zid i horizontalnu podlogu cilindar se zaustavi. Ako je  $\mu$  koeficijent trenja između cilindra i vertikalnog zida, kao i cilindra i horizontalne podloge, izračunati za koje će se vreme cilindar zaustaviti. Vreme računati od trenutka kada cilindar dodirne vertikalni zid.

387. Stojeći na periferiji platforme, poluprečnika  $R=3$  m i mase  $m_1=100$  kg, čovek, mase  $m_2=80$  kg, opali metak iz puške u normalnom pravcu u odnosu na pravac njegovog vektora položaja **9**. Masa metka je  $m_3=10$  g, a njegova početna brzina  $v=800$  m/s. Koliku ugaonu brzinu je dobila platforma sa čovekom usled ispaljivanja metka? Trenje u osi platforme i masu puške zanemariti.

388. Homogeni štap, dužine  $l=1$  m i mase  $m=2$  kg, nalazi se u horizontalnoj ravni i može da rotira oko ose **10**, koja prolazi kroz centar mase, bez trenja. U jedan kraj ovog štapa udari metak, mase  $m_1=2$  g, koji se kreće brzinom  $v=100$  m/s. Metak udari u štap pod pravim uglom i pri tome se zadrži u štapu, saopštivši mu ugaonu brzinu  $\omega_0$ . Kolika je ova ugaona brzina?

389. Kružna platforma **11** može da rotira bez trenja oko svoje geometrijske osc. Na platformi je obeležen krug, poluprečnika  $r=2$  m, po kome se kreće čovek stalnom brzinom  $v=5$  m/s (u odnosu na platformu). Masa platforme je  $m_1=200$  kg, a čoveka  $m_2=80$  kg, dok je poluprečnik platforme  $R=2,5$  m. Koliku ugaonu brzinu dobije platforma

usled kretanja čoveka ako su u početku kretanja čovek i platforma bili u mirovanju?

390. Metak, mase  $m_1=10$  g, udari u balističko klatno, dužine  $l=0,5$  m, na čijem kraju se nalazi drveno telo, mase  $m_2=1$  kg, i ostane u njemu. Posle udara metka klatno dospe u horizontalan položaj. Kolika je bila brzina metka?

391. Metalna kugla, poluprečnika  $r=20$  cm i mase  $m=40$  kg, rotira stalnom ugaonom brzinom  $\omega=2$  rad/s oko ose:

- koja prolazi kroz njen centar mase,
- koja se nalazi na rastojanju  $d=2r$  od prethodne ose.

Kolika je kinetička energija kugle u oba slučaja?

392. Štap **12**, dužine  $l=40$  cm i mase  $m_1=0,8$  kg, ima na svom kraju metalnu loptu mase  $m_2=4$  kg. Kolika je energija ovog sistema ako on rotira stalnom ugaonom brzinom  $\omega=6$  rad/s oko ose  $OO'$ ?

393. Kolika je kinetička energija Zemlje uzimajući u obzir njenu rotaciju oko svoje ose i oko Sunca? Masa Zemlje je  $m=6 \cdot 10^{24}$  kg, a njen poluprečnik  $R=6,37 \cdot 10^6$  m, dok je srednja udaljenost Zemlje od Sunca  $d=1,5 \cdot 10^{11}$  m.

394. Pri sečenju drveta kružnom testerom, poluprečnika  $r=30$  cm, potrebno je ostvariti tangencijalnu silu, intenziteta  $F=200$  N, da bi zupci testere kldali drvo. Ako je ugaona brzina testere  $\omega=2000$  ob/min, izračunati potrebnu korisnu snagu pokretačkog motora.

395. Zamajac, mase  $m=180$  kg, rotira stalnom ugaonom brzinom  $\omega=30$  ob/min. Ako je poluprečnik inercije zamajca  $k=0,5$  m, izračunati njegovu kinetičku energiju.

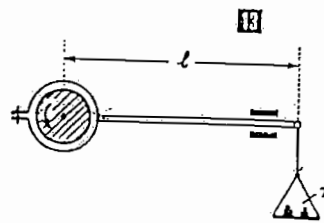
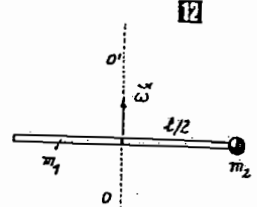
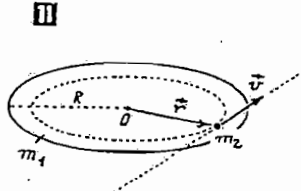
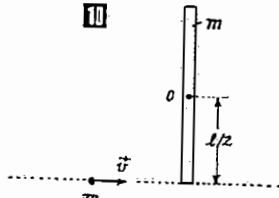
396. Na osovini elektromotora nalazi se disk, mase  $m=1000$  kg i poluprečnika  $R=60$  cm. Elektromotor deluje na disk momentom sprega intenziteta  $M_s=353$  m·N. Ako motor pođe iz mirovanja, izračunati vreme za koje će tačka na obodu diska imati brzinu  $v=24$  m/s. Kolika je kinetička energija diska u tom trenutku?

397. Na osovini elektromotora, koji razvija moment sprega, intenziteta  $M_s=785$  m·N, nalazi se cilindar, mase  $m=400$  kg i poluprečnika  $R=20$  cm. Ako motor pođe iz mirovanja, za koje vreme će osovina da načini prvi obrtaj? Kolika je energija predata cilindru za to vreme?

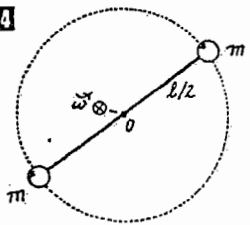
398. Prilikom mjerenja snage motora Pronijevom kočnicom **13** dobijeni su sledeći podaci:

- ugaona brzina motora pri ostvarenoj ravnoteži je  $\omega=120$  ob/min,
- dužina kraka poluge  $l=0,8$  m,
- masa tegova na tasu pri ravnoteži  $m=20$  kg.

Kolika je snaga motora prema ovim podacima?



14



399. Ugao koji opiše zamajac menja se tokom vremena, po zakonu  $\theta = A + Bt + Ct^2$ , gde je  $A = 3 \text{ rad}$ ,  $B = 36 \text{ rad/s}$ ,  $C = -2 \text{ rad/s}^2$ . Kolika je srednja snaga koju razvije sila dejstvujući na zamajac do zaustavljanja? Moment inercije zamajca iznosi  $I = 100 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ .

400. Na krajevima štapa, dužine  $l = 1 \text{ m}$  i zanemarljive mase, nalaze se dve jednake kuglice, svaka mase  $m = 10 \text{ g}$ . Štap sa kuglicama rotira oko ose O stalnom ugaonom brzinom  $\omega_1 = 0,5 \text{ rad/s}$ . U jednom trenutku jedna od kuglica spadne sa štapa.

a) Šta će se desiti sa štapom posle ovoga? Nacrtati odgovarajući dijagram ugaone brzine štapa.

b) Kolika je promena kinetičke energije sistema pri spadanju kuglice?

401. Disk, poluprečnika  $r = 40 \text{ cm}$  i mase  $m_1 = 20 \text{ kg}$ , počne da rotira stalnim ugaonim ubrzanjem. Na periferiji diska nalazi se telo A mase  $m_2 = 5 \text{ kg}$ . Koeficijent trenja između tela i diska je  $\mu = 0,1$ . Zbog povećanja centrifugalne sile ono jednog trenutka spadne sa diska.

a) Pri kojoj će ugaonoj brzini diska telo da spadne?

b) Kolika će da bude ugaona brzina diska neposredno posle spadanja tela? Nacrtati odgovarajući dijagram ugaone brzine diska.

c) Kolika je promena kinetičke energije sistema pri spadanju tela?

402. U sistemu koji rotira stalnom ugaonom brzinom,  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ , oko nepokretne ose, kreće se telo, mase  $m = 0,3 \text{ kg}$ , malih dimenzija. Koliki rad izvrši centrifugalna sila pri pomeranju ovog tela po proizvoljnoj putanji od tačke (1) do tačke (2) koje su na rastojanju  $r_1 = 0,2 \text{ m}$  i  $r_2 = 0,7 \text{ m}$  od ose rotacije?

403. Na homogeni tanki cilindar mase  $m_1$  i poluprečnika  $R$ , namotano je tanko neistegljivo uže zanemarljive mase, na čijem se kraju nalazi telo mase  $m_2$ . Zanemarujući trenje u osi cilindra, odrediti: a) ugaonu brzinu cilindra, b) kinetičku energiju celog sistema u funkciji vremena kretanja.

404. Homogeni cilindar, mase  $m$  i poluprečnika  $R$ , u trenutku  $t = 0$  počne da se spušta pod dejstvom sile teže.

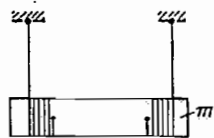
a) Kolika je sila zatezanja u užadima ako je masa cilindra  $m = 5 \text{ kg}$ ?

b) Koliko je ugaono ubrzanje cilindra ako je njegov poluprečnik  $R = 0,2 \text{ m}$ ?

c) Odrediti u funkciji vremena trenutnu snagu koju razvije sila teže u ovom slučaju.

405. Homogeni cilindar mase  $m_1$  i poluprečnika  $R$ , može slobodno da se okreće oko horizontalne osovine čija se ležišta nalaze na postolju mase  $m_2$ ,

17



62

Na cilindar je namotano lako, neistegljivo uže,

na čijem kraju počne da deluje sila  $\vec{F}$ . Trenje između postolja i podloge je zanemarljivo. Odrediti:

a) ugaono ubrzanje cilindra,

b) ubrzanje kraja užeta,

c) kinetičku energiju celog sistema po isteku vremena  $t$  od početka dejstva sile.

406. Maksvelovo klatno sastoji se od osovine, poluprečnika  $r$  i mase  $m_1$ , na kojoj se nalazi disk, poluprečnika  $R$  i mase  $m_2$ , pri čemu je  $r \ll R$ .

a) Kolikim ubrzanjem se kreću tačke na osi OO' Maksvelovog klatna tokom njegovog kretanja nadole?

b) Kolika je ukupna energija sistema posle vremena  $t$  od početka kretanja?

407. Ravan homogeni disk, mase  $m$  i poluprečnika  $R = 0,2 \text{ m}$ , rotira ugaonom brzinom  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ . Koliko vremena će se disk obrtati posle postavljanja na horizontalnu podlogu ako je koeficijent trenja između diska i podloge  $\mu = 0,2$ ? Pritisak diska na podlogu smatrati ravnomernim.

408. Matematičko klatno, dužine  $l = 0,25 \text{ m}$ , ima na svom kraju kuglicu mase  $m = 20 \text{ g}$ . Klatno je zajedno sa stativom, na kome visi postavljeno na ivicu platforme koja rotira. Ako je poluprečnik platforme  $r = 10 \text{ m}$ , izračunati kinetičku energiju kuglice klatna. Ugaona brzina platforme je stalna i iznosi  $\omega = 8,4 \text{ rad/s}$ .

409. Homogena lopta, poluprečnika  $r = 10 \text{ cm}$ , baci se po horizontalnoj ravni brzinom  $v_0 = 5 \text{ m/s}$ . Lopta se kreće kotrljanjem i zaustavi se posle vremena  $t = 20 \text{ s}$  od trenutka bacanja. Koliki je koeficijent trenja između lopte i podloge?

410. Homogena lopta, poluprečnika  $R = 0,2 \text{ m}$ , baci se početnom brzinom  $v_0$  po horizontalnoj ravni. Lopta pri tome pređe put  $s = 10 \text{ m}$  za vreme  $t = 10 \text{ s}$  i zaustavi se.

a) Koliki je koeficijent trenja između lopte i podloge?

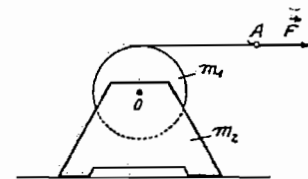
b) Koliko obrtaja načini lopta u toku kretanja?

411. Koliko je ubrzanje centra mase homogene lopte koja se kotrlja (bez klizanja) po strmoj ravni nagibnog ugla  $\alpha = 30^\circ$ ? Početna brzina lopte je zanemarljivo mala.

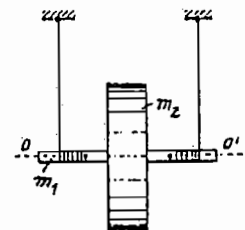
412. Homogeni valjak, kotrlja se niz strmu ravan nagibnog ugla  $\alpha$ , zanemarljivom početnom brzinom. Intenzitet sile trenja iznosi 50-ti deo intenziteta sile teže koja deluje na valjak. Kolika je brzina valjka posle pređenog puta  $s = 24 \text{ m}$ ? Ugao strme ravan je takav da je  $\sin \alpha = 1/20$ .

413. Šuplj cilindar mase  $m$  i poluprečnika  $r$ , počne da se kreće niz strmu ravan nagibnog ugla  $\alpha$ ,

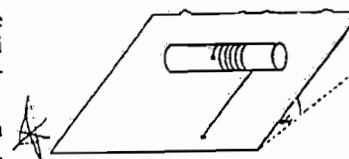
18



19

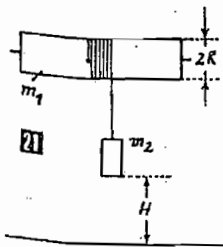


20



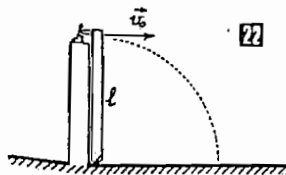
63





namotavajući pri tome na sebe tanko uže, mase  $M$  i dužine  $l$ , koje je do tada ležalo odmotano na strmoj ravni. Koliku brzinu će imati centar mase cilindra sa namotanim užetom u trenutku kada se namota celo uže? Smatrati da je  $2\pi r \ll l$ .

414. Da bi se odredio moment inercije zamajca, poluprečnika  $r=0,5$  m, u odnosu na njegovu geometrijsku osu, obavijeno je oko njega uže na čijem se kraju nalazi teg mase  $m_1=8$  kg. Posmatranjem je utvrđeno da se teg spusti sa visine  $h=2$  m za vreme  $t_1=16$  s. Da bi se eliminisao uticaj trenja, učinjen je isti ogled sa tegom, mase  $m_2=4$  kg, koji se spusti sa iste visine za vreme  $t_2=25$  s. Izračunati moment inercije zamajca smatrajući da je moment sile trenja stalan i nezavisan od mase tegova.



415. Oko valjka, poluprečnika  $R=0,5$  m i mase  $m_1=100$  kg, namotano je uže na čijem kraju visi telo mase  $m_2=16$  kg. U početku kretanja telo je bilo na visini  $H=2$  m iznad zemlje. Pri padanju tela valjak se obrće. Izračunati:

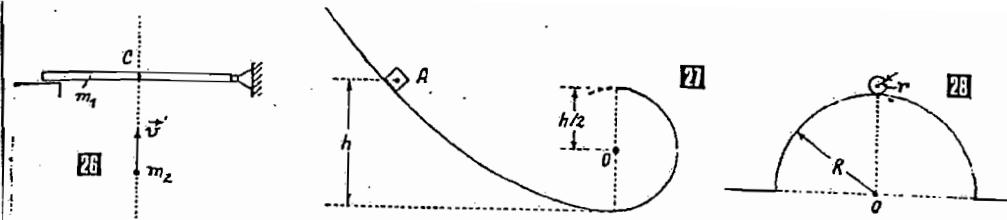
- ugaonu brzinu valjka pri padu tela na zemlju,
- brzinu kojom će telo pasti na zemlju,
- vreme za koje će telo pasti na zemlju,
- kinetičku energiju tela pri udaru o zemlju,
- ubrzanje tela pri padanju.

416. Drvena greda, dužine  $l=12$  m, postavljena je pored vertikalnog zida. Stojeći na vrhu zida, čovek gurne gredu početnom brzinom  $v_0=1$  m/s. Za koje će vreme greda pasti na zemlju?

417. Na glatkom, horizontalnom štapu OA, koji može da rotira oko vertikalne ose koja prolazi kroz kraj O štapa, nalazi se telo malih dimenzija, mase  $m$ . Telo je povezano sa krajem O štapa lakom oprugom, dužine  $l_0$  i koeficijenta krutosti  $k$ . Koliki je rad potrebno izvršiti da bi se ovaj sistem doveo do rotacije ugaonom brzinom  $\omega$  ako se mase štapa i opruge zanemare?

418. Homogeni štap, mase  $m_1$  i dužine  $l$ , obešen je o osovinu O. Štap se najpre dovede u horizontalan položaj (1), pa se nasti da slobodno pada, pri čemu on rotira oko osovine O. U vertikalnom položaju (2) štap udara telo mase  $m_2$ , koje se nalazi na hrapavoj podlozi. Koliki će put  $s$  telo da pređe po podlozi posle udara štapa u njega ako je koeficijent trenja između tela i podloge  $\mu$ ?

419. Homogena drvena greda, dužine  $l=2$  m i mase  $m=10$  kg, obešena je o okretni oslonac O. Metak, mase  $m_1=30$  g i brzine  $v_1=900$  m/s, pogodi gredu u centar mase. Metak prođe kroz gredu i na izlasku ima brzinu  $v_2=100$  m/s. Za koliki će se ugao pomeriti greda pri ovome? Moment inercije grede za osu vešanja je  $I=ml^2/3$ .



420. Drveni štap, mase  $m_1=2$  kg i dužine  $l=0,5$  m, nalazi se u horizontalnom položaju. Metak, mase  $m_2=15$  g, pogodi u centar mase štap i pri tome se u njemu zadržati. Putanja metka je vertikalna i normalna na osu štapa. Kolika treba da bude brzina metka da bi štap došao u vertikalni položaj?

421. Telo malih dimenzija počne da klizi sa visine  $h$  niz strmi žleb, koji prelazi u polukrug poluprečnika  $h/2$ . Zanemarujući trenje, odrediti brzinu tela u najvišoj tački putanje posle odvajanja od žleba.

422. Homogena kugla, poluprečnika  $r$ , počne da se kotrlja bez početne brzine niz polusferu poluprečnika  $R$ . Kolika je ugaona brzina kugle u trenutku odvajanja od polusfere?

## 8. Elastičnost

Pri opisivanju deformacije tela, pored podataka o intenzitetu sile koja vrši deformaciju, koriste se:

— normalni napon

$$\sigma = F/S$$

gde je  $F$  — intenzitet sile koje istežu ili sabijaju telo,  $S$  — površina poprečnog preseka tela u pravcu koji je normalan na pravac dejstva ovih sila;

— tangencijalni napon

$$\tau = F/S$$

gde je  $F$  — intenzitet tangencijalnih sila koje leže da smaknu telo u ravni u kojoj je površina preseka tela  $S$ ;

— pritisak

$$p = F/S$$

gde je  $F$  — intenzitet sile koja ravnomerno deluje na deo tela čija projekcija površine na ravan koja je normalna na pravac dejstva sile iznosi  $S$ .

Jedinica napona i pritiska je

$$[\sigma] = [\tau] = [p] = \frac{N}{m^2} = Pa$$

Prema Hukovom zakonu, kvantitativna karakteristika deformacije tela srazmerna je uzroku deformacije. Tako je, na primer, za — istezanje

$$\delta = \epsilon \sigma$$

gde je  $\delta$  — relativno istezanje,  $\sigma$  — normalni napon koji je uzrok istezanju  $\delta$ ,  $\epsilon$  — koefici-

jent elastičnosti supstancije od koje je telo načinjeno, pri čemu je

$$\epsilon = l/E_Y$$

gde je  $E_Y$  — Jungov modul elastičnosti supstancije;

— sabijanje

$$\delta = -\epsilon \sigma$$

— zapremsku deformaciju (usled dejstva pritiska na telo)

$$\frac{\Delta V}{V} = -k p$$

gde je  $\Delta V/V$  — relativna zapremska deformacija,  $p$  — pritisak koji je uzrok ovoj deformaciji,  $k$  — koeficijent stišljivosti supstancije od koje je telo načinjeno, pri čemu je

$$k = 1/E_V$$

gde je  $E_V$  — zapremski modul elastičnosti supstancije;

— smicanje

$$\phi = k \tau$$

gde je  $\phi$  — ugao smicanja,  $\tau$  — tangencijalni napon koji je uzrok ovom smicanju,  $k$  — koeficijent smicanja supstancije od koje je telo načinjeno, pri čemu je

$$k = 1/E_S$$

gde je  $E_S$  — modul smicanja supstancije;

— uvrtnje

$$\alpha = k \mathcal{M}$$

gde je  $\alpha$  — ugao uvrtnja,  $\mathcal{M}$  — intenzitet

momenta sprega koji je uzrok ovom uvrtnju,  $k$  — koeficijent uvrtnja tela, pri čemu je

$$k = \frac{1}{c}$$

gde je  $c$  — torziona konstanta tela koje se uvrće. Prema prethodnoj relaciji je

$$c = \frac{M}{\alpha}$$

što znači da je torziona konstanta tela određena količnikom intenziteta momenta sprega  $M$  koji uvrće telo i ugla uvrtnja  $\alpha$  (u radianima). Za cilindrično telo, dužine  $l$  i poluprečnika poprečnog preseka  $r$ , je

$$c = \frac{\pi r^4 E_T}{2l}$$

gde je  $E_T$  — modul smicanja supstancije od koje je načinjeno telo.

Jedinica modula elastičnosti je

$$[E_T] = [E_P] = [E_T] = \frac{N}{m^2} = Pa$$

423. Koliki normalni napon trpi kaišnik, debljine 7 mm i širine 18 cm, ako prenosi silu intenziteta  $F = 2,52$  kN?

424. Metalni štap, dužine  $l = 10$  m i površine poprečnog preseka  $S = 100$  cm<sup>2</sup>, visi o tavanici. Na donjem kraju štapa deluje aksijalna sila intenziteta  $F = 40$  kN. Ako je gustina supstancije od koje je načinjen štap  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>, odrediti normalan napon štapa na njegovom vrhu.

425. Koliko se izduži čelična žica, dužine  $l = 1,8$  m i prečnika  $D = 0,4$  mm, usled dejstva aksijalne sile intenziteta  $F = 15$  N? Jungov modul elastičnosti čelika je  $E_P = 200$  GPa.

426. Izgled oslonca za neki most dat je na slici 1. Poluprečnik preseka prvog stuba je  $S_1 = 62,5$  cm<sup>2</sup>, drugog  $S_2 = 2S_1$ , a trećeg  $S_3 = 2S_2 = 4S_1$ . Stubovi su od čelika, Jungovog modula elastičnosti  $E_P = 200$  GPa. Koliko je smanjenje visine oslonca pod dejstvom sile intenziteta  $F = 8$  MN ako je visina svakog stuba  $h = 10$  cm?

427. Kolika je relativna poprečna deformacija bakarne žice, koja je opterećena normalnim naponom  $\sigma = 40$  MPa? Poasonov koeficijent za bakar iznosi  $\mu = 0,3$ , a Jungov modul elastičnosti  $E_P = 100$  GPa. Pretpostaviti da se pri ovom ne prelazi granica proporcionalnosti.

428. Na kraju metalne žice, dužine  $l = 4$  m i površine poprečnog preseka  $S = 1$  mm<sup>2</sup>, obešeno je telo mase  $m = 12$  kg. Odrediti veličinu relativnog istežanja žice, kao i veličinu smanjenog poprečnog preseka žice usled istežanja. Jun-

a torzione konstante

$$[c] = \frac{m \cdot N}{rad}$$

Poasonov koeficijent jednak je količniku relativne poprečne deformacije  $\Delta d/d$  (gde je  $d$  — neka poprečna dimenzija uzorka) i relativne deformacije  $\Delta l/l$  u pravcu dejstva sile (gde je  $l$  — dimenzija uzorka u tom pravcu). Dakle,

$$\mu = \frac{\Delta d/d}{\Delta l/l}$$

Veza između pojedinih modula elastičnosti je

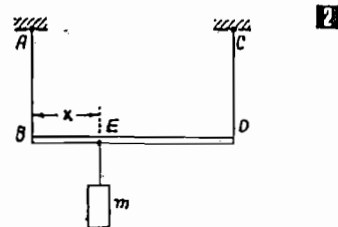
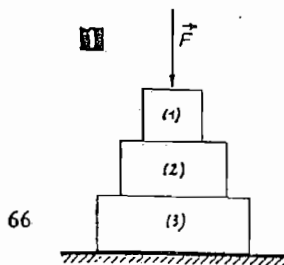
$$E_P = 3(1 - 2\mu)E_T$$

$$E_P = 2(1 + \mu)E_T$$

pa kako je za sve kristalne supstancije Poasonov koeficijent  $\mu < 0,5$ , to je  $E_P > 3E_T$  i  $E_P > 2E_T$ .

Elastična potencijalna energija deformisanog cilindričnog tela (u granicama proporcionalnosti), dužine  $l$  i površine poprečnog preseka  $S$ , kome je promenjena dimenzija u pravcu dejstva sile za  $\Delta l$  je

$$E_P = \frac{E_P S}{2l} (\Delta l)^2$$



gov modul elastičnosti metala od koga je načinjena žica je  $E_P = 120$  GPa, a Poasonov koeficijent  $\mu = 0,35$ .

429. Na dve paralelne žice, jednakih dužina i površina poprečnog preseka, vezan je teret mase  $m$ . Žica AB je od čelika, Jungovog modula elastičnosti  $E_P = 200$  GPa, a žica CD od bakra, Jungovog modula elastičnosti  $E_P = 100$  GPa. Koliko je potrebno da bude rastojanje  $x$  da bi štap, dužine  $d = BD = 0,6$  m, ostao horizontalan?

430. Metalnom žicom vezano je okruglo drvo na način prikazan na slici 3. Koliki je odnos relativnog istežanja delova žice AB i BC (odnosno BD) pod dejstvom sile  $F$ ?

431. Bakarna žica, dužine  $l = 1,5$  m i površine poprečnog preseka  $S = 3$  mm<sup>2</sup>, izduži se za  $\Delta l = 0,9$  mm pod dejstvom sile intenziteta  $F = 200$  N. Koliki je Jungov modul elastičnosti bakra od koga je načinjena žica?

432. Kuglica obešena o laku gumenu traku, dužine  $l = 80$  cm, izvedena je iz ravnotežnog položaja za ugao  $\alpha = 90^\circ$  (kada je traka neistegnuta). Ako se kuglica pusti da pada, traka prolazeći kroz vertikalni položaj dostigne dužinu  $l_1 = 100$  cm. Kolika je brzina kuglice kada prolazi kroz pavnotežni položaj ako se traka isteže srazmerno sili?

433. Homogeni štap, dužine  $l = 1$  m i površine poprečnog preseka  $S = 1$  cm<sup>2</sup>, kreće se bez trenja po horizontalnoj podlozi pod dejstvom aksijalne sile stalnog intenziteta  $F = 1$  kN. Koliko je relativno istežanje štapa u pravcu dejstva ove sile? Jungov modul elastičnosti supstancije od koje je načinjen štap iznosi  $E_P = 69$  GPa.

434. Metalni štap, dužine  $l = 1$  m i zapremine  $V = 100$  cm<sup>3</sup>, načinjen je od metala gustine  $\rho = 11300$  kg/m<sup>3</sup> i Jungovog modula elastičnosti  $E_P = 16$  GPa. Štap je obešen na način prikazan na slici 4.

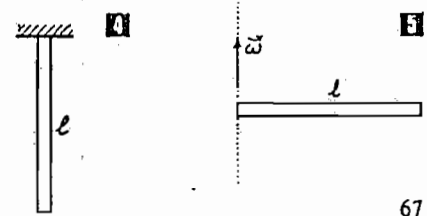
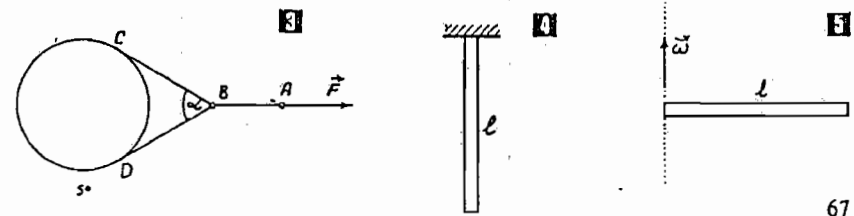
- Kolika je sila istežanja štapa u pojedinim poprečnim presecima?
- Koliko je istežanje štapa pod dejstvom sopstvene težine?
- Kolika je elastična potencijalna energija istegnuto štapa pod dejstvom sopstvene težine ako se zanemari promena zapremine?

435. Tanak homogen čelični štap, dužine  $l = 1$  m, ravnomerno se obrće, ugao-nom brzinom  $\omega = 10$  rad/s, u horizontalnoj ravni oko ose koja prolazi kroz jedan njegov kraj 5.

- Kolika je sila istežanja u pojedinim poprečnim presecima štapa?
- Koliko je ukupno istežanje štapa?

436. Kružni prsten, poluprečnika  $R = 50$  cm, načinjen je od aluminijuma. Prsten rotira oko ose koja prolazi kroz njegovu sredinu i normalna je na ravan prstena. Pri kolikoj najmanjoj ugaonoj brzini će nastati kidanje prstena ako je napon kidanja aluminijuma  $\delta_k = 0,1$  GPa, a gustina  $\rho = 2700$  kg/m<sup>3</sup>?

437. Čelična lopta ima zapreminu  $V = 100$  cm<sup>3</sup> na standardnom pritisku. Kolika je njena zapremina na dnu okeana gde vlada hidrostatički pritisak  $p = 0,1$  GPa? Zapreminski modul elastičnosti čelika je  $E_P = 16$  GPa.



438. Koliki je maksimalni pritisak koji može da izazove voda pri očvršćavanju? Gustina leda je  $\rho_l = 920 \text{ kg/m}^3$ , Jungov modul elastičnosti  $E_y = 28 \text{ GPa}$ , a Poasonov koeficijent  $\mu = 0,3$ .

439. Na nekoj dubini okeana, hidrostatički pritisak iznosi  $p = 1 \text{ GPa}$ . Kolika je gustina vode na ovoj dubini ako je njena gustina na površini okeana  $\rho = 1032 \text{ kg/m}^3$ ? Koeficijent stišljivosti morske vode je  $k = 0,05 \text{ l/GPa}$ .

440. Kolika je relativna promena gustine gvožđa, čiji je koeficijent stišljivosti  $k = 6,6 \text{ l/GPa}$ , pod dejstvom pritiska od  $p = 100 \text{ MPa}$ ?

441. Kolika je relativna promena gustine bakra pod dejstvom pritiska  $p = 0,1 \text{ GPa}$ ? Jungov modul elastičnosti bakra od koga je štap načinjen iznosi  $E_y = 100 \text{ GPa}$ , a Poasonov koeficijent  $\mu = 0,34$ .

442. Otvorenim živinim manometrom se meri razlika pritiska od  $\Delta p = 933 \text{ mbar}$ . Kolika je relativna greška merenja pritiska ovim manometrom usled kompresije žive? Zidove staklene cevi smatrati neelastičnim. Koeficijent stišljivosti žive je  $k = 357 \text{ l/TPa}$ .

443. Jungov modul elastičnosti gvožđa je  $E_y = 200 \text{ GPa}$ , a Poasonov koeficijent  $\mu = 0,28$ . Koliki su zapreminski modul elastičnosti  $E_V$  i modul torzije  $E_t$  gvožđa?

444. Električni motor i generator su spojeni osovinom, dužine  $l = 40 \text{ cm}$  i površine poprečnog preseka  $S = 20 \text{ cm}^2$ . Moment inercije pokretnog dela generatora iznosi  $I = 50 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Električni motor pri polasku razvija ugaono ubrzanje  $\alpha = 4 \text{ rad/s}^2$ . Koliki je ugao uvrtaanja osovine u početku kretanja? Torziona konstanta osovine je  $c = 10^3 \text{ m} \cdot \text{N/rad}$ . Generator smatrati neopterećenim.

445. Kolikim spregom treba delovati na kraj štapa (ukleštenog na jednom kraju), dužine  $l = 1 \text{ m}$  i poluprečnika  $r = 1 \text{ cm}$ , da bi se uvrtno za ugao  $\theta = 0,1 \text{ rad}$ ? Modul torzije metala od koga je načinjen štap je  $E_t = 22 \text{ GPa}$ .

446. Momentom sprega, intenziteta  $M = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{N}$ , uvrće se metalna žica dužine  $l = 40 \text{ cm}$  i poluprečnika  $R = 1,5 \text{ mm}$ . Pod dejstvom ovog sprega žica se uvrne za  $\theta = 16^\circ$ .

a) Kolika je torziona konstanta žice?

b) Koliki je modul torzije metala od koga je načinjena žica?

447. Kolika maksimalna snaga može da se prenese posredstvom čelične osovine, dužine  $l = 3 \text{ m}$  i poluprečnika  $r = 2 \text{ cm}$ , koja se obrće oko svoje uzdužne ose ugaonom brzinom  $\omega = 200 \text{ rad/s}$ , ako je dopušteni ugao uvrtaanja  $\alpha_{\text{max}} = 0,035 \text{ rad}$ ?

448. Pri eksperimentalnom određivanju torziona konstante žice i modula torzije metala od koga je ona načinjena žica-uzorak se uvrne za ugao  $\alpha = 30^\circ$  kada se na tasove postave tegovi mase  $m = 30 \text{ g}$ . Prečnik cilindra na donjem kraju žice je  $D = 3 \text{ cm}$  (videti zad. 347).

a) Kolika je torziona konstanta žice?

b) Ako je dužina žice  $l = 30 \text{ cm}$ , a njen prečnik  $d = 1 \text{ mm}$ , izračunati modul torzije metala od koga je ona načinjena.

449. Čelična poluga, dužine  $l = 2 \text{ m}$  i površine poprečnog preseka  $S = 4 \text{ cm}^2$ , upotrebi se kao dvokraka poluga. Oslonac poluge se nalazi na rastojanju  $0,1l$  od njegovog kraja. Ako se polugom diže teret mase  $m = 400 \text{ kg}$ , za koliko će se saviti njen kraći krak? Modul smicanja čelika od koga je načinjena poluga iznosi  $E_s = 80 \text{ GPa}$ .

450. Kada se metalna žica obesi o tavanicu i optereti tegom mase  $m = 5 \text{ kg}$ , ona se izduži za  $\Delta l = 3 \text{ mm}$ . Kolika je elastična potencijalna energija ove žice?

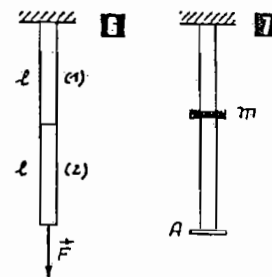
451. Kolika je elastična potencijalna energija cilindra načinjenog od volframa, mase  $m = 8,1 \text{ kg}$ , pri takvom njegovom opterećenju kada je njegovo relativno istezanje u pravcu dejstva sile  $\Delta l/l = 0,002$ ? Gustina volframa je  $\rho = 19 \cdot 100 \text{ kg/m}^3$ , a Jungov modul elastičnosti  $E_y = 380 \text{ GPa}$ .

452. Dva jednaka štapa načinjena su od različitih metala, Jungovog modula elastičnosti  $E_{y1}$  i  $E_{y2}$ . Štapovi su aksijalno spojeni na način koji je prikazan na slici 6. Dužina svakog štapa je  $l$ , a površina poprečnog preseka  $S$ .

a) Koliki je ekvivalentni Jungov modul elastičnosti štapa?

b) Kolika je elastična potencijalna energija istegnutog štapa pod dejstvom sile  $\vec{F}$ ?

Smatrati da se prilikom opterećenja štapa ne prelazi granica proporcionalnosti.



453. Gvozdjeni štap, dužine  $l = 8 \text{ m}$  i površine poprečnog preseka  $S = 4 \text{ cm}^2$ , obešen je o tavanicu 7. Po štapu se može kretati bez trenja teg, mase  $m = 4 \text{ kg}$ , u obliku prstena. Teg se dovede u najviši položaj, pa se pusti da slobodno pada bez početne brzine. Na donjem kraju štapa se nalazi proširenje A koje sprečava dalje kretanje tega. Koliko će se izdužiti štap pri padu tega? Smatrati da je udar elastičan i da se ne prelazi granica proporcionalnosti. Koeficijent elastičnosti gvoždja od koga je načinjen štap je  $e = 5 \text{ l/TPa}$ .

## 9. Mehaničke oscilacije

Slobodne mehaničke oscilacije su harmonijske ako se vrše pod dejstvom elastične sile  $\vec{F}$  čiji je intenzitet  $F$  srazmeran otklonu  $x$  centra mase tela od ravnotežnog položaja. Naime,  $F \sim x$ , tj.

$$F = kx$$

gde je  $k$  — koeficijent srazmernosti, pri čemu je smer sile  $\vec{F}$  suprotan smeru otklona  $\vec{x}$ .

Jednačina harmonijskih oscilacija  $x = x(t)$  određena je diferencijalnom jednačinom

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

gde je  $m$  — masa tela koje osciluje. Rešenje ove jednačine je

$$x = x_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

gde je  $x$  — elongacija,  $x_0$  — amplituda,  $\omega = \sqrt{k/m}$  — kružna frekvencija oscilatornog kretanja,  $\varphi_0$  — početna faza, dok je faza oscilatornog kretanja

$$\varphi = \omega t + \varphi_0$$

Period harmonijskih oscilacija tela, mase  $m$ , koje se nalazi u sastavu oscilatora, pri čemu sila koja oscilator vraća u ravnotežni položaj može da se predstavi u obliku  $F = kx$ , određen je relacijom

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Brzina i ubrzanje tela koje osciluje harmonijski, sa amplitudom  $x_0$  i kružnom frekvencijom  $\omega$ , jesu

$$v = \frac{dx}{dt} = x_0 \omega \cos \omega t = v_0 \cos \omega t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -x_0 \omega^2 \sin \omega t = -a_0 \sin \omega t$$

gde su  $v_0$  i  $a_0$  — amplitude brzine i ubrzanja.

Kinetička i potencijalna energija tela, mase  $m$ , koje osciluje harmonijski, kružnom frekvencijom  $\omega$ , jesu

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m x_0^2 \omega^2}{2} \cos^2 \omega t = E_{k0} \cos^2 \omega t$$

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{m x_0^2 \omega^2}{2} \sin^2 \omega t = E_{p0} \sin^2 \omega t$$

gde su  $E_{k0}$  i  $E_{p0}$  — amplitude kinetičke i potencijalne energije.

Ukupna energija oscilatora je

$$E = E_k + E_p = \frac{m x_0^2 \omega^2}{2}$$

i jednaka je saopštenoj energiji oscilatoru u početku kretanja, pod uslovom da nema gubitaka energije.

Ukoliko postoje gubici energije, onda ona opada u toku vremena po zakonu

$$E(t) = E_0 e^{-\gamma t}$$

gde je  $E_0$  — energija oscilatora u početku kretanja i  $\gamma$  — koeficijent prigušenja, dok

amplituda oscilatora opada po zakonu

$$x_0(t) = x_0 e^{-\alpha t}$$

pa je jednačina prigušenog oscilatornog kretanja

$$x = x_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Logaritamski dekrement oscilatora je

$$\Lambda = \ln \frac{x_{0i}}{x_{0i+1}}$$

gde su  $x_{0i}$  i  $x_{0i+1}$  — amplitude  $i$ -te i  $i+1$  oscilacije, dok je odgovarajući  $Q$ -faktor

$$Q = \frac{E_i}{E_{i+1}}$$

gde su  $E_i$  i  $E_{i+1}$  — energije  $i$ -te i  $i+1$  oscilacije oscilatora.

Za oscilator koeficijenta prigušenja  $\alpha$  je

$$\Lambda = \alpha T \quad \text{i} \quad Q = \frac{1}{2\Lambda}$$

pri čemu je period prigušenih oscilacija

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}$$

gde je  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  — kružna frekvencija neprigušenih oscilacija.

Jednačina kretanja fizičkog klatna, pod uslovom da su gubici energije zanemarljivi, da je ono započelo kretanje iz ravnotežnog položaja ( $\varphi_0=0$ ) i da je ugaona amplituda  $\theta < (1/10)$  rad, ima oblik

$$\theta = \theta_0 \sin \omega t$$

gde je  $\theta$  — ugaoni otklon klatna,  $\omega$  — kružna frekvencija.

Oscilovanje fizičkog klatna pod uslovom  $\theta_0 < (1/10)$  rad je izohrono, a period ovakvih neprigušenih oscilacija je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{mg}}$$

gde je  $l$  — aksijalni moment inercije tela za osu oko koje ono osciluje,  $m$  — masa tela,  $g$  — ubrzanje slobodnog padanja na mestu gde se nalazi telo,  $s$  — najkraća udaljenost centra mase tela do ose oko koje klatno osciluje.

Kako je za matematičko klatno  $I \approx ml^2$  i  $s \approx l$ , iz prethodne relacije se nalazi da je za njega

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

gde je  $l$  — dužina klatna, tj. najkraće rastojanje centra mase kuglice do ose oko koje osciluje klatno.

Period neizohronog oscilovanja fizičkog i matematičkog klatna, tj. oscilovanja kod kojeg se uzima u obzir ugaona amplituda  $\theta_0$ , određen je relacijom

$$T = T_0 \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \dots + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}\right)^2 \sin^{2n} \frac{\theta_0}{2} \right]$$

gde je  $T_0$  — period izohronih oscilacija fizičkog ili matematičkog klatna. Za male ugaone amplitude  $\theta_0$  može se napisati da je period neizohronih oscilacija

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right)$$

Period izohronih oscilacija torzionog klatna je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{c}}$$

gde je  $I$  — moment inercije tela u odnosu na osu oko koje ono osciluje, a  $c$  — torziona konstanta žice o koju je telo obešeno.

Oscilacije jednakih frekvencija su u fazi ako je njihova fazna razlika

$$\Delta\varphi = 2k\pi$$

a u protivfazi ako je

$$\Delta\varphi = (2k+1)\pi$$

gde je  $k=0, 1, 2, 3, \dots$

Prilikom slaganja dve harmonijske oscilacije jednakih frekvencija i istih pravaca, čije su amplitude  $x_{01}$  i  $x_{02}$ , a početne faze  $\varphi_{01}$  i  $\varphi_{02}$ , nastaje takođe harmonijska oscilacija, istog perioda, čija je amplituda

$$x_0 = \sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2 + 2x_{01}x_{02} \cos \Delta\varphi_0}$$

gde je  $\Delta\varphi_0 = \varphi_{02} - \varphi_{01}$ , dok je početna faza rezultujuće oscilacije

$$\varphi_0 = \arctg \frac{x_{01} \sin \varphi_{01} + x_{02} \sin \varphi_{02}}{x_{01} \cos \varphi_{01} + x_{02} \cos \varphi_{02}}$$

Prilikom slaganja dve harmonijske oscilacije jednakih frekvencija i normalnih pravaca, čije su amplitude  $x_{01}$  i  $x_{02}$ , a početne faze  $\varphi_{01}$  i  $\varphi_{02}$ , nastaje periodično kretanje po zatvorenoj putanji čija jednačina ima oblik

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{y_0^2} - \frac{2xy}{x_0 y_0} \cos \Delta\varphi_0 = \sin^2 \Delta\varphi_0$$

gde je  $\Delta\varphi_0 = \varphi_{02} - \varphi_{01}$ .

454. Napisati jednačinu harmonijskog kretanja čija je amplituda  $x_0 = 15$  cm, početna faza  $\varphi_0 = 120^\circ$  i ako se za vreme od 1 min izvrši 240 oscilacija.

455. Nacrtati dijagram harmonijskog kretanja čija je amplituda  $x_0 = 5$  cm, početna faza  $\varphi_0 = 0$ , a period  $T = 10$  s.

456. Neka harmonijska promena se beleži na traci koja se kreće stalnom brzinom  $v = 2$  m/s, pri čemu se dobije dijagram prikazan na slici 11. Ako je  $AB = 10$  cm, a  $CD = 20$  cm, napisati jednačinu ovog kretanja u odnosu na koordinatni sistem čiji je početak u tački C.

457. Neka tačka osciluje po zakonu  $x = x_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$ , gde je  $x_0 = 7$  cm,  $\omega = 314$  rad/s i  $\varphi_0 = 30^\circ$ . Za koje će najkraće vreme tačka da bude najviše udaljena od ravnotežnog položaja?

458. Nacrtati dijagram dve harmonijske oscilacije jednakih amplituda i kružnih frekvencija, čija se faza razlikuje za  $+(\pi/2)$  rad i  $-(\pi/2)$  rad.

459. Period oscilovanja tela je  $T = 30$  s. Ako je početna faza oscilacija  $\varphi_0 = 0$ , odrediti najkraće vreme za koje će elongacija oscilovanja da bude jednaka polovini amplitude.

460. Jednačina oscilatornog kretanja nekog tela ima oblik

$$x = x_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

gde je  $x_0 = 4$  m,  $\omega = 0,52$  rad/s i  $\varphi_0 = (\pi/3)$  rad. Odrediti:

a) period oscilovanja,

b) najveću brzinu,

c) najveće ubrzanje pri kretanju tela.

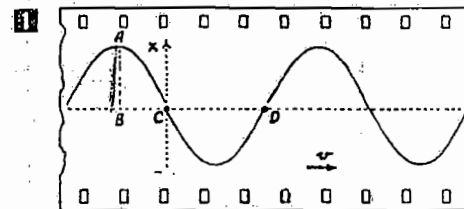
461. Jednačina kretanja tela, mase  $m = 20$  g, ima oblik  $x = x_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$ , gde je  $x_0 = 10$  cm,  $\omega = 1$  rad/s i  $\varphi_0 = -(\pi/2)$  rad. Ustanoviti zavisnost  $F(t)$ , tj. zavisnost intenziteta sile koja uslovljava ovo kretanje od vremena. Kolika je amplituda ove sile?

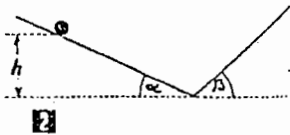
462. Teg, mase  $m = 10$  kg, visi o elastičnoj opruzi koju sila, intenziteta  $F = 10$  N, istegne za  $x = 2$  cm. Koliki su period i frekvencija oscilovanja ovog sistema?

463. Kada se o kraj opruge obesi teg, mase  $m_1 = 0,5$  kg, tada je period njegovog oscilovanja  $T = 2$  s. Kolika treba da bude masa dodatnog tege da bi se period oscilovanja povećao tri puta?

464. U jednoj U-cevi, površine poprečnog preseka  $S = 0,5$  cm<sup>2</sup>, nalazi se izvesna količina žive. Promenom pritiska u jednom kraku ove cevi izazovu se oscilacije žive u njoj. Koliki je period oscilacije ovog sistema ako je masa žive  $m = 120$  g, a njena gustina  $\rho = 13\,600$  kg/m<sup>3</sup>, dok je ubrzanje slobodnog padanja na mestu gde se nalazi ovaj sistem  $g = 1,64$  m/s<sup>2</sup>?

465. Na donji kraj obešene čelične žice, dužine  $l$  i površine poprečnog preseka  $S$ , okačen je teg mase  $m$ . Ovaj sistem se dovede u oscilovanje npr. naglim



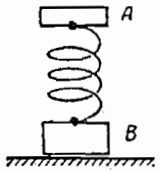


- povlačenjem (ili udarom) tega nadole.  
 a) Koliki je period oscilovanja ovog sistema?  
 b) Napisati jednačinu ovog oscilatornog kretanja.  
 Jungov modul elastičnosti je  $E_y$ .

466. Malo sferno telo nalazi se na strmoj ravni, nagibnog ugla  $\alpha$ , koja se produžava u drugu strmu ravan, nagibnog ugla  $\beta$ . Telo se po strmoj ravni kreće bez trenja.

Telo se pusti sa visine  $h$  da se slobodno kreće niz prvu strmu ravan, posle čega nastaje njegovo neharmonijsko kretanje po strmim ravnima.

- a) Koliki je period ovog kretanja?  
 b) Nacrtati dijagram brzine tela u funkciji vremena.



467. Na donjem kraju obešene žice, dužine  $l=2$  m i prečnika  $d=1$  mm, nalazi se metalno telo mase  $m=2$  kg. Koliki je period aksijalnih oscilacija ovakvog sistema? Jungov modul elastičnosti metala od kojeg je izrađena žica je  $E_y=100$  GPa.

468. Na horizontalnoj ploči nalazi se telo. Ploča sa telom osciluje harmonijski, frekvencijom  $\nu=2$  Hz, u vertikalnom pravcu, krećući se gore-dole.

a) Pri kojoj amplitudi oscilovanja će amplituda sile kojom telo deluje na podlogu da bude tri puta veća od njegove težine pri mirovanju?

b) Pri kojim amplitudama oscilovanja će telo početi da se odvaja od ploče?

469. Na dasci u horizontalnom položaju nalazi se telo. Daska sa telom vrši horizontalne harmonijske oscilacije sa amplitudom  $x_0=3$  cm. Koliki je koeficijent trenja između daske i tela ako telo počne da klizi po dasci, kada frekvencija oscilovanja dostigne vrednost  $\nu=2$  Hz?

470. Telo A, mase  $m_1=0,5$  kg, i telo B, mase  $m_2=2,5$  kg, povezani su međusobno oprugom. Telo A osciluje slobodno i harmonijski sa amplitudom  $x_0=2$  cm i kružnom frekvencijom  $\omega=30$  rad/s. Zanemarujući masu opruge, odrediti:

- a) najveći i najmanji intenzitet sile pritiska ovog sistema na podlogu,  
 b) kolika mora da bude minimalna amplituda oscilovanja da bi se telo B odvojilo od podloge.

471. Na glatkoj površini nalazi se telo, mase  $M$ , koje je povezano za oprugu, čija je konstanta krutosti  $k$ . U telo, dok je ono u mirovanju, udara metak, mase  $m$ , koji se kreće brzinom  $v_0$  u horizontalnom pravcu. Udar metka u telo je takav da se metak u njemu zaglavi. Koliki su amplituda i period oscilovanja tela (sa metkom)?

472. U sistemu prikazanom na slici kuglica, mase  $m$ , može bez trenja da se kreće duž šipke AB, koja rotira u horizontalnoj ravni stalnom ugaonom brzinom  $\omega$ . Kuglica je pričvršćena za tačku B op-

rugom čija je konstanta krutosti  $k$ . Koliki je period oscilovanja ovog sistema?

473. Koliki je period malih oscilacija tankog homogenog štapa, mase  $m=2$  kg i dužine  $l=1$  m, čiji je donji kraj povezan oprugama na način prikazan na slici. Koeficijenti krutosti opruga su  $k_1=k_2=k=10$  N/m.

474. Na slici prikazan je složeni oscilatorni sistem. On se sastoji iz cilindričnog prstena, mase  $m=1$  kg, i dve opruge jednakih elastičnih svojstava, tj. jednakih konstanti krutosti  $k=50$  N/m. Krajevi opruga čvrsto su spojeni sa prstenom i on se tako spojen može kretati po šini AB bez trenja. Ovaj sistem se nalazi na rami koji može da rotira oko vertikalne ose. Koliki je period oscilovanja tega ako ram:

- a) ne rotira,  
 b) rotira ugaonom brzinom  $\omega=5$  rad/s?  
 c) Pri kojim veličinama ugaone brzine rama neće doći do oscilovanja prstena?

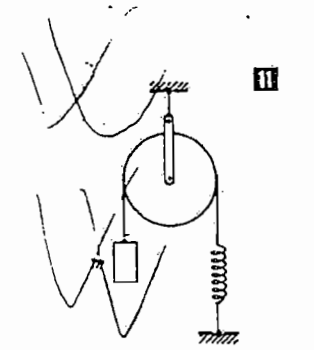
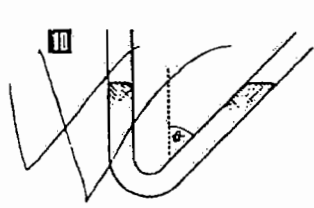
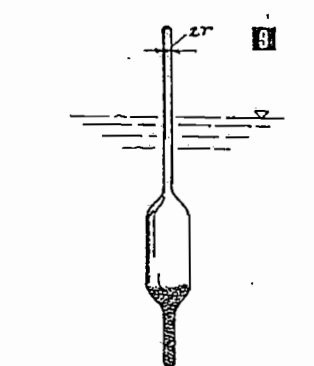
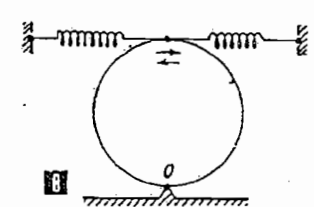
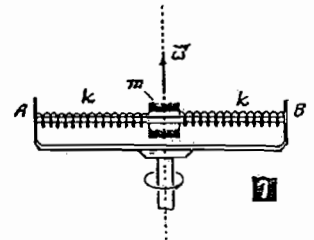
475. Tanak homogeni disk, mase  $m=2$  kg, osciluje pod dejstvom dve jednake opruge, čija je ekvivalentna konstanta krutosti  $k=37,5$  N/m. Koliki je period malih oscilacija ovog sistema, pod pretpostavkom da disk ne klizi po podlozi?

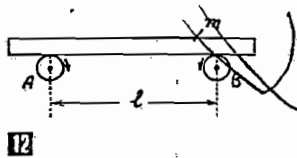
476. Areometar, mase  $m=0,1$  kg i poluprečnika cevi  $r=4,5$  mm, potopljen je u vodu. Areometar se gurne naniže, posle čega on osciluje slobodno. Koliki je period oscilovanja areometra ako su njegove oscilacije harmonijske?

477. Koliki je period malih oscilacija količine žive, mase  $m=500$  g, koja se nalazi u U-cevi čiji je oblik kao na slici. Ugao kraka cevi prema vertikali iznosi  $\theta=45^\circ$ . Površina poprečnog preseka U-cevi je  $S=1$  cm<sup>2</sup>, a gustina žive  $\rho=13\ 600$  kg/m<sup>3</sup>, dok je ubrzanje slobodnog padanja na mestu gde se nalazi U-cev  $g=9,806$  m/s<sup>2</sup>.

478. U cilindru, koji je zatvoren sa oba kraja, nalazi se vazduh na pritisku  $p_0$ . Klip u cilindru deli prostor cilindra na dva jednaka dela dužine  $l$ . Klip se pomeri iz ravnotežnog položaja za malo rastojanje  $x$ , a zatim se prepusti samom sebi, posle čega počne da osciluje. Smatrati da su procesi u gasu adijabatski. Masa klipa je  $m$ , a površina njegovog poprečnog preseka  $S$ . Ustanoviti relaciju za period oscilovanja klipa koristeći se približnim računom.

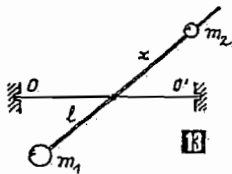
479. Kolika je kružna frekvencija malih oscilacija, sistema prikazanog na slici? Poznati su poluprečnik diska  $R$ , moment inercije  $I$  u odnosu na osu oscilovanja, masa tela  $m$  i koeficijent krutosti opruge  $k$ . Mase užeta i opruge su zanemarljivo male.





480. Tanka homogena greda postavljena je na dva cilindra (A i B) koji rotiraju jednakim i stalnim ugaonim brzinama  $\omega$  [12]. Rastojanje između osa cilindra je  $l=15$  cm, a koeficijent trenja između grede i cilindra je  $\mu$ .

a) Koliki je period malih oscilacija ovog sistema?  
 b) Koliki treba da bude koeficijent trenja da bi se ovaj sistem ponašao kao sekundno klatno ako je ubrzanje slobodnog padanja na mestu gde je sistem postavljen  $g=9,805$  m/s<sup>2</sup>?



481. Kod metronoma prikazanog na slici [13] kuglica mase  $m_1$  nalazi se na stalnom rastojanju  $l$  od ose rotacije  $OO'$  sistema, dok se kuglica mase  $m_2$  može pomerati po vodiči, što omogućava da se frekvencija oscilovanja sistema podesi na potrebnu vrednost.

Pod pretpostavkom da je vodica na kojoj se nalaze kuglice zanemarljive mase i da su dimenzije kuglica zanemarljive u odnosu na rastojanja  $l$  i  $x$ , odrediti zavisnost  $\omega=\omega(x)$ , tj. zavisnost kružne frekvencije oscilovanja ovog sistema od rastojanja  $x$ .

482. Na slici [14] je prikazan disk poluprečnika  $r=1$  m. Koliki je period oscilovanja diska za ose:

- $O$ ,
- $O_1$ ,
- $A_1$ ?

Moment inercije diska za ose  $O$  i  $A$  je  $I_O=mr^2/2$  i  $I_A=mr^2/4$ .

483. Disk, poluprečnika  $R=24$  cm, osciluje oko osa  $O_1, O_2$  i  $O_3$  koje su normalne na ravan crteža a čiji su položaji naznačeni na slici [15].

a) Koliki su periodi oscilovanja ovog sistema u odnosu na ove ose?

- koliki su ovi periodi ako se dva puta poveća:
- masa diska,
- poluprečnik diska?

Za ubrzanje slobodnog padanja uzeti  $g=9,807$  m/s<sup>2</sup>.

484. Iz metalne ploče isečen je disk poluprečnika  $R$ . Iz ovog diska isečen je disk poluprečnika  $R/4$  čiji je položaj prikazan na slici [16]. Ostatak većeg diska osciluje oko ose  $O$ . Koliki je period malih oscilacija diska?

485. Od bakra, gustine  $\rho$ , načinjena je ploča debljine  $d$ . Iz ove ploče su isečena tri kružna diska, poluprečnika  $R, R/2, R/3$ , koji su zatim zavareni u nizu. Ovakav sistem diskova obešen je o oslonac  $O$  prema slici [17], oko koga može slobodno da osciluje u ravni u kojoj se nalaze diskovi. Koliki je period malih oscilacija ovog sistema?

486. Fizičko klatno u obliku pravog tankog štapa, dužine  $l=1,2$  m, osciluje oko horizontalne ose

$OO'$  [18], koja je normalna na glavnu osu štapa. Za koju će vrednost rastojanja  $a$  (od ose  $OO'$  do centra mase štapa  $C$ ) period oscilovanja ovog klatna da bude minimalan?

487. Matematičko klatno osciluje sa ugaonom amplitudom  $\theta_0=10^\circ$ . Kolika se relativna greška učini ako se period njegovog oscilovanja odredi korišćenjem približnog obrasca  $T=2\pi\sqrt{l/g}$ ?

488. Koliki je period oscilovanja matematičkog klatna, dužine  $l$ , ako se ono nalazi u liftu:

- koji stoji,
  - koji se kreće nagore ubrzanjem  $a$ ,
  - koji se kreće nadole ubrzanjem  $a$ ?
- Ovde je potrebno razlikovati sledeća dva slučaja:
- $a=g$ ,
  - $a=2g$ . U ovom slučaju nacrtati klatno i prikazati način njegovog oscilovanja.

489. Koliki je period oscilovanja klatna koje se sastoji od tankog konca, dužine  $l$ , o čijem je donjem kraju obešena lopta poluprečnika  $R$  [19], ukoliko se ovakvo klatno smatra kao:

- matematičko (kada je  $R \ll l$ ),
- fizičko, pri čemu se ovakva aproksimacija ne može učiniti?
- Kolika se greška čini pri ovoj aproksimaciji ako je  $R=l/20$ ?

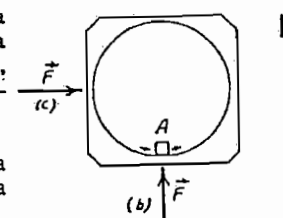
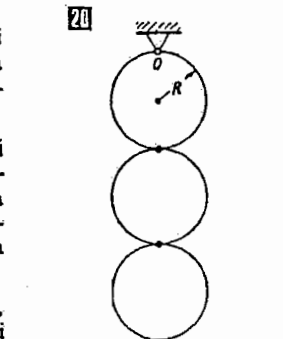
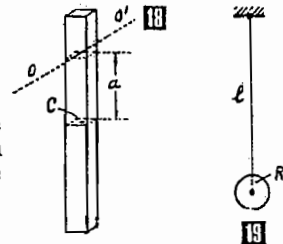
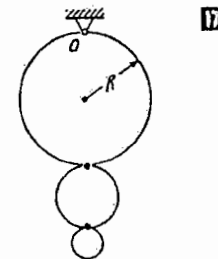
490. Ako se klatno časovnika produži za 1/100-ti deo svoje dužine, kolika će da bude greška časovnika tokom 24 časa? Klatno časovnika smatrati matematičkim klatnom.

491. O zidu visi metalni štap, dužine  $l=1$  m i mase  $m_1=41$  g, na čijem se donjem kraju nalazi lopta mase  $m_2=1$  kg. Koliki je period oscilovanja ovog sistema ako se lopta smatra materijalnom tačkom? Smatrati da je ubrzanje slobodnog padanja  $g=9,81$  m/s<sup>2</sup>.

492. Tri diska, jednakih masa i poluprečnika, zavareni su tako da se nalaze u nizu. Ovakvo spojeni diskovi su obešeni o oslonac  $O$  na način prikazan na slici [20] oko koga mogu da osciluju u ravni u kojoj se oni nalaze. Koliki je period malih oscilacija ovog sistema?

493. U telu, mase  $m=5$  kg, nalazi se cilindrična šupljina [21] poluprečnika  $R=15$  cm. U ravni koja je normalna na osu cilindra osciluje malo telo  $A$ , krećući se bez trenja, pri čemu je ugaona amplituda oscilovanja tela manja od  $(1/10)$  rad.

- Koliki je period oscilovanja tela  $A$ ?
- Koliki će da bude period oscilovanja malog tela ako na oscilatorni sistem deluje sila intenziteta  $F=10$  N:



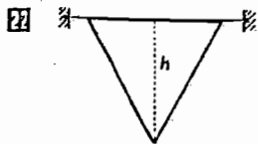
- b) u vertikalnom pravcu sa smerom navise,  
c) u horizontalnom pravcu?

Smatrati da je ubrzanje slobodnog padanja na mestu gde se nalazi oscilatorni sistem  $g=9,82 \text{ m/s}^2$ .

494. Matematičko klatno je načinjeno od čelične žice površine poprečnog preseka  $S=0,01 \text{ mm}^2$ . Kolika može da bude najveća masa kuglice obešene na kraju žice pa da se period oscilovanja ne poveća više od 0,01% usled istežanja žice? Pretpostaviti da se pri ovome ne prelazi granica proporcionalnosti. Jungov modul elastičnosti čelika je  $E_s=200 \text{ GPa}$ .

495. Časovnik sa klatnom podešen je da tačno radi u fabrici gde je izrađen. Časovnik se zatim postavi na vrh zgrade, koji je za  $h=80 \text{ m}$  viši u odnosu na fabricu. Kolika je greška ovog časovnika tokom vremena od 24 časa? Klatno časovnika smatrati matematičkim klatnom.

496. Matematičko klatno, dužine  $l$ , ima kuglicu mase  $m$ . Kako se menja potencijalna energija klatna, tokom malih oscilacija, u zavisnosti od veličine ugaonog otklona klatna  $\theta$ ?



497. Tanka homogena ploča u obliku jednakostraničnog trougla [22], visine  $h=25 \text{ cm}$ , može slobodno da rotira oko svoje horizontalne stranice. Koliki je period oscilovanja ove ploče na mestu gde je ubrzanje slobodnog padanja  $g=9,805 \text{ m/s}^2$ ?

498. U toku vremena  $t=23 \text{ s}$ , amplituda prigušenih oscilacija smanji se za  $n=10$  puta.

- a) Koliki je koeficijent prigušenja ovih oscilacija?  
b) U kom vremenskom intervalu se amplituda oscilovanja smanji  $e$  puta?

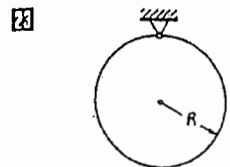
499. Amplituda oscilovanja matematičkog klatna, dužine  $l=1 \text{ m}$ , smanji se tokom vremena  $t=10 \text{ min}$  dva puta. Odrediti logaritamski dekrement ovih prigušenih oscilacija. Ubrzanje slobodnog padanja na mestu gde se nalazi klatno iznosi  $g=9,81 \text{ m/s}^2$ .

500. Logaritamski dekrement prigušenja oscilacija fizičkog klatna iznosi  $\Lambda=0,003$ . Koliko oscilacija treba da izvrši ovo klatno da bi se amplituda oscilovanja  $x_0$  smanjila četiri puta?

501.  $Q$ -faktor nekog oscilatora iznosi  $Q=1$ , a kružna frekvencija njegovih oscilacija  $\omega=200 \text{ rad/s}$ . Kolika je sopstvena kružna frekvencija ovog oscilatora?

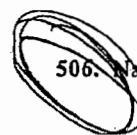
502. Koliki je  $Q$ -faktor matematičkog klatna, dužine  $l=1 \text{ m}$ , ako se tokom vremena od  $\tau=180 \text{ s}$  njegova ukupna mehanička energija smanji za  $n=5 \cdot 10^3$  puta?

503. Pod dejstvom težine obešenog tela opruga se istegne za  $\Delta x=5 \text{ cm}$ . Koliki je period oscilovanja ovog sistema ako je logaritamski dekrement prigušenih oscilacija  $\Lambda=0,55$ ?



504. Homogeni tanak disk [22], poluprečnika  $R=15 \text{ cm}$ , može slobodno da rotira oko horizontalne ose  $O$ , normalne na njegovu površinu, koja prolazi kroz ivicu diska. Koliki je period malih oscilacija ovog diska ako je njihov logaritamski dekrement  $\Lambda=100$ ?

505. Čestica, koja može harmonijski da osciluje, pomeri se pod dejstvom sile iz ravnotežnog položaja za  $x_0=2 \text{ cm}$  i pusti da slobodno osciluje. Koliki će put preći ova čestica do zaustavljanja ako je logaritamski dekrement oscilacija  $\Lambda=4 \cdot 10^{-3}$ ?



506. Na telo deluju dve sile čiji se intenzitet menja sa vremenom po zakonu

$$F_1 = F_0 \sin \omega t ; F_2 = F_0 \sin (\omega t + \varphi_0)$$

što znači da su jednake amplitude sila i njihove frekvencije. Napisati jednačinu rezultujućeg kretanja tela ako je:

- a)  $\varphi_0 = (\pi/2) \text{ rad}$ ,  
b)  $\varphi_0 = \pi \text{ rad}$ .

507. Telo učestvuje ravnomerno u dvojakom harmonijskom oscilovanju po pravcima koji su uzajamno normalni, i to u prvom pravcu po zakonu  $x = x_0 \sin \omega t$ , a u drugom pravcu po zakonu  $y = y_0 \cos \omega t$ , pri čemu je  $x_0 = y_0$ . Ustanoviti jednačinu putanje tela.

508. Odrediti amplitudu i početnu fazu rezultujuće oscilacije koja je nastala slaganjem dve harmonijske oscilacije istih pravaca i jednakih frekvencija, čije su jednačine

$$x_1 = x_{01} \sin (\omega t + \pi/3); x_2 = x_{02} \sin (\omega t + \pi/4)$$

gde je  $x_{01} = 5 \text{ cm}$  i  $x_{02} = 10 \text{ cm}$ .

509. Ako su oscilacije iz prethodnog zadatka međusobno normalnih pravaca, ustanoviti jednačinu putanje rezultujuće oscilacije.

510. Nacrtati putanju rezultujuće oscilacije nastale slaganjem dve oscilacije koje se vrše u međusobno normalnim pravcima, a čije su jednačine

$$x = x_0 \sin \omega t; y = y_0 \sin (\omega t + \varphi_0)$$

kada je:

- a)  $\varphi_0 = 0$ ,  
b)  $\varphi_0 = (\pi/3) \text{ rad}$ ,

pri čemu je  $x_0 = 2y_0$ .

## 10. Mehanički talasi

Brzina prostiranja mehaničkih talasa je

$$c = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta \rho}}$$

gde je  $\Delta p$  — promena pritiska u supstanciji na mestu gde je došlo do neke deformacije dejstvom spoljašnjih sila, a  $\Delta \rho$  — odgovarajuća promena gustine supstancije.

Brzina prostiranja longitudinalnih talasa (P-talasa) u gasovima je

$$c_p = \sqrt{\frac{p \kappa}{\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa R T}{M}}$$

gde je  $p$  — pritisak gasa,  $\rho$  i  $M$  — gustina i molarna masa gasa,  $R=8,31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$  — molarna gasna konstanta,  $T$  — temperatura gasa,  $\kappa = C_{mp}/C_{mv}$  — odnos molarnih (ili specifičnih) toplotnih kapacitivnosti gasa pri stalnom pritisku i stalnoj zapremini, koji iznosi

$$\begin{aligned} \kappa &= 5/3 \text{ za jednoatomne gasove} \\ &= 7/5 \text{ dvoatomne} \\ &= 8/6 \text{ troatomne} \end{aligned}$$

Brzina prostiranja P-talasa u čvrstim i tečnim supstancijama je

$$c_p = \sqrt{\frac{E_Y}{\rho}}$$

gde je  $E_Y$  — zapreminski modul elastičnosti supstancije, a  $\rho$  — njena gustina.

Ako se P-talas prostire kroz štap, a ne kroz sredinu u neograničenom prostoru, onda je brzina ovog talasa

$$c_p = \sqrt{\frac{E_Y}{\rho}}$$

gde je  $E_Y$  — Jungov modul elastičnosti.

Brzina prostiranja transverzalnih talasa (S-talasa) u čvrstim supstancijama je

$$c_s = \sqrt{\frac{E_s}{\rho}}$$

gde je  $E_s$  — modul smicanja čvrste supstancije.

Brzina prostiranja transverzalne deformacije po zategnutoj žici je

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

gde je  $F$  — intenzitet sile zatezanja,  $\sigma$  — odgovarajući normalni napon,  $\mu = m/l$  — podužna masa žice ( $m$  — masa žice,  $l$  — njena dužina) i  $\rho$  — gustina supstancije od koje je žica načinjena.

Ako je  $c^0$  — brzina prostiranja talasa u gasu na standardnim uslovima ( $T^0 = 273,15$  K,  $p^0 = 101\,325$  Pa), onda je ona na temperaturi  $T$  i pritisku  $p^0$

$$c = c^0 \sqrt{\frac{T}{T^0}}$$

pri čemu je za vazduh  $c \approx 20 \sqrt{T}$ .

Ako izvor talasa osciluje harmonijski sa amplitudom  $x_0$  (pri čemu je frekvencija njegovog oscilovanja  $\nu$ , a odgovarajući period oscilovanja  $T = 1/\nu$ , tj. kružna frekvencija  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ ) po zakonu

$$x = x_0 \sin \omega t$$

vršeci analognu deformaciju sredine u kojoj se nalazi, onda je jednačina nastalog mehaničkog talasa na rastojanju  $x$  od izvora talasa

$$\Psi = \Psi_0 \sin \omega(t - t')$$

gde je  $\Psi_0$  — amplituda talasa, a  $t' = x/c$  — vreme prostiranja talasa na putu dužine  $x$ .

Imajući u vidu da je talasna dužina talasa

$$\lambda = cT$$

jednačina talasa može da se napiše i u obliku

$$\Psi = \Psi_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

pri čemu je faza talasa, kao njegova vremensko-prostorna karakteristika,

$$\varphi = 2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \frac{x}{\lambda}$$

Amplituda talasa opada sa promenom rastojanja  $x$  po eksponencijalnom zakonu, tj.

$$\Psi_0(x) = \Psi_0 e^{-\mu x}$$

gde je  $\Psi_0$  — amplituda talasa za  $x=0$ ,  $\mu$  — koeficijent linearnog slabljenja talasa, pri čemu je

$$\mu = \frac{\ln 2}{L} = \frac{0,693}{L}$$

gde je  $L$  — rastojanje (u pravcu prostiranja talasa) na kome se amplituda talasa smanji za 50%.

Jačina talasa je

$$I = \frac{E}{S \cdot \Delta t} = \frac{P}{S}$$

gde je  $E$  — energija preneti u procesu prostiranja talasa kroz normalnu površinu  $S$  (na pravac prostiranja talasa) za vreme  $\Delta t$ , dok je  $P$  — odgovarajuća snaga talasa.

Jačina harmonijskog talasa je

$$I = \frac{1}{2} \rho c \omega^2 x_0^2 = 2\pi^2 \nu^2 Z_c x_0^2$$

gde je  $\rho$  — gustina supstancije kroz koju se talas prostire,  $c$  — brzina prostiranja talasa,  $Z_c = \rho c$  — karakteristična akustička impedanca supstancije,  $\nu$  i  $\omega$  — frekvencija, tj. kružna frekvencija oscilovanja izvora talasa, odnosno čestica supstancije,  $x_0$  — amplituda oscilovanja čestica supstancije na mestu na kome se traži jačina talasa.

Jačina talasa opada sa promenom rastojanja  $x$  takođe po eksponencijalnom zakonu, tj.

$$I = I_0 e^{-\mu x}$$

gde je  $I_0$  — jačina talasa za  $x=0$ .

Kada talas naiđe na graničnu površinu između dve sredine, tada se on delimično odbija a delimično prelama.

Prema zakonu odbijanja, upadni ugao talasa  $\alpha$  jednak je odbojnom uglu  $\alpha'$ , tj.

$$\alpha = \alpha'$$

pri čemu upadni zrak, normala (povučena na graničnu površinu na mestu odbijanja talasa) i odbijeni zrak leže u istoj ravni.

Ako je  $c_1$  — brzina prostiranja talasa u sredini iz koje talas izlazi,  $c_2$  — brzina prostiranja talasa u sredini u koju talas prelazi,  $\beta$  — prelomni ugao, onda je prema zakonu prelamanja

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2}$$

pri čemu upadni zrak, normala i prelomni zrak leže u istoj ravni.

Prilikom superpozicije talasa jednakih frekvencija, rezultujući talas će imati najveću amplitudu, tj. nastaće maksimalno pojačanje talasa ako je

— razlika faza talasa

$$\Delta\varphi = 2k\pi$$

ili

— razlika pređenih puteva talasa ako se talasi prostiru kroz homogenu sredinu

$$\Delta s = k\lambda$$

gde je  $k=0, 1, 2, 3, \dots$ , i  $\lambda$  — talasna dužina talasa.

Prilikom superpozicije talasa jednakih frekvencija, rezultujući talas će imati najmanju

amplitudu, tj. nastaće maksimalno slabljenje talasa ako je

— razlika faza talasa

$$\Delta\varphi = (2k+1)\pi$$

ili

— razlika pređenih puteva talasa ako se talasi prostiru kroz homogenu sredinu

$$\Delta s = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$$

gde je  $k=0, 1, 2, 3, \dots$

Prilikom superpozicije dva koherentna talasa, jednakih amplituda  $\Psi_0$ , koji se prostiru u istom pravcu a suprotnom smeru, jednačina rezultujućeg talasa (tzv. stojećeg talasa) ima oblik

$$\Psi = 2\Psi_0 \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

gde je  $x$  — udaljenost posmatrane tačke, (na pravcu prostiranja talasa) od mesta refleksije talasa (pri kojoj ne nastaje promena faze talasa).

Subjektivna jačina zvuka objektivne jačine  $I_2$  u odnosu na zvuk objektivne jačine  $I_1$  je

$$L = \log \frac{I_2}{I_1}$$

Jedinica ovako definisane subjektivne jačine zvuka jeste bel (B), tj.

$$[L] = B$$

Ova jedinica je nepraktična, usled čega se u praksi koristi 10 puta manja jedinica decibel (dB), a odgovarajuća subjektivna jačina izražava se tada relacijom

$$L = 10 \log \frac{I_2}{I_1}$$

Ukoliko se subjektivna jačina definiše u odnosu na prag čujnosti, kome odgovara

objektivna jačina  $I_1 = 1 \text{ aW/m}^2$ , onda se subjektivna jačina zvuka izražava u fonima (Ph), što znači da je, takođe,

$$[L] = \text{Ph}$$

Rezonantna frekvencija zategnute žice je

$$\nu = \frac{k}{2l} c$$

gde je  $c = \sqrt{F/\mu}$  — brzina prostiranja transverzalne deformacije po žici,  $l$  — dužina žice,  $k=1, 2, 3, \dots$

Rezonantna frekvencija ukleštenog štapa na jednom kraju je

$$\nu = \frac{2k+1}{4l} c$$

gde je  $k=0, 1, 2, 3, \dots$ ,  $c$  — brzina prostiranja deformacije po štapu,  $l$  — dužina štapa.

Rezonantna frekvencija ukleštenog štapa po sredini ( $k=1$ ), u dve tačke ( $k=2$ ), u tri tačke ( $k=3$ ) itd. je

$$\nu = \frac{k}{2l} c$$

gde je  $c = \sqrt{E_s/\rho}$  — brzina prostiranja longitudinalne deformacije u štapu,  $l$  — dužina štapa.

Rezonantna frekvencija vazdušnog stuba: — zatvorenog na jednom kraju je

$$\nu = \frac{2k+1}{4l} c$$

— zatvorenog ili otvorenog na oba kraja

$$\nu = \frac{k}{2l} c$$

gde je u prvom slučaju  $k=0, 1, 2, 3, \dots$ , a u drugom  $k=1, 2, 3, \dots$ ,  $l$  — dužina vazdušnog stuba,  $c = \sqrt{\gamma RT/M}$  — brzina prostiranja deformacije kroz gas (vazduh) u datim uslovima.

511. Od udara groma do trenutka kada se on čuje protekne vreme  $t = 82$  s. Ako je brzina prostiranja zvuka kroz vazduh  $c = 330$  m/s, a svetlosti  $c_0 = 3 \cdot 10^8$  m/s, odrediti daljinu mesta udara groma.

512. Pri određivanju dubine mora ultrazvukom dobije se da je vreme prostiranja zvuka do dna i nazad  $t = 2,5$  s. Ako je koeficijent stišljivosti vode  $k = 0,46$  1/GPa, a gustina  $\rho = 1030$  kg/m<sup>3</sup>, odrediti dubinu mora, smatrajući da su fizička svojstva vode nezavisna od dubine.

513. Odrediti brzinu prostiranja zvuka kroz vazduh na standardnim uslovima, koristeći tablice na kraju knjige.

514. Posle prolaska udarnog talasa, sredina metalnog štapa, površine poprečnog preseka  $S$ , pomerila se za  $b$  u pravcu prostiranja talasa. Ako je gustina metala  $\rho$ , a brzina prostiranja P-talasa  $c$ , odrediti impuls ovog talasa.

515. Talas povišenog vazdušnog pritiska, u relativnom iznosu  $\delta p$ , prostire se brzinom  $c$ . Temperatura vazduha je  $T$ . Kolika je odgovarajuća relativna promena gustine vazduha u prostoru talasnog fronta?



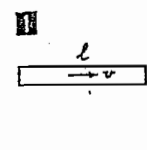
516. Kolika je brzina prostiranja zvuka u vazduhu na temperaturi  $t_1=20^\circ\text{C}$  odnosno  $t_2=-20^\circ\text{C}$  ako je brzina prostiranja zvuka na standardnim uslovima  $c^0=331,6\text{ m/s}$ ?

517. Ako je srednja kvadratna brzina molekula nekog dvoatomnog gasa  $\sqrt{\langle v^2 \rangle}=640\text{ m/s}$ , izračunati kolika je brzina zvuka u tom gasu pod istim uslovima.

518. Kroz cev, površine poprečnog preseka  $S=5\text{ cm}^2$ , protiče voda brzinom  $v=2\text{ m/s}$ . Cev se na jednom mestu trenutno pregradi (ravnim ventilom), usled čega naglo prestane proticanje vode. Koliku impulsivnu silu treba da izdrži pregrada ako je brzina prostiranja zvuka u vodi  $c=1400\text{ m/s}$ ? Koliki je pritisak ove sile?

519. Na ravnu metalnu ploču naiđe (u pravcu normale) udarni zvučni talas amplitude  $p_0=0,8\text{ bar}$ . Kolikim pritiskom će delovati ovaj talas na ploču?

520. Čelični štap, dužine  $l$ , krećući se duž svoje ose, brzinom  $v$ , udari u nepokretnu prepreku, prema slici 1.



a) Koliki pritisak nastane na mestu udara štapa u stenu?

b) Koliko je vreme kontakta štapa i stene?

c) Kolika je frekvencija zvuka kojeg će emitovati štap posle udara o stenu?

Jungov modul elastičnosti metala od koga je načinjen štap je  $E_y$ , a njegova gustina  $\rho$ .

521. Kada se čekićem udari u čeonu stranu šine, proizvede se zvučni impuls koji se prostire do drugog kraja šine i vrati se nazad za vreme  $t=0,01\text{ s}$ . Kolika je dužina šine ako je Jungov modul elastičnosti metala od koga je izrađena šina  $E_y=210\text{ GPa}$ , a gustina  $\rho=7000\text{ kg/m}^3$ ?

522. Kolika je brzina prostiranja transverzalne deformacije po metalnoj žici koja je zategnuta silom intenziteta  $F=44\text{ N}$ ? Dužina žice je  $l=30\text{ cm}$ , a njena masa  $m=30\text{ g}$ .

523. Brzina prostiranja zvuka u nafti, gustine  $\rho=812\text{ kg/m}^3$ , iznosi  $c=1330\text{ m/s}$ . Koliki je koeficijent stišljivosti nafte prema ovim podacima?

524. Koliki je odnos brzina prostiranja P-talasa i S-talasa u čeličnoj šipki?

525. Oscilator u vidu kvadratne ravne ploče, stranica  $l$ , osciluje harmonijski kružnom frekvencijom  $\omega$ . Kolika je otporna sila sredine u trenutku kada je brzina ploče  $v$ ? Gustina sredine je  $\rho$ , a zapreminski modul elastičnosti  $E_V$ .

526. Kolika je dužina kanala na gramofonskoj ploči koja odgovara talasnoj dužini zvuka frekvencije  $\nu_1=100\text{ Hz}$  i  $\nu_2=10\text{ kHz}$ ? Srednje rastojanje kružnog kanala do centra rotacije ploče je  $R=10\text{ cm}$ , a njena ugaona brzina  $\omega=78\text{ ob/min}$ . Kolike su analogne dužine zapisa na magnetofonskoj traci koja se kreće brzinom  $v=1,6\text{ cm/s}$ ?

527. Naći zavisnost brzine prostiranja zvuka od temperature kroz metalni štap velike dužine. Jungov modul elastičnosti metala smatrati nezavisnim od temperature.

528. Od zvučnog izvora koji se nalazi na površini Zemlje prostiru se zvučni talasi. Za koje vreme će oni dostići visinu  $h=10\text{ km}$  ako je temperatura vazduha na površini Zemlje  $t_0=17^\circ\text{C}$ , a gradijent promene temperature u vertikalnom pravcu  $\frac{dT}{dh}=-7\cdot 10^{-3}\frac{\text{K}}{\text{m}}$ .

529. Objektivna jačina zvučnog talasa, na rastojanju  $r_1=20\text{ m}$  od izvora zvuka, iznosi  $I_1=0,20\text{ }\mu\text{W/m}^2$ . Kolika je objektivna jačina zvučnog talasa  $I_2$

na rastojanju  $r_2=120\text{ m}$  od izvora zvuka ako je za zvuk ove talasne dužine koeficijent linearnog slabljenja  $\mu=2\cdot 10^{-4}\text{ 1/m}$ ?

530. Na rastojanju  $l=1000\text{ m}$  od izvora zvuka, jačina usmerenog zvučnog talasa iznosi  $I=7,5\text{ W/m}^2$ .

a) Kolika je jačina zvučnog izvora ako je koeficijent linearnog slabljenja zvuka  $\mu=0,4\cdot 10^{-3}\text{ 1/m}$ ?

b) Na kojoj udaljenosti od ovog izvora zvuka jačina zvuka odgovara granici bola?

531. Sferni oscilator, poluprečnika  $R$ , osciluje harmonijski u tečnosti, gustine  $\rho$ , kružnom frekvencijom  $\omega$  i amplitudom  $x_0$ . Zapreminski modul elastičnosti tečnosti je  $E_V$ . Kolika se energija talasa izrači u okolni prostor oscilatora za vreme jednog perioda  $T$ ?

532. Snaga tačkastog zvučnog izvora, frekvencije  $\nu=500\text{ Hz}$ , iznosi  $P=1\text{ W}$ . Kolika je amplituda oscilovanja molekula vazduha na rastojanju  $r=2\text{ m}$  od izvora zvuka? Vazduh se nalazi na standardnim uslovima.

533. Jačina harmonijskog sfernog talasa se smanji za  $L=9,45\text{ dB}$  na putu od radijalnog rastojanja  $r_1=1\text{ m}$  (od tačkastog izvora talasa) do rastojanja  $r_2=2\text{ m}$ . Koliki je koeficijent linearnog slabljenja sredine kroz koju se talas prošire?

534. Tačkasti izvor zvuka osciluje harmonijski. Na radijalnom rastojanju  $r_1=5\text{ m}$  amplituda oscilovanja čestica sredine (pod dejstvom izvora zvuka) iznosi  $a_{01}$ , dok ona na rastojanju  $r_2=10\text{ m}$  iznosi  $a_{02}=a_{01}/3$ .

a) Koliki je koeficijent linearnog slabljenja sredine kroz koju se talas prošire?

b) Koliko je slabljenje jačine zvučnog talasa (u dB) na putu  $r_2-r_1$ ?

535. Udarni talas, koji čini deformacija vazduha izražena povišenjem pritiska za  $\Delta p=p_0$ , prošire se brzinom  $v$  prema klinastom telu 2, mase  $m$ , dimenzija  $a, b, c$ . Klinasto telo se nalazi na idealno glatkoj horizontalnoj podlozi. Koliku će brzinu telo steći kada na njega naiđe ovaj udarni talas?

536. Čovečiji organ sluha može da registruje zvuk frekvencije od  $20\text{ Hz}$  do  $20\text{ kHz}$ . Koliki je odgovarajući talasni opseg i odnos graničnih talasnih dužina? Smatrati da je brzina prostiranja zvuka  $c=340\text{ m/s}$ .

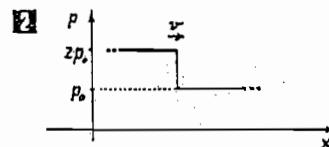
537. Napisati jednačinu zvučnog harmonijskog talasa na udaljenosti  $x=\lambda/4$  od izvora talasa.

538. U homogenoj sredini prostire se ravanski harmonijski talas talasne dužine  $\lambda=1\text{ m}$ , čija jednačina ima oblik

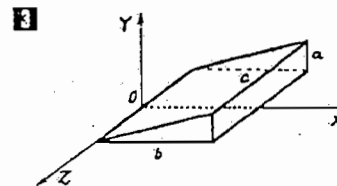
$$\Psi = \Psi_0 e^{-\mu x} \cos(\omega t - kx)$$

gde je  $\Psi_0$ —amplituda talasa,  $\mu=0,5\text{ 1/m}$ —koeficijent linearnog slabljenja talasa,  $\omega$ —kružna frekvencija i  $k=2\pi/\lambda$ —talasni broj. Kolika je fazna razlika talasa u tačkama u kojima se amplitude oscilovanja čestica sredine razlikuju za  $\delta=1\%$ ?

539. Koliki je indeks prelamanja zvuka za graničnu površinu vazduh—staklo? Zapreminski modul elastičnosti stakla je  $E_V=54\text{ GPa}$ , gustina  $\rho=2600\text{ kg/m}^3$ , dok je temperatura vazduha  $t=20^\circ\text{C}$ .

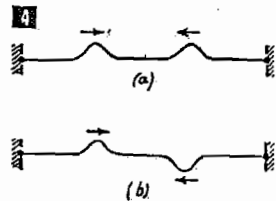


6 Zbirka zadataka iz Fizike D



540. Izračunati granični ugao totalne refleksije zvuka za graničnu površinu vazduh—staklo, koristeći podatke iz prethodnog zadatka.

541. Žica, dužine  $l=0,25$  m i podužne mase  $\mu=0,001$  g/cm, zategnuta je silom  $F=20$  N. Kolika je frekvencija osnovnog tona i prva dva harmonijska tona koje proizvodi ova žica pri svom oscilovanju?



542. Po zategnutoj žici **41** prostiru se dve jednake poprečne deformacije, jedna prema drugoj. Kolike će da budu kinetička i potencijalna energija rezultujućeg talasa prilikom preklapanja deformacija u oba slučaja?

543. Ravanski zvučni talas se prelama na ravnoj površini mora, na mestu gde je dubina velika. Da li se prelomljeni talas prostire pravo linijski?

544. Ravanski zvučni talas pada pod uglom  $\alpha$  prema normalni na ravnu površinu vode, iznad koje struji vazduh, brzinom  $v$ , u horizontalnom pravcu. Brzina zvučnog talasa u vazduhu je  $c_1$ , a u vodi  $c_2$ . Koliki je prelomni ugao zvučnog talasa?

545. Koliko puta je potrebno povećati silu zatezanja žice da bi se frekvencija njenog osnovnog tona povisila za oktavu?

546. U Kuntovoj cevi obrazuju se figure koje se nalaze na uzajamnom rastojanju  $d=4,3$  cm. Ako se u cevi nalazi vazduh, odrediti frekvenciju zvuka. Smatrati da je brzina zvuka u vazduhu  $c=332$  m/s.

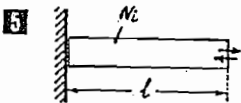
547. Kolika treba da bude dužina vazdušnog stuba u Kuntovoj cevi da bi se u njoj obrazovalo 6 figura? Brzina prostiranja zvuka kroz metalni štap, dužine  $l_1=0,8$  m, koji ulazi u sastav Kuntove cevi iznosi  $c_1=5200$  m/s, dok je brzina prostiranja zvuka kroz vazduh u cevi  $c_2=340$  m/s. Štap je uklešten po sredini.

548. Za koliko je potrebno pomeriti krak Kvinkove cevi između dva uzastopna poništavanja zvuka na njenom izlazu? Ako se ova dužina meri metrom sa milimetarskom podelom, kolika je relativna greška merenja talasne dužine zvuka na ovaj način? Smatrati da je frekvencija zvuka  $\nu=1100$  Hz, a brzina njegovog prostiranja kroz cev  $c=330$  m/s.

549. Ako se vazduh u Kuntovoj cevi zagreje od temperature  $T_0=0$  °C do  $T_1=30$  °C, za koliko je potrebno promeniti dužinu vazdušnog stuba u cevi da bi se stvorili uslovi za održavanje stojećeg talasa?

550. Slobodna čeonu strana jezgra magnetostrikcionog ultrazvučnog generatora **5** osciluje tako da se brzina njenog oscilovanja menja po zakonu

$$v = v_0 \sin \omega t$$



Kolika je:

- dužina jezgra,
  - amplituda nastalog talasa?
- Jungov modul elastičnosti nikla od koga je jezgro načinjeno je  $E_p$ , a gustina  $\rho$ .

551. Kolika je osnovna rezonantna frekvencija vazdušnog prostora, širine  $d=20$  m, između dva solitera?

552. Pri kojim dubinama okeana se ne smeju koristiti fiziološki opasni infrasvučni talasi frekvencije  $\nu=7$  Hz?

553. Čelična žica, dužine  $l=1$  m, zategnuta je silom koja u njoj izaziva normalni napon  $\sigma=0,78$  GPa. Gustina čelika od koga je načinjena žica iznosi  $\rho=7850$  kg/m<sup>3</sup>.

Kolika je:

a) talasna dužina stojećeg transverzalnog talasa koji se obrazuje na žici prilikom njene rezonancije,

b) frekvencija osnovnog tona koji proizvodi ova žica prilikom svog oscilovanja?

554. Kolikom je najmanjom silom potrebno zategnuti čeličnu žicu, dužine  $l=20$  cm i prečnika  $d=0,2$  mm, da bi se njome mogao proizvesti zvuk najniže frekvencije  $\nu_0=435$  Hz? Gustina čelika je  $\rho=7800$  kg/m<sup>3</sup>.

555. Štap, dužine  $l=1$  m, načinjen je od aluminijuma Jungovog modula elastičnosti  $E_p=70$  GPa i gustine  $\rho=2700$  kg/m<sup>3</sup>. Kolike su osnovne frekvencije ovog štapa u opsegu od 2,5—25 kHz ako je on uklešten po sredini?

556. Metalni štap, dužine  $l$  i temperaturnog koeficijenta linearnog širenja  $\alpha=2 \cdot 10^{-5}$  1/K, zagreje se od temperature  $t=20$  °C na dva puta višu temperaturu. Koliki je odnos sopstvenih frekvencija štapa na ovim dvema temperaturama ukoliko je on uklešten po sredini? Jungov modul elastičnosti metala smatrati nezavisnim od temperature, a male veličine drugog reda zanemariti.

557. Metalni štap, dužine  $l=2$  m, uklešten je u dvema tačkama koje su na rastojanju  $l/2$ , ali tako da im je položaj simetričan u odnosu na sredinu štapa. Brzina prostiranja zvuka kroz štap je  $c=4100$  m/s. Kolika je frekvencija druge harmonijske oscilacije štapa?

558. U cevi otvorenoj na oba kraja, dužine  $l=1$  m, nalazi se vazduh na standardnim uslovima.

a) Kolika je frekvencija trećeg harmonika sopstvenih oscilacija vazdušnog stuba u cevi?

b) Za koliko će se povisiti frekvencija trećeg harmonika ako se temperatura vazduha u cevi povisi na  $t_1=27$  °C?

559. Cev, dužine  $l=1$  m, zatvorena je na jednom kraju. U cevi se nalazi vazduh na standardnim uslovima. Koliki je broj rezonantnih frekvencija ovog vazdušnog stuba koje su niže od 1 kHz?

560. a) Dva zvuka se razlikuju po subjektivnoj jačini za 1 dB. Koliki je odnos njihovih objektivnih jačina?

b) Objektivna jačina zvuka koji odgovara pragu čujnosti je  $I_{\min}=1$  W/m<sup>2</sup>, a granici bola  $I_{\max}=10$  W/m<sup>2</sup>. Kolika subjektivna jačina zvuka (u Ph) odgovara pragu čujnosti, a kolika granici bola?

561. Koliko je slabljenje zvuka (u dB) na putu njegovog prostiranja od jedne talasne dužine ako je koeficijent linearnog slabljenja sredine  $\mu$ ?

## 11. Mehanika fluida

### 11.1. STATIKA FLUIDA

Hydrostatički (aerostatički) pritisak homogenog stuba tečnosti (gasa) male visine  $h$  određen je relacijom

$$p = \rho gh$$

gde je  $\rho$ —gustina tečnosti (gasa),  $g$ —ubrzanje slobodnog padanja na mestu gde se nalazi tečnost (gas).

Ako je poznat atmosferski pritisak  $p_0$  na površini zemlje, onda je njegova vrednost  $p$  na visini  $h \ll R_Z$  (gde je  $R_Z$ —poluprečnik Ze-

mlje) određena tzv. barometarskom formulom

$$p = p_0 e^{-mgh/kT}$$

gde je  $m$ —srednja masa molekula vazduha,  $g$ —ubrzanje slobodnog padanja na mestu gde se određuje atmosferski pritisak,  $T$ —temperatura vazduha,  $k=1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K—Bolcmanova konstanta. Prilikom korišćenja barometarske formule potrebno je imati u vidu da je

$$\frac{mgh}{kT} = \frac{Mgh}{RT} = \frac{\rho_0 gh}{\rho}$$

gde je  $M \approx 0,029 \text{ kg/mol}$ —molarna masa vazduha,  $R=8,31 \text{ J/(mol}\cdot\text{K)}$ —molarna gasna konstanta,  $\rho_v=1,29 \text{ kg/m}^3$ —gustina vazduha na visini  $h=0$ .

Prema Arhimedovom zakonu, intenzitet Arhimedove sile  $\vec{F}_A$  (sile potiska) jednak je težini telom istisnute tečnosti (gasa) u datim uslovima. U slučaju kada se sud sa tečnošću (gasom) ne kreće u vertikalnom pravcu ili se kreće stalnom brzinom ( $\vec{v}=\text{const}$ ) težina istisnute tečnosti (gasa) jednaka je intenzitetu sile teže koja deluje na ovu količinu tečnosti (gasa), pa je tada

$$F_A = mg = \rho g V$$

gde su  $m$  i  $V$ —masa i zapremina istisnute tečnosti (gasa),  $\rho$ —gustina tečnosti (gasa) u kojoj se telo nalazi,  $g$ —ubrzanje slobodnog padanja na mestu gde se telo nalazi.

Potopljeno telo u tečnosti:

- tone ako je  $\rho_{\text{tela}} > \rho_{\text{tečnosti}}$
- lebdi  $\rho_{\text{tela}} = \rho_{\text{tečnosti}}$
- isplivava  $\rho_{\text{tela}} < \rho_{\text{tečnosti}}$

Koeficijent površinskog napona  $\alpha$  tečnosti određen je radom  $dA$  sile površinskog napona i odgovarajućim smanjenjem slobodne površine tečnosti  $dS$ . Naime,

$$\alpha = \frac{dA}{dS}$$

Isto tako, koeficijent površinskog napona tečnosti određen je intenzitetom sile površinskog napona  $F$  i dužine  $l$  granične linije slobodne površine tečnosti. Naime,

$$\alpha = \frac{F}{l}$$

562. Koliki pritisak mora da ostvari pumpa gradskog vodovoda da bi u najvišoj tački vodovodne instalacije pritisak iznosio  $p=3 \text{ bar}$ ? Visinska razlika najviše tačke i pumpe je  $\Delta h=350 \text{ m}$ . Ubrzanje slobodnog padanja u oblasti grada je  $g=9,80 \text{ m/s}^2$ .

563. Koliki je pritisak u moru na dubini  $h=500 \text{ m}$  ako je gustina morske vode  $\rho=1050 \text{ kg/m}^3$ , a atmosferski pritisak  $p_a=1010 \text{ mbar}$ ? Gustinu vode smatrat nezavisnom od dubine. Uzeti da je ubrzanje slobodnog padanja na posmatranom mestu  $g=9,803 \text{ m/s}^2$ .

564. U cilindričan sud nalivene su količine žive i vode jednakih zapremina. Visina tečnosti u sudu je  $h=30 \text{ cm}$ . Koliki je pritisak tečnosti na dno suda? Koliki je pritisak vode na živu?

565. Silom, intenziteta  $F=1 \text{ kN}$ , deluje se na klip kojim se sabija vertikalni vodeni stub, visine  $h=2 \text{ m}$  i površine poprečnog preseka  $S=16 \text{ cm}^2$ . Koliki pritisak deluje na dno suda? Za koliko se smanji visina vodenog stuba usled kompresije? Zapreminski modul elastičnosti vode iznosi  $E_V=2,1 \text{ GPa}$ .

566. Na dnu brane neke hidrocentrale načinjen je otvor površine  $S=200 \text{ cm}^2$ . Ako je visina brane  $H=70 \text{ m}$ , izračunati najmanju silu kojom je potrebno delovati na zatvarač ovog otvora da bi se sprečilo isticanje vode.

567. Iz suda prikazanog na slici 1 ispušan je vazduh kroz otvorenu slavinu A pri zatvorenoj slavini B. Kada nivo vode dođe do slavine A, ona se

Jedinica koeficijenta površinskog napona je

$$[\alpha] = \frac{[A]}{[S]} = \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$$

odnosno  $[\alpha] = [F]/[l] = \text{N/m}$ .

Laplasov pritisak u kapilarnoj cevi, kružnog poprečnog preseka, poluprečnika  $r$ , određen je relacijom

$$\Delta p = -\frac{2\alpha}{r} \cos \theta$$

gde je  $\alpha$ —koeficijent površinskog napona tečnosti,  $\theta$ —ugao kvaženja.

Ukoliko je ugao kvaženja  $\theta=0$  ili  $\pi$ , a tečnost se nalazi u sudu proizvoljnog oblika poprečnog preseka, onda je Laplasov pritisak

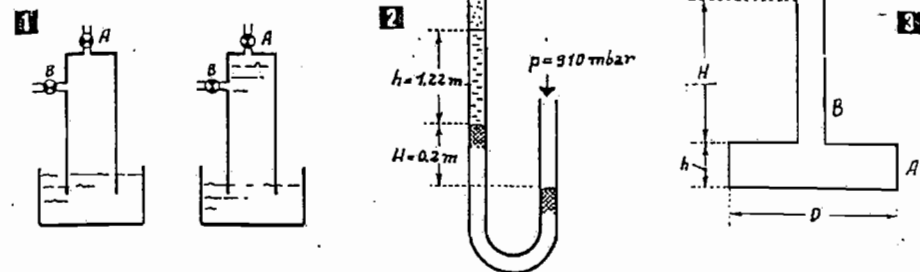
$$\Delta p = \pm \alpha \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

gde su  $r_1$  i  $r_2$ —poluprečnici krivine slobodne površine tečnosti u dvema uzajamno normalnim ravninama. Znak (—) treba uzeti za izdubljene slobodne površine tečnosti, ili za tečnosti koje kvase sud, dok se znak (+) uzima za ispupčene slobodne površine tečnosti ili za tečnosti koje ne kvase sud.

Visina stuba tečnosti u kapilarnoj cevi kružnog poprečnog preseka, poluprečnika  $r$ , je

$$h = \frac{2\alpha}{\rho g r}$$

gde je  $\alpha$ —koeficijent površinskog napona tečnosti,  $\rho$ —gustina tečnosti,  $g$ —ubrzanje slobodnog padanja na mestu gde se nalazi kapilarna cev.



zatvori. Da li će kroz slavinu B isticati voda kada se ona otvori?

568. U cilindričnom sudu, površine poprečnog preseka  $S$ , nalazi se tečnost gustine  $\rho$ . U sud je uneto telo, mase  $m$ , proizvoljnog oblika koje ne tone. Kolika je promena visine tečnosti u sudu usled unošenja tela?

569. U jedan krak otvorene U-cevi, prečnika  $D=10 \text{ cm}$ , u kojoj se nalazi izvesna količina žive, ulije se 1 litar vode. Kolika će nastati razlika nivoa žive u kracima?

570. Cisternu, poluprečnika  $R=1 \text{ m}$  i dužine  $l=5 \text{ m}$ , ispunjava voda do njene polovine. Pri kom ubrzanju će voda isticati kroz otvor na vrhu čeonog dela cisterne?

571. Izračunati napon pare tečnosti u levom kraku manometarske cevi prikazane na slici 2. U cevi se nalaze voda i živa.

572. Cilindrični sud A sa vertikalnom cevi B napunjen je do vrha vodom. Kolika sila deluje na: a) dno suda, b) bočnu stranu proširenog dela suda?

Gustina vode je  $\rho$ , a ubrzanje slobodnog padanja na mestu gde se nalazi sud je  $g$ .

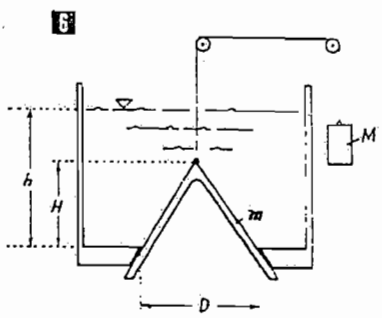
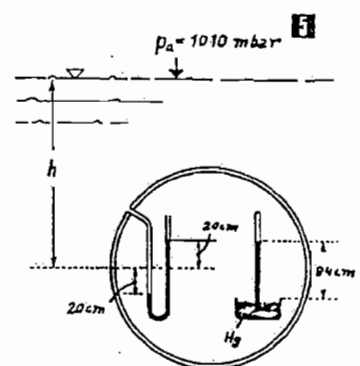
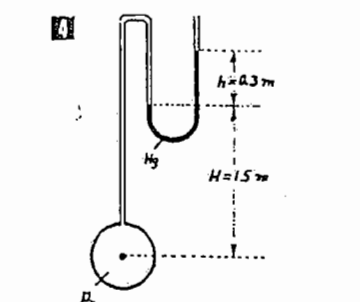
573. U cevi, relativno malog prečnika, nalazi se tečnost gustine  $\rho=910 \text{ kg/m}^3$ . Na cev je priključen živin manometar na način prikazan na slici 4. Koliki je pritisak tečnosti u cevi?

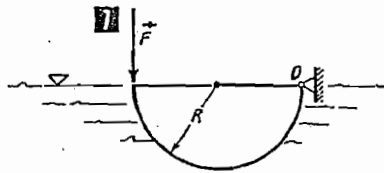
574. Sud A malih dimenzija nalazi se na dubini  $h$  u vodi. U sudu se nalaze dva živina manometra, čija su pokazivanja naznačena na slici 5.

Atmosferski pritisak iznosi  $p_a=1010 \text{ mbar}$ . Kolika je dubina  $h$ ?

575. Na dnu suda, prikazanog na slici 6, nalazi se kružni otvor prečnika  $D$ . Otvor je zatvoren konusnim čepom, visine  $H$  i mase  $m$ , koji je povezan uzetom za teg mase  $M > m$ . Pod uslovom da je čep pod vodom ( $h \geq H$ ), ustanoviti pri kolikoj masi  $M$  tega voda neće isticati pored čepa.

576. Polukugla, poluprečnika  $R$ , načinjena od drveta, gustine  $\rho$ , potopljena je u tečnost, gustine  $\rho_0$ .





na način prikazan na slici 77. Kolikom je silom  $\vec{F}$  potrebno delovati na kraj polukugle da bi njena ravna površina bila na nivou slobodne površine tečnosti?

577. Cilindrom, dužine  $l$  i poluprečnika  $R$ , sprečava se odlivanje vode iz jezera na način prikazan

na slici 78. Kolikom je silom  $\vec{F}$  potrebno delovati na cilindar da bi on ostao u naznačenom položaju?

578. Kroz horizontalno korito prikazano na slici 79, dužine  $l=3$  m, protiče voda. Stranice korita, svaka mase  $m=50$  kg, mogu da rotiraju oko ose  $O$ . Koliku najveću silu mora da izdrži metalno uže  $AB$  koje sprečava da se stranice korita ne otklone?

579. Barometrom u sastavu meteorološkog balona izmeren je pritisak od  $p=800$  mbar. Na kojoj visini leti ovaj balon ako je barometar pokazivao pritisak  $p_0=1010$  mbar pri poletanju sa zemlje? Pretpostaviti da je temperatura vazduha konstantna, da iznosi  $T=300$  K, da se ubrzanje slobodnog padanja ne menja sa promenom visine i da iznosi  $g=9,803$  m/s<sup>2</sup>.

580. Idealni gas, molarne mase  $M$ , nalazi se u rezervoaru visine  $h$ , površine poprečnog preseka  $S$ , na temperaturi  $T$ . Pritisak gasa na dnu rezervoara iznosi  $p_0$ . Kolika je masa gasa u sudu?

581. Idealni gas, molarne mase  $M$ , nalazi se u sudu veoma velike visine ( $h \rightarrow \infty$ ) u homogenom

gravitacionom polju ( $g = \text{const}$ ). Temperatura gasa je stalna, jednaka je u svim delovima suda i iznosi  $T$ . Na kojoj visini od dna suda se nalazi centar mase ovog sistema?

582. Temperatura vazduha menja se sa visinom po zakonu

$$T = T_0(1 - \beta h)$$

gde je  $T_0$ —temperatura vazduha na površini Zemlje,  $\beta$ —konstanta i  $h$ —visina od površine Zemlje. Ustanoviti zakon promene atmosferskog pritiska sa promenom visine  $p(h)$  ako na površini Zemlje atmosferski pritisak iznosi  $p_0$ .

583. Prema uslovima prethodnog zadatka, odrediti kako se gustina vazduha menja sa promenom visine.

584. Gvozdeno bure, bez jednog dna, mase  $m_1=4$  kg, ima spoljašnju zapreminu  $V_1=0,4$  m<sup>3</sup>. Koliko je peska, gustine  $\rho=3000$  kg/m<sup>3</sup>, potrebno usuti u bure da bi se potopilo u vodu?

585. Drvena kocka, prevučena tankim slojem laka, pliva na vodi, pri čemu 1/5 zapremine kocke nije potopljena. Kolika je gustina drveta od koga je načinjena kocka?

586. Gvozdeni splav, mase 8 t, ima spoljašnju zapreminu 40 m<sup>3</sup>. Koliko ljudi, prosečne mase 60 kg, može da primi ovaj splav, pod uslovom da je dozvoljeno potapanje splava samo do polovine njegove zapremine?

587. Kugla, načinjena od homogene supstancije gustine  $\rho$ , pliva između dve tečnosti koje se ne mešaju. Gustina gornje tečnosti je  $\rho_1$ , a donje  $\rho_2$ . Koliki deo kugle je potopljen u gornju, a koliki u donju tečnost?

588. Težina bakarnog tela u vazduhu je  $Q_1=800$  N, a u vodi  $Q_2=700$  N. Kolika je poroznost tela ako je gustina bakra  $\rho=8500$  kg/m<sup>3</sup>?

589. Telo, u obliku kocke, načinjeno od drveta gustine  $\rho=700$  kg/m<sup>3</sup>, pliva na vodi gustine  $\rho_2=1000$  kg/m<sup>3</sup>. Na vodu se nalije toliko ulja, gustine  $\rho_1=600$  kg/m<sup>3</sup>, da se izjednači nivo slobodne površine ulja sa gornjom površinom tela. Koliki je odnos potopljenog dela tela u vodi i u ulju?

590. Šuplja lopta, unutrašnjeg poluprečnika  $r_1=9$  cm i spoljašnjeg poluprečnika  $r_2=10$  cm, pliva na tečnosti gustine  $\rho=800$  kg/m<sup>3</sup>, pri čemu je polovina lopte iznad tečnosti.

a) Kolika je gustina supstancije od koje je načinjena lopta?

b) Kolika bi trebalo da bude gustina tečnosti da bi lopta u njoj lebdela?

591. Težina termometra u vazduhu je  $Q_1=0,7$  N, a u vodi  $Q_2=0,6$  N. Koliko žive ima u termometru? Gustina žive je  $\rho_1=13600$  kg/m<sup>3</sup>, a stakla  $\rho_2=2800$  kg/m<sup>3</sup>.

592. Cilindrična cev načinjena od gvožđa, debljine zida  $\Delta d=1$  mm, na krajevima je zatvorena diskovima zanemarljivih masa. Ako je iz ovakve cevi evakuisan vazduh, koliki treba da je njen spoljašnji prečnik da bi lebdela u vazduhu? Gustina gvožđa je  $\rho_1=7880$  kg/m<sup>3</sup>, a vazduha  $\rho_2=1,29$  kg/m<sup>3</sup>.

593. Optica, mase  $m$  i poluprečnika  $R$ , zagnjurenja je u vodu do dubine  $h$  i puštena. Do koje visine  $h_0$  će kuglica da „odskoči“ prilikom izlaska iz vode?

594. Koliki je rad potrebno uložiti da bi se potopila u vodu kocka, stranica  $a=20$  cm, načinjena od drveta gustine  $\rho=800$  kg/m<sup>3</sup>? Uzeti da je gustina vode  $\rho_0=1000$  kg/m<sup>3</sup>.

595. Homogenim drvenim štapom, dužine  $l=5$  m i mase  $m=4$  kg, izmeri se dubina jezera  $H=4,75$  m. Koliki se rad pri ovome izvršio ako se štap potapao vertikalno? Gustina drveta je  $\rho=750$  kg/m<sup>3</sup>.

596. Kapilarna cev, poluprečnika  $r$ , potopljena je jednim svojim krajem u tečnost površinskog napona  $\alpha$  i gustine  $\rho$ . Kolika se količina toplote oslobodi pri podizanju nivoa tečnosti u kapilari usled dejstva sile površinskog napona? Kapilarna cev je u vertikalnom položaju.

597. Kada se kapilarna cev, prečnika  $d=2,4$  mm, potopi u živu, koeficijenta površinskog napona  $\alpha=480$  mN/m, tada se nivo žive u cevi spusti za  $\Delta h=6,6$  mm ispod nivoa žive u sudu. Koliki je poluprečnik krivine meniskusa, a koliki ugao kvašenja?

598. Koliki treba da bude pritisak u kapilarnoj cevi koja je potopljena pod pravim uglom u sud sa živom da bi se izjednačili nivoi žive u sudu i kapilarnoj cevi? Poluprečnik kapilarne cevi je  $r=0,5$  mm, a atmosferski pritisak  $p_a=997$  mbar, dok je koeficijent površinskog napona žive  $\alpha=505$  mJ/m<sup>2</sup>.

599. Kolika će da bude visina vodenog stuba koji se obrazuje između dve vertikalne staklene ploče potopljene u vodu ako se one nalaze na rastojanju  $d=3$  mm?

600. Koliki je pritisak u mehuru sapunice, prečnika  $d=2$  mm, ako je spoljašnji pritisak  $p_0=1000$  mbar, a koeficijent površinskog napona sapunice  $\alpha=30$  mN/m?

601. Koliki je pritisak u vazдушnom mehuru, poluprečnika  $r=0,01$  mm, koji se nalazi na dubini  $h=0,2$  m ispod nivoa slobodne površine vode na standardnim uslovima?

602. Voda ističe kroz vertikalnu kapilarnu cev prečnika  $d=1$  mm. Kolika će masa vode zaostati u cevi posle prestanka isticanja ako je pritisak na oba kraja vodenog stuba jednak? Uzeti da je koeficijent površinskog napona vode  $\alpha=73$  mN/m.

603. Metalna rešetka ima pravilno rasporedene kružne otvore prečnika  $d=1$  mm. Koliki se sloj vode može držati iznad rešetke bez opasnosti da proćuri? Koeficijent površinskog napona vode, na temperaturi  $t=30$  °C, iznosi  $\alpha=71$  mJ/m<sup>2</sup>.

604. Koliki treba da bude prečnik kapilarne cevi, dužine  $l=2.5$  cm, koja služi za dovod goriva do gorionika špiritusne lampe? Koeficijent površinskog napona špiritusa je  $\alpha=25$  mN/m, a gustina  $\rho=810$  kg/m<sup>3</sup>.

605. Tanak cilindrični prsten načinjen od aluminijuma, visirne  $h=12$  mm, ima unutrašnji poluprečnik  $R_1=20$  mm i spoljašnji:  $R_2=21$  mm. Prsten se potopi u vodu koeficijenta površinskog napona  $\alpha=72$  mN/m. Gustina aluminijuma je  $\rho=2720$  kg/m<sup>3</sup>. Kolikom se silom može prsten izvući iz vode ako je u toku izvlačenja njegova kružna osnova paralelna slobodnoj površini tečnosti u sudu?

606. Kolika treba da bude visina stuba ulja u kapilarnoj cevi, prečnika  $d=1$  mm, da bi se obrazovala i odvojila kapljica ulja pri postavljanju cevi u vertikalni položaj? Gustina ulja je  $\rho=880$  kg/m<sup>3</sup>, a koeficijent površinskog napona  $\alpha=33$  mJ/m<sup>2</sup>.

607. Kada se puna metalna loptica prevuče tankim slojem parafina, ona može da pliva na vodi. Odrediti najveći poluprečnik loptice koja bi plivala na vodi pod ovim uslovima. Uzeti da je koeficijent površinskog napona vode  $\alpha=73$  mN/m, a gustina materijala od koga je načinjena loptica  $\rho=5000$  kg/m<sup>3</sup>.

608. Koliki treba da bude spoljašnji poluprečnik zatvorenog aluminijumskog cilindra da bi plivao po ulju, pod uslovom da je cilindar:

- pun,
- sa cilindričnom šupljinom poluprečnika  $r=1$  cm?
- Kolika može da bude debljina zida cilindra ako spoljašnji poluprečnik iznosi  $R=2$  cm?

Uzeti da je koeficijent površinskog napona ulja  $\alpha=49$  mN/m, a gustina aluminijuma  $\rho=2600$  kg/m<sup>3</sup>.

609. Koliki je odnos gustina vazduha u vazdušnom mehuru, poluprečnika  $r=1$   $\mu$ m, na dubini  $h=10$  m ispod površine jezera, i vazduha u atmosferi na standardnim uslovima? Koeficijent površinskog napona vode je  $\alpha=73$  mN/m.

610. Koeficijent površinskog napona može da se odredi brojanjem kapljica odvojenih na donjem kraju vertikalne kapilare, merenjem mase izbrojanih kapljica i njihovog prečnika. Ustanoviti odgovarajuću relaciju za određivanje koeficijenta površinskog napona tečnosti ovom metodom.

611. Mehanička presa [10] ima savršeno ravnu radnu površinu,  $S=0,4$  m<sup>2</sup> i masu gornjeg pokretnog dela  $m=18$  kg. Da bi se radna površina zaštitila od korozije u vreme kada presa ne radi, između ploča se ulije sloj ulja koeficijenta površinskog napona  $\alpha=30$  mN/m i gustine  $\rho=800$  kg/m<sup>3</sup>.

Kolikom normalnom silom  $\vec{F}$  mogu da se rastave ploče ove prese?

612. Kapilarna cev, poluprečnika  $r$  i visine  $h_1$ , spojena je na cev većeg poluprečnika [11]. U širu cev padaju kapljice vode u jednakim vremenskim intervalima. Nacrtati dijagram promene nivoa vode u obe cevi. Kolika je najveća visina vodenog stuba u široj cevi?

613. Kroz kapilarnu cev, poluprečnika  $r=1$  mm, ističe voda u vidu kapljica. Odrediti prečnik kap-

ljica smatrajući ih sfernim. Uzeti da je koeficijent površinskog napona  $\alpha=70$  mN/m.

614. Kroz nepokretnu kapilarnu cev, poluprečnika  $r=1$  mm, ističe alkohol u vidu kapljica koje se odvajaju u jednakim vremenskim intervalima. Koliko će da bude ovih kapljica u količini alkohola čija je masa  $m=20$  g? Koeficijent površinskog napona alkohola je  $\alpha=23,7$  mN/m. Pretpostaviti da je prečnik kapljice jednak prečniku kapilarne cevi.

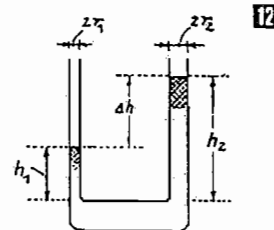
615. Poluprečnici krakova U-cevi su  $r_1=1$  mm i  $r_2=2$  mm [12]. U cevi se nalazi živa koeficijenta površinskog napona  $\alpha=472$  mN/m. Kolika je razlika nivoa žive u krakovima? Gustina žive je  $\rho=13600$  kg/m<sup>3</sup>, a ubrzanje slobodnog padanja na mestu gde se nalazi U-cev iznosi  $g=9,806$  m/s<sup>2</sup>.

616. Pomoću dva Toričelijeva barometra meri se atmosferski pritisak  $p_0=1013$  mbar. Prvi barometar ima staklenu cev poluprečnika  $r_1=0,5$  cm, a drugi  $r_2=2$  cm. Kolika je greška merenja pritiska u prvom, a kolika u drugom slučaju? Uzeti da je koeficijent površinskog napona žive  $\alpha=500$  mN/m, a njena gustina  $\rho=13600$  kg/m<sup>3</sup>.

617. Dve kišne kapi, poluprečnika  $R_1=1$  mm i  $R_2=2R_1$ , spoje se u jednu tokom pada. Kolika se količina toplote oslobodi pri ovome? Uzeti da je koeficijent površinskog napona vode  $\alpha=73$  mJ/m<sup>2</sup>.

618. Koliki je rad potrebno uložiti da bi se sferna kapljica, poluprečnika  $R$ , razdvojila na dve jednake kapljice? Koeficijent površinskog napona tečnosti je  $\alpha$ .

619. Sferna kapljica žive, mase  $m_0=1,36$  g, pri padu se raspadne na  $N=27$  sfernih kapljica jednakih masa. Kolika se energija utroši na ovo razdvajanje kapljice? Koeficijent površinskog napona žive je  $\alpha=500$  mJ/m<sup>2</sup>, a njena gustina  $\rho=13600$  kg/m<sup>3</sup>.



## 11.2 DINAMIKA FLUIDA

Između dva poprečna preseka strujne cevi, na kojoj nema ni izvora ni ponora fluida, a tečnost kroz nju protiče bez unutrašnjeg trenja, vladaju takvi fizički uslovi da je

$$Sv = \text{const}$$

gde je  $S$ —površina poprečnog preseka strujne cevi, a  $v$ —brzina fluida na ovom poprečnom preseku.

Zapreminski protok idealnog fluida je

$$Q = \frac{dV}{dt} = Sv$$

a maseni protok

$$Q' = \frac{dm}{dt} = \rho Sv$$

Jedinice zapreminskog i masenog protoka su

$$[Q] = \text{m}^3/\text{s} \quad \text{i} \quad [Q'] = \text{kg}/\text{s}$$

Efektivni protok idealnog fluida u slučaju da kontrakcija mlaza nije zanemarljiva je

$$Q_{ef} = kQ = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 Q$$

gde je  $k=(\pi/4)^2$ —koeficijent kontrakcije.

Raspodela pritiska duž strujne cevi određena je Bernulijevom jednačinom

$$p + \rho gh + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const}$$

gde je  $p$ —statički pritisak,  $\rho gh$ —visinski pritisak, a  $\rho v^2/2$ —brzinski (dinamički) pritisak.

Prema Toričelijevoj teoremi, brzina isticanja idealne tečnosti kroz bočni otvor je

$$v = \sqrt{2gh}$$

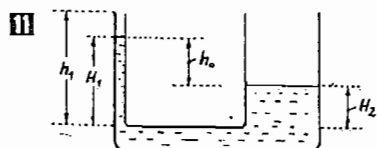
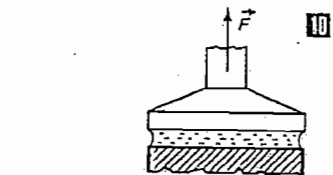
gde je  $h$ —visina stuba tečnosti u sudu iznad otvora.

Brzina isticanja idealnog gasa iz suda definisana je Grahamovim zakonom

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

gde je  $\Delta p$ —razlika pritiska u sudu u kome se nalazi gas i spoljašnjeg pritiska, tj. pritiska u sudu u koji gas utiče.

Intenzitet sile unutrašnjeg trenja u fluidu, koji protiče bez turbulencije, prema Njutno-



vom zakonu trenja je

$$F_{tr} = \eta S \frac{dv}{dx}$$

gde je  $\eta$ —dinamička viskoznost fluida (koeficijent viskoznosti),  $S$ —površina slojeva fluida koji se taru, a  $dv/dx$ —gradijent brzine fluida u pravcu koji je normalan u odnosu na pravac proticanja fluida.

Kinematička viskoznost fluida je

$$\nu = \eta / \rho$$

gde je  $\rho$ —njegova gustina.

Jedinice dinamičke i kinematičke viskoznosti su

$$[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s} \quad \text{i} \quad [\nu] = \text{m}^2/\text{s}$$

Ako fluid protiče kroz cev kružnog poprečnog preseka, onda raspodela brzina fluida u normalnom pravcu na pravac kretanja je određena relacijom

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - x^2)$$

gde je  $\Delta p$ —razlika pritiska na krajevima cevi,  $l$ —dužina cevi,  $R$ —njen unutrašnji poluprečnik,  $x$ —poluprečnik cilindričnog sloja fluida čija se brzina traži.

Zapreminski protok fluida viskoznosti  $\eta$ , kroz cev dužine  $l$  i unutrašnjeg polupreč-

nika  $R$ , prema Poazjevom zakonu je

$$Q = \frac{\pi \Delta p}{8\eta l} R^4$$

Proticanje fluida je laminarno ako je Rejnoldsov broj  $Re < 2300$ , a turbulentno ako je  $Re > 2300$ , pri čemu je

$$Re = \frac{\langle v \rangle d}{\nu}$$

gde je  $\langle v \rangle$ —srednja brzina fluida u jednom poprečnom preseku strujne cevi,  $d$ —prečnik cevi,  $\nu$ —kinematička viskoznost.

Ako se kroz fluid viskoznosti  $\eta$  kreće sferno telo, poluprečnika  $r$ , bez turbulencije, intenzitet otporne Stoksove sile određen je Stoksovim zakonom

$$F = 6\pi\eta r v$$

gde je  $v$ —brzina tela.

Intenzitet otporne sile prilikom kretanja tela proizvoljnog oblika kroz fluid, pri kome može da nastane i turbulencija, određen je Njutnovim obrascem

$$F = \frac{1}{2} \rho S C_x v^2$$

gde je  $\rho$ —gustina fluida kroz koji se telo kreće,  $S$ —čeoona površina tela, tj. površina projekcije tela na normalnu ravan,  $C_x$ —aerodinamički koeficijent tela ( $0,03 < C_x < 6$ ) i  $v$ —brzina tela.

620. Lopatice centrifugalne pumpe imaju srednji poluprečnik  $R=15$  cm. Pumpom se puni vodom rezervoar koji se nalazi na visini  $h=10$  m. Kolika je potrebna ugaona brzina pumpe?

621. Protok vazduha kroz uređaj za klimatizaciju iznosi  $Q=5$  m<sup>3</sup>/s. Brzina proticanja vazduha kroz ovaj uređaj iznosi  $v=2$  m/s.

a) Kolika je snaga ventilatora u uređaju?

b) Kolika će da bude ova snaga ako se brzina smanji 2 puta? Gustina vazduha je  $\rho=1,29$  kg/m<sup>3</sup>.

622. Vodena para ulazi u prvu turbinu brzinom  $v_1=500$  m/s pa onda ulazi u drugu, iz koje izlazi brzinom  $v_2=50$  m/s. Ako su turbine jednake, izračunati stepen korisnog dejstva ove grupe turbina i svake posebno.

623. Iz metalne cevi, površine poprečnog preseka  $S=20$  cm<sup>2</sup>, ističe voda brzinom  $v=5$  m/s i udara u zid pod pravim uglom. Kolikom silom deluje mlaz vode na zid?

624. U liftu se nalazi cilindričan sud, visine  $h=0,5$  m, napunjen do vrha vodom. Kolika je brzina isticanja vode kroz bočni otvor pri dnu suda kada lift:

a) stoji, i kada se lift kreće ubrzanjem  $a=g/2$ ;

b) nagore,

c) nadole?

625. Na brani, visine  $H=80$  m, nalazi se otvor za ispuštanje vode. Otvor je kružnog oblika, poluprečnika  $r=20$  cm, i nalazi se na visini  $h_1=40$  m od podnožja brane. Pod pretpostavkom da je nivo vode u jezeru za  $\Delta h=1$  m niži od gornje ivice brane i da je konstantan, odrediti:

a) gubitak vode kroz otvor u toku 24 časa, imajući u vidu da je koeficijent kontrakcije  $k=(\pi/4)^2$ ,

b) kolikom normalnom silom bi trebalo delovati na zatvarač otvora da bi se sprečilo isticanje vode?

626. Kroz vertikalnu cev protiče voda brzinom  $v=3$  m/s. Izračunati kolika je razlika nivoa žive u manometru koji je priključen na cev 18.

627. Kružni otvor, poluprečnika  $r_1$ , nalazi se ispod sredine cilindra poluprečnika  $r_2$  19. Razmak između podloge, na kojoj se nalazi kružni otvor, i donje osnove cilindra je  $d$ , dok je visina vodenog stuba u odnosu na podlogu  $h \gg d$ .

a) Kolika je brzina isticanja vode kroz otvor na podlozi?

b) Koliki je istok vode?

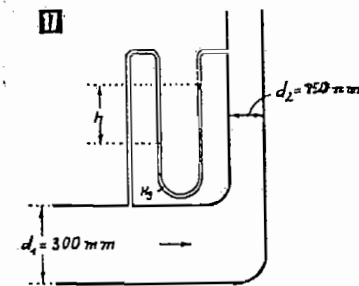
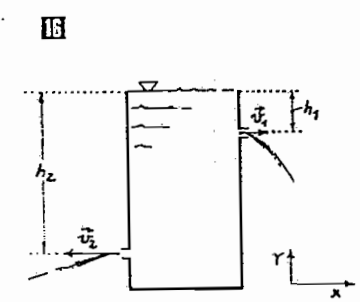
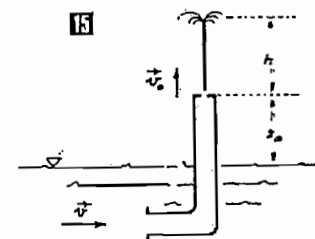
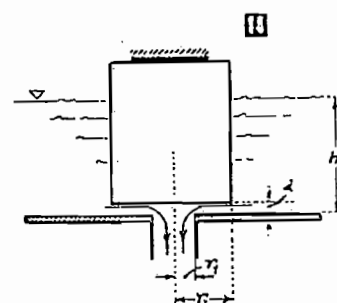
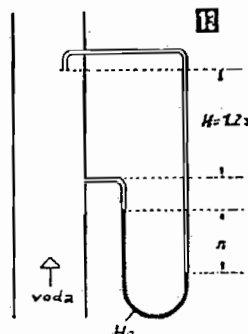
628. L-cev je spuštena u tečnost 15, koja se kreće brzinom  $v=5$  m/s u odnosu na cev. Cev na vrhu ima mali otvor, koji se nalazi na visini  $h_0=30$  cm iznad slobodne površine tečnosti. Koliku visinu  $h$  će dostići mlaz vode koji izlazi iz otvora L-cevi?

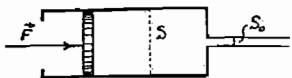
629. Iz vertikalne cevi, površine poprečnog preseka  $S_1$ , izlazi vertikalno uvis mlaz vode. Kolika je površina poprečnog preseka mlaza vode na visini  $h$  od otvora cevi? Protok vode je  $Q$ .

630. Na suprotnim stranama vertikalnog suda napunjenog vodom 16 nalaze se dva otvora istih površina  $S=2$  cm<sup>2</sup>. Visinska razlika između otvora je  $\Delta h=0,4$  m. Kolika je rezultujuća sila reakcije mlazeva vode koji ističu kroz ove otvore?

631. Kroz cev, čiji je oblik prikazan na slici 17, protiče tečnost gustine  $\rho=850$  kg/m<sup>3</sup>. Protok tečnosti je  $Q=300$  dm<sup>3</sup>/s. Kolika je visinska razlika  $h$  nivoa žive u manometru? Gustina žive je  $\rho_{Hg}=13600$  kg/m<sup>3</sup>.

632. U sudu se nalazi vazduh na pritisku  $p_1=4$  bar. Temperatura vazduha je  $T=300$  K. Ako se otvori slavina na sudu, kolikom brzinom će isticati vazduh iz nje pod uslovom da je spoljašnji pritisak  $p_2=1000$  mbar?





18

633. Tečnost, gustine  $\rho$ , nalazi se u horizontalnom cilindru početne zapremine  $V$ . Površina poprečnog preseka cilindra je  $S$ , a otvora cilindra  $S_0$ .

Na klip deluje sila  $\vec{F}$  stalnog intenziteta, usled čega iz cilindra istekne sva tečnost za vreme  $t$ . Koliki rad izvrši sila  $\vec{F}$  pri ovome?

634. Cilindrični sud, visine  $h$  i površine poprečnog preseka  $S$ , napunjen je do vrha vodom. Na dnu suda načinjen je otvor površine  $S_0 \ll S$ . Zanimajući viskoznost vode i kontrakciju mlaza, odrediti:

a) koliko vremena je potrebno da sva voda istekne iz suda,

b) za koliko vremena bi istekla ista količina vode ako se nivo vode u sudu održava na stalnoj visini  $h$  dolivanjem vode.

635. Širok cilindrični sud, visine  $H$ , napunjen je do vrha vodom.

a) Na kojoj je visini  $y$  od dna suda potrebno na sudu načiniti mali otvor da bi mlaz iz ovog otvora padao na maksimalnom rastojanju  $x$  od suda?

b) Koliko je to rastojanje?

636. U cevi, dužine  $L$ , nalazi se vodeni stub „visine“  $h$ . Cev rotira u horizontalnoj ravni oko svog otvorenog kraja stalnom ugaonom brzinom  $\omega$ , usled čega voda ističe na drugom kraju cevi, na kome se nalazi mali otvor. Kolika je brzina isticanja vode kroz ovaj otvor?

637. L-cev, prikazana na slici, rotira stalnom ugaonom brzinom  $\omega$  oko svog vertikalnog kraka visine  $H$ . Cev je napunjena vodom, koja ističe na drugom kraju cevi na kome se nalazi mali otvor. Dužina horizontalnog dela cevi je  $L$ . Kolika je brzina isticanja vode iz cevi?

638. Visina zatvorenog kraka U-cevi iznosi  $H_1=20$  cm. U horizontalnom delu cevi, dužine  $l=15$  cm, nalazi se živa. Pritisak vazduha u zatvorenom kraju cevi je  $p_a=1015$  mbar. Kada U-cev rotira oko svog otvorenog kraka, u zatvorenom kraku cevi se obrazuje živin stub, visine  $H_1/2$ , po-

meranjem žive u cevi. Kolika je ugaona brzina rotacije cevi?

639. Iz jezera hidrocentrale voda se u hidroturbinu dovodi kroz cev prečnika  $D=40$  cm. Visinska razlika nivoa vode u jezeru i turbine je  $h=51$  m.

a) Kolika je snaga vodenog mlaza koji pada na vodno kolo turbine?

b) Kolika je brzina vode na izlazu iz turbine ako je njen stepen korisnog dejstva  $\eta=0,80$ ?

640. Voda ističe iz velikog rezervoara kroz cev koja je postavljena pod pravim uglom na zid rezervoara. Poluprečnik otvora cevi je  $r=5$  cm, a njena dužina  $l=50$  cm, dok je protok vode kroz nju  $Q=10$  L/s. Koliki je moment sile reakcije mlaza vode koji deluje na zid rezervoara na mestu priključenja cevi (tačka O)?

641. Disk, poluprečnika  $R$ , rotira stalnom ugaonom brzinom  $\omega$  po sloju ulja, viskoznosti  $\eta$  i debljine  $d$ , na način prikazan na slici. Koliki moment sprega deluje na disk?

642. U konusnom ležištu nalazi se ulje viskoznosti  $\eta$ . Sloj ulja ima debljinu  $d$ . Kolikim momentom sprega je potrebno delovati na osovinu da bi ona rotirala stalnom ugaonom brzinom  $\omega$ ?

643. Cisterna, visine  $H=10$  m, napunjena je uljem. Na dnu ove cisterne nalazi se otvor na koji je postavljena cev dužine  $l=2$  m i poluprečnika  $R=1$  cm. Kolika je:

a) najveća brzina isticanja ulja kroz cev?

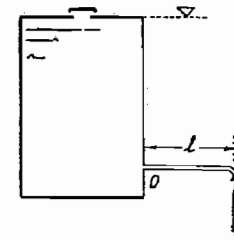
b) protok ulja?

Koeficijent viskoznosti ulja je  $\eta=0,5$  Pa·s, a njegova gustina  $\rho=900$  kg/m<sup>3</sup>.

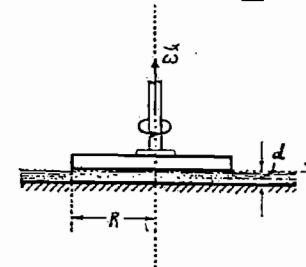
644. Metalna cev, dužine  $l=20$  m i poluprečnika  $R=20$  cm, spojena je na javnu vodovodnu mrežu, u kojoj je pritisak vode  $p_1=3$  bar. Voda na drugom kraju ističe slobodno. Atmosferski pritisak je  $p_a=1010$  mbar, a viskoznost vode  $\eta=0,8$  mPa·s. Koliki je protok vode kroz cev?

645. U cevi, unutrašnjeg poluprečnika  $R=1$  cm, nalazi se čep dužine  $l=4$  cm i poluprečnika

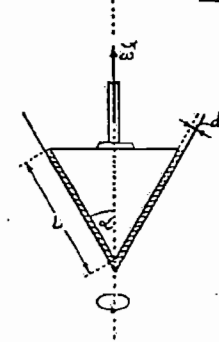
28



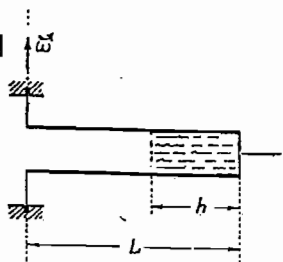
21



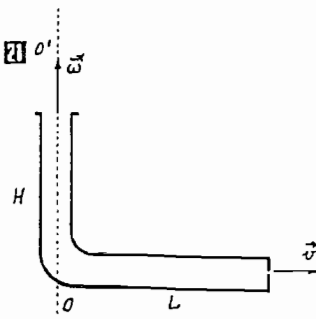
25



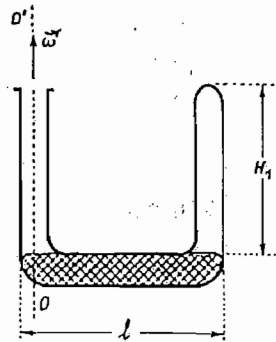
20



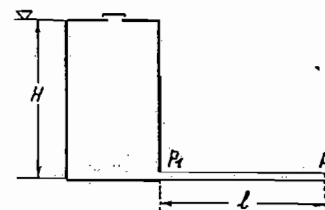
21



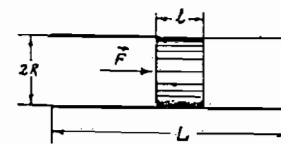
22



26



27



$r=0,8$  cm. Između čepa i cevi nalazi se sloj glicerina viskoznosti  $\eta=0,85$  Pa·s. Kada na čep deluje sila intenziteta  $F=2,5$  N (u naznačenom pravcu), on se kreće stalnom brzinom.

- a) Kolika je brzina kretanja čepa?  
b) Koliko vremena će trajati kretanje čepa po cevi dužine  $L=2$  m?

646. Da bi se odredila viskoznost alkohola, meri se masa isteklog alkohola kroz horizontalnu kapilarnu cev, dužine  $l=12$  cm i prečnika  $d=1$  mm, pod dejstvom pritiska stuba alkohola visine  $d=1,5$  m. Za vreme  $\Delta t=100$  s istekne količina alkohola čija je masa  $\Delta m=200$  g. Kolika je viskoznost alkohola prema ovim podacima ako je njegova gustina  $\rho=800$  kg/m<sup>3</sup>?

647. Kroz cev, dužine  $l$  i poluprečnika  $R$ , protiče tečnost gustine  $\rho$  i viskoznosti  $\eta$ . Brzina proticanja tečnosti određena je relacijom  $v=v_0(R^2-r^2)/R^2$ , gde je  $v_0$ —brzina tečnosti na sredini cevi, a  $r$ —poluprečnik uočenog cilindričnog sloja tečnosti.

- a) Koliki je protok tečnosti kroz cev?  
b) Kolika je kinetička energija tečnosti u cevi?  
c) Kolika je sila trenja između cevi i tečnosti?  
d) Kolika je razlika pritisaka na krajevima cevi?

648. Ako je viskoznost vazduha  $\eta=13,4$   $\mu$ Pa·s, izračunati prečnik kišne kapi koja pada stalnom brzinom  $v=0,5$  m/s.

649. Drvena loptica spontano isplivava ka slobodnoj površini vode stalnom brzinom  $v=0,75$  m/s. Viskoznost vode je  $\eta=0,8$  mPa·s, a gustina drveta  $\rho=800$  kg/m<sup>3</sup>. Koliki je poluprečnik loptice?

650. U sud sa glicerinom, viskoznosti  $\eta=0,83$  Pa·s, puste se istovremeno dve metalne kuglice, prečnika  $d_1=1$  mm i  $d_2=2$  mm, koje padaju stalnim brzinama. Kuglice su načinjene od istog metala, gustine  $\rho=6000$  kg/m<sup>3</sup>, dok je gustina glicerina  $\rho_0=800$  kg/m<sup>3</sup>.

- a) Koja kuglica će prva pasti na dno suda?  
b) Posle koliko vremena će pasti i druga kuglica? Visina napunjenog dela suda glicerinom je  $h=40$  cm.

## TOPLOTA

### 1. Termičko širenje. Kalorimetrija

Ako je  $l_0$  dimenzija tela na temperaturi  $0^\circ\text{C}$ , onda je ona na temperaturi  $t$

$$l=l_0(1+\alpha t)$$

gde je  $\alpha$ —temperaturski koeficijent linearnog širenja supstancije od koje je načinjeno telo.

Ukoliko je poznata dimenzija tela  $l_1$  na temperaturi  $t_1$ , onda je ova dimenzija na temperaturi  $t_2$ , ako se ona ne razlikuje znatno od temperature  $t_1$ , data relacijom

$$l_2=l_1(1+\alpha\Delta t)$$

gde je  $\Delta t=t_2-t_1$ .

Prilikom razmatranja površinskog termičkog širenja tela važe analogne relacije

$$S=S_0(1+\beta t)$$

$$S_2=S_1(1+\beta\Delta t)$$

gde je  $\beta=2\alpha$ —temperaturski koeficijent površinskog širenja supstancije od koje je načinjeno telo.

Isto tako, prilikom razmatranja zapreminskog termičkog širenja tela važe relacije

$$V=V_0(1+\gamma t)$$

$$V_2=V_1(1+\gamma\Delta t)$$

gde je  $\gamma=3\alpha$ —temperaturski koeficijent zapreminskog širenja supstancije od koje je načinjeno telo.

Jedinica temperaturnog koeficijenta širenja je

$$[\alpha]=[\beta]=[\gamma]=1/\text{K}$$

tj.  $1/^\circ\text{C}$ .

Ako je  $\rho_0$ —gustina čvrste ili tečne supstancije na temperaturi  $0^\circ\text{C}$ , onda je ona na temperaturi  $t$

$$\rho=\frac{\rho_0}{1+\gamma}$$

Prilikom termičkog naprezanja tela nastaje termički napon

$$\sigma_t=\frac{F_t}{S}=E_p\alpha\Delta t$$

gde je  $F_t$ —intenzitet sile termičkog naprezanja,  $S$ —površina poprečnog preseka tela,  $E_p$ —Jungov modul elastičnosti supstancije od koje je telo načinjeno,  $\alpha$ —njen temperaturski koeficijent linearnog širenja i  $\Delta t$ —povišenje temperature u odnosu na najvišu (odnosno najnižu) temperaturu na kojoj nije bilo termičkog naprezanja.

Ako se telu povisi temperatura za  $\Delta t$ , usled dovođenja količine toplote  $Q$ , onda je njegova toplotna kapacitivnost

$$C=\frac{Q}{\Delta t}$$

Jedinica toplotne kapacitivnosti je

$$C=\frac{[Q]}{[\Delta t]}=\frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Toplotna kapacitivnost tela  $C$ , svedena na jediničnu masu supstancije od koje je telo načinjeno, predstavlja specifičnu toplotnu kapacitivnost supstancije. Naime, ako telo mase  $m$  poseduje toplotnu kapacitivnost  $C$ , onda je specifična toplotna kapacitivnost supstancije od koje je telo načinjeno

$$c=\frac{C}{m}=\frac{Q}{m\Delta t}$$

Jedinica specifične toplotne kapacitivnosti je

$$[c]=\frac{[C]}{[m]}=\frac{\frac{\text{J}}{\text{K}}}{\text{kg}}=\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$$

tj.  $\text{J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$ .

Toplotna kapacitivnost tela  $C$ , svedena na jediničnu količinu supstancije (1 mol), predstavlja molarnu toplotnu kapacitivnost supstancije od koje je telo načinjeno. Naime, ako je  $n$  količina supstancije od koje je telo načinjeno, a  $C$  njegova toplotna kapacitivnost, onda je molarna toplotna kapacitivnost te supstancije

$$C_m=\frac{C}{n}=\frac{Q}{n\Delta t}$$

Jedinica molarne toplotne kapacitivnosti je

$$[C_m]=\frac{[C]}{[n]}=\frac{\frac{\text{J}}{\text{K}}}{\text{mol}}=\frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$$

tj.  $\text{J}/(\text{mol}\cdot^\circ\text{C})$ .

Ako je  $m$  masa tela, onda je količina supstancije  $n$  od koje je ono načinjeno

$$n=\frac{m}{M}$$

gde je  $M$ —molarna masa supstancije, čija je jedinica  $[M]=\text{kg}/\text{mol}$ .

Imajući u vidu prethodnu relaciju, nalazi se da je

$$C_m=cM$$



Prema Dilog-Ptiovom zakonu, za kristalne supstancije na temperaturama koje su više od temperature Debaja je

$$C_m = 3R \approx 25 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$$

gde je  $R = 8,31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$  — molarna konstanta.

Količina toplote dovedena (ili odvedena) telu je

$$Q = cm\Delta t \text{ ili } Q = C_m n \Delta t$$

gde je  $c$  — specifična, a  $C_m$  — molarna toplotna kapacitivnost supstancije od koje je telo načinjeno,  $m$  — masa tela,  $n$  — količina sup-

tancije od koje je telo načinjeno,  $\Delta t$  — povišenje (ili sniženje) temperature tela.

Pri termičkim procesima, kod kojih nastaje razmena unutrašnje energije između tela bez vršenja rada, zbir količina toplote  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$  koju oda  $n$  tela jednak je zbiru količina toplote  $Q'_1, Q'_2, Q'_3, \dots, Q'_k$  koju primi  $k$  tela posmatranog sistema. Naime, za ovakav sistem  $n+k$  tela, jednačina termičkog bilansa može da se napiše u obliku

$$\sum_{i=1}^n Q_i = \sum_{i=1}^k Q'_i$$

651. Metalni štap se izduži za 0,2% pri povišenju svoje temperature za  $\Delta t = 85^\circ\text{C}$ . Koliki je temperaturski koeficijent linearnog širenja metala od koga je načinjen štap?

652. Na metalnu osovinu, prečnika  $d = 50 \text{ mm}$  na temperaturi  $t = 20^\circ\text{C}$ , potrebno je navući prsten od aluminijuma, čiji je unutrašnji prečnik na istoj temperaturi manji za  $\Delta d = 0,1 \text{ mm}$ . Na koju temperaturu treba zagrejati prsten da bi se bez izazivanja naprezanja mogao navući na osovinu? Temperaturski koeficijent linearnog širenja aluminijuma je  $\alpha = 23,8 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$ .

653. Metalni štap, čija je dužina  $l_1 = 20 \text{ cm}$  na temperaturi  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ , izduži se za  $\Delta l = 0,138 \text{ mm}$  pri povišenju njegove temperature za  $\Delta t = 30^\circ\text{C}$ . Koliki je temperaturski koeficijent linearnog širenja metala od kojeg je načinjen štap?

654. Na kojoj će temperaturi dužine čeličnog i mesinganog štapa da budu jednake ako odnos njihovih dužina na temperaturi  $0^\circ\text{C}$  iznosi  $1/1,001$ ? Temperaturski koeficijent linearnog širenja čelika je  $\alpha_1 = 10,5 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ , a mesinga  $\alpha_2 = 19 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ .

655. Dva štapa, od istog metala, imaju dužine  $l_1 = 200,0 \text{ cm}$  i  $l_2 = 200,2 \text{ cm}$  na temperaturi  $t = 20^\circ\text{C}$ . Ako se kraći štap zagreje a duži rashladi za istu razliku temperatura  $\Delta t$ , njihove dužine se izjednače. Kolike su tada temperature štapa? Temperaturski koeficijent linearnog širenja metala je  $\alpha = 23 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$ .

656. Dužina železničke šine je  $l_1 = 12 \text{ m}$  na temperaturi  $t_1 = 2^\circ\text{C}$ . Kolika je dužina ove šine na temperaturi  $t_2 = 40^\circ\text{C}$ ? Za koliko bi se pogrešilo pri ovome ako bi se koristila približna relacija  $\Delta l \approx l_1 \alpha \Delta t$ ? Temperaturski koeficijent linearnog širenja čelika od koga je šina načinjena je  $\alpha = 11 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$ .

657. Časovnik sa metalnim klatnom na temperaturi  $t_1 = 0^\circ\text{C}$ , „žuri“  $\Delta t_1 = 8 \text{ s}$ , a na temperaturi  $t_2 = 20^\circ\text{C}$  on „zakašnjava“  $\Delta t_2 = 10 \text{ s}$  tokom vremena od 24 časa. Koliki je temperaturski koeficijent linearnog širenja metala od koga je načinjeno klatno?

658. Podela na čeličnom merilu je izvedena na temperaturi  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ . Kolika se najveća greška čini pri merenju dužine ovim merilom na temperaturi  $t_2 = 50^\circ\text{C}$ ?

659. Bakarna ploča ima površinu  $S_1 = 2 \text{ m}^2$  na temperaturi  $t = 20^\circ\text{C}$ . Za koliko se poveća površina ploče ako se njena temperatura povisi za  $\Delta t = 60^\circ\text{C}$ ? Temperaturski koeficijent linearnog širenja bakra je  $\alpha = 16,7 \cdot 10^{-7} \text{ 1/K}$ .

660. Pri obradi na strugu, temperatura aluminijumskog cilindra se povisi za  $\Delta t = 80^\circ\text{C}$ . Kolika se greška čini pri merenju dimenzija cilindra tokom obrade na strugu?

661. Metalna lopta ima prečnik  $d_1 = 15 \text{ cm}$  na temperaturi  $t_1 = 10^\circ\text{C}$ . Za koliko se poveća površina lopte kada se ona zagreje do temperature  $t_2 = 80^\circ\text{C}$ ? Temperaturski koeficijent linearnog širenja metala od koga je načinjena lopta iznosi  $\alpha = 15 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$ .

662. Na sredini diska se nalazi kružni otvor čiji je prečnik  $D = 12,15 \text{ mm}$  na temperaturi  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ . Do koje temperature je potrebno zagrejati disk da bi

kroz ovaj otvor mogla da prođe metalna kuglica prečnika  $d = 12,18 \text{ mm}$ ? Temperaturski koeficijent linearnog širenja metala od koga je načinjen disk iznosi  $\gamma = 18 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$ .

663. Bimetalna traka je sastavljena od dve metalne trake, jednakih debljina  $d = 1 \text{ mm}$ , koje su načinjene od metala čiji su temperaturski koeficijenti linearnog širenja  $\alpha_1 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$  i  $\alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$ . Koliki će da bude srednji poluprečnik krivine ako se trake spoje na temperaturi  $t_1 = -10^\circ\text{C}$ , a zatim zagreju do temperature  $t_2 = 20^\circ\text{C}$ ?

664. Na temperaturi  $t_1 = 10^\circ\text{C}$  u metalni rezervoar može da se ulije količina nafte čija je masa  $m_1 = 10 \text{ 525 kg}$ , a na temperaturi  $t_2 = 30^\circ\text{C}$  masa ulivene količine nafte je  $m_2 = 10 \text{ 575 kg}$ . Koliki je temperaturski koeficijent linearnog širenja metala od koga je načinjen rezervoar? Temperaturski koeficijent zapreminskog širenja nafte iznosi  $\gamma = 9 \cdot 10^{-4} \text{ 1/K}$ .

665. Stakleni sud, zapremine  $V = 10 \text{ L}$ , napunjen je sumpornom kiselinom na temperaturi  $t_1 = 0^\circ\text{C}$ . Koliko će kiseline isteći iz suda ako se ostavi na suncu, pri čemu se zagreje do temperature  $t_2 = 40^\circ\text{C}$ ? Temperaturski koeficijent linearnog širenja stakla je  $\alpha = 8,1 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ , a temperaturski koeficijent kubnog širenja sumporne kiseline  $\gamma = 5,6 \cdot 10^{-4} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ .

666. Sud od aluminijuma ima zapreminu  $V_1 = 50 \text{ L}$  na temperaturi  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ . Za koliko će se povećati zapremina suda ako se njegova temperatura povisi za  $\Delta t = 60^\circ\text{C}$ ? Temperaturski koeficijent linearnog širenja aluminijuma iznosi  $\alpha = 23,8 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ .

667. Čelična cisterna za transport nafte ima zapreminu  $V = 5 \text{ 000 L}$  na temperaturi  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ .

a) Koliko je potrebno ostaviti najmanje praznog prostora u cisterni na temperaturi  $20^\circ\text{C}$  da bi njome mogla da se transportuje nafta kroz predele gde vlada temperatura  $t_2 = 50^\circ\text{C}$ , pod uslovom da iz cisterne ne istekne ni najmanja količina nafte i da nema dodatnog naprezanja cisterne usled širenja nafte?

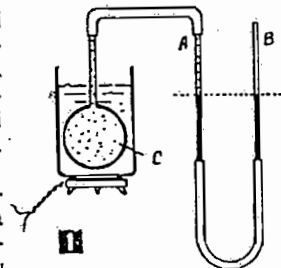
b) Koliki je prividni zapreminski koeficijent širenja nafte? Temperaturski koeficijent zapreminskog širenja nafte je  $\gamma = 9 \cdot 10^{-4} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ , a temperaturski koeficijent linearnog širenja čelika je  $\alpha = 10,4 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ .

668. Živin stakleni termometar ima rezervoar zapremine  $V = 0,30 \text{ cm}^3$  na temperaturi  $0^\circ\text{C}$ . Koliku dužinu treba da ima jedan podeljak na skali termometra koji označava temperatursku razliku od  $1^\circ\text{C}$  ako je prečnik kapilare  $d = 0,4 \text{ mm}$ ? Temperaturski koeficijent zapreminskog širenja stakla je  $\gamma_s = 24,1 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$ , a žive  $\gamma_z = 18,2 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$ .

669. Gasni termometar, prikazan na slici 11, koristi se za merenje temperature tečnosti na osnovu merenja promene pritiska gasa. Pri ovome se održava stalna zapremina gasa u sudu C, dizanjem ili spuštanjem pokretnog kraka manometarske cevi B, pri čemu se gornji nivo žive u kraku A dovodi na prethodni.

Nivoi žive u krakovima su izjednačeni na temperaturi  $t = 20^\circ\text{C}$  i pritisku  $p_a = 101 \text{ 325 Pa}$ . Kolika je temperatura gasa ako se pri merenju krak B spušta za  $\Delta h = 10 \text{ mm}$  da bi se održao isti nivo žive u kraku A?

670. Kolika količina toplote treba da se dovede količini žive, zapremine  $V_1 = 10 \text{ mL}$ , koja se nalazi na temperaturi  $t_1 = 10^\circ\text{C}$ , da bi se njena zapremina povećala za 0,5%? Temperaturski koeficijent zapreminskog širenja žive iznosi  $\gamma = 18 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$ , specifična toplotna kapacitivnost  $c = 140 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ , dok njena gustina na temperaturi  $0^\circ\text{C}$  iznosi  $\rho_0 = 13 \text{ 595 kg/m}^3$ .



671. Gustina zlata na temperaturi  $t_1 = 20^\circ\text{C}$  iznosi  $\rho_1 = 19\,320\text{ kg/m}^3$ . Kolika je gustina zlata na temperaturi  $t_2 = -20^\circ\text{C}$ ? Temperaturski koeficijent linearnog širenja zlata iznosi  $\alpha = 14 \cdot 10^{-6}\text{ 1/K}$ .

672. Kolika je promena gustine glicerina pri zagrevanju od temperature  $t_1 = -20^\circ\text{C}$  do temperature  $t_2 = 60^\circ\text{C}$ ? Temperaturski koeficijent zapreminskog širenja glicerina je  $\gamma = 5,1 \cdot 10^{-4}\text{ 1/}^\circ\text{C}$ .

673. Na čeonim sastavcima železničkih šina, dužine  $l = 25\text{ m}$  i površine poprečnog preseka  $S = 80\text{ cm}^2$ , ostavljen je razmak od  $\Delta l = 10\text{ mm}$  na temperaturi  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ .

a) Na kojoj temperaturi će se šine sastaviti?

b) Ako se temperatura povisi za daljnjih  $20^\circ\text{C}$ , kolika će da bude sila termičkog naprezanja?

Temperaturski koeficijent linearnog širenja supstancije od koje su načinjene šine iznosi  $\alpha = 10 \cdot 10^{-6}\text{ 1/}^\circ\text{C}$ , a njen Jungov modul elastičnosti  $E_y = 200\text{ GPa}$ .

674. Čelična žica, prečnika  $d = 1\text{ mm}$ , zategnuta je na temperaturi  $t_1 = 20^\circ\text{C}$  silom intenziteta  $F_1 = 100\text{ N}$ . Koliki je intenzitet sile zatezanja ove žice na temperaturi  $t_2 = -20^\circ\text{C}$ ? Jungov modul elastičnosti čelika je  $E_y = 230\text{ GPa}$ , a temperaturski koeficijent linearnog širenja  $\alpha = 11 \cdot 10^{-6}\text{ 1/K}$ .

675. Tri metalna stubića, jednakih dužina i površina poprečnih preseka od po  $S = 5\text{ cm}^2$ , ukleštena su među dve nepokretne ploče. Prvi stubić je od gvožđa, drugi od bakra, a treći od aluminijuma. Njihovi temperaturski koeficijenti linearnog širenja i Jungovi moduli elastičnosti dati su u tablici 25.

Koliki su intenziteti sila termičkog naprezanja u stubićima ako se njihova temperatura povisi za  $\Delta t = 30^\circ\text{C}$ , pod uslovom da im se moduli elastičnosti ne menjaju sa promenom temperature?

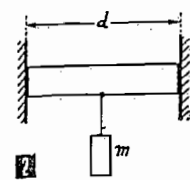
676. Čeličnim užetom, čija su svojstva poznata, ispituje se dno okeana.

a) Kolika najveća dubina može da se izmeri ovim užetom?

b) Za koliko se pri ovom pogreši s obzirom na to što je srednja temperatura vode niža za  $\Delta t = 20^\circ\text{C}$  od temperature na brodu gde je uže izmereno?

Jačina čelika na kidanje je  $\sigma_k = 0,5\text{ GPa}$ , temperaturski koeficijent linearnog širenja  $\alpha = 10 \cdot 10^{-6}\text{ 1/}^\circ\text{C}$ , a gustina  $\rho_1 = 7\,900\text{ kg/m}^3$ . Gustina morske vode na mestu gde je vršeno merenje je  $\rho_2 = 1010\text{ kg/m}^3$ .

677. Gvozdeni štap [2], dužine  $l_1 = 23,05\text{ cm}$  i površine poprečnog preseka  $S = 10\text{ cm}^2$  na temperaturi  $t_1 = 10^\circ\text{C}$ , mehanički je uklešten na istoj temperaturi između dve metalne vertikalne ploče, koje se nalaze na rastojanju  $d = 23\text{ cm}$ .



a) Koliki je normalni napon u štapu na temperaturi  $t_1$ ?

b) Koliki je ovaj napon na temperaturi  $t_2 = 40^\circ\text{C}$ ?

c) Koliki teret može da se obesi o sredinu štapa na temperaturi  $t_2$ , bez opasnosti da padne, ako je koeficijent trenja između čeonice štrane štapa i ploče  $\mu = 0,44$ ?

d) Na kojoj temperaturi bi štap sam ispao iz ukleštenja (ne uzimajući u obzir teret)? Pretpostaviti da nema trajnih deformacija ploča i da su opterećenja štapa ispod granice

proporcionalnosti. Jungov modul elastičnosti gvožđa je  $E_y = 230\text{ GPa}$ , a temperaturski koeficijent linearnog širenja  $\alpha = 10 \cdot 10^{-6}\text{ 1/K}$ .

678. Za koliko je potrebno zagrejati čeličnu žicu, prečnika  $d = 0,6\text{ mm}$ , zategnutu silom intenziteta  $F = 100\text{ N}$ , da bi se njen osnovni ton snizio dva puta? Jungov modul elastičnosti čelika je  $E_y = 250\text{ GPa}$ , a temperaturski koeficijent linearnog širenja  $\alpha = 10 \cdot 10^{-6}\text{ 1/K}$ .

679. Automatski čekić, mase  $m = 10\text{ kg}$ , čiji je hod  $h = 0,5\text{ m}$ , udari jedanput tokom svakog vremenskog intervala od  $1\text{ s}$  u gvozdeni predmet mase  $m = 80\text{ kg}$ .

Pri svakom udaru čekića polovina njegove kinetičke energije se pretvori u unutrašnju energiju gvođenog predmeta. Za koliko će se povisiti temperatura ovog predmeta posle kovanja koje je trajalo  $\tau = 10\text{ min}$ ? Specifična toplotna kapacitivnost gvožđa je  $c = 428\text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ .

680. Koliku količinu toplote treba dovesti bakarnom telu, mase  $m = 0,5\text{ kg}$ , da bi se njegova temperatura povisila za  $\Delta t = 20^\circ\text{C}$ ? Specifična toplotna kapacitivnost bakra je  $c = 350\text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ .

681. Kolika je temperatura smeše načinjene od  $m_1 = 500\text{ g}$  vode temperature  $t_1 = 20^\circ\text{C}$  i  $m_2 = 300\text{ g}$  alkohola temperature  $t_2 = 80^\circ\text{C}$ ? Specifična toplotna kapacitivnost vode je  $c_1 = 4,19\text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)}$ , a alkohola  $c_2 = 2,42\text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)}$ .

682. Kolika je specifična toplotna kapacitivnost supstancije od koje je načinjeno telo, mase  $m = 50\text{ g}$ , ako njegova toplotna kapacitivnost iznosi  $C = 47\text{ J}\cdot\text{K}$ ?

683. Motor, snage  $P = 14,7\text{ kW}$ , ima stepen korisnog dejstva  $\eta = 0,60$ . Polovinu gubitaka snage čine termički gubici kroz zidove motora, dok se druga polovina odnosi na gubitke usled nesagorevanja. Hladnjak motora sadrži  $V = 10\text{ L}$  vode. Za koje vreme će se povisiti temperatura vode za  $\Delta t = 60^\circ\text{C}$  ako se pretpostavi da je ona termički izolovana od okoline?

684. U staklenoj bočici, mase  $m = 80\text{ g}$ , zagreva se količina alkohola, mase  $m_1 = 100\text{ g}$ , do temperature  $t_0 = 75^\circ\text{C}$ . Kada se ovaj sistem unese u kalorimetar, čija je toplotna kapacitivnost  $C = 5023\text{ J/K}$ , temperatura u kalorimetru se povisi od  $t_1 = 10^\circ\text{C}$  do  $t_2 = 13,85^\circ\text{C}$ . Ako se zatim bočica izvuče iz kalorimetra pa se u nju još dospe količina alkohola, mase  $m_2 = 50\text{ g}$ , i ponovo zagreje do temperature  $t_0 = 75^\circ\text{C}$ , a onda unese u isti kalorimetar, temperatura u njemu povisi od  $t_1' = 12^\circ\text{C}$  do  $t_2' = 17,13^\circ\text{C}$ . Izračunati specifičnu toplotnu kapacitivnost stakla  $c_1$  i alkohola  $c_2$ .

685. Da bi se odredila specifična toplotna kapacitivnost neke supstancije, koristi se uzorak, mase  $m = 50\text{ g}$ , od te supstancije. Uzorak se zagreje do temperature  $t_1 = 100^\circ\text{C}$  pa se unese u kalorimatarski sud u kome se nalazi količina vode, mase  $m_2 = 300\text{ g}$ , čija je temperatura  $t_2 = 15^\circ\text{C}$ . Pri ovome se temperatura vode povisi na  $t_2' = 18,5^\circ\text{C}$ . Kolika je specifična toplotna kapacitivnost ove supstancije? Zanimariti termičke gubitke i zagrevanje delova kalorimetra.

686. Dve kišne kapi, jednakih poluprečnika  $r = 1\text{ mm}$  i temperatura, u toku padanja se spoje u jednu kap. Ako je koeficijent površinskog napona vode  $\alpha = 73\text{ mN/m}$ , izračunati za koliko će se povisiti temperatura nastale kišne kapi. Gustina vode je  $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$ , a specifična toplotna kapacitivnost  $c = 4\,186\text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ .

687. Da bi se odredila temperatura jedne industrijske peći, postavi se u nju gvozdeni prsten mase  $m_1 = 22,3\text{ g}$ . Kada je prsten dostigao temperaturu peći  $t_x$ , on se potopi u kalorimetar u kome se nalazi količina vode, mase  $m_2 = 450\text{ g}$ , na temperaturi  $t_1 = 15^\circ\text{C}$ . Usled prisustva prstena, temperatura kalorimatarskog sistema se povisi od  $t_1$  do  $t_2 = 22,5^\circ\text{C}$ . Kolika je temperatura peći  $t_x$ , ako je poznato da je specifična toplotna kapacitivnost gvožđa  $c = 0,48\text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)}$ ? Zanimariti toplotne kapacitivnosti kalorimetra i pribora u njemu. Specifična toplotna kapacitivnost vode je  $c_0 = 4\,186\text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ .

688. U kalorimatarskom sudu se nalazi količina vode, mase  $m_1 = 1\text{ kg}$ , na temperaturi  $t_1 = 10^\circ\text{C}$ . Ako se u sud ubaci gvozdeno telo, mase  $m_2 = 50\text{ g}$ , čija je temperatura  $t_2 = 200^\circ\text{C}$ , i telo od aluminijuma, mase  $m_3 = 30\text{ g}$ , čija je temperatura  $t_3 = 100^\circ\text{C}$ , izračunati temperaturu smeše posle uspostavljanja stacionarnog stanja. Specifična toplotna kapacitivnost gvožđa je  $c_1 = 0,48\text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)}$ , a aluminijuma  $c_2 = 0,88\text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)}$ .

689. Koliku količinu toplote treba dovesti količini vode, mase  $m = 0,5\text{ kg}$  i temperature  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ , da bi isparila na atmosferskom pritisku?

690. U sudu se nalazi količina vode, zapremine  $V=1\text{ L}$ , po kojoj pliva komad leda. Mase  $m_2=50\text{ g}$ . Voda sa ledom se ravnomerno zagreva pomoću električnog grejača, snage  $P=500\text{ W}$ , koji je potopljen u nju.

a) Posle kog vremena će voda početi da ključa ako se nalazi na standardnom pritisku?

b) Za koje vreme će voda potpuno ispariti?

Specifična toplota topljenja leda je  $q_t=335\text{ kJ/kg}$ , a isparavanja vode  $q_i=2.26\text{ MJ/kg}$ . Termičke gubitke zanemariti.

691. U kalorimetskome sudu, mase  $m=150\text{ g}$  i specifične toplotne kapacitivnosti  $c=837\text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ , nalazi se količina vode, mase  $m_1=1300\text{ g}$ , na temperaturi  $t_1=18^\circ\text{C}$ . Za koliko će se povisiti temperatura vode ako se u kalorimetskome sudu kondenzuje količina vodene pare, mase  $m_2=30\text{ g}$ , na standardnom pritisku?

692. U kalorimetskome sudu, toplotne kapacitivnosti  $C=209\text{ J/K}$ , nalazi se količina vode, mase  $m_1=800\text{ g}$ , na temperaturi  $t_1=20^\circ\text{C}$ . Odrediti temperaturu, sastav i količinu smeše koja nastaje unošenjem u kalorimetar komada leda, mase  $m_2=500\text{ g}$ , čija je temperatura  $t_2=0^\circ\text{C}$ .

693. U bakarnom kalorimetru, mase  $m=100\text{ g}$ , nalazi se količina vode, mase  $m_1=200\text{ g}$ , na temperaturi  $t_1=4^\circ\text{C}$ . U kalorimetar se unese bakarno telo, mase  $m_2=300\text{ g}$ , čija je temperatura  $t_2=-20^\circ\text{C}$ .

a) Kolika je krajnja temperatura u kalorimetru?

b) Pokazati da bi se jedan deo vode u kalorimetru pretvorio u led ako bi ubačeno telo imalo temperaturu  $t_2=-50^\circ\text{C}$ . Izračunati masu nastalog leda.

694. Kolika je potrebna količina vodene pare na temperaturi  $100^\circ\text{C}$  i na atmosferskom pritisku  $1013,25\text{ mbar}$  za topljenje komada leda, mase  $m=50\text{ g}$ , čija je temperatura  $t=-4^\circ\text{C}$ ? Specifična toplotna kapacitivnost leda je  $c=2.0\text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)}$ , specifična toplota topljenja leda  $q_t=335\text{ kJ/kg}$ , a specifična toplota kondenzovanja vodene pare  $q_k=2.26\text{ MJ/kg}$ .

695. Bakarno telo, mase  $m_1=50\text{ g}$ , zagrejano do temperature  $t_1=700^\circ\text{C}$ , unese se u kalorimetskome sud koji sadrži količinu vode, mase  $m_2=300\text{ g}$ , čija je temperatura  $t_2=15^\circ\text{C}$ . Pri ubacivanju tela u kalorimetskome sud ispari deo količine vode u njemu, mase  $m_2'=5\text{ g}$ . Kolika je krajnja temperatura vode u sudu?

696. Da bi se odredila specifična toplota sagorevanja (toplotna moć) uglja, upotrebljava se „bomba“ toplotne kapacitivnosti  $C_1=335\text{ J/K}$ , postavljena u kalorimetskome sud toplotne kapacitivnosti  $C_2=209\text{ J/K}$  u kome se nalazi količina vode, mase  $m_1=1000\text{ g}$ , na temperaturi  $t_1=15^\circ\text{C}$ . Kada u „bombi“ sagori količina uglja, mase  $m=20\text{ g}$ , temperatura vode u kalorimetskome sudu se povisi na  $t_2=65^\circ\text{C}$ . Kolika je specifična toplota sagorevanja uglja?

697. Kolika se količina olova, koja se nalazi na temperaturi  $t_0=0^\circ\text{C}$ , može istopiti sagorevanjem količine nafte, mase  $m_1=1\text{ kg}$ ? Specifična toplota sagorevanja upotrebljene nafte je  $q_s=46\text{ MJ/kg}$ , specifična toplota topljenja olova  $q_t=25\text{ kJ/kg}$ , temperatura topljenja  $t_f=327^\circ\text{C}$ , a specifična toplotna kapacitivnost  $c=140\text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ , dok je stepen korisnog dejstva sistema  $\eta=0,80$ .

698. Izvesna količina vode se nalazi na temperaturi  $0^\circ\text{C}$  u otvorenom sudu. Ova količina vode počne ravnomerno da se zagreva sve do potpunog isparavanja. Pri tome se ustanovi da je vreme zagrevanja vode do početka ključanja 5.4 puta duže od vremena potrebnog da u procesu ključanja ona ispari. Kolika je specifična toplota isparavanja vode?

699. Pažljivim hlađenjem voda može da se ohladi i do  $t_1=-6^\circ\text{C}$  a da se ne zamrzne. Koliko će leda nastati od 2 litra ovako ohlađene vode ako se u nju ubaci komadić leda koji će stvoriti uslove za ovo?

700. Koliku je količinu toplotne potrebu dovesti količini leda, mase  $m=1\text{ kg}$ , koji se nalazi na temperaturi  $t=-10^\circ\text{C}$ , da bi se pretvorio u paru? Promena agregatnog stanja vrši se na pritisku  $p=1064\text{ mbar}$ .

701. Kolika se relativna greška učini pri određivanju količine toplotne potrebne da se izvesna masa vode zagreje za mali temperaturni interval u okolini tačke ključanja, ukoliko se ne uzme tačna vrednost specifične toplotne kapacitivnosti u ovom temperaturnom intervalu  $c'=4\,228\text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ , već uobičajena  $c=4\,186\text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ .

702. Ustanoviti vrstu metala od koga je načinjena lopta, mase  $m=50\text{ g}$ , ako je poznato da se njena temperatura povisi za  $\Delta t=40^\circ\text{C}$  kad joj se dovede količina toplotne  $Q=900\text{ J}$ .

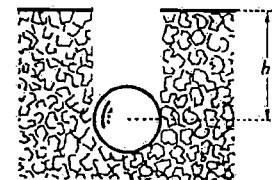
703. Na grejač električnog štednjaka postavljen je bakarni sud, mase  $m_1=900\text{ g}$ , u kome se nalazi količina vode čija je masa  $m_2=2,1\text{ kg}$ . Kolika treba da bude snaga grejača da bi voda u sudu proključala za vreme  $\tau=40\text{ min}$ ? Pri tome ispari 15% količine vode u sudu. Početna temperatura je  $t_1=15^\circ\text{C}$ , stepen korisnog dejstva grejnog sistema je  $\eta=0,78$ , a spoljašnji pritisak  $p=1013\text{ mbar}$ .

704. Automobil, mase  $m=800\text{ kg}$ , ima rezervoar za benzin zapremine  $V=45\text{ L}$ . Ako je koeficijent trenja pri kretanju automobila  $\mu=0,05$ , a stepen korisnog dejstva njegovog motora  $\eta=0,20$ , izračunati koliki put može da pređe automobil sa punim rezervoarom krećući se stalnom brzinom. Specifična toplota sagorevanja benzina je  $q_s=45\text{ MJ/kg}$ , a njegova gustina  $\rho=650\text{ kg/m}^3$ .

705. Termocentrala, snage  $P=150\text{ MW}$ , ima stepen korisnog dejstva  $\eta=0,50$ . Za zagrevanje vode u parnim kotlovima koristi se mrki ugulj kalorične moći  $q_s=13\text{ MJ/kg}$ . Koliko je uglja potrebno obezbediti za jednogodišnji rad ove centrale?

706. Olovna kugla, krećući se brzinom  $v_0$ , naide na dasku koju probije, pri čemu se njena brzina smanji na  $v$ . Ako se  $k$ -ti deo energije kugle utroši na topljenje jednog njenog dela, ustanoviti koliki je taj deo. Temperatura kugle pre sudara sa daskom je  $t$ , dok je specifična toplota topljenja olova  $q_t$ , a njena specifična toplotna kapacitivnost  $c$ .

707. Gvozdena kugla, poluprečnika  $R=2\text{ cm}$ , izvadi se iz vode koja ključa i postavi na led, čija je temperatura  $t_1=0^\circ\text{C}$ . Do koje dubine  $h$  će kugla utonuti u led? Specifična toplota topljenja leda je  $q_t=0,33\text{ MJ/kg}$ , specifična toplotna kapacitivnost gvožđa  $c=460\text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ , gustina leda je  $\rho_1=917\text{ kg/m}^3$ , a gvožđa  $\rho_2=7\,870\text{ kg/m}^3$ , dok je spoljašnji pritisak  $p=1013\text{ mbar}$ . Zanemariti promenu gustine i specifične toplotne kapacitivnosti gvožđa usled promene temperature.



708. Dve olovne kugle, svaka mase  $m$ , kreću se jednakim brzinama  $v$ , po uzajamno normalnim putanjama. Za koliko će se povisiti temperatura kugli posle njihovog neelastičnog sudara, nakon čega se one slepe?

709. Čelična kugla, mase  $m_1=10\text{ g}$ , krećući se u horizontalnom pravcu brzinom  $v_1=500\text{ m/s}$ , udari u olovno telo (metu), mase  $m_2=8\text{ kg}$ , koje se nalazi u mirovanju na horizontalnoj podlozi. Prilikom sudara kugla se zaglavi u metu i one nastave da se zajedno kreću po horizontalnoj podlozi, bez trenja. Temperatura kugle pre sudara je  $t_1=50^\circ\text{C}$ , a mete  $t_2=10^\circ\text{C}$ . Kolika će biti zajednička temperatura kugle i mete posle sudara? Specifična toplotna kapacitivnost čelika je  $c_1=540\text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ , a olova  $c_2=140\text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ .

## 2. Molekulska-kinetička teorija. Termodinamika

Sistemu od  $N$  molekula neke supstancije odgovara količina supstancije

$$n = \frac{N}{N_A}$$

gde je  $N_A = 6,0247 \cdot 10^{23}$  1/mol — Avogadrova konstanta.

Ako je  $m_0$  — masa jednog molekula, onda je

$$n = \frac{mN}{m_0 N_A} = \frac{m}{M}$$

gde je  $m$  — masa posmatrane količine supstancije, a  $M$  — njena molarna masa.

Količina supstancije je osnovna veličina SI, a njena jedinica (mol) osnovna jedinica SI. Dakle,

$$[n] = \text{mol}$$

pa je jedinica molarne mase

$$[M] = \text{mol/kg}$$

Molarna zapremina  $V_m$  je zapremina količine supstancije od 1 mol. Ako je  $V$  zapremina količine supstancije  $n$ , onda je odgovarajuća molarna zapremina

$$V_m = \frac{V}{n}$$

a jedinica  $[V_m] = \text{m}^3/\text{mol}$ .

Ako se idealni gas nalazi na standardnim uslovima ( $T^0 = 273,15$  K,  $p^0 = 101\,325$  Pa), molarna zapremina je

$$V_m = 0,022\,414 \text{ m}^3/\text{mol}$$

Ukoliko količina supstancije  $n$  sadrži  $N$  molekula, onda je odgovarajući molarni broj

$$N_m = \frac{N}{n}$$

a odgovarajuća jedinica  $[N_m] = 1/\text{mol}$ .

Ako se idealni gas nalazi na standardnim uslovima, molarni broj iznosi

$$N_m = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ 1/mol}$$

i naziva se Avogadrova konstanta, a obeležava sa  $N_A$ .

Srednja aritmetička brzina molekula idealnog gasa je

$$\bar{v} = \frac{\sum v_i}{N} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

gde je  $N$  — broj molekula posmatranog sistema,  $R = 8,314$  J/(mol·K) — molarna gasna konstanta,  $k = R/N_A = 1,381 \cdot 10^{-23}$  J/K — Boltzmanova konstanta,  $m_0$  — masa jednog molekula,  $T$  — apsolutna temperatura gasa.

Srednja kvadratna brzina molekula idealnog gasa je

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

a najverovatnija brzina

$$v_w = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

Srednja dužina slobodnog puta molekula je

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\sqrt{\langle v^2 \rangle}}{\langle Z \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n_0} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p}$$

gde je  $\langle Z \rangle$  — srednji broj sudara molekula tokom svakog vremenskog intervala od 1 s,  $d$  — efektivni prečnik molekula,  $n_0$  — koncentracija molekula ( $n_0 = N/V$ , gde je  $N$  — broj molekula gasa, a  $V$  — njegova zapremina).

Prema Maksvelovoj raspodeli, od  $N$  molekula posmatranog sistema  $\Delta N$  molekula poseduje brzinu, čija se vrednost nalazi u intervalu ( $v, v + \Delta v$ ), a određena je relacijom

$$\Delta N = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N e^{-\xi^2} \xi^2 \Delta \xi$$

gde je  $\xi = v/v_w$  — količnik najmanje brzine molekula  $v$  u posmatranom intervalu i najverovatnije brzine  $v_w$ , dok je  $\Delta \xi = \Delta v/v_w$ .

Prema Fikovom zakonu, masa prenete supstancije  $dm$ , za vreme  $dt$ , u procesu difuzije je

$$dm = -DS \text{ grad } \rho \, dt$$

odnosno brzina prenošenja mase je

$$\frac{dm}{dt} = -DS \text{ grad } \rho$$

gde je  $D$  — koeficijent difuzije,  $S$  — normalna površina kroz koju se odvija difuzija,  $\rho$  — gustina supstancije.

Koeficijent difuzije gasova je

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle$$

a koeficijent dinamičke viskoznosti (dinamička viskoznost)

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle \lambda \rangle$$

gde je  $\rho$  — gustina gasa,  $\langle v \rangle$  — srednja aritmetička brzina molekula,  $\langle \lambda \rangle$  — srednja dužina slobodnog puta molekula.

Pritisak gasa određen je osnovnom relacijom molekulska-kinetičke teorije

$$p = \frac{2}{3} n_0 \langle E_t \rangle$$

gde je  $n_0$  — koncentracija molekula, a  $\langle E_t \rangle$  — njihova srednja kinetička energija translatorsnog kretanja. Kako je

$$\langle E_t \rangle = \frac{3}{2} kT$$

to je

$$p = n_0 kT$$

Pošto je  $n_0 = N/V$ , iz prethodne relacije se dobija da je za jedan sistem molekula gasa

$$\frac{pV}{T} = Nk = \text{const}$$

Ova relacija je poznata kao opšti zakon idealnih gasova.

Ako se  $N_1, N_2, N_3, \dots$  molekula različitih gasova nalaze na jednakim uslovima (jednaki su njihovi parametri stanja  $p, V, T$ ), onda je prema prethodnoj relaciji

$$N_1 = N_2 = N_3 = \dots$$

što izražava Avogadrov zakon.

Isto tako je za;

•  $T = \text{const}$ , tj. za izotemske promene stanja

$$pV = NkT = \text{const}$$

•  $p = \text{const}$ , tj. za izobarske promene stanja

$$\frac{V}{T} = \frac{Nk}{p} = \text{const}, \text{ tj. } V = \text{const} \cdot p$$

•  $V = \text{const}$ , tj. za izohorske promene stanja

$$\frac{p}{T} = \frac{Nk}{V} = \text{const}, \text{ tj. } p = \text{const} \cdot T$$

pri čemu:

— prva relacija izražava Bojli-Mariotov zakon;

— druga relacija izražava Gej-Lisakov zakon, koji se može izraziti i relacijom

$$V = V_0(1 + \gamma t)$$

gde je  $V$  — zapremina gasa na temperaturi  $t$ ,  $V_0$  — na temperaturi  $0^\circ\text{C}$ ,  $\gamma = \frac{1}{273,15} \frac{1}{^\circ\text{C}}$

temperaturski koeficijent širenja gasova; — treća relacija izražava Šarlov zakon, koji se može izraziti analognom relacijom

$$p = p_0(1 + \gamma t)$$

Jednačina stanja idealnog gasa dobija se prema osnovnoj relaciji molekulska-kinetičke teorije, imajući u vidu da je  $R = kN_A$  i  $n = N/N_A$ , pa je

$$pV = nRT$$

odakle se nalazi da za  $n=1$  mol;  $p = p^0 = 101\,325$  Pa;  $V = V^0 = 0,022\,414$  m<sup>3</sup>/mol i  $T = T^0 = 273,15$  K vrednost molarne gasne konstante iznosi

$$R = \frac{p^0 V^0}{n T^0} = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

Ako se u istom sudu nalazi smeša više gasova, čiji su parcijalni pritisci  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_N$ , onda je prema Daltonovom zakonu ukupni pritisak smeše

$$p = \sum_{i=1}^N p_i$$

Unutrašnja energija količine gasa  $n$ , mase  $m$ , koji se nalazi na temperaturi  $T$  je

$$U = \frac{j}{2} n R T$$

gde je  $n = m/M$ , a  $j$  — broj stepeni slobode molekula gasa, pri čemu je

$$j = j_t + j_r + 2j_o$$

gde je  $j_t$  — broj stepeni slobode molekula koji se odnose na njihovo translatorsno,  $j_r$  — rotaciono i  $j_o$  — oscilatorno kretanje.

Molarna toplotna kapacitivnost gasa pri stalnom pritisku  $C_{mp}$  i pri stalnoj zapremini  $C_{mv}$  je

$$C_{mp} = c_p M = \frac{j+2}{2} R$$

$$C_{mv} = c_v M = \frac{j}{2} R$$

gde su  $c_p$  i  $c_v$  — odgovarajuće specifične toplotne kapacitivnosti.

Za jednoatomne i višeatomne molekule na niskim temperaturama je  $j=3$ , dok je za dvoatomne molekule na srednjim temperaturama  $j=5$ . Za ove molekule je  $j=7$  ako se nalaze na toliko visokim temperaturama da se javlja i oscilatorno kretanje molekula u njima. Za višeatomne molekule bez oscilatornog kretanja je  $j=6$ .

Molarna toplotna kapacitivnost smeše  $N$  gasova, čije su količine  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_N$ , a toplotne kapacitivnosti  $C_{m1}, C_{m2}, C_{m3}, \dots, C_{mN}$ , data je relacijom

$$C_m = \frac{\sum_{i=1}^N (n C_{mi})}{\sum_{i=1}^N n_i}$$

Jednačine adijabatske promene stanja su

$$pV^\kappa = \text{const}$$

$$TV^{\kappa-1} = \text{const}$$

$$T p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \text{const}$$

gde je

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{C_{mp}}{C_{mv}} = \frac{j+2}{j}$$

Prema I principu termodinamike (tj. zakonu održanja energije u termodinamici), dovedena količina toplote telu  $\Delta Q$  jednaka je zbiru promene njegove unutrašnje energije  $\Delta U$  i rada  $A$  koji on izvrši. Dakle,

$$\Delta Q = \Delta U + A$$

pri čemu je

$$\Delta U = \frac{j}{2} nR\Delta T$$

Rad gasa pri:

— izobarskoj ekspanziji ( $\Delta p = 0$ ) je

$$A = p\Delta V = nR\Delta T$$

— izotermskoj ekspanziji ( $\Delta T = 0$ ) je

$$A = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = nRT \ln \frac{p_1}{p_2}$$

— adijabatskoj ekspanziji ( $\Delta Q = 0$ ,  $p\Delta V = -\Delta U$ ) je

$$A = -\frac{j}{2} nR\Delta T = -nC_{mv}\Delta T = \frac{nRT}{\kappa-1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} \right]$$

Stepen korisnog dejstva idealne toplotne mašine je

$$\tau = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

710. Koliko se molekula nalazi u količini azota čija je masa  $m=1$  g? Molarna masa azota je  $M=0,028$  kg/mol, a Avogadrova konstanta  $N_A=6,02 \cdot 10^{23}$  1/mol.

711. U sudu se nalazi količina kiseonika  $n=3$  mol. Kolika je masa ove količine kiseonika? Molarna masa kiseonika je  $M=0,032$  kg/mol.

712. Kolika je srednja kvadratna brzina molekula kiseonika na temperaturi  $t=27$  °C?

713. U sudu, zapremine  $V=1$  cm<sup>3</sup>, koncentracija molekula vodonika na pritisku  $p=1$  bar iznosi  $n_0=8 \cdot 10^{24}$  1/m<sup>3</sup>.

a) Kolika je temperatura gasa?

b) Kolika je srednja kvadratna brzina molekula gasa?

c) Za koliko je potrebno povisiti pritisak gasa da bi se srednja kvadratna brzina njegovih molekula udvostručila?

714. Kolika je srednja kvadratna brzina molekula gasa čija je relativna gustina 1,105 (u odnosu na vazduh) na standardnim uslovima? Koji je to gas?

715. Kolika je srednja kvadratna brzina molekula argona posle adijabatskog sabijanja na 1/5 prvobitne zapremine? Početna temperatura gasa je  $t_1=27$  °C, molarna masa  $M=0,040$  kg/mol, a adijabatska konstanta  $\kappa=1,66$ .

716. Kolika je srednja dužina slobodnog puta molekula vodonika ako je njegov efektivni prečnik  $d=0,23$  nm, a koncentracija  $n_0=2 \cdot 10^{23}$  1/m<sup>3</sup>?

717. Srednja dužina slobodnog puta molekula helijuma iznosi  $\langle \lambda \rangle = 0,2$  μm na standardnim uslovima. Kolika će da bude dužina ovog puta ako se pritisak gasa snizi na 1/10 prvobitnog?

gde je  $Q_1$  — količina toplote koju radno telo (idealni gas) primi od grejnog sistema, a  $Q_2$  — količina toplote koju ono preda hladnjaku tokom jednog ciklusa.

Ako se rad toplotne mašine zasniva na Karnoovom ciklusu, onda je

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

gde je  $T_1$  — temperatura grejnog sistema, a  $T_2$  — temperatura hladnjaka.

Promena entropije sistema, prilikom prelaska iz stanja (1) u stanje (2), je

$$\Delta S_{2,1} = \int_{(1)}^{(2)} \frac{dQ}{T}$$

Jednačina stanja realnog gasa, prema Van der Valsu, je

$$\left( p + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) = nRT$$

gde je  $n$  — količina realnog gasa, dok su Van der Valsove konstante

$$a = \frac{27T_k^2 R^2}{64p_k}; \quad b = \frac{T_k R}{8p_k}$$

gde su  $p_k$  i  $T_k$  — kritični pritisak i temperatura gasa. Mogu se koristiti i sledeće veze ovih parametara:

$$V_k = 3b; \quad p_k = \frac{a}{27b^2}; \quad T_k = \frac{8a}{27bR}$$

718. Odrediti srednju dužinu slobodnog puta molekula kiseonika koji se nalazi na pritisku  $p=202$  kPa i temperaturi  $T=300$  K. Efektivni prečnik molekula kiseonika iznosi  $d=0,29$  nm.

719. U sudu sfernog oblika, prečnika  $D=10$  cm, nalazi se gas pod pritiskom  $p=0,27$  Pa. Efektivni prečnik molekula gasa je  $d=0,23$  nm. Na kojoj najnižoj temperaturi će početi međusobno sudaranje molekula gasa?

720. U sudu, zapremine  $V=2$  cm<sup>3</sup>, nalazi se  $N=2 \cdot 10^{19}$  molekula nekog gasa. Efektivni prečnik molekula ovog gasa je  $d=0,23$  nm, a srednja aritmetička brzina  $\langle v \rangle = 455$  m/s. Koliki je srednji broj sudara molekula u toku jediničnog vremenskog intervala?

721. Koliko je srednje vreme između dva uzastopna sudara molekula azota ( $M=0,028$  kg/mol) na temperaturi  $t=27$  °C i pritisku  $p=133$  Pa?

722. U sfernom sudu, prečnika  $D$ , nalazi se gas čiji molekuli imaju efektivni prečnik  $d$ . Koliki je najveći broj molekula gasa u sudu pod uslovom da se međusobno ne sudaraju?

723. Koliki je odnos srednje kvadratne i najverovatnije brzine molekula azota na temperaturi  $T=300$  K?

724. Koliki procenat molekula azota ima brzinu u intervalu od  $v_1=150$  m/s do  $v_2=160$  m/s na temperaturi  $T=300$  K?

725. Na kojoj temperaturi je srednja kvadratna brzina molekula vodonika za  $\Delta v = 400$  m/s veća od njegove najverovatnije brzine?

726. 0,5% molekula nekog gasa ima brzinu koja se nalazi u intervalu  $\Delta v = v_2 - v_1 = 15$  m/s. Odnos najmanje brzine molekula u intervalu  $\Delta v$  i najverovatnije brzine je  $v_1/v_w = 0,3$ .

a) Kolike su granične brzine molekula  $v_1$  i  $v_2$ , kao i najverovatnija brzina  $v_w$ ?

b) Kolika bi trebalo da bude temperatura azota da bi raspodela brzina molekula zadovoljila ove uslove?

727. Nacrtati zavisnost  $\Delta N/N$  (gde je  $\Delta N$  — broj molekula posmatrane količine gasa čija se brzina nalazi u datom intervalu brzina  $\Delta v$ , a  $N$  — ukupan broj molekula) i odnosa posmatrane i najverovatnije brzine molekula pod uslovom da se interval brzina  $\Delta v$  odnosi prema najverovatnijoj brzini kao 1:40.

728. Odrediti koeficijent difuzije vodonika ako se količina vodonika, mase  $m=10$  g, difunduje za vreme  $\Delta t=1$  min kroz normalnu površinu od  $S=10$  cm<sup>2</sup>. Gradijent difuzije je  $\Delta p/\Delta x = 1800$  kg/m<sup>4</sup>.

729. Za koliko će se promeniti koeficijent difuzije idealnog gasa ako se njegova zapremina izotermски poveća  $a$  puta?

730. Odrediti efektivni poluprečnik molekula azota ako njegova dinamička viskoznost na temperaturi 0 °C iznosi  $\eta = 16,7$  μPa·s.

731. Koliki je koeficijent viskoznosti kiseonika ako je efektivni poluprečnik njegovog molekula  $d=0,29$  nm, a srednja aritmetička brzina  $\langle v \rangle = 424$  m/s?

732. Kolika je srednja dužina slobodnog puta molekula azota na standardnim uslovima ako je koeficijent viskoznosti azota  $\eta = 16,7$  μPa·s, a srednja aritmetička brzina molekula  $\langle v \rangle = 455$  m/s?

733. Koeficijent viskoznosti helijuma na standardnim uslovima je  $\tau = 18,9$  μPa·s. Koliki je efektivni prečnik atoma helijuma?

734. Sud, zapremine  $V=10$  cm<sup>3</sup>, sadrži  $N=5,4 \cdot 10^{20}$  molekula nekog gasa na temperaturi  $t=0$  °C. Koliki je pritisak gasa u sudu?

735. Cilindar, zapremine  $V_1=0,2$  L na temperaturi  $t_1=20$  °C, zatvoren je pokretnim klipom površine  $S=5$  cm<sup>2</sup>. Za koliko će se klip pomeriti ako se gas zagreje do temperature  $t_2=100$  °C?

736. Meteorološki balon, zapremine  $V_1 = 5 \text{ L}$  na standardnim uslovima, pušten je u atmosferu. Koliku će zapreminu imati balon na visini gde vlada pritisak  $p_2 = 506,5 \text{ mbar}$  i gde je temperatura  $t_2 = -2 \text{ }^\circ\text{C}$ ?

11



737. Na temperaturi  $t_1 = 27 \text{ }^\circ\text{C}$  otvor staklene cevi, zapremine  $V_1 = 5 \text{ cm}^3$ , prislomljen je na veću kap žive. Koliko će žive ući u cev prilikom sniženja temperature na  $t_2 = 7 \text{ }^\circ\text{C}$ ?

738. Balon, zapremine  $V = 5 \text{ L}$ , napunjen je vazduhom pod pritiskom  $p = 3 \text{ MPa}$  na temperaturi  $t_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Ako se balon otvori u prostoriji gde vlada pritisak  $p_2 = 0,1 \text{ MPa}$  i gde je temperatura  $t_2 = 30 \text{ }^\circ\text{C}$ , odrediti zapreminu koju će zauzeti vazduh posle otvaranja balona.

739. Koliko se promeni temperatura gasu ako se zapremina poveća dva puta, a pritisak smanji tri puta?

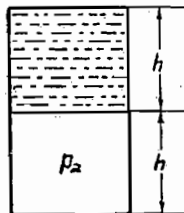
740. U prostoriji koja nije hermetički zatvorena temperatura vazduha se povisi od  $t_1 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$  do  $t_2 = 27 \text{ }^\circ\text{C}$ . Za koliko procenata se smanji broj molekula vazduha u prostoriji?

741. Na kojoj dubini u vodi će vazdušni mehur da ima dva puta manji prečnik u odnosu na njegov prečnik u površinskom sloju vode ako je spoljašnji pritisak  $p_a = 1005 \text{ mbar}$ ? Gustina vode je  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ , a ubrzanje slobodnog padanja  $g = 9,805 \text{ m/s}^2$ .

742. U cilindru zatvorenom sa oba kraja, zapremine  $V = 1,2 \text{ dm}^3$ , nalazi se vazduh na pritisku  $p_0 = 0,4 \text{ MPa}$ . Cilindar je podeljen, tankom pregradom, mase  $m = 0,1 \text{ kg}$ , na dva jednaka dela. Dužina cilindra je  $2l = 0,4 \text{ m}$ . Pod dejstvom momenta spoljašnje sile cilindar rotira, konstantnom ugaonom brzinom.

743. U gornjoj polovini cilindričnog suda, visine  $2h$ , nalazi se voda, a u donjoj vazduh na pritisku  $p_a$ . Na dnu gornjeg dela suda načini se otvor kroz koji počinje da ističe voda u donji sud. Pri kojoj debljini  $x$  sloja vode u donjem sudu će nastati mehuri vazduha na slobodnoj površini tečnosti u gornjem sudu?

12



744. Koliki je pritisak potrebno ostvariti na temperaturi  $t = 0 \text{ }^\circ\text{C}$  da bi se u sudu, zapremine  $V = 5 \text{ L}$ , nalazila količina helijuma čija je masa  $m = 10 \text{ g}$ ?

745. Koliko se kiseonika nalazi u balonu, zapremine  $V = 50 \text{ L}$ , u kome je pritisak  $p = 0,2 \text{ MPa}$ , a temperatura  $t = 27 \text{ }^\circ\text{C}$ ?

746. Kolika je masa vazduha koja se nalazi u prostoriji dimenzija  $4 \cdot 4 \cdot 3 \text{ m}^3$ , na temperaturi  $t = 27 \text{ }^\circ\text{C}$  i pritisku  $p = 1013,25 \text{ mbar}$ ? Molarna masa suvog vazduha je  $M = 0,029 \text{ kg/mol}$ .

747. U balonu, zapremine  $V = 10 \text{ L}$ , nalazi se kiseonik pod pritiskom  $p = 10 \text{ MPa}$  i na temperaturi  $t = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ . Koliko kiseonika ima u balonu?

748. Koliko se molekula kiseonika nalazi u sudu zapremine  $V = 0,5 \text{ L}$  na pritisku  $p = 1 \text{ bar}$  i temperaturi  $t = 27 \text{ }^\circ\text{C}$ ?

749. Koliku zapreminu zauzima količina azota, mase  $m = 1 \text{ kg}$ , na temperaturi  $t = 27 \text{ }^\circ\text{C}$  i pritisku  $p = 5 \text{ MPa}$ ?

750. U sudu, zapremine  $V = 10 \text{ L}$ , nalaze se količine azota i helijuma, čije su mase  $m_1 = 2,8 \text{ g}$  i  $m_2 = 0,4 \text{ g}$ , na temperaturi  $t = 27 \text{ }^\circ\text{C}$ . Koliki je pritisak gasa u sudu?

751. Čelična boca sadrži količinu azota, mase  $m = 50 \text{ g}$ , na temperaturi  $t_1 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$  i pritisku  $p_1 = 1,5 \text{ MPa}$ . Boca može da izdrži pritisak  $p_{\text{max}} = 2 \text{ MPa}$ . Da li će boca izdržati pritisak koji nastane pri zagrevanju gasa do temperature  $t_2 = 50 \text{ }^\circ\text{C}$ ? Kolika je zapremina boce?

752. Dva suda su spojena pomoću cevi na kojoj se nalazi slavina. Kada je slavina zatvorena, pritisak gasa u prvom sudu je  $p_1 = 0,2 \text{ MPa}$ , a u drugom  $p_2 = 0,4 \text{ MPa}$ . U sudovima se nalaze jednake količine istog gasa. Koliki će se pritisak uspostaviti u sudovima posle otvaranja slavine?

753. Za koliko se promeni gustina vazduha ako se on zagreje od temperature  $t_1 = -2 \text{ }^\circ\text{C}$  do temperature  $t_2 = 35 \text{ }^\circ\text{C}$  na standardnom pritisku? Molarna masa vazduha je  $M = 0,029 \text{ kg/mol}$ .

754. Kolika se greška načini pri merenju mase tela načinjenog od šupljikave supstancije ako se merenje vrši u vazduhu na standardnim uslovima? Izmerena masa tela je  $m_1 = 10 \text{ kg}$ , a gustina supstancije  $\rho = 350 \text{ kg/m}^3$ .

755. U prostoriji, zapremine  $V = 60 \text{ m}^3$ , temperatura se povisi od  $t_1 = 17 \text{ }^\circ\text{C}$  do  $t_2 = 27 \text{ }^\circ\text{C}$ . Pri tome se pritisak vazduha promeni od  $p_1 = 1030 \text{ mbar}$  na  $p_2 = 1060 \text{ mbar}$ . Kolika je promena mase vazduha u prostoriji? Molarna masa vazduha je  $M = 0,029 \text{ kg/mol}$ .

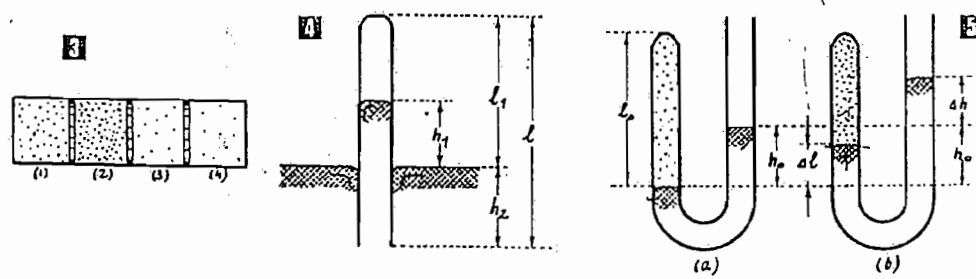
756. Kolika je gustina gasa na standardnim uslovima ako je njegova molarna masa  $M = 0,04 \text{ kg/mol}$ ?

757. Klip deli cilindar na dva dela u kojima su parametri stanja gasa  $p_1, V_1, T_1$  i  $p_2, V_2, T_2$ . U jednom trenutku se klip oslobodi i počne njegovo slobodno kretanje bez trenja. Pri kom pritisku će prestati kretanje klipa ako se u međuvremenu temperatura gasa u prvom delu cilindra povisi za  $\Delta T$  zagrevanjem, a u drugom snizi za  $\Delta T$  hlađenjem?

758. U zatvorenom cilindru nalaze se tri klipa, koji dele gas u cilindru na četiri dela, u kojima su parametri stanja:  $p_1, V_1, T_1$ ;  $p_2, V_2, T_2$ ;  $p_3, V_3, T_3$ ;  $p_4, V_4, T_4$ . U jednom trenutku klipovi počnu da se kreću slobodno, bez trenja, do uspostavljanja stacionarnog stanja, posle čega je temperatura  $T_2$ . Koliki je tada pritisak gasa u pojedinim delovima cilindra i kolike su odgovarajuće zapremine gasa?

759. Staklena cev, dužine  $l = 20 \text{ cm}$ , koja je zatvorena na jednom kraju, sadrži izvesnu količinu vazduha. Cev se svojim otvorenim krajem zagnjuri u živu tako da iznad nivoa žive u sudu ostane njen deo dužine  $l_1 = 15 \text{ cm}$ . Pri ovome se u cevi obrazuje živin stub visine  $h_1 = 5 \text{ cm}$  na temperaturi  $t_1 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ . Koliko je potrebno povisiti temperaturu vazduha u cevi da bi on ispunio celu zapreminu cevi? Gustina žive je  $\rho = 13\,600 \text{ kg/m}^3$ , a spoljašnji pritisak  $p = 1000 \text{ mbar}$ .

760. Visina vazdušnog stuba u zatvorenom kraku U-cevi (sl. a) iznosi  $l_0 = 30 \text{ cm}$ , a označena visina živinog stuba  $h_0 = 11 \text{ cm}$ . U otvoreni krak U-cevi dolije se toliko žive da se u njemu nivo žive povisi za  $\Delta h = 4 \text{ cm}$  (sl. b). Za



koliko će se povisiti nivo žive u zatvorenom kraku U-cevi? Spoljašnji pritisak je  $p_a = 1010$  mbar, a gustina žive  $\rho = 13\,600$  kg/m<sup>3</sup>.

761. U rezervoar, zapremine  $V = 2$  m<sup>3</sup>, ubacuje se vazduh pomoću kompresora. Spoljašnji (atmosferski) pritisak je  $p_a = 1000$  mbar, a temperatura  $t_1 = -3$  °C. U jednom ciklusu kompresor zahvati iz atmosfere količinu vazduha zapremine  $V_0 = 5$  L i ubaci ga u rezervoar. Kada pritisak u rezervoaru postane viši od spoljašnjeg za  $\Delta p = 0,4$  MPa, kompresor prestane da radi. Temperatura u rezervoaru se održava na vrednosti  $t_2 = -53$  °C. Koliko vreme traje „punjenje“ rezervoara ako je za jedan ciklus kompresora potrebno vreme  $\tau_1 = 0,1$  s?

762. U sudu se nalazi smeša tri gasa, molarnih masa  $M_1, M_2, M_3$  u takvom količinskom odnosu da su njihove mase  $m_1, m_2, m_3$  na temperaturi  $T$  i pritisku  $p$ . Kolika je gustina smeše?

763. Koristeći se Poazjeovim zakonom, odrediti maseni protok gasa kroz poprečni presek cevi, dužine  $l$  i poluprečnika  $r$ , ako su na njenim krajevima pritisci stalni i iznose  $p_1$  i  $p_2$  ( $p_2 > p_1$ ). Pretpostaviti da je gustina gasa u svim delovima cevi jednaka i da se pritisak menja linearno duž cevi.

764. Metalni sud tankih i elastičnih zidova, mase  $m_1 = 61$  g, napunjen je neonom ( $M = 0,02$  kg/mol) i potopljen u jezero, na dubinu  $h = 120$  m, gde se nalazi u ravnoteži. Temperatura jezerske vode na ovoj dubini je  $t = 4$  °C. Kolika je masa neona u sudu ako je atmosferski pritisak  $p_a = 1013$  mbar?

765. Razlika specifičnih toplotnih kapacitivnosti  $c_p$  i  $c_v$  nekog dvoatomnog gasa iznosi  $\Delta c = 260$  J/(kg·K).

a) Kolika je molarna masa ovog gasa?

b) Kolike su specifične toplotne kapacitivnosti  $c_p$  i  $c_v$ ?

766. Koliko stepena slobode ima gas čija su molarne toplotne kapacitivnosti  $C_{mp} = 33,2$  J/(mol·K) i  $C_{mv} = 24,9$  J/(mol·K)?

767. Kolike su specifične toplotne kapacitivnosti  $c_p$  i  $c_v$  gasa čija je gustina na standardnim uslovima  $\rho$ ?

768. Kolika je gustina gasa na standardnim uslovima ako je razlika njegovih specifičnih toplotnih kapacitivnosti  $c_p - c_v = 297$  J/(kg·K)?

769. U sudu se nalazi količina azota, mase  $m = 14$  g, na temperaturi  $t = 27$  °C i pritisku  $p_1 = 0,1$  MPa. Kada se gas naglo zagreje, njegov pritisak se povisi na  $p_2 = 0,5$  MPa. Kolika je:

a) temperatura gasa posle zagrevanja,

b) količina toplote dovedena gasu?

770. U cilindru sa pokretnim klipom nalazi se količina leda, mase  $m_1 = 0,2$  kg, i azota, mase  $m_2 = 50$  g, na temperaturi  $t_1 = 0$  °C i pritisku  $p_1 = 202$  kPa. U cilindru se uvede pod stalnim pritiskom količina azota, mase  $m_3 = 50$  g, čija je temperatura  $t_3 = 250$  °C.

a) Koliko će se leda istopiti pri ovome?

b) Kolika je krajnja zapremina gasa?

Specifična toplotna kapacitivnost azota je  $c_p = 1038$  J/(kg·K), a molarna masa  $M = 0,028$  kg/mol.

771. U kom odnosu treba da budu potrebne količine toplote da bi se helijumu:

a) povećala zapremina 2 puta pri stalnom pritisku,

b) povisio pritisak 3 puta pri stalnoj zapremini?

Odnos specifičnih toplotnih kapacitivnosti helijuma je  $\kappa = 1,66$ .

772. Koliku je količinu toplote potrebno dovesti količini metana, mase  $m = 20$  g, na temperaturi  $t_1 = 25$  °C, da bi se njegov pritisak povisio za  $\Delta p = 50$  kPa? Metan se nalazi u balonu zapremine  $V = 12$  L. Molarna masa metana je  $M = 0,016$  kg/mol, a molarna toplotna kapacitivnost  $C_{mv} = 30,56$  J/(mol·K).

773. U balonu, zapremine  $V = 20$  L, nalaze se na standardnim uslovima jednake količine azota i kiseonika. Za koliko će se povisiti temperatura smeše ako se njoj dovede količina toplote  $Q = 1,26$  kJ? Koristiti tablice na kraju knjige.

774. Kolika se količina toplote utroši da bi se količini kiseonika, mase  $m = 10$  g, koji se nalazi na temperaturi  $t_1 = 27$  °C, povećala zapremina 3 puta pri stalnom pritisku, a zatim povisio pritisak 2 puta pri stalnoj zapremini? Specifične toplotne kapacitivnosti kiseonika su  $c_p = 908$  J/(kg·K) i  $c_v = 653$  J/(kg·K).

775. U hermetički zatvorenoj prostoriji, dimenzija  $3 \times 4 \times 3$  m<sup>3</sup>, nalazi se vazduh pod pritiskom  $p_a = 970$  mbar. Koliko električne energije treba da se pretvori u unutrašnju energiju vazduha da bi se pritisak u prostoriji povisio na  $p_a' = 1000$  mbar? Molarna toplotna kapacitivnost vazduha pri stalnoj zapremini je  $C_{mv} = 21$  J/(mol·K).

776. Gasni protočni grejač je priključen na bocu sa metanom u kojoj na temperaturi  $t = 12$  °C vlada pritisak  $p = 0,12$  MPa. Kolika je temperatura vode koja se zagreva ovim grejačem ako ona protiče kroz njega brzinom  $v = 50$  cm/s i ako je njena temperatura na ulazu u grejač  $t_1 = 10$  °C, pod pretpostavkom da grejač troši svakog časa količinu metana koja prema datim uslovima ima zapreminu  $V = 1,8$  m<sup>3</sup>? Prečnik mlaza vode je  $d = 1$  cm, specifična toplota sagorevanja metana  $q_s = 54,4$  MJ/kg, a stepen korisnog dejstva pri ovome je  $\eta = 0,60$ .

777. U sudu, zapremine  $V = 1$  L, nalazi se azot na standardnim uslovima. Kolika je unutrašnja energija azota u sudu?

778. U cilindru sa pokretnim klipom nalazi se  $N = 15 \cdot 10^{23}$  molekula kiseonika. Za koliko se promeni unutrašnja energija ove količine kiseonika ako se njegova temperatura povisi od 0 °C do 100 °C?

779. Količina azota, mase  $m = 10$  g, nalazi se na temperaturi  $t_1 = 27$  °C i pritisku  $p_1 = 2$  bar. Koliki rad izvrši gas ako se njegova zapremina poveća na  $V_2 = 10$  L tokom zagrevanja pri stalnom pritisku? Molarna masa azota je  $M = 0,028$  kg/mol.

780. Koliki se rad izvrši pri izobarskoj ekspanziji gasa na pritisku  $p = 0,2$  MPa ako se gas zagreje od temperature  $t_1 = 0$  °C do temperature  $t_2 = 100$  °C? Zapremina gasa pre širenja je  $V_1 = 10$  cm<sup>3</sup>.

781. Prilikom izobarske ekspanzije dvoatomnog gasa izvršeni rad je iznosio  $A = 2$  MJ. Kolika je količina toplote dovedena gasu?

782. Prilikom izobarske ekspanzije kiseonika O, utroši se količina toplote  $Q = 4$  MJ. Koliki se deo ove energije utroši na povećanje njegove unutrašnje energije? Kolika će biti ova energija ako se radi o kiseoniku O<sub>2</sub> i O<sub>3</sub>?

783. Količina azota, mase  $m = 10$  g, nalazi se u zatvorenom sudu na temperaturi  $t_1 = 10$  °C.

a) Koliku je količinu toplote potrebno dovesti gasu da bi se srednja kvadratna brzina njegovih molekula udvostručila? Koliko puta će se povisiti:

b) temperatura gasa,

c) pritisak gasa?

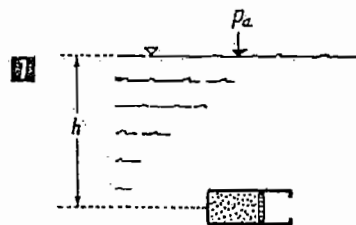
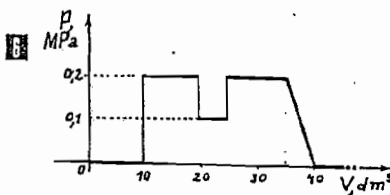
784. Količina azota,  $m = 10$  g, nalazi se u zatvorenom sudu na temperaturi  $T_1 = 100$  K. Koliku je količinu toplote potrebno dovesti ovoj količini azota da bi njegova srednja kvadratna brzina bila veća  $n = 3$  puta?

785. Ako se količini vazduha, mase  $m = 100$  g, povisi temperatura, pri stalnom pritisku, od  $t_1 = 5$  °C do  $t_2 = 35$  °C, izračunati:

a) dovedenu količinu toplote gasu,

b) promenu unutrašnje energije gasa,

c) rad koji izvrši gas pri povišenju temperature.



786. U cilindru sa pokretnim klipom nalazi se idealni gas. Ekspanzija gasa vrši se prema  $p$ - $V$  dijagramu prikazanom na slici 78. Koliki rad izvrši gas?

787. Cilindar sa pokretnim klipom 77 nalazi se u jezeru na dubini  $h_1=0,5$  m. Zapremina vazduha u cilindru na ovoj dubini je  $V_1=10$  dm<sup>3</sup>. Koliki se rad izvrši nad vazduhom u cilindru prilikom njegovog spuštanja do dubine  $h_2=15$  m? Atmosferski pritisak je  $p_a=1010$  mbar.

788. U cilindru sa pokretnim klipom nalazi se količina kiseonika čija je masa  $m=0,1$  kg. Koliki rad izvrši gas prilikom zagrevanja od temperature  $t_1=10$  °C do temperature  $t_2=80$  °C? Molarna masa kiseonika je  $M=0,032$  kg/mol.

789. U cilindru sa pokretnim klipom, zapremine  $V_1=2$  L, nalazi se kiseonik na pritisku  $p=0,1$  MPa. Usled zagrevanja njegova zapremina se poveća 2 puta.

- Koliki rad izvrši gas pri širenju?
- Kolika količina toplote je dovedena gasu tokom širenja?
- Kolika je promena unutrašnje energije gasa?

790. U cilindru sa pokretnim klipom nalazi se količina azota  $n=3$  mol. Za koliko se promeni unutrašnja energija ove količine azota prilikom povišenja njegove temperature za  $\Delta T=80$  K, zagrevanjem?

791. U sudu, zapremine  $V_1=5$  L, nalazi se količina azota čija je masa  $m=5,6$  g.

- Koliku količinu toplote treba dovesti gasu u sudu da bi se njegova zapremina povećala na  $V_2=7$  L pri stalnoj temperaturi  $T=300$  K?
- Koliki rad izvrši gas pri ovome?

792. U sudu se nalazi količina azota  $n=3$  mol na temperaturi  $t=0$  °C. Koliku je količinu toplote potrebno dovesti azotu da bi se njegova zapremina utrostručila pri izobarskoj ekspanziji? Specifična toplotna kapacitivnost azota pri stalnoj zapremini je  $c_V=649$  J/(kg·K).

793. U balonu, zapremine  $V=5$  L, nalazi se vazduh na standardnim uslovima. Koliku je količinu toplote potrebno dovesti vazduhu u balonu da bi se njegov pritisak povisio 2 puta? Specifična toplotna kapacitivnost vazduha pri stalnoj zapremini je  $c_V=712$  J/(kg·K), a gustina  $\rho=1,29$  kg/m<sup>3</sup>.

794. Koliki se rad izvrši pri izotermskoj ekspanziji količine kiseonika, mase  $m=32$  g, na temperaturi  $t=7$  °C, ako se pri ovome njegova zapremina poveća 3 puta?

795. Količina metana, mase  $m=40$  g, nalazi se na temperaturi  $T_1=300$  K. Koliki rad izvrši ova količina metana ako se adijabatski raširi do zapremine koja je 2 puta veća od početne?

796. Koliki se rad izvrši pri izotermskoj ekspanziji količine gasa  $n=3$  mol, na temperaturi  $t=0$  °C, ako pri ovome pritisak gasa opadne na  $1/5$  prvobitnog? Koliko se puta poveća zapremina gasa?

797. Gas se nalazi u cilindru sa pokretnim klipom, početne zapremine  $V_1=2$  L i na pritisku  $p_1=0,1$  MPa.

- Koliki se rad izvrši pri izotermskoj kompresiji ako se pritisak gasa tokom kompresije povisi na  $p_2=0,2$  MPa?
- Kolika je količina toplote dovedena gasu pri ovome?

798. U cilindru sa pokretnim klipom, zapremine  $V=1$  L, nalazi se azot na standardnim uslovima. Kolika je zapremina azota ako se adijabatski raširi tako da mu je krajnji pritisak  $p_2=50,5$  kPa?

799. Za koliko se snizi pritisak gasa u sudu iz koga naglo istekne  $1/2$  njegove sadržine? Uzeti da je adijabatska konstanta gasa  $\kappa=1,32$ .

800. Izvesna količina helijuma se nalazi na standardnim uslovima. Kolika će da bude temperatura i pritisak ove količine helijuma ako se adijabatski sabije na  $1/20$  prvobitne zapremine? Adijabatska konstanta za helijum je  $\kappa=1,66$ .

801. U sudu se nalazi vazduh na temperaturi  $t_1=0$  °C. Kolika je temperatura vazduha posle adijabatske ekspanzije pri kojoj se pritisak gasa snizi na  $1/3$  njegove prvobitne vrednosti? Adijabatska konstanta za vazduh je  $\kappa=1,4$ .

802. Izvesna količina kiseonika se nalazi u sudu na pritisku  $p_1=505$  kPa i temperaturi  $t_1=5$  °C. Koliki procenat gasa treba naglo da istekne iz suda (bez razmene unutrašnje energije sa okolinom) da bi pritisak gasa u sudu opao na  $p_2=303$  kPa?

\* 803. Gas se sabije adijabatski tako da je njegov krajnji pritisak 3 puta viši od početnog. Isti gas se zatim adijabatski raširi, povećavajući pri tome svoju zapreminu 3 puta u odnosu na zapreminu koju je imao pre sabijanja. Odrediti odnos početnih i krajnjih pritisaka i zapremine gasa. Uzeti da je adijabatska konstanta gasa  $\kappa=1,3$ .

804. Prema uslovima prethodnog zadatka odrediti:

a) Količinu toplote koju je potrebno dovesti količini kiseonika, mase  $m=1$  kg, posle njegove adijabatske ekspanzije, da bi se njegova temperatura povisila na prvobitnu;

b) krajnji pritisak gasa.

Specifična toplotna kapacitivnost kiseonika pri stalnoj zapremini je  $c_V=653$  J/(kg·K).

805. Prema uslovima zadatka 803. odrediti količinu toplote koju je potrebno dovesti količini kiseonika, mase  $m=100$  g, čija je temperatura  $t_1=27$  °C, da bi posle prve i druge adijabatske promene stanja kiseonik imao istu temperaturu? Specifična toplotna kapacitivnost kiseonika pri stalnoj zapremini je  $c_V=653$  J/(kg·K).

806. Za koliko se razlikuju radovi koje je potrebno izvršiti da bi se ostvarila adijabatska odnosno izotermna kompresija količine gasa  $n=3$  mol, pri čemu se njegova zapremina smanji od  $V_1=4$  L na  $V_2=2$  L? Početna temperatura gasa je  $0$  °C, dok je njegova adijabatska konstanta  $\kappa=1,3$ .

807. Za koliko se snizi temperatura količini kiseonika  $n=3$  mol ako se pri njegovoj adijabatskoj ekspanziji dobije rad,  $A=1$  kJ?

808. Koliki je stepen korisnog dejstva idealne toplotne mašine, čiji se rad zasniva na Karnoovom ciklusu, ako je najveća razlika temperatura radnog tela (idealnog gasa)  $\Delta T=100$  K, a najviša temperatura u toku ciklusa  $T_1=400$  K?

809. Koliki je stepen korisnog dejstva idealne toplotne mašine, čiji se rad zasniva na Karnoovom ciklusu, se ako u toku jednog ciklusa utroši količina toplote  $Q=42$  kJ, pri čemu se voda u hladnjaku mašine zagreje za  $\Delta t=2$  °C? Masa vode u hladnjaku je  $m=4$  kg.

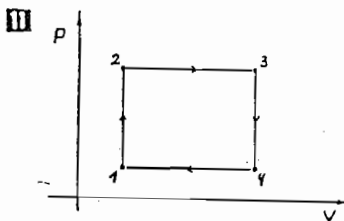
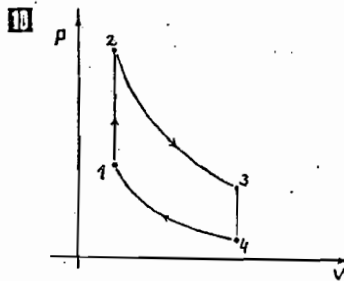
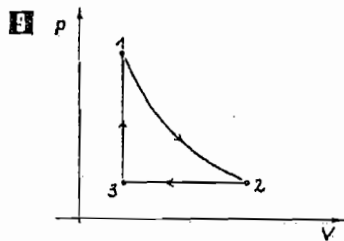
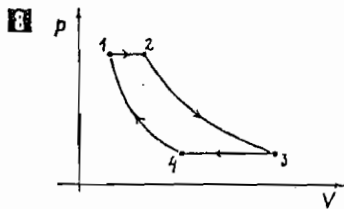
\* 810. Idealna toplotna mašina radi, prema Karnoovom ciklusu, između temperatura  $t_1=80$  °C i  $t_2=0$  °C. Ako mašina u jednom ciklusu izvrši rad od  $A=800$  J, izračunati količinu toplote koju mašina primi na višoj temperaturi.

811. Rad idealne toplotne mašine zasniva se na Karnoovom ciklusu. Radno telo je količina idealnog gasa  $n=0,3$  mol. Koordinate prosečnih tačaka adija-



|                 |     |     |     |    |
|-----------------|-----|-----|-----|----|
|                 | 1   | 2   | 3   | 4  |
| $p, \text{kPa}$ | 505 | 189 | 126 | 47 |
| $V, \text{L}$   | 1   | 2   | 4   | 8  |

bate i izoterme su date u tablici. Koliku količinu toplote troši mašina pri svakom ciklusu ako se pri adijabatskom širenju gasa njegova temperatura snizi od  $T_1=400 \text{ K}$  na  $T_2=300 \text{ K}$ ?



812. Rad idealne toplotne mašine zasniva se na Karnoovom ciklusu. U kom slučaju će više da se poveća stepen korisnog dejstva ove mašine ako se maksimalna temperatura radnog tela (idealnog gasa) povisi za  $\Delta T$ , ili minimalna temperatura snizi za  $\Delta T$ ?

813. Kružni ciklus se sastoji od dve izobare i dve izoterme. Odnos maksimalnog i minimalnog pritiska u toku ciklusa je  $p_{\text{max}}/p_{\text{min}}=a$ , dok je odnos apsolutnih temperatura  $T_{\text{max}}/T_{\text{min}}=\tau$ . Radno telo je idealni gas. Koliki je stepen korisnog dejstva idealne toplotne mašine čiji se rad zasniva na ovom kružnom ciklusu?

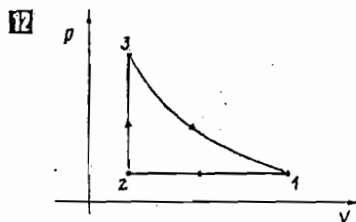
814. Kružni ciklus se sastoji od izohore, izobare i adijabate, pri čemu je odnos maksimalne i minimalne temperature u toku ciklusa  $T_{\text{max}}/T_{\text{min}}=\tau$ . Radno telo je idealni gas. Koliki je stepen korisnog dejstva idealne toplotne mašine čiji se rad zasniva na ovom kružnom ciklusu?

815. Kružni (Oto) ciklus sastoji se od dve izohore i dve adijabate, pri čemu je odnos između najveće i najmanje zapremine gasa tokom ciklusa  $V_{\text{max}}/V_{\text{min}}=a$ . Koliki je stepen korisnog dejstva idealne toplotne mašine čiji se rad zasniva na ovom ciklusu ako je radno telo idealni gas, poznate adijabatske konstante  $\kappa$ ?

816. Kružni ciklus se sastoji od dve izobare i dve izohore. Radno telo je idealni gas, čija se apsolutna temperatura povisi  $\tau$  puta kako pri izohorskom zagrevanju tako i pri izobarskom širenju.

a) Koliki je stepen korisnog dejstva idealne toplotne mašine čiji se rad zasniva na ovom kružnom ciklusu?  
b) Pokazati da je promena entropije idealnog gasa jednaka kada se on prevodi iz stanja 1 u stanje 3 promenom stanja 1-2-3 i 1-4-3.

817. Rad toplotne mašine kod koje je radno telo



idealni gas zasniva se na kružnom ciklusu, koji se sastoji iz izoterme, izobare i izohore.

a) Kolike su količine toplote koje se dovode ili oslobađaju tokom rada ove parne mašine u svakom delu ciklusa?

b) Koliki je idealni stepen korisnog dejstva ove mašine ako je odnos temperatura u ciklusu po kome ona radi  $T_{\text{max}}/T_{\text{min}}=\tau$ ?

818. Koliki je stepen korisnog dejstva idealne toplotne mašine čiji se rad zasniva na kružnom ciklusu koji se sastoji iz dve izobare i dve adijabate? Odnos maksimalnog i minimalnog pritiska u ciklusu je  $p_{\text{max}}/p_{\text{min}}=a$ .

819. Kružni (Dizelov) ciklus sastoji se od dve adijabate, izobare i izohore. U početku adijabatskog sabijanja temperatura gasa je  $T_1$ . Stepenn adijabatskog sabijanja je  $a=V_1/V_2$ , a stepen izobarskog širenja  $b=V_3/V_2$ . Radno telo je idealni gas. Koliki je stepen korisnog dejstva idealne toplotne mašine čiji se rad zasniva na ovom kružnom ciklusu?

\* 820. Klapeironov ciklus se sastoji od dve izoterme i dve izohore, sa idealnim gasom kao radnim telom. Odnos maksimalne i minimalne temperature gasa u toku ciklusa je  $T_{\text{max}}/T_{\text{min}}=\tau$ , dok je odnos maksimalne i minimalne zapremine u toku ciklusa  $V_{\text{max}}/V_{\text{min}}=a$ .

a) Koliki je stepen korisnog dejstva idealne toplotne mašine čiji se rad zasniva na ovom ciklusu?

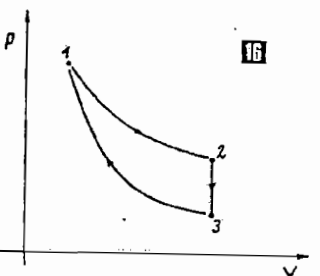
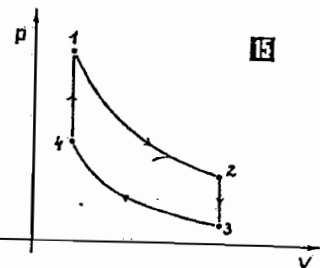
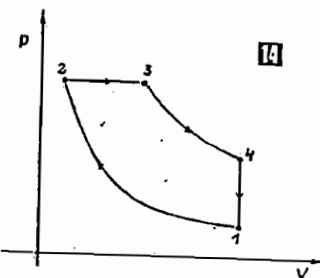
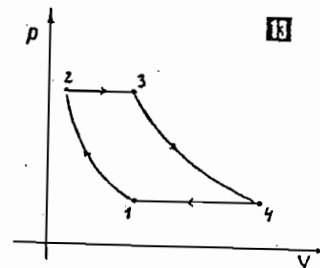
b) Uporediti dobijenu relaciju za stepen korisnog dejstva sa onom koja bi se dobila za toplotnu mašinu čiji bi se rad zasnivao na Karnoovom ciklusu za isti odnos temperatura.

821. Kružni ciklus se sastoji iz izobare, adijabate i izoterme, pri čemu je odnos maksimalne i minimalne temperature u toku ciklusa  $T_{\text{max}}/T_{\text{min}}=\tau$ . Radno telo je idealni gas. Koliki je stepen korisnog dejstva idealne toplotne mašine čiji se rad zasniva na ovom kružnom ciklusu ako se izotermiski proces odvija na:

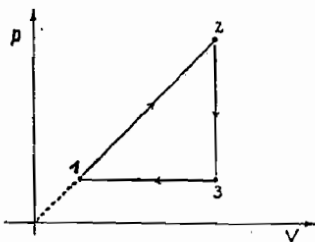
a) maksimalnoj temperaturi ciklusa,  
b) minimalnoj temperaturi ciklusa?

\* 822. Kružni ciklus se sastoji od izohore, adijabate i izoterme, pri čemu se izotermiski proces vrši pri maksimalnoj temperaturi ciklusa. Radno telo je idealni gas, dok je odnos maksimalne i minimalne temperature u ciklusu  $T_{\text{max}}/T_{\text{min}}=\tau$ . Koliki je stepen korisnog dejstva idealne toplotne mašine čiji se rad zasniva na ovom kružnom ciklusu?

823. Koliki bi bio stepen korisnog dejstva idealne toplotne mašine čiji se rad zasniva na kružnom ciklusu iz prethodnog zadatka ako bi se izotermiski proces odvijao na minimalnoj temperaturi ciklusa?



III



824. Koliki je stepen korisnog dejstva idealne toplotne mašine čiji se rad zasniva na kružnom ciklusu prikazanom na slici III? Odnos maksimalne i minimalne temperature tokom ciklusa je  $T_{max}/T_{min}=\tau$ , a adijabatska konstanta gasa koji se koristi pri radu ove toplotne mašine je  $\kappa=C_{mp}/C_{mv}$ .

825. Izvesna količina helijuma, mase  $m$ , adijabatski poveća svoju zapreminu  $a$  puta, a zatim se izobarski smanji njegova zapremina na prvobitnu vrednost. Kolika je promena entropije gasa pri ovcme?

826. Molarna toplotna kapacitivnost idealnog gasa pri nekom termodinamičkom procesu menja se sa temperaturom po zakonu  $C_m=\alpha/T$ , gde je  $\alpha$  — konstanta.

- a) Koliki rad izvrši količina  $n$  ovog gasa pri zagrevanju od temperature  $T_1$  do temperature  $T_2$ ?
- b) Kolika je pri tome promena entropije gasa?

827. Koliko je puta potrebno izotermiski povećati zapreminu količini  $n$  idealnog gasa da bi priraštaj entropije bio  $\Delta S$ ?

828. Komad leda, mase  $m=1$  kg, nalazi se na temperaturi  $t_1=-20$  °C. Ovaj led se zagrevanjem pretvori u paru temperature  $t_2=100$  °C. Kolika je odgovarajuća promena entropije? Specifična toplotna kapacitivnost leda je  $c_1=2$  kJ/(kg·K), specifična toplota topljenja leda je  $q_t=335$  kJ/kg, specifična toplota isparavanja vode  $q_i=2,26$  MJ/kg, a specifična toplotna kapacitivnost vode  $c_2=4,2$  kJ/(kg·K).

829. Odrediti promenu entropije količine kiseonika, čija je masa  $m=320$  g, pri izotermskom širenju od pritiska  $p_1=2$  bar do  $p_2=1$  bar.

830. Na veoma niskim temperaturama molarna toplotna kapacitivnost kristala je funkcija temperature. Ta zavisnost je oblika  $c_m=kT^3$ , gde je  $k$  — konstanta. Odrediti promenu entropije kristala kao funkciju temperature u toj temperaturskoj oblasti.

831. Odrediti konstante korekcije  $a$  i  $b$  Van der Valsove jednačine gasnog stanja za kiseonik čiji su kritični pritisak i temperatura  $p_k=5,08$  MPa i  $T_k=155$  K.

832. Kolika je temperatura količine ugljen-dioksida  $n=0,1$  mol koji se nalazi u balonu zapremine  $V=1$  L pod pritiskom  $p=404$  kPa? Ugljen-dioksid smatra ti realnim gasom.

833. Koliki su kritični pritisak i temperatura ugljen-dioksida ako su njegove Van der Valsove konstante  $a=0,36$  N·m<sup>4</sup>/mol<sup>2</sup> i  $b=42,8$  μm<sup>3</sup>/mol?

834. U sudu, zapremine  $V=1$  L, nalazi se količina azota  $n=1$  mol pod pritiskom  $p=10$  MPa. Kolika će da bude greška pri izračunavanju temperature azota ako se on smatra idealnim gasom? Van der Valsove konstante azota su:  $a=0,135$  N·m<sup>4</sup>/mol<sup>2</sup> i  $b=38,6$  μm<sup>3</sup>/mol.

835. Kolika je temperatura određene količine ugljen-dioksida ako se on nalazi u sudu čija je zapremina dva puta manja od kritične, pod pritiskom koji je dva puta viši od kritičnog? Kritična temperatura ugljen-dioksida je  $T_k=304$  K.

836. Kolika je relativna vlažnost vazduha na temperaturi  $t=30$  °C ako je gustina vodene pare u atmosferi  $\rho=22,7$  g/m<sup>3</sup>?

837. U prostoriji, dimenzija  $3 \times 4 \times 3$  m<sup>3</sup>, zabeležena je relativna vlažnost vazduha 70% pri temperaturi 20 °C. Koliko je vode potrebno još da se ispari u prostoriji da bi vodena para u njoj bila zasićena?

### 3. Prenošnje unutrašnje energije

Ako se količina toplotne  $\Delta Q$  prenese kroz normalnu površinu  $S$  za vreme  $\Delta t$ , odgovarajućii toplotni fluks je

$$\Phi = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

a gustina toplotnog fluksa

$$q = \frac{\Phi}{S} = \frac{\Delta Q}{S \Delta t}$$

dok su odgovarajuće jedinice

$$[\Phi] = W \text{ i } [q] = W/m^2$$

Pri prenosu unutrašnje energije provođenjem kroz PP-ploču, gustina toplotnog fluksa je

$$q = -\lambda \text{ grad } T$$

a toplotni fluks

$$\Phi = -\lambda S \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

gde je  $\lambda$  — toplotna provodnost (ili koeficijent toplotne provodnosti) supstancije od koje je ploča načinjena,  $S$  — površina PP-ploče,  $\Delta x$  — debljina ploče, a  $\Delta T$  — razlika temperatura njenih graničnih slojeva.

Pri prenošenju unutrašnje energije kroz cilindričnu cev, dužine  $l$ , toplotni fluks je

$$\Phi = \frac{2\pi l \Delta T}{\ln(r_2/r_1)}$$

a kroz sfernu ljusku

$$\Phi = 4\pi \lambda \Delta T \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

gde su  $r_1$  i  $r_2$  — poluprečnici spoljašnjeg i unutrašnjeg cilindra, odnosno sfere.

838. Bakarni štapa, dužine  $l=1$  m i površine poprečnog preseka  $S=10$  cm<sup>2</sup>, malo je zagnjuren čonom stranom u sud sa vodom, po kojoj pliva led. Drugi kraj štapa se održava na temperaturi  $t_2=100$  °C. Koliko će leda da se istopi u sudu za vreme  $\tau=10$  min? Toplotna provodnost bakra je  $\lambda=385$  W/(m·K).

839. U keramičkom zatvorenom sudu sa vodom oblika paralelepipeda, spoljne površine  $S=1$  m<sup>2</sup> i debljine zidova  $d=2$  cm, nalazi se količina leda, mase  $m=4$  kg. Za koje vreme će da se istopi sav led ako je temperatura okoline  $t=20$  °C? Toplotna provodnost keramike je  $\lambda=8,4 \cdot 10^{-2}$  W/(m·K).

840. Kolika se količina toplotne prenese za vreme  $\tau=30$  min kroz zid, površine  $S=20$  m<sup>2</sup> i debljine  $d_1=10$  cm, na čijim se stranama nalazi sloj maltera debljine  $d_2=2$  cm? Temperaturska razlika između spoljne i unutrašnje strane zida je  $\Delta t=20$  °C. Toplotna provodnost cigle je  $\lambda_1=0,84$  W/(m·K), a maltera  $\lambda_2=0,42$  W/(m·K).

Toplotna provodnost kristalnih supstancija je

$$\lambda = \frac{1}{3} C_{zpp} \alpha \langle \Lambda \rangle$$

gde je  $C_{zpp}=C/V_m$  — zapreminska toplotna kapacitivnost supstancije,  $\alpha$  — brzina prenošenja toplotnih oscilacija, tj. prostiranja zvuka kroz supstanciju,  $\langle \Lambda \rangle$  — srednja dužina slobodnog puta fonona u supstanciji.

Toplotna provodnost idealnih gasova je

$$\lambda = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle \Lambda \rangle c_v$$

gde je  $\rho$  — gustina gasa,  $\langle v \rangle$  — srednja aritmetička brzina molekula,  $\langle \Lambda \rangle$  — srednja dužina slobodnog puta molekula,  $c_v$  — specifična toplotna kapacitivnost gasa pri stalnoj zapremini.

Prema Njutnovom zakonu hlađenja, toplotni fluks tela koje odaje svoju unutrašnju energiju okolini provođenjem srazmeran je razlici temperatura  $\Delta T$  tela i okoline, tj.

$$\Phi = \text{const} \cdot \Delta T$$

Ako telo odaje okolini unutrašnju energiju zračenjem, gustina toplotnog fluksa  $q$  obeležava se sa  $R$  i naziva energijska osvetljenost. Ako je telo apsolutno crnom telu, prema Stefan-Bolcmanovom zakonu je

$$R = \sigma T^4$$

gde je  $\sigma=5,67 \cdot 10^{-8}$  W/(m<sup>2</sup>·K<sup>4</sup>) — Stefan-Bolcmanova konstanta, a  $T$  — apsolutna temperatura tela.

Jedinica energijskog osvetljenja je

$$[R] = \frac{[E]}{[S][\Delta t]} = \frac{J}{m^2 \cdot s} = \frac{W}{m^2}$$

841. Da bi se smanjili toplotni gubici kod električnog bojlera, njegov kazan se oblaže toplotnim izolatorom čija je toplotna provodnost  $\lambda=0,25 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ . Srednja temperatura vode u bojleru je  $t_1=80^\circ\text{C}$ , a okoline  $t_2=20^\circ\text{C}$ . Ako je površina kazana  $S=0,3 \text{ m}^2$ , kolika treba da bude debljina sloja izolatora da bi toplotni gubici bili manji od  $84 \text{ J/s}$ ?

842. Zidovi jednosobne zgrade imaju unutrašnju površinu  $S=100 \text{ m}^2$  i debljinu  $d=25 \text{ cm}$ . Posle viščasovnog zagrevanja sobe, električnom grejalicom snage  $P=1 \text{ kW}$ , temperatura unutrašnje površine zidova se stabilizuje i iznosi  $t_1=20^\circ\text{C}$ . Kolika je temperatura spoljašnje površine zidova? Toplotna provodnost cigle je  $\lambda=12,56 \cdot 10^{-2} \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ . Zanimariti toplotne gubitke kroz tavnicu i pod.

843. Kroz cev načinjenu od aluminijuma, dužine  $l=1 \text{ m}$ , čiji je spoljni poluprečnik  $r_2=3,5 \text{ cm}$ , a unutrašnji  $r_1=3 \text{ cm}$ , protiče tečnost temperature  $t_1=30^\circ\text{C}$ . Kolika se količina toplote izgubi kroz zidove cevi za vreme  $\tau=3 \text{ h}$  ako je temperatura vazduha oko cevi  $t_2=20^\circ\text{C}$ ? Toplotna provodnost aluminijuma je  $\lambda=210 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ .

844. Voda ključa u sudu koji se zagreva na štednjaku čija temperatura iznosi  $t_1=200^\circ\text{C}$ . Debljina suda je  $d=0,4 \text{ cm}$ , a površina njegovog dna  $S=200 \text{ cm}^2$ . Koliko vode ispari iz suda svakog vremenskog intervala od  $1 \text{ s}$  ako je spoljašnji pritisak  $1013,25 \text{ mbar}$ ? Toplotna provodnost metala od koga je sud načinjen je  $\lambda=63 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ , dok je specifična toplota isparavanja vode  $q_r=2,26 \text{ MJ/kg}$ . Zanimariti toplotne gubitke kroz bočne zidove suda.

845. Oko prave cilindrične metalne cevi, male debljine, poluprečnika  $r_1=2 \text{ cm}$ , nalazi se cilindrični sloj plute, koji treba da smanji toplotne gubitke kroz zid cevi. Kroz cev prolazi vodena para, temperature  $t_1=150^\circ\text{C}$ , dok temperatura okoline iznosi  $t_2=30^\circ\text{C}$ . Kolika treba da bude debljina sloja plute pa da snaga toplotnih gubitaka, po jediničnoj dužini cevi, ne bude veća od  $210 \text{ W/m}$ ? Toplotna provodnost plute je  $\lambda=0,03 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ .

846. U lopti načinjenoj od aluminijuma, čiji je unutrašnji poluprečnik  $r_1=5 \text{ cm}$ , a spoljašnji  $r_2=6 \text{ cm}$ , potrebno je održavati stalnu temperaturu  $t_1=-5^\circ\text{C}$ . Temperatura okoline je  $t_2=15^\circ\text{C}$ . Kolika količina toplote treba da se apsorbuj: u toku vremena od  $1 \text{ h}$  u unutrašnjosti lopte da bi se u njoj održala temperatura  $t_1$ ? Toplotna provodnost aluminijuma je  $\lambda=210 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ .

847. Toplotna provodnost kiseonika  $\text{O}_2$  na temperaturi  $T=373 \text{ K}$  iznosi  $\lambda=32,5 \text{ mW/(m}\cdot\text{K)}$ . Koliki je koeficijent viskoznosti kiseonika na istoj temperaturi?

848. Koliki je odnos efektivnih prečnika atoma argona i helijuma ako je na jednakim uslovima odnos njihovih toplotnih provodnosti  $a=8,7$ ? Molarna masa argona je  $M_1=0,04 \text{ kg/mol}$ , a helijuma  $M_2=0,004 \text{ kg/mol}$ .

849. Prostor između dve paralelne metalne ploče ispunjen je argonom. Rastojanje između ploča je  $l=50 \text{ mm}$ . Jedna ploča se održava na temperaturi  $t_1=47^\circ\text{C}$ , a druga na temperaturi  $t_2=27^\circ\text{C}$ . Odrediti gustinu toplotnog fluksa između ploča. Pretpostaviti da se temperatura između ploča menja linearno sa rastojanjem. Efektivni prečnik atoma argona je  $d=0,35 \text{ nm}$ , a molarna masa  $M=0,040 \text{ kg/mol}$ . Gas se nalazi na standardnom pritisku.

850. Između dve tanke metalne PP-ploče, koje se održavaju na stalnim temperaturama  $T_1$  i  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ), nalaze se dva sloja toplotnog izolatora načinjena od dve različite supstancije [1], toplotnih provodnosti  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ , debljina  $l_1$  i  $l_2$ .

- Kolika je temperatura  $T_x$  na površini dodira ova dva toplotna izolatora?
- Kolika je njihova ekvivalentna toplotna provodnost?

851. Cilindar, dužine  $l$ , sa toplotno izolovanim bočnim površinama, načinjen je od supstancije čija se toplotna provodnost menja sa temperaturom po zakonu  $\lambda=k/T$ , gde je  $k$  — konstanta. Osnove cilindra održavaju se na stalnim temperaturama  $T_1$  i  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ).

- Kolika je gustina toplotnog fluksa kroz ovaj cilindar?
- Odrediti zavisnost  $T=T(x)$ , gde je  $x$  — rastojanje posmatrane tačke (poprečnog preseka) od osnove cilindra više temperature.

852. Jedan kraj staklenog štapa, dužine  $l=30 \text{ cm}$  i površine poprečnog preseka  $S=3 \text{ cm}^2$ , nalazi se u električnoj peći za topljenje metala, u kojoj se održava temperatura  $t_1=400^\circ\text{C}$ , dok je drugi kraj ovog štapa zaronjen u sud u kome se nalazi smeša leda i vode ( $t_2=0^\circ\text{C}$ ). Pod pretpostavkom da se unutrašnja energija prenosi samo duž štapa a ne i kroz njegove bočne strane, odrediti masu leda koja se istopi za vreme  $\tau=60 \text{ s}$ . Toplotna provodnost upotrebljenog stakla iznosi  $\lambda=67 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ .

853. Kolika je gustina toplotnog fluksa kroz vatrostalni omotač parnog kotla ako je debljina omotača  $d=0,4 \text{ m}$ , temperatura unutrašnje i spoljašnje površine omotača  $t_1=600^\circ\text{C}$  i  $t_2=60^\circ\text{C}$ , i ako se toplotna provodnost supstancije od koje je načinjen omotač menja sa temperaturom po zakonu

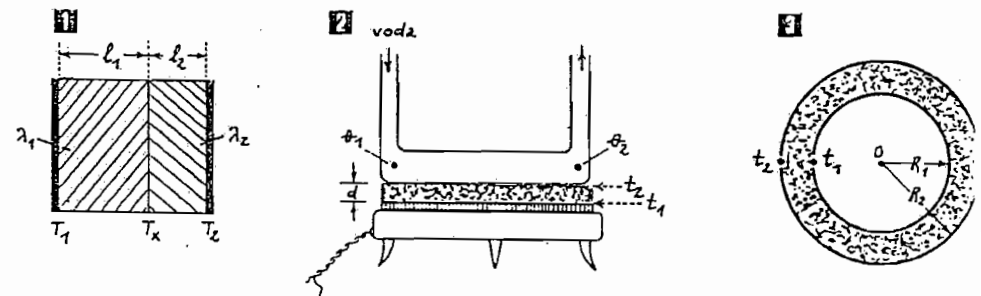
$$\lambda=\lambda_0(1+kT)$$

gde je  $\lambda_0=0,4 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$  i  $k=2 \cdot 10^{-3} \text{ 1/K}$ ?

854. Disk načinjen od azbesta, poluprečnika  $r=10 \text{ cm}$  i debljine  $d=30 \text{ mm}$ , zagreva se sa donje strane grejačem, a sa gornje strane diska nalazi se vodeni kalorimetar sa stacionarnim tokom [2]. Temperature diska na donjoj i gornjoj površini su  $t_1=650^\circ\text{C}$  i  $t_2=50^\circ\text{C}$ , a temperature ulazne i izlazne vode u vodenom kalorimetru  $\theta_1=20^\circ\text{C}$  i  $\theta_2=22^\circ\text{C}$ . Kolika je toplotna provodnost azbesta ako je izmereni maseni protok vode u kalorimetru  $m'=33,3 \text{ g/s}$ ?

855. Prostor između dva koaksijalna metalna cilindra, čiji su poluprečnici  $R_1$  i  $R_2$  [3], ispunjen je homogenim toplotnim izolatorom. Odrediti raspodelu temperature  $T(r)$  u funkciji rastojanja  $r$  od ose cilindra ako je temperatura unutrašnjeg cilindra  $t_1$ , a spoljašnjeg  $t_2$  ( $t_1 > t_2$ ).

856. Kroz homogeni cilindrični provodnik, bez toplotne izolacije, protiče električna struja stalne jačine  $I$ . Odrediti raspodelu temperatura  $T(r)$  u provodniku u funkciji rastojanja od ose provodnika ako se na njegovoj površini održava stalna temperatura  $T_0$ . Poluprečnik provodnika je  $R$ , koeficijent toplotne provodnosti supstancije od koje je načinjen provodnik je  $\lambda$ , a njena specifična električna otpornost  $\rho$ .



# ELEKTRICITET

## 1. Električno polje

Permitivnost sredine određena je relacijom

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

gde je  $\epsilon_r$  — relativna permitivnost, a  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2} = 1/C^2$  — električna konstanta, ili permitivnost vakuuma.

Relativna permitivnost sredine je

$$\epsilon_r = \chi_e + 1$$

gde je  $\chi_e$  — njena električna susceptibilnost.

Jačina električnog polja  $\vec{E}$  u nekoj tački polja određena je električnom silom  $\vec{F}$ , koja deluje na naelektrisanje  $q$ , koje se nalazi u toj tački. Naime,

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

ili, ako se naelektrisanje  $q$  nađe u nekoj tački električnog polja, na njega će delovati električna sila

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Električni pomeraj (deplasman)  $\vec{D}$  u tački električnog polja u kojoj je njegova jačina  $\vec{E}$  određen je relacijom

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

Jedinica količine elektriciteta je kulon (C), dakle

$$[q] = C$$

a jedinica intenziteta jačine električnog polja

$$E = \frac{[F]}{[q]} = \frac{N}{C}$$

dok je jedinica električnog pomeraja

$$[D] = [\epsilon][E] = \frac{C^2}{N \cdot m^2} \cdot \frac{N}{C} = \frac{C}{m^2}$$

Prema Kulonovom zakonu, intenzitet sile uzajamnog dejstva između dva tačkasta naelektrisanja,  $q_1$  i  $q_2$  (Kulonove sile), upravo je srazmeran naelektrisanjima ( $F \sim q_1 \cdot q_2$ ), a obrnuto srazmeran njihovom rastojanju  $r$  (tj.  $F \sim 1/r^2$ ). To znači da je

$$F \sim \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

ili, uzimajući u obzir električna svojstva sre-

dine u kojoj se nalaze naelektrisanja

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

pri čemu je  $\epsilon = \epsilon_0$  ako su naelektrisanja u vakuumu, a  $\epsilon \approx \epsilon_0$  ako su ona u vazduhu. Električna sila definisana Kulonovim zakonom naziva se Kulonova, a odgovarajuće privlačenje — kulonovsko privlačenje.

Jačina kulonovskog polja, naelektrisanja  $q$ , na rastojanju  $r$  je

$$E = \frac{F}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2}$$

a električnog pomeraja (deplasmana)

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}$$

Ako je reč o složnom električnom polju, onda je jačina rezultujućeg polja  $E$  jednaka vektorskom zbiru jačina pojedinih polja  $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3, \dots, \vec{E}_n$ , tj.

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

Jačina električnog polja naelektrisane ravne ploče velikih dimenzija, koja je naelektrisana površinskom gustinom elektriciteta  $\sigma = q/S$ , određena je relacijom

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon}$$

a električnog pomeraja

$$D = \sigma/2$$

Jačina električnog polja između dve naelektrisane paralelne ravne ploče je

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

a električnog pomeraja

$$D = \sigma$$

Jačina električnog polja sfernog tela, poluprečnika  $R$ , određuje se na isti način kao kod kulonovskog polja za  $r > R$ , dok je za  $r < R$  ona jednaka nuli.

Jačina električnog polja pravog i dugog cilindričnog tela; poluprečnika  $R$ , na rastojanju  $r$  od ose cilindra, je

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \frac{R}{r}$$

gde je  $\sigma = q/S$  — površinska gustina elektriciteta kojom je ono naelektrisano.

Električni potencijal  $\varphi$  neke tačke električnog polja određen je električnom potencijalnom energijom  $E_p$ , kojom raspolaže tačkasto naelektrisanje  $q$  u toj tački polja. Naime,

$$\varphi = \frac{E_p}{q}$$

ili, ako se tačkasto naelektrisanje  $q$  nađe u nekoj tački električnog polja čiji je potencijal  $\varphi$ , ono poseduje električnu potencijalnu energiju

$$E_p = q\varphi$$

Jedinica električnog potencijala je volt (V), tj.

$$[\varphi] = \frac{[E]}{[q]} = \frac{J}{C} = V$$

Električna potencijalna energija tačkastog naelektrisanja  $q_1$ , koje se nalazi u kulonovskom polju naelektrisanja  $q_2$ , određena je relacijom

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r}$$

gde je  $r$  — rastojanje između naelektrisanja. Istom energijom uzajamnog dejstva raspolaže i naelektrisanje  $q_2$ , pošto se nalazi u električnom polju naelektrisanja  $q_1$ . Ako se naelektrisanja privlače, onda je  $E_p < 0$ , a ako se odbijaju  $E_p > 0$ .

Električni potencijal kulonovskog polja, naelektrisanja  $q$ , je

$$\varphi = \frac{E_p}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r}$$

pri čemu je  $\varphi > 0$  ako je naelektrisanje  $q$  pozitivno, a  $\varphi < 0$  ako je ono negativno.

Ako je reč o složnom električnom polju, rezultujući potencijal  $\varphi$  toga polja u nekoj tački jednak je algebarskom zbiru potencijala  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$  pojedinih električnih polja. Naime,

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i$$

Električni napon između tačaka električnog polja, čiji su potencijali  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ , dat je relacijom

$$U_{1,2} = \Delta\varphi_{1,2} = \varphi_1 - \varphi_2$$

Uloženi rad spoljašnjih sila za pomeranje tačkastog naelektrisanja  $q$  iz tačke električnog polja (pri čemu ono ne mora da bude kulonovsko) čiji je potencijal  $\varphi_1$  u tački električnog polja potencijala  $\varphi_2$ , je sledeći

$$A_{1,2} = q\Delta\varphi_{1,2} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

a ako je reč o pomeranju tačkastog naelektrisanja  $q$ , u kulonovskom polju naelektrisanja  $q_2$ , onda je

$$A_{1,2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Ovaj rad treba uzeti kao pozitivan ako se vrši protiv električnih sila uzajamnog dejstva između naelektrisanja  $q_1$  i  $q_2$ , jer se tada povećava njihova električna potencijalna energija. U obratnom slučaju rad je negativan jer ga vrše električne sile uzajamnog dejstva, pri čemu dolazi do smanjenja potencijalne energije naelektrisanja  $q_1$  i  $q_2$ .

Ukoliko se slobodna čestica, naelektrisanja  $q$ , nađe u električnom polju, ona će pod dejstvom električnih sila da poveća svoju kinetičku energiju. Ako pri tome čestica pređe potencijalnu razliku  $U$ , i ako je pošla iz mirovanja, njena kinetička energija će biti

$$E_k = qU$$

Električni moment dipola je

$$\vec{p}_e = q\vec{l}$$

gde je  $q$  — naelektrisanje polova, a  $\vec{l}$  — vektor položaja pozitivnog naelektrisanja dipola u odnosu na negativno naelektrisanje, tj.  $l$  je rastojanje između naelektrisanja.

Jedinica intenziteta električnog momenta je

$$[p_e] = [q][l] = C \cdot m$$

Ako se dipol, električnog momenta  $\vec{p}_e$ , nalazi u električnom polju jačine  $\vec{E}$ , na njega deluje moment sprega

$$\vec{M}_s = \vec{p}_e \times \vec{E}$$

čiji je intenzitet

$$M_s = p_e E \sin(\vec{p}_e, \vec{E})$$

Električna potencijalna energija ovog dipola je

$$E_p = -\vec{p}_e \cdot \vec{E} = -p_e E \cos(\vec{p}_e, \vec{E})$$

Intenzitet jačine električnog polja dipola u Gausovoj A-poziciji je

$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{p_e}{r^3}$$

gde je  $p_e$  — intenzitet električnog momenta dipola, a  $r$  — rastojanje posmatrane tačke od sredine dipola. Za Gausovu B-poziciju je

$$E_B = E_A/2$$

Intenzitet najveće sile uzajamnog dejstva između dva dipola (što je slučaj kada su njihovi električni momenti  $\vec{p}_{e1}$  i  $\vec{p}_{e2}$  kolinearni sa vektorom položaja  $\vec{r}$  jednog dipola u odnosu na drugi) je sledeći

$$F_p = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{6p_{e1} \cdot p_{e2}}{r^4}$$

dok je intenzitet ove sile najmanji ( $F_p/2$ ) kada su vektori  $\vec{p}_{e1}$  i  $\vec{p}_{e2}$  normalni na vektor  $\vec{r}$ .

Električna kapacitivnost  $C$  tela određena je potencijalom  $\varphi$  koji ono stekne kada mu se dovede količina elektriciteta  $q$ . Naime,

$$C = \frac{q}{\varphi}$$

Jedinica električne kapacitivnosti je farad (F), tj.

$$[C] = \frac{[q]}{[\varphi]} = \frac{C}{V} = F$$

Električna kapacitivnost kondenzatora sa ravnim pločama, površine  $S$ , koje se nalaze na rastojanju  $d$ , je

$$C = \epsilon \frac{S}{d}$$

gde je  $\epsilon$  — permitivnost sredine između ploča.

Između ploča ovakvog kondenzatora električno polje je homogeno ako je razmak  $d$  znatno manji od dimenzija ploča. Jačina ovog polja je

$$E = \frac{U}{d}$$

gde je  $U$  — napon između ploča. Iz ove relacije vidi se da je

$$[E] = \frac{[U]}{[d]} = \frac{V}{m}$$

Fluks homogenog električnog polja  $\Psi$  jačine  $\vec{E}$  kroz površinu  $\vec{S}$  je

$$\Psi = \vec{E} \cdot \vec{S} = ES \cos(\vec{E}, \vec{S})$$

Jedinica za električni fluks je

$$[\Psi] = [E][S] = \frac{N \cdot m^2}{C}$$

Električna kapacitivnost sfernog kondenzatora je

$$C = 4\pi\epsilon \frac{r}{1 - \frac{r}{R}}$$

gde su  $r$  i  $R$  — poluprečnici sfera. Za  $R \rightarrow \infty$  dobija se da je električna kapacitivnost usamljene sfere

$$C = 4\pi\epsilon r$$

gde je  $r$  — njen poluprečnik.

Električna kapacitivnost cilindričnog kondenzatora je

$$C = 2\pi\epsilon \frac{l}{\ln(R/r)}$$

857. Kolikom Kulonovom silom deluju međusobno dva tačkasta naelektrisanja od  $q = 1$  C ako se nalaze na rastojanju  $r = 1$  km u:

- vakuumu,
- vazduhu,
- vodi?

gde je  $l$  — dužina cilindra, a  $r$  i  $R$  — njihovi poluprečnici.

Ekvivalentna kapacitivnost  $C_e$  paralelne veze kondenzatora, čije su kapacitivnosti  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ , je

$$C_e = \sum_{i=1}^n C_i$$

dok se ekvivalentna kapacitivnost redne veze ovih kondenzatora određuje na osnovu relacije

$$\frac{1}{C_e} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

Električni kondenzator kapacitivnosti  $C$ , koji je naelektrisan količinom elektriciteta  $q$ , pri čemu je napon između njegovih ploča  $U$ , poseduje električnu energiju

$$W_e = \frac{1}{2} qU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{q^2}{2C}$$

Zapreminska gustina električne energije  $w_e$  homogenog električnog polja je

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{\epsilon E^2}{2}$$

Zapreminska gustina električne energije  $w_e$  koju poseduje električno polje jednaka je pritisku električnog polja  $p$ . Naime,

$$p_e = -w_e$$

tj.

$$p_e = -\frac{\epsilon E^2}{2}$$

Vektor polarizacije  $\vec{P}$  supstancije određen je odnosom ukupnog električnog momenta svih molekula posmatrane količine supstancije i zapremine  $V$  u kojoj se ona nalazi. Naime,

$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{p}_i}{V}$$

ili

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

gde je  $\chi_e$  — električna susceptibilnost supstancije, a  $\vec{E}$  — jačina električnog polja u kome se ona nalazi.

Odnos vektora  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$  i  $\vec{P}$  u nekoj tački električnog polja je sledeći

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

858. Kolika bi bila Kulonova sila između Zemlje i Meseca ako bi bili naelektrisani količinama elektriciteta  $q_Z = 40$  kC i  $q_M = 4$  MC?

859. Na dvema jednakim kapljicama vode nalazi se po jedan slobodni elektron. Koliki treba da bude poluprečnik kapljica da bi intenzitet Kulonove sile bio jednak intenzitetu gravitacione sile?

860. Dva tela, jednakih masa  $m = 10$  g, naelektrisana su tako da se Kulonovim silama poništava dejstvo gravitacionih sila između njih. Kolika su i kakva ova naelektrisanja ako se tela nalaze u vazduhu?

861. Elektron, čije je naelektrisanje  $e = 0,16$  eC, kruži oko jezgra po putanji, srednjeg poluprečnika  $r = 100$  pm. Masa elektrona je  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg. Kolika je brzina elektrona na orbiti? Zadatak rešiti za atom vodonika.

862. Kolika je Kulonova sila između jezgra Na i protona, kojim se jezgro bombarduje, u trenutku kada je proton na rastojanju  $r = 60$  fm od središta jezgra? Naelektrisanje jezgra Na je  $Z$  puta veće od naelektrisanja protona (gde je  $Z$  — redni broj natrijuma u Periodnom sistemu). Uticaj elektronskog omotača atoma zanemariti.

863. Dva tačkasta tela, naelektrisana količinama elektriciteta  $q_1 = +40$  nC i  $q_2 = -20$  nC, nalaze se na međusobnom rastojanju  $r = 10$  cm. Kolika Kulonova sila deluje na tačkasto telo naelektrisanja  $q_3 = +10$  nC, postavljeno na pravu koja prolazi kroz prva dva tela, a na rastojanju  $r_1 = 20$  cm od prvog i  $r_2 = 10$  cm od drugog tela? Naelektrisana tela se nalaze u vazduhu.

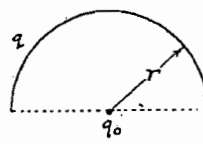
864. Na temenima kvadrata, stranica  $a = 2$  cm, nalaze se tačkasta naelektrisanja od po  $q = 2$  nC. Kolika Kulonova sila deluje na svako naelektrisanje ako se ona nalaze u vazduhu?

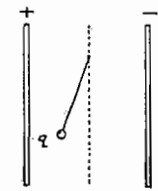
865. Dva tela, naelektrisana količinama elektriciteta  $q_1 = -4$  nC i  $q_2 = -1$  nC, nalaze se na rastojanju  $a$  u vakuumu. Kakav znak može da ima naelektrisanje trećeg tela, koje je naelektrisano količinom elektriciteta  $q_3 = 1$  nC, i gde ga je potrebno postaviti da bi bilo u ravnoteži u odnosu na dejstvo Kulonovih sila prva dva tela?

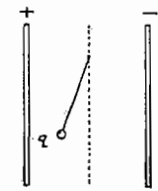
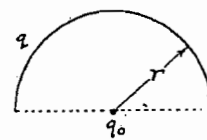
866. Horizontalan disk, prečnika  $d$ , načinjen je od izolatora i po svojoj ivici ima tanak obod. Na disk se postavje 4 jednake kuglice, naelektrisane jednakim količinama elektriciteta  $q$ .

- Kakav položaj će zauzeti kuglice na disku?
- Koliki je intenzitet sila uzajamnog dejstva ovih kuglica?

867. Na temenima jednakostraničnog trougla, stranica  $a = 6$  cm, nalaze se tri tačkasta tela, čija su naelektrisanja  $q_1 = 1$  nC,  $q_2 = -6$  nC i  $q_3 = 18$  nC. Kolika Kulonova sila deluje na telo naelektrisanja  $q_3$ ? Naelektrisana tela se nalaze u vazduhu.

868. Metalni provodnik, zanemarljivih poprečnih dimenzija, savijen je u obliku polukruga  poluprečnika  $r$ , i naelektrisan količinom elektriciteta  $q$ . U centru krivine polukruga nalazi se tačkasto naelektrisanje  $q_0$ . Odrediti Kulonovu silu između provodnika i tačkastog naelektrisanja  $q_0$ .

869. Kuglica matematičkog klatna, mase  $m$ , naelektrisana je količinom elektriciteta  $q$ . Dužina konca klatna je  $l$ . Klatno se nalazi u homogenom električnom polju jačine  $E$ . Odrediti period oscilovanja klatna ako je uzajamni položaj klatna i linija sile električnog polja kao na slici .



870. Kuglica, mase  $m=1\text{ g}$ , obešena je o tanak konac dužine  $l$ . Period oscilovanja ovog klatna je  $T_1=0,6\text{ s}$ . Ako se kuglica naelektriše količinom elektriciteta  $q=327\text{ nC}$  i postavi u homogeno električno polje, koje na kuglicu deluje vertikalnom silom sa smerom naniže, onda je period oscilovanja klatna  $T_2=0,3\text{ s}$ . Odrediti:

- jačinu električnog polja,
- period oscilovanja klatna kada električno polje promeni smer.

871. Kolika je razlika potencijala između dve tačke kulonovskog polja, tačkastog naelektrisanja  $q=30\text{ nC}$ , koje su na rastojanju  $r_1=5\text{ cm}$  i  $r_2=3\text{ cm}$  od njegovog središta? Posmatrane tačke se nalaze u vazduhu:

872. a) Kolika je jačina električnog polja jednovalentnog jona u tački koja je udaljena  $r=0,2\text{ nm}$  od njegovog središta?

b) Nacrtati zavisnost  $E=E(r)$  za ovaj slučaj, i to kada se jon nalazi u vakuumu i vodi.

873. Metalna lopta, poluprečnika  $R=1\text{ cm}$ , naelektrisana je količinom elektriciteta  $q=40\text{ nC}$ . Lopta se nalazi u ulju relativne permitivnosti  $\epsilon_r=4$ . Koliki je potencijal električnog polja u tački koja se nalazi na rastojanju  $d=2\text{ cm}$  od površine lopte?

874. Za koliko bi se promenio potencijal Zemlje ako bi se njeno naelektrisanje povećalo za  $\Delta q=1\text{ C}$ ? Uzeti da je srednji poluprečnik Zemlje  $R_z=6400\text{ km}$ .

875. Šuplja metalna lopta, spoljnog poluprečnika  $R=0,5\text{ m}$ , naelektrisana je količinom elektriciteta  $q_1=30\text{ nC}$ .

a) Ako se u unutrašnjost lopte unese naelektrisanje  $q_2=60\text{ nC}$ , za koliko će se promeniti njen potencijal?

b) Nacrtati dijagram  $\varphi=\varphi(r)$  za  $r \geq R$  i  $r < R$ , za stanje pre promene naelektrisanja lopte i za stanje posle te promene.

876. Električni potencijal lopte, poluprečnika  $r=40\text{ cm}$ , iznosi  $\varphi=0,1\text{ MV}$ . Kolika je površinska gustina elektriciteta na njoj? Lopta se nalazi u vazduhu.

877. Metalnoj lopti, poluprečnika  $R$ , povećava se naelektrisanje dotle dok na njenoj površini ne nastane električno pražnjenje. Tada je jačina električnog polja na površini lopte  $E=5\text{ MV/m}$ .

a) Koliki je odnos potencijala površine lopte prilikom pražnjenja i poluprečnika lopte?

b) Koliki je ovaj potencijal ako je  $R=0,5\text{ m}$ ?

878. Dve jednake metalne loptice, masa po  $m=200\text{ g}$ , nalaze se na uzajamnom rastojanju  $r$  u vazduhu. Obe loptice su naelektrisane jednakim količinama elektriciteta. Ako je električna potencijalna energija jedne lopte  $10^6$  puta veća od njene gravitacione potencijalne energije, izračunati naelektrisanje svake lopte.

879. Tačkasta naelektrisanja  $q_1=10\text{ nC}$  i  $q_2=-20\text{ nC}$  nalaze se na uzajamnom rastojanju  $2d=0,1\text{ m}$ , u sredini čija je relativna permitivnost  $\epsilon_r=5$ .

a) Kolika je jačina električnog polja u tački A, koja je jednako udaljena od ovih naelektrisanja a nalazi se na duži koja ih spaja?

b) Koliki je potencijal električnog polja u tački A?

c) Koliku bi potencijalnu energiju posedovalo naelektrisanje  $q_3=1\text{ nC}$  kada bi se našlo u tački A?

d) U kom pravcu i smeru bi se kretalo naelektrisanje  $q_3$  kada bi postalo slobodno? Da li bi se tada njegova potencijalna energija povećavala ili smanjivala?

880. Dve beskonačno duge i paralelne metalne ploče naelektrisane su pozitivno, površinskom gustinom elektriciteta  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ . Kolika je jačina električnog polja:

a) između ploča; b) izvan ploča?

c) Prikazati grafički raspodelu jačine ovog električnog polja.

881. Između dve paralelne metalne ploče postavljene su dve ploče, debljine  $d_1$  i  $d_2$ , načinjene od dielektrika relativne permitivnosti  $\epsilon_{r1}$  i  $\epsilon_{r2}$ . Napon između ploča je  $U$ .

a) Kolike su jačine električnog polja u prvom i drugom dielektriku?

b) Koliki je intenzitet vektora električnog deplasmata  $D$  u oba dielektrika?

c) Nacrtati dijagrame zavisnosti  $D=D(x)$ ,  $E=E(x)$  i  $\varphi=\varphi(x)$ , pod uslovom da je desna metalna ploča uzemljena.

882. U homogeno električno polje u vazduhu, jačine  $E_0$ , unesena je metalna ploča površine  $S$ . Ploča je postavljena normalno na linije sile električnog polja. Kolikom se količinom elektriciteta naelektriše ploča?

883. a) Kolika je jačina električnog polja i potencijal u tački A prikazanoj na slici?

b) Ako bi se u tačku A postavilo naelektrisanje  $-q_1$ , da li bi ono bilo u stabilnoj ili u labilnoj ravnoteži? Šta bi bilo sa naelektrisanjem  $-q_2$ ?

884. Na temenima kvadrata, stranica  $a=2\text{ cm}$ , naizmenično su postavljena tačkasta naelektrisanja  $q_1=2\text{ nC}$ ,  $q_2=-4\text{ nC}$ ,  $q_3=2\text{ nC}$ ,  $q_4=-4\text{ nC}$ . Koliki je:

a) električni potencijal u preseku dijagonala kvadrata;

b) jačina električnog polja u istoj tački?

885. Kolika je jačina električnog polja u tački koja je na rastojanju  $r=1\text{ m}$  od središta naelektrisane sfere, poluprečnika  $R=10\text{ cm}$ , ako je:

a) površinska gustina naelektrisanja  $\sigma=10\text{ }\mu\text{C/m}^2$ ,

b) električni potencijal njene površine  $\varphi=300\text{ V}$ ?

886. Količine elektriciteta,  $q_1=q$  i  $q_2=-q$ , nalaze se na rastojanju  $l$ . Kolika je jačina rezultujućeg električnog polja u tački A, koja se nalazi na rastojanju  $r$  od naelektrisanja  $q_1$ ?

887. Na slici su označeni položaji tačaka A, B i C koje se nalaze u električnom polju dipola.

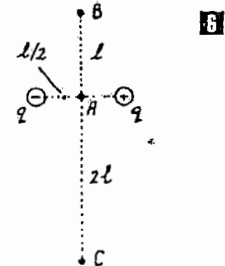
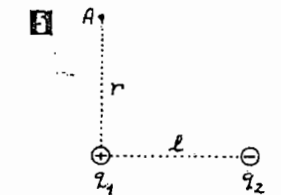
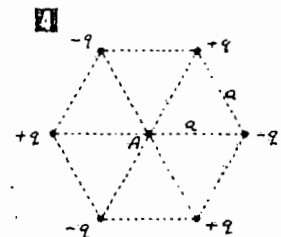
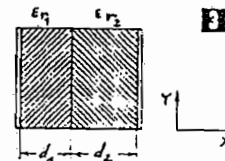
a) Kolika je jačina električnog polja dipola u tački A?

b) Koliki je električni potencijal u tački A, a koliki u tačkama B i C?

Dipol se nalazi u vakuumu.

888. Metalna lopta, poluprečnika  $r=2\text{ cm}$ , nalazi se u ulju čija je relativna permitivnost  $\epsilon_r=3$ . Potencijal lopte iznosi  $\varphi=-100\text{ V}$ . Kolika je masa elektrona koji čine naelektrisanje lopte?

889. Metalna lopta, poluprečnika  $r=10\text{ cm}$ , nalazi se u vazduhu. Potencijal lopte iznosi  $\varphi_1=606\text{ V}$ . Uzemljenim provodnikom kratkotrajno se dodirne lopta, usled čega se njen potencijal snizi na  $\varphi_2=6\text{ V}$ . Koliko elektrona pri ovome prođe kroz provodnik i dospe na loptu?



890. Ravan vazdušni kondenzator naelektrisan je količinom elektriciteta  $q = 2 \text{ nC}$ , priključenjem na električni izvor napona  $U = 150 \text{ V}$ . Površina svake ploče kondenzatora je  $S = 20 \text{ cm}^2$ . Koliki su:

- jačina električnog polja između ploča;
- rastojanje između ploča?

891. Između metalnih ploča ravnog kondenzatora, površina od po  $S = 1 \text{ m}^2$ , nalazi se staklena ploča električne susceptibilnosti  $\chi_e = 4$ . Kondenzator je naelektrisan količinom elektriciteta  $q = 20 \text{ nC}$ . Kolika je:

- jačina električnog polja u staklu;
- površinska gustina elektriciteta na staklenoj ploči nastalog polarizacijom

stakla, tj. intenzitet vektora polarizacije  $\vec{P}$ .

892. Smanjivanje jačine električnog polja, postavljanjem naelektrisane sfere u neki dielektrik, može se objasniti polarizacijom dielektrika. Odrediti veličinu i znak nastalog naelektrisanja polarizacijom dielektrika, kao i njegovu površinsku gustinu. Posmatrati polje usamljene metalne sfere poluprečnika  $R$  i naelektrisanja  $q$ . Relativna permitivnost dielektrika je  $\epsilon_r$ .

893. Sferni kondenzator ima sfere poluprečnika  $R = 4 \text{ cm}$  i  $r = 1 \text{ cm}$ . Potencijalna razlika između njih je  $U = 3000 \text{ V}$ . Kolika je jačina električnog polja u tačkama koje su na rastojanju  $x = 3 \text{ cm}$  od središta sfera? Između sfera je vazduh.

894. Sfera načinjena od dielektrika, poluprečnika  $R$ , ravnomerno je naelektrisana po celoj zapremini, zapreminskom gustinom elektriciteta  $\rho$ . Odrediti jačinu električnog polja ove sfere u tački za koju je:

- $r_1 < R$ ,
- $r_2 > R$ .
- Nacrtati zavisnost  $E = E(r)$ .

895. Tanak prav metalni provodnik, dužine  $2a$ , ravnomerno je naelektrisan količinom elektriciteta  $q$ . Odrediti zavisnost jačine električnog polja od rastojanja  $r$  posmatrane tačke od sredine provodnika, i to u tačkama na:

- osi provodnika ali izvan njega;
- normali na provodnik koja prolazi kroz njegovu sredinu.

896. Mehurić sapunice, poluprečnika  $r = 2 \text{ mm}$ , naelektrisan je količinom elektriciteta  $q = 160 \text{ pC}$ . Masa mehurića zajedno sa vazduhom u njemu iznosi  $m = 0,045 \text{ mg}$ . Mehurić se nalazi u mirovanju između horizontalnih ploča kondenzatora koje su na uzajamnom rastojanju  $d = 3 \text{ cm}$ . Kolika je potencijalna razlika između ploča ovog kondenzatora? Gustina vazduha je  $\rho_0 = 1,29 \text{ kg/m}^3$ .

897. Kolikom silom deluje električno polje beskonačno velike ravne ploče, naelektrisane površinskom gustinom elektriciteta  $\sigma = 20 \text{ nC/m}^2$ , na naelektrisanu nit dužine  $l = 10 \text{ cm}$ , koja joj je paralelna? Linearna gustina elektriciteta na niti je  $\tau = 3 \text{ nC/cm}$ . Ploča i nit se nalaze u vakuumu.

898. Metalni disk, poluprečnika  $R$ , rotira oko svoje geometrijske ose, stalnom ugaonom brzinom  $\omega$ . Kolika se pri ovome uspostavi razlika potencijala između središta diska i tačaka na njegovoj periferiji?

899. Paralelan snop elektrona izleće u slobodan prostor kroz cev pravougaonog poprečnog preseka male visine  $d$ . Brzina elektrona je  $v = 10^5 \text{ m/s}$ , a njihova koncentracija u snopu je  $n = 10^{10} \text{ l/m}^3$ . Na kom rastojanju od otvora će debljina snopa elektrona da bude dva puta veća?

900. Kuglica, mase  $m = 6 \text{ g}$ , obešena je o tanak konac dužine  $l = 1 \text{ m}$ . Gornji kraj konca je vezan za kuku, koja se nalazi na vertikalnoj ravnoj ploči velikih dimenzija. Ploča je naelektrisana površinskom gustinom elektriciteta  $\sigma = 2 \text{ mC/m}^2$ . Koliko i kakvo treba da bude naelektrisanje kuglice da bi se konac otklonio za ugao  $\alpha = 30^\circ$ ?

901. Dve kuglice, jednakih prečnika i masa, obešene su o konce jednakih dužina  $l = 1 \text{ m}$ . Gornji krajevi konaca su tako pričvršćeni na horizontalnu ravan da se kuglice dodiruju. Zatim se kuglicama dovede količina elektriciteta  $q = 100 \text{ nC}$ , usled čega se konci otklone za ugao  $2\alpha = 60^\circ$ . Kolika je masa kuglica?

902. Sekundno matematičko klatno ima na kraju kuglicu mase  $m = 0,5 \text{ g}$ . Klatno se nalazi iznad površine Zemlje, čija je površinska gustina naelektrisanja  $\sigma = 2 \text{ } \mu\text{C/m}^2$ . Koliko treba da bude naelektrisanje kuglice da bi se period oscilovanja klatna smanjio dva puta usled dejstva električnih sila?

903. a) Kolika električna sila deluje na elektron, koji se kreće od katode ka anodi elektronske cevi, ako je rastojanje između njih  $d = 5 \text{ mm}$ , a razlika potencijala  $\Delta\varphi = 100 \text{ V}$ ?

b) Za koje će vreme elektron preći ovaj put ako sa katode pođe iz mirovanja?

904. Sa suprotnih ploča kondenzatora istovremeno pođu iz mirovanja proton i elektron. Ako je jačina električnog polja između ploča kondenzatora  $E$  i njihovo rastojanje  $d$ , odrediti mesto njihovog susreta.

905. Između horizontalnih ploča ravnog kondenzatora nalazi se telo naelektrisanom količinom elektriciteta  $q = 0,96 \text{ pC}$ . Između ploča je vazduh, a one se nalaze na rastojanju  $d = 7 \text{ mm}$ . Telo između ploča pada stalnom brzinom ako je napon između njih  $U = 23,8 \text{ V}$ .

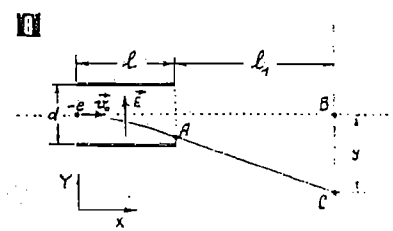
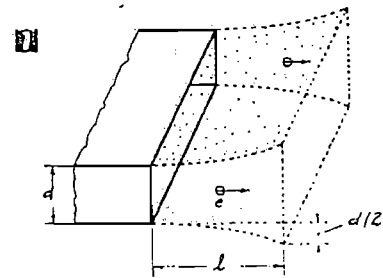
- Kolika je masa tela ( $g = 9,80 \text{ m/s}^2$ )?
- Koliko slobodnih elektrona čini naelektrisanje tela?

906. Kondenzator sa ravnim i paralelnim pločama, koje su na rastojanju  $d = 1 \text{ cm}$ , nalazi se u horizontalnom položaju. Između ploča se nalazi sferna kapljica, mase  $m = 5 \cdot 10^{-11} \text{ g}$ , koja pri odsustvu električnog polja pada stalnom brzinom. Ako se na krajevima kondenzatora priključi električni izvor napona  $U = 600 \text{ V}$ , kapljica pada upola sporije. Koliko je naelektrisanje kapljice?

907. Naći jednačine kretanja elektrona koji uleti u homogeno električno polje jačine  $E$ , brzinom  $v_0$ , koja je normalna na pravac linija sile električnog polja.

908. Elektron uleti brzinom  $v_0$  u homogeno električno polje ravnog vazdušnog kondenzatora, krećući se po njegovoj središnjoj osi, koja je normalna na pravac linija sile ovog polja. Napon između ploča je  $U = 300 \text{ V}$ , a njihovo međusobno rastojanje  $d = 2 \text{ cm}$ . Koliku najmanju brzinu treba da ima elektron da bi izašao iz kondenzatora ako je dužina njegovih ploča  $l = 10 \text{ cm}$ ?

909. Mlaz elektrona ubrzava se električnim poljem, pri čemu svaki elektron pređe potencijalnu razliku  $U = 300 \text{ V}$ . Kada ploče kondenzatora nisu naelektrisane, elektroni padaju u tačku B, koja se nalazi na osi kondenzatora, na rastojanju  $l_1 = 12 \text{ cm}$  od njegovog kraja. Kada se kondenzator naelektriše, elektroni padaju u tačku C, koja je niža za  $y = 3 \text{ cm}$ . Dužina ploča kondenzatora je  $l = 6 \text{ cm}$ , a njihovo rastojanje  $d = 1,4 \text{ cm}$ .



Koliki je napon između ploča naelektrisanog kondenzatora  $U_1$ ? Električno polje koje ubrzava mlaz elektrona nije prikazano na slici.

910. Proton i  $\alpha$ -čestica ulete jednakim brzinama u homogeno električno polje ravnog kondenzatora, kao u zadatku 907. Koliko puta je veće skretanje protona od  $\alpha$ -čestice u električnom polju?

911. Ako se elektron kreće pod istim uslovima kroz električno polje ravnog kondenzatora, kao u zadatku 908, izračunati brzinu pri izlasku iz kondenzatora.

912. Dva provodnika, od kojih je svaki naelektrisan količinom elektriciteta  $q=18\mu\text{C}$ , obrazuju kondenzator kapacitivnosti  $C=2\mu\text{F}$ . Kolika je potencijalna razlika između provodnika?

913. Kolika je električna kapacitivnost ravnog kondenzatora čije ploče imaju površinu od po  $S=1\text{m}^2$ , a nalaze se na rastojanju  $d=0,1\text{mm}$ ? Između ploča se nalazi:

- vazduh,
- parafinisana hartija relativne permitivnosti  $\epsilon_r=2,5$ .

914. Kolika je električna kapacitivnost Zemlje ako je njen srednji poluprečnik  $R_Z=6368\text{km}$ ?

915. Kolika je električna kapacitivnost koaksijalnog kabla (cilindričnog kondenzatora), dužine  $l=15\text{km}$ , ako je poluprečnik većeg provodnika  $R=8\text{cm}$ , a manjeg  $r=4\text{cm}$ ? Između provodnika je dielektrik relativne permitivnosti  $\epsilon_r=3$ .

916. Vazdušni cilindrični kondenzator ima cilindre poluprečnika  $R=4,5\text{cm}$  i  $r=1,5\text{cm}$ . Dužina cilindra je  $l=10\text{cm}$ , a razlika potencijala između njih  $U=2300\text{V}$ . Kolika je:

- kapacitivnost kondenzatora;
- jačina električnog polja u tačkama koje su na rastojanju  $x=2\text{cm}$  od ose cilindra?

917. Koliki je električni potencijal usamljene sfere, poluprečnika  $r=2\text{cm}$ , naelektrisane količinom elektriciteta  $q=400\text{nC}$ ? Sfera se nalazi u vazduhu.

918. Ploče ravnog vazdušnog kondenzatora su na rastojanju  $d=2\text{mm}$  i potencijalnoj razlici  $U_1=600\text{V}$ . Kada se kondenzator unese u parafin, potencijalna razlika njegovih krajeva smanji se na  $U_2=200\text{V}$ . Koliki su:

- relativna permitivnost parafina;
- površinska gustina elektriciteta na pločama kondenzatora?

919. Između dve koncentrične sfere, poluprečnika  $R=0,5\text{m}$  i  $r=0,4\text{m}$ , održava se stalna razlika potencijala  $U=6\text{kV}$ . Kolika je površinska gustina elektriciteta na manjoj sferi? Između sfera je vazduh.

920. Oblak, površine prema Zemlji  $S=0,5\text{km}^2$ , nalazi se na visini  $H=1000\text{m}$ . Ako je donja površina oblaka ravna i horizontalna, odrediti:

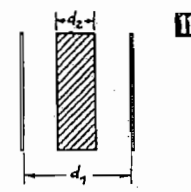
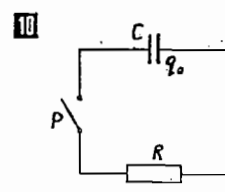
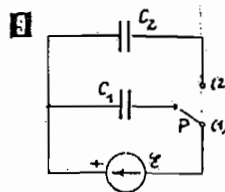
- kapacitivnost kondenzatora kojeg obrazuju oblak i ista površina Zemlje;
- potencijalnu razliku između oblaka i Zemlje ako naelektrisanje oblaka iznosi  $q=100\text{C}$ .

921. Između paralelnih ploča vazdušnog kondenzatora, površina od po  $S=1\text{m}^2$ , održava se stalna potencijalna razlika  $U=1000\text{V}$ . Rastojanje između ploča je  $d=1\text{mm}$ . Koliki su:

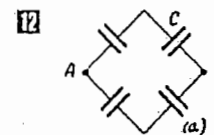
- jačina električnog polja između ploča,
- količina elektriciteta na svakoj ploči?

922. U sistemu dva kondenzatora jedan ima kapacitivnost  $C_1=11,1\text{pF}$ , a kapacitivnost drugog je promenljiva od  $C_2'=22,2\text{pF}$  do  $C_2''=555,5\text{pF}$ . Kolika je najveća, a kolika najmanja kapacitivnost:

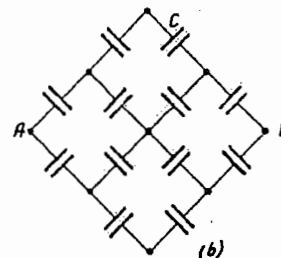
- redne,
- paralelne veze ovih kondenzatora?



923. Dva kondenzatora, kapacitivnosti  $C_1=3\mu\text{F}$  i  $C_2=2\mu\text{F}$ , naelektrisana su tako da su naponi na njihovim krajevima  $U_1=300\text{V}$  i  $U_2=600\text{V}$ . Kondenzatori se vežu paralelno, ali tako da im se polovi poklapaju. Kolika je razlika potencijala na pločama ovako vezanih kondenzatora?



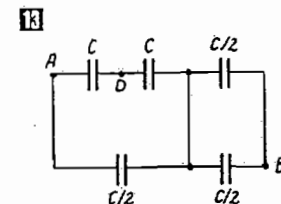
924. Na slici 924 je data veza dva jednaka kondenzatora. Šta će se dešavati kada se prekidač P naizmenično prebacuje iz položaja (1) u položaj (2)? Ems izvora je  $\mathcal{E}$ .



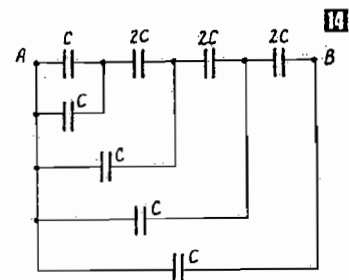
925. Kondenzator, kapacitivnosti  $C$ , nalazi se u strujnom kolu prikazanom na slici 925. Kondenzator je naelektrisan količinom elektriciteta  $q_0$ . Oceniti vreme za koje će se kondenzator razelektrisati, posle uključivanja prekidača P.

926. Kondenzator sa ravnim pločama, koje su na rastojanju  $d_1=5\text{mm}$ , priključen je na električni izvor napona  $U_1=300\text{V}$ . Kada se kondenzator isključi, napon na njegovim krajevima ostane nepromenjen. Zatim se između ploča kondenzatora postavi metalna pločica debljine  $d_2=2\text{mm}$ . Za koliko se promeni:

- napon,
- jačina električnog polja između ploča kondenzatora?

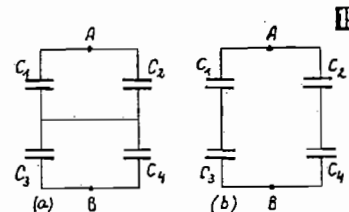


927. Odrediti ekvivalentnu kapacitivnost između tačaka A i B veze kondenzatora, jednakih kapacitivnosti, prikazanih na slici 927.



928. Kondenzatori, kapacitivnosti  $C_1=0,25\mu\text{F}$ ,  $C_2=0,5\mu\text{F}$  i  $C_3=0,2\mu\text{F}$ , vezani su najpre paralelno, a zatim redno. Kolika je ekvivalentna kapacitivnost veze u oba slučaja?

929. Kolika je ekvivalentna kapacitivnost veze kondenzatora ( $C=10\text{pF}$ ), prikazane na slici 929, između tačaka A i B?

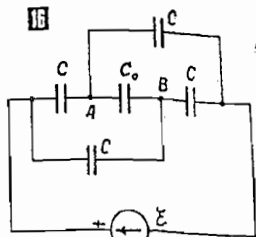


930. Kolika je ekvivalentna kapacitivnost veze kondenzatora ( $C=10\text{pF}$ ), prikazane na slici 930, između tačaka A i B?

931. a) Odrediti ekvivalentnu kapacitivnost veze kondenzatora, prikazane na slici 931, između tačaka A i B.

b) Odrediti uslov pri kome su ekvivalentne kapacitivnosti ovih veza kondenzatora jednake.





932. Između ploča ravnog kondenzatora, površine  $S=100\text{ cm}^2$ , nalazi se staklena ploča debljine  $d_1=2\text{ mm}$ , ebonitna ploča debljine  $d_2=4\text{ mm}$  i preostali vazdušni međuprostor debljine  $d_3=1\text{ mm}$ . Kolika je kapacitivnost ovog kondenzatora?

933. Tri kondenzatora, kapacitivnosti  $C_1=2\text{ nF}$ ,  $C_2=4\text{ nF}$  i  $C_3=6\text{ nF}$ , vezani su redno i priključeni na električni izvor napona  $U=11\text{ kV}$ . Koliki je napon na svakom kondenzatoru?

934. Baterija kondenzatora sastoji se iz 4 kondenzatora jednakih kapacitivnosti  $C=2\text{ }\mu\text{F}$ , i jednog kondenzatora kapacitivnosti  $C_0=2C$ , koji su vezani za električni izvor  $\mathcal{E}=100\text{ V}$ , kao na slici 18.

- Koliki je napon između tačaka A i B?
- Koliko je ukupno naelektrisanje kondenzatora?

935. Tri kondenzatora, kapacitivnosti  $C_1=4\text{ }\mu\text{F}$ ,  $C_2=5\text{ }\mu\text{F}$  i  $C_3=13\text{ }\mu\text{F}$ , vezani su kao na slici 19 i priključeni na električni izvor napona  $U=220\text{ V}$ . Koliki su naponi  $U_{1,2}$  i  $U_3$ ? Kolikom količinom elektriciteta su naelektrisane ploče kondenzatora?

936. Dva kondenzatora su vezana redno i priključena na električni izvor napona  $U=500\text{ V}$ . Kapacitivnosti kondenzatora su  $C_1=2\text{ }\mu\text{F}$  i  $C_2=3\text{ }\mu\text{F}$ . Kolikom količinom elektriciteta su naelektrisane ploče prvog kondenzatora?

937. Dva kondenzatora su vezana paralelno i priključena na električni izvor napona  $U=100\text{ V}$ . Kapacitivnosti kondenzatora su  $C_1=2\text{ }\mu\text{F}$  i  $C_2=4\text{ }\mu\text{F}$ . Kolike količine elektriciteta proteku kroz svaki kondenzator dok se ne uspostavi stacionarno stanje?

938. Na slici 20 je data veza kondenzatora kapacitivnosti  $C_1=6\text{ }\mu\text{F}$ ,  $C_2=2\text{ }\mu\text{F}$  i  $C_3=5\text{ }\mu\text{F}$ . Kolika je: a) ekvivalentna kapacitivnost ove veze kondenzatora;

b) napon  $U_1$  ako je  $\mathcal{E}$  izvora  $\mathcal{E}=800\text{ V}$ ?

938. Generator  $\mathcal{E}=110\text{ V}$  i tri kondenzatora, kapacitivnosti  $C_1=1\text{ }\mu\text{F}$ ,  $C_2=2\text{ }\mu\text{F}$  i  $C_3=3\text{ }\mu\text{F}$ , vezani su prema slici 21.

- Kolika će količina elektriciteta proteći kroz kolo kada se uključi prekidač P?
- Kolika će količina elektriciteta proteći kroz kondenzatore  $C_1$  i  $C_2$ ?

940. Vazdušni kondenzator ima ploče čije su površine po  $S=100\text{ cm}^2$  na uzajamnom rastojanju  $d=5\text{ mm}$ . Kondenzator se naelektrisanje vezivanjem njegovih ploča na električni izvor napona  $U=300\text{ V}$ . Posle razdvajanja ploča kondenzatora od izvora, između njih se unese izolator čija relativna permitivnost iznosi  $\epsilon_r=3$ .

- Koliki je napon između ploča kondenzatora posle unošenja izolatora?
- Kolika je novonastala površinska gustina elektriciteta na pločama kondenzatora?

c) Kolika je promena električnog polja između ploča kondenzatora?

941. Pod dejstvom električne sile, elektron u homogenom električnom polju dobi je ubrzanje  $a=10^{12}\text{ m/s}^2$ . Koliki su:

- jačina električnog polja,
- brzina elektrona posle vremena  $t=1\text{ s}$  od početka kretanja,
- izvršeni rad električne sile za ovo vreme,
- razlika potencijala koju pređe elektron za ovo vreme?

942. Na rastojanju  $r_1=4\text{ cm}$  od naelektrisane ravne ploče velikih dimenzija nalazi se tačkasto naelektrisanje  $q=2\text{ nC}$ , koje se pod dejstvom električnih sila pomeri na rastojanje  $r_2=2\text{ cm}$ , pri čemu se izvrši rad  $A=2\text{ }\mu\text{J}$ . Kolika je površinska gustina elektriciteta na ploči? Ploča se nalazi u vakuumu.

943. U blizini beskonačno velike ravne metalne ploče, koja je naelektrisana površinskom gustinom elektriciteta  $\sigma$ , nalazi se tačkasto naelektrisanje  $q$ . Pod dejstvom električnih sila, naelektrisanje se pomeri za rastojanje  $l$  po liniji sile električnog polja ploče i pri tome izvrši rad  $A$ . Kolika je površinska gustina elektriciteta?

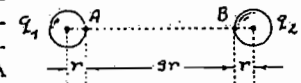
944. Elektron, emitovan sa katode, kreće se prema anodi, koja je na višem potencijalu za  $U=450\text{ V}$ . Kolika je brzina elektrona pri udaru o anodu ako je sa katode pošao iz mirovanja?

945. Potencijal električnog polja u tačkama A i B iznosi  $\varphi_A=300\text{ V}$  i  $\varphi_B=1200\text{ V}$ . Koliki je rad potrebno izvršiti da bi se naelektrisanje  $q=30\text{ nC}$  premestilo iz tačke A u tačku B?

946. U električnom polju metalne lopte, naelektrisane količinom elektriciteta  $q_1=420\text{ nC}$ , nalazi se tačkasto naelektrisanje  $q_2=2\text{ nC}$ , koje se pomeri od rastojanja  $r_1=0,4\text{ m}$  do  $r_2=0,5\text{ m}$  od središta sfere. Koliki se rad izvrši pri ovojne ako se pomeranje vrši u vazduhu?

947. Koliki se rad izvrši pri pomeranju tačkastog naelektrisanja  $q=20\text{ nC}$  sa površine naelektrisane sfere u beskonačnost? Površinska gustina elektriciteta na sferi je  $\sigma=1\text{ nC/cm}^2$ , a njen poluprečnik  $R_1=1\text{ cm}$ . Pomeranje naelektrisanja vrši se u vazduhu.

948. Dve metalne lopte 20, jednakih poluprečnika  $r=10\text{ cm}$ , naelektrisane su količinama elektriciteta  $q_1=2\text{ nC}$  i  $q_2=8\text{ nC}$ . Koliki je rad potrebno uložiti za pomeranje jednog elektrona iz tačke A u tačku B? Da li ovaj rad zavisi od oblika putanje?



949. Električni potencijal usamljene naelektrisane sfere iznosi  $\varphi=1\text{ MV}$ . Koliki je rad potrebno uložiti za pomeranje jednog elektrona sa njene površine na dva puta veće rastojanje od njenog središta? Pomeranje elektrona se vrši u vazduhu.

950. Telo, mase  $m=1\text{ g}$ , naelektrisano količinom elektriciteta  $q=10\text{ nC}$ , kreće se od tačke A, čiji je potencijal  $\varphi_A=600\text{ V}$ , do tačke B, čiji je potencijal  $\varphi_B=0$ , gde ima brzinu  $v_B=20\text{ cm/s}$ . Kolika je bila brzina tela u tački A?

951. Kugla, mase  $m$  i naelektrisanja  $q$ , pređe iz tačke (1) električnog polja, u kojoj je njen potencijal  $\varphi_1$ , u tačku (2) u kojoj je potencijal  $\varphi_2=0$ . Kolika je bila brzina u tački (1) ako je njena brzina u tački (2) bila  $v$ ?

952. Elektron se kreće pod dejstvom homogenog električnog polja ravnog kondenzatora. Potencijalna razlika između njegovih ploča je  $\Delta\varphi=120\text{ V}$ . Koliku će brzinu imati elektron na sredini rastojanja između ploča ako pođe iz mirovanja sa jedne od njih?

953. Prelazeći sa jedne ploče ravnog vazdušnog kondenzatora na drugu, elektron stekne brzinu  $v=10^6$  m/s. Rastojanje između ploča je  $d=0,53$  cm. Koliki su:

- napon na krajevima kondenzatora,
- jačina električnog polja između ploča,
- površinska gustina električnosti na pločama?

954. Optica, mase  $m=10$  g, naelektrisana količinom elektriciteta  $q_1=1$  nC, kreće se prema tačkastom naelektrisanju  $q_2=2$  nC. Do kog će se najmanjeg rastojanja približiti optica naelektrisanju  $q_2$  ako je brzina optice na velikom rastojanju  $v=1$  cm/s, a naelektrisanja su istog znaka?

955. Na elektron u mirovanju naleti drugi elektron brzinom  $v=6 \cdot 10^6$  m/s. Do kog najmanjeg rastojanja će se približiti drugi elektron prvom?

956. Snop elektrona, u kome se oni kreću brzinom  $v$ , pada na metalnu izolovanu loptu poluprečnika  $r$ . Koliki je maksimalan broj elektrona iz snopa koji mogu pa dođu do lopte i da čine njeno naelektrisanje?

957. Proton se kreće brzinom  $v=9,6 \cdot 10^6$  m/s. Do kog najmanjeg rastojanja može ovaj proton da pride jezgri olova (čije je naelektrisanje  $q=Ze$ )? Masu protona smatrati jednakom masi atoma vodonika, a proton i jezgro atoma olova smatrati kao tačkasta naelektrisanja. Zanimariti uticaj elektrona u omoću atoma.

958. Između paralelnih ploča A i B vlada homogeno električno polje. Razmak između ploča je  $d=0,2$  m. Mlaz elektrona uleće brzinom  $v=0,1$  c kroz otvor na ploči A u prostor između ploča.

- Na kolikom najnižem potencijalu treba da se nalazi ploča A da bi opisano električno polje bilo „neprobno“ za ove elektrone?
- Koliko je najduže vreme kretanja elektrona kroz ovo električno polje?

959. Elektron se kreće u homogenom električnom polju jačine  $E=120$  V/m.

- Koliko će rastojanje preći elektron u vakuumu do potpunog gubljenja brzine ako je u električno polje uleteo brzinom  $v_0=10^6$  m/s, čiji se pravac i smer poklapaju sa pravcem linija sile ovog električnog polja?
- Koliko će vremena trajati ovo kretanje?

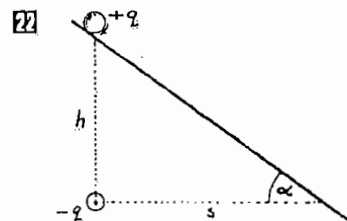
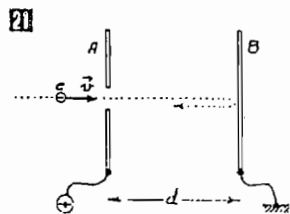
960. Ako je najmanja energija elektrona kojim se može jonizovati atom helijuma  $E_i=24,56$  eV, izračunati potencijal jonizacije helijuma.

961. Kolika mora da bude najmanja brzina slobodnih elektrona u platini da bi mogli napustiti metal? Izlazni rad elektrona iz platine je  $A_i=5,3$  eV.

962. Na kojoj temperaturi atomi živine pare imaju dovoljnu kinetičku energiju za sopstvenu jonizaciju? Potencijal jonizacije žive je  $U_i=10,4$  V.

963. Koliku najmanju brzinu treba da ima elektron da bi mogao jonizovati atom vodonika? Potencijal jonizacije vodonika je  $U_i=13,5$  V.

964. Sa vrha strme ravni, visine  $h=0,1$  m i ugla  $\alpha=60^\circ$ , kotrlja se lopta, mase  $m=5$  kg, koja je naelektrisana količinom elektriciteta  $q=10$   $\mu$ C. U temenu pravog ugla strme ravni nalazi se tačkasto naelektrisanje  $q=-10$   $\mu$ C.



Smatrati da je poluprečnik lopte  $r \ll h$ , i u tom smislu loptu kao tačkasto naelektrisanje. Kolika će biti brzina lopte na kraju strme ravni?

965. Poluprečnici cilindra vazdušnog cilindričnog kondenzatora su  $R=3,5$  cm i  $r=1,5$  cm, dok je potencijalna razlika između njih  $\Delta\varphi=2300$  V.

a) Koliku će brzinu steći elektron, pod dejstvom električnih sila, krećući se po radialnom pravcu od rastojanja  $r_1=2,5$  cm do rastojanja  $r_2=2$  cm od ose cilindra?

b) Kolika je brzina elektrona koji pođe (iz mirovanja) sa većeg cilindra pri njegovom padu na manji cilindar?

966. Krećući se brzinom  $v_0$  elektron uleti u homogeno električno polje ravnog kondenzatora, jačine  $E=900$  V/cm, i to tako da se pravac i smer polja i brzine elektrona poklapaju. Rastojanje između ploča kondenzatora je  $d=3$  cm. Kolika treba da bude brzina elektrona da bi on pao na suprotnu ploču brzinom  $v=2 \cdot 10^7$  m/s?

967. Poluprečnici sfera vazdušnog sfernog kondenzatora su  $R=4$  cm i  $r=1$  cm, a potencijalna razlika između njih je  $\Delta\varphi=3000$  V.

a) Koliku će brzinu steći elektron, pod dejstvom električnih sila, krećući se po radialnom pravcu od rastojanja  $r_1=3$  cm do rastojanja  $r_2=2$  cm od središta sfera?

b) Kolika je brzina elektrona koji pođe iz mirovanja sa veće sfere pri padu na manju sferu?

968. Kondenzator se naelektriše vezivanjem na akumulator, posle čega on poseduje energiju  $W=10$  J. Za koliko se pri tome smanji energija akumulatora?

969. Kondenzator sa ravnim i paralelnim pločama, čije su površine po  $S=100$  cm<sup>2</sup> i koje su na rastojanju  $d=1$  mm, priključi se na električni izvor napona  $U=100$  V. Posle isključenja kondenzatora od izvora, njegove ploče se razmaknu na rastojanje  $d'=25$  mm. Koliki su:

- napon na krajevima kondenzatora posle razmicanja ploča,
- električna energija kondenzatora pre i posle razmicanja ploča?

Između ploča je vazduh.

970. Cilindrični vazdušni kondenzator, dužine  $l=340$  cm, načinjen je od cilindra poluprečnika  $R=3,5$  cm i  $r=1,5$  cm. Kolika će se količina toplote osloboditi u električnom kolu pri uključenju kondenzatora na električni izvor napona  $U=2100$  V?

971. Naelektrisani kondenzator, kapacitivnosti  $C_1=1$   $\mu$ F, paralelno se veže kondenzatoru, kapacitivnosti  $C_2=0,6$   $\mu$ F, koji je naelektrisan količinom elektriciteta  $q=100$   $\mu$ C. Koliku električnu energiju poseduje prvi kondenzator posle vezivanja na drugi kondenzator?

972. Kugla načinjena od izolatora, poluprečnika  $r=10$  cm, ravnomerno je naelektrisana po celoj zapremini zapreminskom gustinom elektriciteta  $\rho=0,4$  C m<sup>3</sup>. Kugla se nalazi u dielektriku, relativne permitivnosti  $\epsilon_r=10$ . Kolika je energija električnog polja kugle?

973. Kolika je zapreminska gustina električne energije u tački koja je:

a) udaljena  $x=20$  cm od površine naelektrisane sfere, poluprečnika  $r=4$  cm, ako se ona nalazi u parafinu čija je relativna permitivnost  $\epsilon_r=2$ ;

b) u blizini beskonačno velike naelektrisane ravne ploče, koja se nalazi u parafinu?

Površinska gustina elektriciteta u oba slučaja je  $\sigma=2$  nC/cm<sup>2</sup>.

974. Kolikom silom se privlače ploče ravnog kondenzatora koje su naelektrisane količinom elektriciteta  $q=2$   $\mu$ C ako između njih vlada električno polje jačine  $E=5$  kV/m?

975. Električnim silama, intenziteta  $F=1 \text{ mN}$ , privlače se ploče ravnog naelektrisanog kondenzatora. Površina svake ploče je  $S=200 \text{ cm}^2$ , a između njih se nalazi izolator čija je relativna permitivnost  $\epsilon_r=5$ . Odrediti:

- naelektrisanje svake ploče kondenzatora,
- jačinu električnog polja u izolatoru,
- zapreminsku gustinu električne energije u izolatoru.

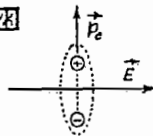
976. Između ploča ravnog vazdušnog kondenzatora, čije su površine  $S=1,2 \text{ m}^2$  i koje su na međusobnom rastojanju  $d=2 \text{ mm}$ , održava se stalna potencijalna razlika  $U=1000 \text{ V}$ . Kolika je:

- jačina električnog polja između ploča kondenzatora,
- površinska gustina elektriciteta na pločama,
- zapreminska gustina električne energije u prostoru između ploča,
- jačina električnih sila koje deluju na ploče?

977. Dva kondenzatora, kapacitivnosti  $C_1=0,1 \mu\text{F}$  i  $C_2=0,4 \mu\text{F}$ , vežu se redno i priključe na električni izvor, napona  $U=100 \text{ V}$ .

- Koliki će biti napon između krajeva kondenzatora ako se oni rastave i vežu paralelno?
- Kolikom ukupnom energijom će raspolagati ovako paralelno vezani kondenzatori?
- Koliki je gubitak energije kondenzatora prilikom njihovog prevezivanja?

[K]



978. Dipol, električnog momenta  $p_e=1,6 \cdot 10^{-28} \text{ m} \cdot \text{C}$ , nalazi se u homogenom električnom polju jačine  $E=600 \text{ V/cm}$ .

- Koliki je intenzitet momenta sprega koji deluju na dipol?
- Koliki rad izvrše električne sile pri okretanju dipola u njegov stabilan položaj?

## 2. Jednosmerna električna struja

Ako kroz jedan poprečni presek strujnog provodnika protekne količina elektriciteta  $dq$  za vreme  $dt$ , onda je jačina električne struje kroz provodnik, u datom trenutku

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Ukoliko je reč o količini elektriciteta  $q$ , koja je protekla kroz jedan poprečni presek strujnog provodnika za relativno duže vreme  $t$ , onda je srednja jačina struje kroz provodnik

$$\langle I \rangle = \frac{q}{t}$$

Jačina struje je jedna od 7 osnovnih veličina SI, a njena jedinica amper (A) jedna od 7 osnovnih jedinica ovog sistema. Dakle,

$$[I] = \text{A}$$

Gustina električne struje je

$$j = \frac{I}{S}$$

gde je  $I$  — jačina struje kroz provodnik, a  $S$  — površina njegovog poprečnog preseka.

Gustina električne struje kroz strujni provodnik može se izraziti i relacijom

$$j = ne \langle v \rangle$$

gde je  $n$  — koncentracija slobodnih nosilaca elektriciteta (slobodnih elektrona, jona, supljina),  $e$  — elementarno naelektrisanje, i  $\langle v \rangle$  — srednja brzina njihovog usmerenog kretanja.

Elektromotorna sila  $\mathcal{E}$  električnog izvora (skraćeno *ems*) jednaka je odnosu rada spoljašnjih neelektričnih sila  $A_{sp}$  (koji je utrošen za pomeranje jednoznačne količine elektriciteta  $q$  od jednog do drugog pola električnog izvora) i količine elektriciteta  $q$ . Dakle,

$$\mathcal{E} = \frac{A_{sp}}{q}$$

Jedinica *ems* je volt (V). Dakle,

$$[\mathcal{E}] = \frac{[A]}{[q]} = \frac{\text{J}}{\text{C}} = \text{V}$$

Prema Omovom zakonu u diferencijalnom obliku, gustina električne struje u provod-

niku je

$$j = \gamma E$$

gde je  $\gamma$  — specifična električna provodnost supstance od koje je načinjen provodnik, a  $E$  — jačina električnog polja u provodniku.

Omov zakon u klasičnom obliku, za deo strujnog kola, ima oblik

$$I = \frac{U}{R}$$

a za celo strujno kolo

$$I = \frac{\sum \mathcal{E}}{\sum R}$$

gde je  $I$  — jačina struje kroz provodnik, odnosno strujno kolo,  $U$  — napon između krajeva strujnog kola čija je otpornost  $R$ ,  $\sum \mathcal{E}$  — algebarski zbir *ems* svih električnih izvora u kolu, a  $\sum R$  — ekvivalentna otpornost svih delova strujnog kola.

Proizvod  $RI$  naziva se pad napona (potencijala).

Električna otpornost homogenog provodnika dužine  $l$  i površine poprečnog preseka  $S$ , jeste

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

gde je  $\rho$  — specifična otpornost supstance od koje je načinjen provodnik.

Jedinica električne otpornosti je om ( $\Omega$ ), pa je prema Omovom zakonu

$$[R] = \frac{[U]}{[I]} = \frac{\text{V}}{\text{A}} = \Omega$$

dok je jedinica specifične električne otpornosti

$$[\rho] = \Omega \cdot \text{m}$$

Električna provodnost provodnika čija je električna otpornost  $R$  je

$$G = \frac{1}{R}$$

Jedinica električne provodnosti je simens (S), pa je

$$[G] = \frac{1}{[R]} = \frac{1}{\Omega} = \text{S}$$

a specifične električne provodnosti

$$[\gamma] = \text{S/m}$$

Zavisnost električne otpornosti od temperature (za mali temperaturni interval) može se izraziti relacijom

$$R_t = R_0 (1 + \alpha t)$$

gde je  $R_0$  — otpornost provodnika na temperaturi  $0^\circ\text{C}$ , a  $\alpha$  — temperaturni koeficijent električne otpornosti.

Prema I Kirhofovom pravilu, algebarski zbir struja koje utiču ili ističu iz jednog strujnog čvora jednak je nuli. Naime, ako u jedan strujni čvor utiču ili ističu struje jačina  $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$ , onda je

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0$$

Prilikom primene ovog pravila obično se kao pozitivne uzimaju one struje koje utiču u čvor, a kao negativne — one struje koje ističu iz čvora.

Prema II Kirhofovom pravilu, u zatvorenom strujnom kolu algebarski zbir svih *ems* ( $\sum \mathcal{E}$ ) jednak je zbiru svih padova napona ( $\sum RI$ ), tj.

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{E}_i = \sum_{i=1}^k (RI)_i$$

Prilikom primene ovog pravila potrebno je proizvoljno usvojiti smerove struja u pojedinim granama strujnog kola i smer obilaženja pojedinih kontura. Znaci pojedinih *ems* i padova napona utvrđuju se na sledeći način:

1) ako se smer obilaženja konture poklapa sa smerom *ems* (koja se orijentiše od negativnog pola električnog izvora ka pozitivnom polu, tj. u smeru povišenja potencijala), onda takve *ems* treba uzeti kao pozitivne, a u obratnom slučaju kao negativne;

2) ako se smer obilaženja konture poklapa sa smerom proticanja struje kroz otpornik, onda pad napona na njemu treba uzeti kao pozitivan, a u obratnom slučaju kao negativan.

Ekvivalentna otpornost  $R_e$  redne veze otpornika, čije su otpornosti  $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$ , jednaka je njihovom zbiru, tj.

$$R_e = \sum_{i=1}^n R_i$$

dok se ekvivalentna otpornost paralelne veze ovih otpornika nalazi iz relacije

$$\frac{1}{R_e} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

tj.

$$G_e = \sum_{i=1}^n G_i$$

Snaga električne struje (električna snaga) u delu strujnog kola otpornosti  $R$ , kroz koji protiče struja stalne jačine  $I$ , na kom ona stvara pad napona  $U$ , određena je relacijama

$$P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}$$

dok se rad električne struje (električni rad) izračunava pomoću relacije  $A = Pt$ , gde je  $t$  — vreme proticanja struje.

Džul-Lencov zakon definiše kvantitativno energijski proces u kome se električna energija pretvara u unutrašnju. Ovaj zakon u diferencijalnom obliku izražava se relacijom

$$\omega = \gamma E^2$$

gde je  $\omega = P/V$  — zapreminska gustina električne snage koja se u provodniku pretvara u unutrašnju energiju,  $\gamma$  — specifična provodnost supstancije od koje je načinjen provodnik, a  $E$  — jačina električnog polja u provodniku.

Džul-Lencov zakon u klasičnom obliku izražava se relacijom

$$Q = RI^2 t$$

gde je  $Q$  — povećanje unutrašnje energije strujnog provodnika otpornosti  $R$ ,  $I$  — jačina električne struje koja protiče kroz provodnik, a  $t$  — vreme njenog proticanja.

Prema I Faradejevom zakonu elektrolize, masa  $m$  nataložene supstancije prilikom elektrolize upravo je srazmerna količini elektriciteta  $q$  koja protekne kroz elektrolit. Dakle,  $m \sim q$ , ili ako se uzme u obzir svojstvo elektrolita

$$m = kq$$

gde je  $k$  — elektrohemijski ekvivalent supstancije koja se izdvaja pri elektrolizi.

Ako je jačina električne struje koja protiče kroz elektrolit stalna, onda se ovaj zakon može napisati u praktičnijem obliku

$$m = kIt$$

gde je  $t$  — vreme proticanja električne struje (taloženja supstancije).

Jedinica elektrohemijskog ekvivalenta je

$$[k] = \frac{[m]}{[q]} = \frac{\text{kg}}{\text{C}}$$

Prema II Faradejevom zakonu elektrolize, elektrohemijski ekvivalent supstancije  $k$  upravo je srazmeran njenom hemijskom ekvivalentu  $M/Z$ , tj.

$$k = \frac{1}{F} \frac{M}{Z}$$

979. Anodna struja elektronske cevi iznosi  $I = 16$  mA. Koliko elektrona padne na anodu cevi svakog vremenskog intervala od 1 s?

980. Koliko elektrona prođe svakog vremenskog intervala od 1 s kroz vlakno sijalice, snage  $P = 60$  W, ako se ona priključi na električnu mrežu napona  $U = 220$  V?

981. a) Kolika je srednja brzina usmerenog kretanja slobodnih elektrona kroz metalni provodnik, površine poprečnog preseka  $S = 1$  mm<sup>2</sup>, ako kroz njega protiče struja stalne jačine  $I = 10$  A? Koncentracija slobodnih elektrona u provodniku iznosi  $n = 10^{28}$  1/m<sup>3</sup>.

b) Kolika je srednja brzina termičkog (haotičnog) kretanja slobodnih elektrona u istom metalnom provodniku na temperaturi  $T = 300$  K?

982. Kolika jačina struje odgovara kretanju elektrona oko jezgra atoma vodika čiji je poluprečnik  $r = 53$  pm?

gde je  $M$  — molarna masa supstancije,  $Z$  — njena valenca, a  $F = eN_A = 96\,484,56$  C/mol — Faradejeva konstanta (naelektrisanje jedinične količine jednovalentnih jona).

Specifična provodnost elektrolita je

$$\gamma = \frac{\alpha n_0 q^2}{8\pi\eta} \left( \frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right)$$

gde je  $\alpha$  — stepen disocijacije elektrolita,  $n_0$  — koncentracija rastvorene supstancije,  $q$  — naelektrisanje jona,  $\eta$  — koeficijent viskoznosti elektrolita,  $r_+$  i  $r_-$  — poluprečnici jona.

Pokretljivost jona je

$$b = \frac{\langle v \rangle}{E}$$

gde je  $\langle v \rangle$  — srednja brzina jona, a  $E$  — jačina električnog polja u elektrolitu.

Razlika potencijala  $\Delta\phi$  graničnih spojeva dva provodnika (ili poluprovodnika) data je relacijom

$$\Delta\phi = \frac{kT}{e} \left( \frac{n_1}{n_2} - \frac{n_2}{n_1} \right)$$

gde je  $k$  — Bolcmanova konstanta,  $T$  — temperatura spoja,  $e$  — elementarno naelektrisanje,  $n_1$  i  $n_2$  — koncentracija slobodnih nosilaca elektriciteta provodnika od kojih je spoj načinjen.

Moć termoelementa načinjenog od dva provodnika (ili poluprovodnika), koji poseduju  $n_1$  i  $n_2$  koncentracije slobodnih nosilaca elektriciteta, određena je relacijom

$$\alpha = \frac{\Delta\phi}{\Delta T} = \frac{k}{e} \left( \frac{n_1}{n_2} - \frac{n_2}{n_1} \right)$$

dok je  $ems$  termoelementa

$$\mathcal{E} = \alpha \Delta T$$

gde je  $\Delta T$  — razlika temperatura spojeva termoelementa.

Jedinica moći termoelementa je

$$[\alpha] = \frac{[\Delta\phi]}{[\Delta T]} = \frac{\text{V}}{\text{K}}$$

983. Kolika je otpornost bakarnog provodnika, dužine  $l = 114,3$  m i površine poprečnog preseka  $S = 0,25$  mm<sup>2</sup>? Kolika jačina struje prolazi kroz ovaj provodnik ako se on veže na električni izvor, napona  $U = 2$  V, zanemarljivo male unutrašnje otpornosti?

984. Od gvođenog provodnika, kružnog poprečnog preseka, dužine  $l = 80$  m, načinjen je otpornik čija je otpornost  $R = 2,7$  Ω. Koliki je prečnik provodnika?

985. Koliko navojaka treba načiniti od provodnika, specifične otpornosti  $\rho = 1$  μΩ·m, da bi se dobio otpornik čija je otpornost  $R = 40$  Ω? Prečnik provodnika je  $d = 1$  mm, a cilindra oko koga se provodnik namotava  $D = 2,5$  cm.

986. Bakarni provodnik, mase  $m = 4$  kg, ima električnu otpornost  $R = 10$  Ω. Koliki su prečnik i dužina provodnika?

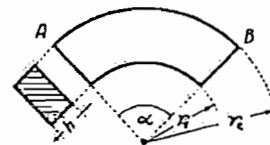
987. Kolika je električna provodnost provodnika otpornosti  $R = 2,5$  Ω?

988. Koliku dužinu treba da ima bakarni provodnik, površine poprečnog preseka  $S = (1 \pm 0,01)$  mm<sup>2</sup>, da bi njegova otpornost bila  $R = 1,00$  Ω?

989. Kroz bakarni provodnik, površine poprečnog preseka  $S = 100$  cm<sup>2</sup>, protiče struja jačine  $I = 10$  kA. Kolika je gustina struje u provodniku?

990. Razlika potencijala između krajeva provodnika dužine,  $l = 2$  m, iznosi  $\Delta\phi = 100$  V. Kolika je jačina električnog polja u provodniku? Kolika električna sila deluje na slobodne elektrone u provodniku?

991. Gustina struje kroz bakarni provodnik iznosi  $j = 28,5$  A/mm<sup>2</sup>. Kolikaje jačina električnog polja u provodniku?



992. Metalni provodnik AB, u vidu torusnog segmenta, debljine  $h$  i poluprečnika  $r_1$  i  $r_2$ , uključen je u strujno kolo. Kolika je otpornost ovog segmenta za datu vrednost centralnog ugla  $\alpha$ ?

993. Kolika je jačina struje koja protiče kroz provodnik, otpornosti  $R = 24$  Ω, ako je potencijalna razlika njegovih krajeva  $U = 120$  V?

994. Kolika je otpornost sijalice, snage  $P = (60 \pm 0,06)$  W, koja je predviđena za priključak na električnu mrežu napona  $U = 220$  V?

995. Kolika treba da bude dužina nikelinskog provodnika, površine poprečnog preseka  $S = (0,06 \pm 0,0001)$  mm<sup>2</sup>, za grejač snage  $P = 440$  W? Specifična otpornost nikelina iznosi  $\rho = (1 \pm 0,01)$  μΩ·m, a napon električne mreže na koju grejač treba priključiti  $U = 220$  V.

996. Kolika će struja proticati kroz električni grejač, snage  $(4,4 \pm 0,1)$  kW, kada se priključi na električnu mrežu napona  $(220 \pm 2)$  V?

997. Metalni provodnik, dužine  $l$  i prečnika  $d$ , priključen je na električni izvor, čiji se napon ravnomerno povisi od  $U_1$  do  $U_2$  za vreme  $t$ . Specifična električna otpornost metala je  $\rho$ . Kolika količina elektriciteta će proteći kroz provodnik za ovo vreme?

998. Kolika količina elektriciteta protekne kroz provodnik, otpornosti  $R = 3$  Ω, ako napon na njegovim krajevima ravnomerno raste od  $U_0 = 2$  V do  $U_1 = 4$  V, u toku vremena  $t = 20$  s?

999. Na temperaturi  $0^\circ\text{C}$  specifična otpornost nikelinskog provodnika iznosi  $\rho_0 = 0,333$  μΩ·m. Kolika će biti ova otpornost na temperaturi  $t = 670^\circ\text{C}$ ? Temperaturski koeficijent električne otpornosti nikelina je  $\alpha = 0,003$  1/K.

1000. Otpornost namotaja nekog elektromotora na temperaturi  $0^\circ\text{C}$  iznosi  $R_0 = 100$  Ω. Kolika je ova otpornost na temperaturi  $t_1 = 30^\circ\text{C}$  (kada motor ne radi), a kolika na temperaturi  $t_2 = 80^\circ\text{C}$  (kada motor radi)? Za koliko se promeni otpornost namotaja pri njegovom uključenju?

1001. Otpornost nekog otpornika na temperaturi  $t_1 = 22^\circ\text{C}$  iznosi  $R_1 = 27,6\ \Omega$ . Kolika je ova otpornost na temperaturi  $t_2 = 15^\circ\text{C}$ ? Temperaturski koeficijent električne otpornosti supstancije od koje je otpornik načinjen iznosi  $\alpha = 0,0041\ \text{1/K}$ .

1002. a) Za koliko se promeni otpornost telefonske linije, dužine  $l = 100\ \text{km}$  i površine poprečnog preseka  $S = 10\ \text{mm}^2$ , ako se ona zagreje od temperature  $t_1 = -30^\circ\text{C}$  do temperature  $t_2 = +30^\circ\text{C}$  (leto — zima)? Specifična otpornost provodnika je  $\rho = 0,087\ \mu\Omega \cdot \text{m}$ , dok je temperaturski koeficijent električne otpornosti  $\alpha_1 = 0,006\ \text{1/K}$ .

b) Za koliko će se pogrešiti ako se ne uzme u obzir izduženje provodnika usled zagrevanja? Temperaturski koeficijent linearnog širenja provodnika je  $\alpha_1 = 12 \cdot 10^{-6}\ \text{1/K}$ .

1003. Električna sijalica sa volframovim vlaknom ima snagu  $P = 40\ \text{W}$  kada se priključi na mrežu napona  $U = 220\ \text{V}$ . Kolika je dužina vlakna ako je prečnik provodnika od koga je vlakno načinjeno  $d = 0,01\ \text{mm}$ , a radna temperatura vlakna  $T = 2700\ \text{K}$ ? Specifična otpornost volframa na temperaturi  $0^\circ\text{C}$  iznosi  $\rho_0 = 0,05\ \mu\Omega \cdot \text{m}$  i povećava se linearno sa povišenjem temperature.

1004. a) Kolika je jačina struje koja protiče kroz sijalicu (definisano u prethodnom zadatku) u trenutku uključenja na električni izvor?

b) Kolika je jačina ove struje pri nominalnim uslovima rada?

1005. Otpornost vlakna sijalice na temperaturi  $t_1 = 20^\circ\text{C}$  iznosi  $R_1 = 35,8\ \Omega$ . Kolika će biti temperatura vlakna ako se sijalica priključi na električnu mrežu napona  $U = 120\ \text{V}$ , pri čemu kroz sijalicu protiče struja jačine  $I = 0,33\ \text{A}$ ? Temperaturski koeficijent električne otpornosti vlakna sijalice iznosi  $\alpha = 4,6 \cdot 10^{-3}\ \text{1/K}$ . Smatrati da se otpornost vlakna menja linearno sa promenom temperature.

1006. Električno kolo je izrađeno od metalnog otpornika, specifične otpornosti  $\rho_0$  i gustine  $\rho'_0$ , na temperaturi  $0^\circ\text{C}$ . Provodnik je pravougaonog poprečnog preseka, širine  $b$  i debljine  $h$ . Kada se provodnik veže na električni izvor napona  $U$ , tada kroz njega protiče struja jačine  $I$ . Ako je temperatura provodnika  $t$ , a temperaturski koeficijent električne otpornosti  $\alpha$ , izračunati masu provodnika.

1007. Na električnu mrežu, napona  $U = 220\ \text{V}$ , priključen je motor, kroz koji protiče struja jačine  $I = 5,4\ \text{A}$ . Koliki mehanički rad izvrši ovaj motor za vreme  $t = 0,5\ \text{h}$  ako je njegov stepen korisnog dejstva  $\eta = 0,90$ ?

1008. Kroz električni otpornik protiče struja jačine  $I = 3\ \text{A}$ . Kolika je otpornost ovog otpornika ako se u njemu oslobodi količina toplote  $Q = 27\ \text{kJ}$  za vreme  $t = 25\ \text{min}$ ?

1009. Elektromotorom koji je priključen na električnu mrežu, napona  $U = 220\ \text{V}$ , diže se lift, mase  $m = 100\ \text{kg}$ , na visinu  $H = 22\ \text{m}$ . Dizanje lifta traje  $t = 0,5\ \text{min}$ , a stepen korisnog dejstva motora je  $\eta = 0,80$ . Kolika je jačina struje koja protiče kroz ovaj motor?

1010. Kada kroz električnu peglu prođe količina elektriciteta  $q = 200\ \text{C}$ , tada se u njoj oslobodi količina toplote  $Q = 44\ \text{kJ}$ . Koliki je napon na krajevima pegle?

1011. Kolika se količina vode, temperature  $t_1 = 10^\circ\text{C}$ , može zagrejati do ključanja sa  $3\ \text{kWh}$  električne energije? Smatrati da je iznad površine vode standardni atmosferski pritisak i da nema termičkih gubitaka.

1012. Koliku snagu treba da ima grejač električnog bojlera, zapremine  $V = 80\ \text{L}$ , da bi se temperatura vode u njemu povišala za  $\Delta T = 40\ \text{K}$  u toku vremena  $t = 0,5\ \text{h}$ ?

1013. Električni grejač, otpornosti  $R = 4\ \Omega$ , nalazi se u kalorimetskome sudu, potopljen u količini vode, mase  $m = 0,5\ \text{kg}$ , čija je temperatura  $t_1 = 18^\circ\text{C}$ . Koli-

ka je jačina stalne električne struje koja protičući kroz grejač za vreme  $\tau = 0,5\ \text{h}$  poviši temperaturu vode na  $t_2 = 24^\circ\text{C}$ ?

1014. Sud, zapremine  $V = 200\ \text{L}$ , naliven je do vrha vodom. U sudu se nalazi električni grejač, otpornosti  $R = 100\ \Omega$ , kroz koji protiče struja jačine  $I = 4,4\ \text{A}$ . Za koliko će se promeniti temperatura vode ako je grejač neprestano uključen tokom vremena  $t = 2,5\ \text{h}$ ?

1015. Na slapu, visine  $H = 22\ \text{m}$  i protoka  $m' = 600\ \text{kg/s}$ , nalazi se turbina čiji je stepen korisnog dejstva  $\eta_1 = 0,85$ . Ova turbina pokreće električni generator, stepena korisnog dejstva  $\eta_2 = 0,92$ . Napon na krajevima generatora je  $U = 440\ \text{V}$ . Koliku najveću jačinu električne struje može da proizvede ovaj generator?

1016. Kolika najmanja električna energija treba da se utroši za topljenje količine srebra, mase  $m = 100\ \text{g}$  i temperature  $t_1 = 10^\circ\text{C}$ ? Stepen korisnog dejstva peći za topljenje je  $\eta = 0,80$ .

1017. U sudu se nalazi količina vode, mase  $m = 4,5\ \text{kg}$ , na temperaturi  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ . Da bi se ova količina vode zagrejala do temperature ključanja, utroši se  $E = 1\ \text{kWh}$  električne energije. Koliki je stepen korisnog dejstva uređaja za zagrevanje vode?

1018. U dva jednaka kalorimetra nalaze se jednake mase vode i neke nepoznate tečnosti. Obe tečnosti su u početku na temperaturi  $0^\circ\text{C}$ . Ako se u oba suda postave jednaki grejači i vežu redno, pa zatim priključe na električni izvor, temperatura vode se poviši na  $t_1 = 2,5^\circ\text{C}$ , a nepoznate tečnosti na  $t_2 = 4,25^\circ\text{C}$ . Kolika je specifična toplotna kapacitivnost nepoznate tečnosti?

1019. Neka porodica troši dnevno  $300\ \text{L}$  vode temperature  $t_1 = 60^\circ\text{C}$ . Ako se voda zagreva električnim grejačem, izračunati najmanju cenu ovog zagrevanja, ukoliko je temperatura vode u vodovodu  $t_2 = 15^\circ\text{C}$ , a cena električne energije  $4,5\ \text{dinar/kWh}$ .

1020. Grejačem, snage  $P = 3\ \text{kW}$ , zagreva se  $100\ \text{L}$  vode. Za koliko će se povišati temperatura vode ako je grejač uključen tokom vremena  $\tau = 1\ \text{h}$ ? Termički gubici pri zagrevanju vode iznose  $10\%$ .

1021. Električni uređaj, snage  $P = 3\ \text{kW}$ , uključen je svakog dana na električnu mrežu tokom vremena od  $10\ \text{h}$ .

a) Kolika je potrošnja električne energije za 1 mesec (30 dana)?

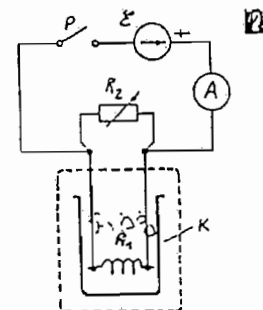
b) Koliko iznosi mesečna potrošnja električne energije za ovaj uređaj (cena  $1\ \text{kWh}$  iznosi  $4,5\ \text{dinar}$ )?

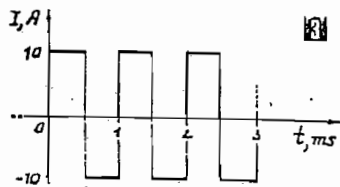
1022. U kalorimetskome sudu nalazi se količina vode, mase  $m = 2\ \text{kg}$ , na temperaturi  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ . Ako se voda zagreva električnim grejačem snage  $P = 1\ \text{kW}$ , odrediti vreme za koje će celokupna voda ispariti. Specifična toplota isparavanja vode iznosi  $q_i = 2,26\ \text{MJ/kg}$ .

1023. Voda u kalorimetskome sudu zagreva se pomoću dva grejača. Ako se uključi jedan od njih, voda proključa za vreme  $t_1 = 15\ \text{min}$ , a ako se uključi drugi — za vreme  $t_2 = 30\ \text{min}$ . Za koje će vreme voda proključati ako se uključe oba grejača:

a) paralelno, b) redno?

1024. U kalorimetskome sudu  $K$  pliva po vodi količina leda, mase  $m = 480\ \text{g}$ . U sudu se nalazi električni grejač, otpornosti  $R_1 = 10\ \Omega$ , kojim se zagreva (topi) led. Ampermetar  $A$  pokazuje struju  $I = 6\ \text{A}$  kada je otpornost promenljivog otpornika  $R_2 = 30\ \Omega$ . Za koje će se vreme istopiti sav led u kalorimetru? Specifična toplota topljenja leda iznosi  $q_i = 335\ \text{kJ/kg}$ .

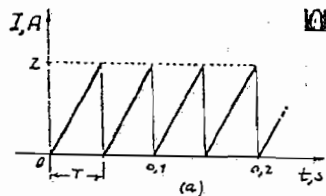




1025. Kroz termogeni otpornik, otpornosti  $R = 20 \text{ k}\Omega$ , protiče električna struja čija se jačina menja tokom vremena po zakonu

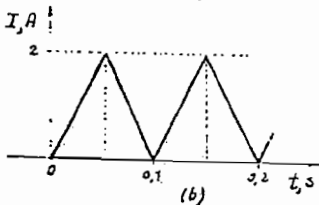
$$i = I_0 e^{-kt}$$

gde je  $I_0 = 2 \text{ A}$ , a  $k = 5 \text{ l/s}$ . Koliki je ukupni električni rad ove struje?

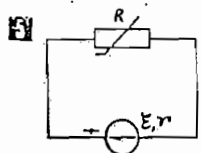


1026. Kroz termogeni otpornik, otpornosti  $R = 50 \Omega$ , protiče naizmenična struja, čiji je dijagram prikazan na slici 1026. Kolika se količina toplote oslobodi u otporniku za vreme  $t = 20 \text{ min}$ ?

1027. Kroz otpornik, otpornosti  $R = 20 \Omega$ , protiče jednosmerna struja promenljive jačine, čiji je dijagram  $I = I(t)$  prikazan na slici 1027. Kolika se količina toplote oslobodi u otporniku za vreme  $t = 10 \text{ min}$  u slučajevima (a) i (b)?

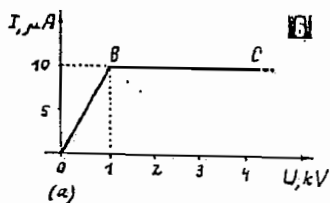


1028. U električnom kolu nalazi se izvor  $\mathcal{E}_1 = 10 \text{ V}$  kojim se puni akumulator  $\mathcal{E}_2 = 1,6 \text{ V}$ , pri čemu kroz kolo protiče struja jačine  $I = 30 \text{ A}$ . Kolika je otpornost kola?



1029. Na slici 1029 je data veza električnih izvora  $\mathcal{E} = 100 \text{ V}$ , unutrašnje otpornosti  $r = 20 \Omega$ , sa otpornikom promenljive otpornosti  $R$ , čija je najmanja otpornost 0, a najveća  $30 \Omega$ . Kolika je najveća, a kolika najmanja jačina struje koja može da se podese otpornikom u ovom strujnom kolu?

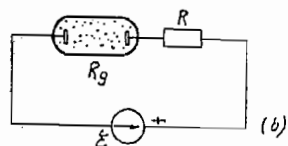
1030. Kada se otpornik, otpornosti  $R$ , uključi na električni izvor  $\mathcal{E}$ , on daje struju jačine  $I$ . Struja kratke veze električnog izvora je  $I_{\text{max}}$ . Kolika je najveća električna snaga ovog električnog izvora?



1031. Akumulator,  $\mathcal{E} = 10 \text{ V}$  i unutrašnje otpornosti  $r = 1 \Omega$ , uključi se u električno kolo, otpornosti  $R$ , u kome se pri tome razvija snaga  $P = 9 \text{ W}$ .

a) Koliki je napon na krajevima akumulatora?  
b) Koliku maksimalnu snagu može da razvije ovaj akumulator?

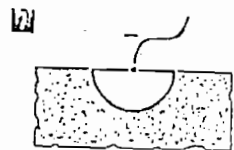
c) Kolika je otpornost spoljašnjeg kola u ovom slučaju?



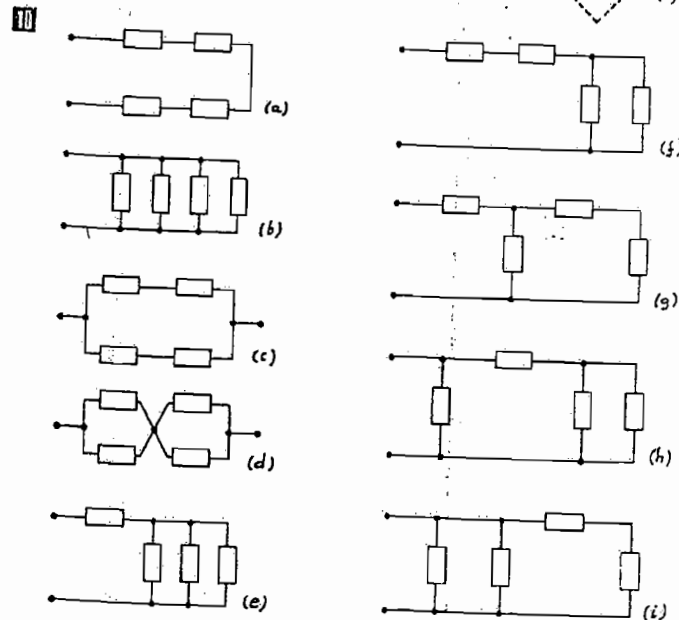
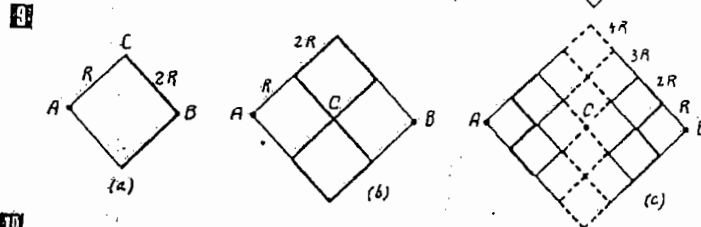
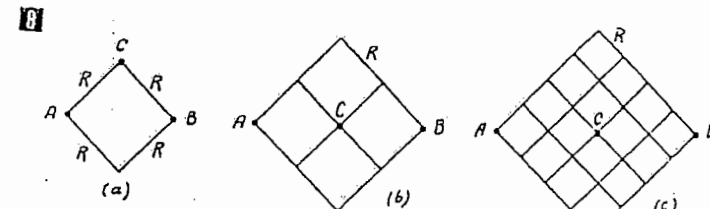
1032. Volt-amperska karakteristika gasne cevi prikazana je na slici 1032 (a), i to samo deo koji se odnosi na njenu nesamostalnu provodnost. Gasna cev se nalazi u strujnom kolu prikazanom na slici (b), u kome se nalazi i otpornik, otpornosti  $R = 300 \text{ M}\Omega$ , i električni izvor  $\mathcal{E} = 6 \text{ kV}$ .

a) Kolika je jačina struje koja protiče kroz gasnu cev?

b) Koliki je napon na krajevima gasne cevi?



1033. Metalna polusferna elektroda, poluprečnika  $r_0$ , nalazi se na površini mora. Kolika je otpornost morske vode između ove polusfere i beskonačno velikog morskog prostiranja? Specifična provodnost morske vode je  $\gamma$ .

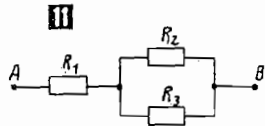


1034. Elektronska dioda načinjena je od elektroda u vidu paralelnih ravnih ploča. Anodna struja ima jačinu  $I$ , dok je razlika potencijala između elektroda  $U$ . Kolikom silom deluju elektroni koji padaju na anodu ako je njihova brzina  $v_0$  prilikom polaska sa katode?

1035. Odrediti ekvivalentnu otpornost između tačaka A i B sve tri veze otpornika jednakih otpornosti prikazane na slici 1035.

1036. Odrediti ekvivalentnu otpornost između tačaka A i B sve tri veze otpornika jednakih otpornosti prikazane na slici 1036.

1037. Četiri otpornika, jednakih otpornosti  $R$ , vezana su na različite načine prikazane na slici 1037. Kolika je ekvivalentna otpornost svake od ovih veza otpornika?



1038. Tri otpornika, otpornosti  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , vezana su kao na slici III. Kolika je ekvivalentna otpornost veza između tačaka A i B ako je  $R_1 = R_2 = R_3 = R$ ?

1039. Kako i koliko jednakih otpornika, otpornosti  $R=100\ \Omega$ , treba vezati da bi se sa najmanjim brojem ovakvih otpornika dobila veza čija je ekvivalentna otpornost  $R_e=60\ \Omega$ ?

1040. Dvanaest jednakih sijalica, svaka snage  $P=60\ \text{W}$ , vezane su paralelno i priključene na električnu mrežu napona  $U=120\ \text{V}$ .

a) Kolika je ekvivalentna otpornost ovako vezanih sijalica?

b) Kolikom jačinom struje ove sijalice opterećuju električnu mrežu?

1041. Tri otpornika, otpornosti  $R_1=3,5\ \Omega$ ,  $R_2=2,6\ \Omega$ ,  $R_3=4,9\ \Omega$ , vezana su redno i priključena na električnu mrežu napona  $U=110\ \text{V}$ .

a) Kolika je jačina struje koja protiče kroz otpornike?

b) Kolika je potencijalna razlika između krajeva pojedinih otpornika?

1042. Otpornici, otpornosti  $R_1=24\ \Omega$ ,  $R_2=48\ \Omega$ ,  $R_3=32\ \Omega$ , vezani su na električni izvor napona  $U=106\ \text{V}$  prema datoj slici IV. Kolika struja protiče kroz pojedine grane ovog kola?

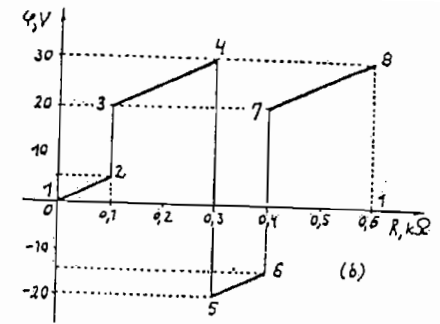
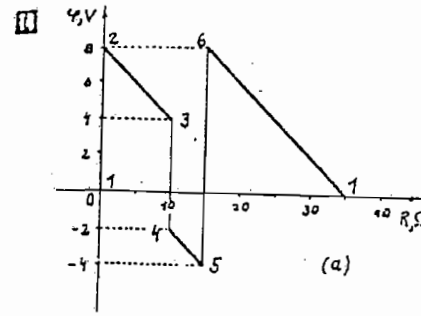
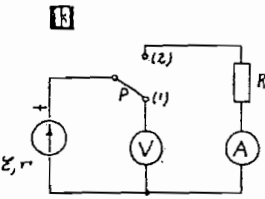
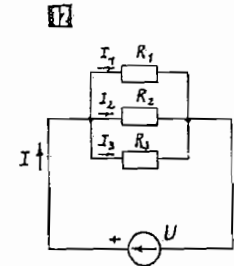
1043. Električni generator,  $\mathcal{E}=32\ \text{V}$ , vezan je redno sa akumulatorom i tri otpornika, otpornosti  $R_1=40\ \text{m}\Omega$ ,  $R_2=60\ \text{m}\Omega$  i  $R_3=120\ \text{m}\Omega$ . Unutrašnja otpornost generatora i akumulatora je zanemarljiva. Kolika je  $\mathcal{E}$ ms akumulatora ako kroz kolo protiče struja jačine  $I=30\ \text{A}$ ?

1044. Ako je električni izvor opterećen strujom jačine  $I_1=5\ \text{A}$ , onda je pad napona na njegovim krajevima  $U_1=2\ \text{V}$ . Međutim, ako je ovaj izvor opterećen strujom jačine  $I_2=10\ \text{A}$ , onda je napon na njegovim krajevima  $U_2=1,9\ \text{V}$ . Kolika je unutrašnja otpornost izvora?

1045. Na akumulator,  $\mathcal{E}=2,1\ \text{V}$  i unutrašnje otpornosti  $r=0,02\ \Omega$ , priključen je otpornik otpornosti  $R=0,4\ \Omega$ . Kolika jačina struje protiče kroz kolo? Koliki je napon na krajevima akumulatora?

1046. Na slici V je prikazano strujno kolo u kome voltmetar ima zanemarljivu provodnost, a ampermetar zanemarljivu otpornost. Otpornost otpornika je  $R=2\ \Omega$ , dok je unutrašnja otpornost električnog izvora nepoznata.

Kada se prekidač P nalazi u položaju (1), voltmetar pokazuje napon  $U=2,2\ \text{V}$ , a kada je prekidač u položaju (2), ampermetar pokazuje struju jačine  $I=1\ \text{A}$ .



Kolika se električna energija pretvori u unutrašnju energiju električnog izvora za vreme  $t=10\ \text{min}$  u slučaju kada je prekidač u položaju (2)?

1047. Kolika je unutrašnja otpornost akumulatora koji pri opterećenju otpornikom, otpornosti  $R_1=1\ \Omega$ , daje struju jačine  $I_1=1\ \text{A}$ , a pri opterećenju otpornikom otpornosti  $R_2=2,5\ \Omega$  struju jačine  $I_2=0,5\ \text{A}$ ?

1048. Koliko akumulatora,  $\mathcal{E}=2\ \text{V}$  i unutrašnje otpornosti  $r=0,02\ \Omega$ , treba vezati redno da bi se na njihovim krajevima dobio napon  $U=36\ \text{V}$ , pri opterećenju strujom jačine  $I=10\ \text{A}$ ?

1049. Na slici VI su prikazani dijagrami potencijala za dva strujna kola. Nacrtati odgovarajuća strujna kola i izračunati karakteristike elemenata u njima.

1050. Na slici VII je prikazano strujno kolo sa tri električna izvora, čije su  $\mathcal{E}$ ms  $\mathcal{E}_1=10\ \text{V}$ ,  $\mathcal{E}_2=15\ \text{V}$ ,  $\mathcal{E}_3=5\ \text{V}$ , dva otpornika čije su otpornosti  $R_1=100\ \Omega$  i  $R_2=300\ \Omega$ , i dva kondenzatora, čije su kapacitivnosti  $C=4\ \mu\text{F}$  i  $C_0=C/2$ . Unutrašnje otpornosti električnih izvora su zanemarljive. Koliko je ukupno naelektrisanje oba kondenzatora?

1051. Data je veza otpornika prema slici VIII, gde je  $\mathcal{E}$ ms električnog izvora  $\mathcal{E}=220\ \text{V}$ , a otpornosti otpornika su:  $R_1=2,5\ \Omega$ ,  $R_2=10\ \Omega$ ,  $R_3=3\ \Omega$ ,  $R_4=20\ \Omega$ ,  $R_5=10\ \Omega$  i  $R_6=20\ \Omega$ .

a) Kolika je ekvivalentna otpornost veze?

b) Koliki su naponi  $U_{AB}$  i  $U_{BC}$ ?

1052. Tri akumulatora,  $\mathcal{E}$ ms  $\mathcal{E}_1=2,2\ \text{V}$ ,  $\mathcal{E}_2=2,2\ \text{V}$ ,  $\mathcal{E}_3=1,9\ \text{V}$  i unutrašnjih otpornosti  $r_1=0,02\ \Omega$ ,  $r_2=0,02\ \Omega$ ,  $r_3=0,025\ \Omega$ , vezani su paralelno i opterećeni otpornikom otpornosti  $R=0,125\ \Omega$ .

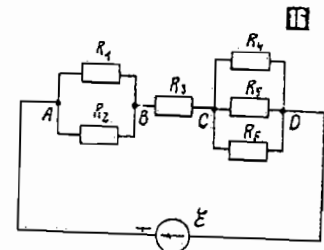
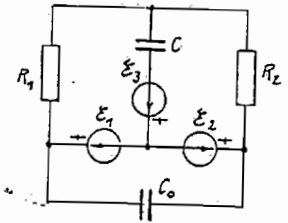
a) Kolike struje protiču kroz pojedine akumulatora?

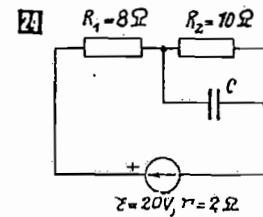
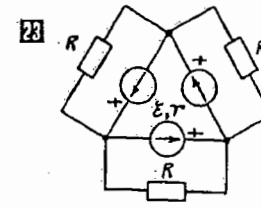
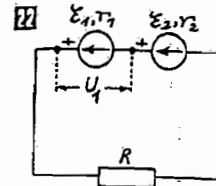
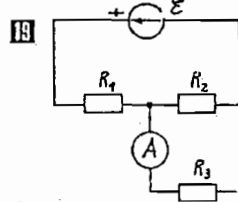
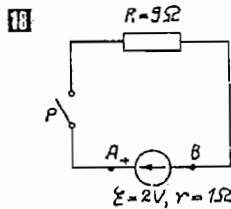
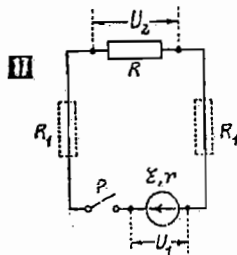
b) Koliki je napon na krajevima akumulatora?

1053. Dva električna izvora,  $\mathcal{E}$ ms  $\mathcal{E}_1=2\ \text{V}$  i  $\mathcal{E}_2=4\ \text{V}$  i unutrašnjih otpornosti  $r_1=0,5\ \Omega$  i  $r_2=1\ \Omega$ , vezana su paralelno, ali tako da im se polovi:

a) poklapaju, b) ne poklapaju.

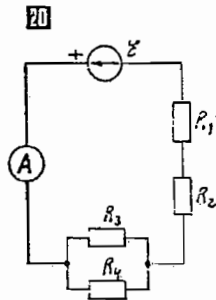
Kolika će jačina struje proticati kroz izvore u oba slučaja?





1054. Otpornik, otpornosti  $R=0,1\ \Omega$ , vezan je sa dva provodnika otpornosti  $R_1$ , na akumulator 17. Kada je prekidač P otvoren, napon na krajevima akumulatora je  $U_1=2,1\ \text{V}$ . Kada je prekidač P zatvoren, ovaj napon je  $U_1=1,82\ \text{V}$ , dok je napon na krajevima otpornika  $U_2=1,78\ \text{V}$ . Kolika je:

- unutrašnja otpornost akumulatora  $r$ ,
- otpornost provodnika  $R_1$ ?



1055. Kolika je razlika potencijala između tačaka A i B strujnog kola prikazanog na slici 18 kada je prekidač P: a) isključen; b) uključen?

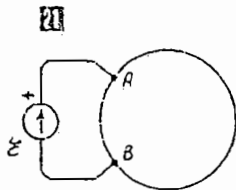
1056. Koliku će struju pokazivati ampermetar A vezan u električno kolo prikazano na slici 19? EMF izvora je  $\mathcal{E}=2,1\ \text{V}$ , a njegova unutrašnja otpornost zanemarljivo mala, dok su ostale otpornosti u kolu  $R_1=5\ \Omega$ ,  $R_2=6\ \Omega$  i  $R_3=3\ \Omega$ . Unutrašnja otpornost ampermetra je zanemarljiva.

1057. Na slici 20 je prikazano električno kolo, u kome je emf izvora  $\mathcal{E}=12\ \text{V}$ , a njegova unutrašnja otpornost  $r=1\ \Omega$ . Veličine ostalih otpornosti u kolu su  $R_1=R_2=5\ \Omega$  i  $R_3=R_4=2\ \Omega$ . Koliku struju treba da pokazuje ampermetar A (zanemarljivo male unutrašnje otpornosti) koji je vezan u ovo kolo?

1058. Električna sijalica, snage  $P=60\ \text{W}$ , predviđena je za priključak na električnu mrežu napona  $U=220\ \text{V}$ . Da li će ova sijalica nominalno svetleti ako se priključi na bateriju emf  $\mathcal{E}=230\ \text{V}$  i unutrašnje otpornosti  $r=183\ \Omega$ ?

1059. Elektromotor, unutrašnje otpornosti  $r=2\ \Omega$ , predviđen je za priključak na električnu mrežu napona  $U=220\ \text{V}$ . Pri radu, kroz motor protiče struja jačine  $I=10\ \text{A}$ . Koliki je stepen korisnog dejstva motora?

1060. Kružni metalni ram uključen je na električni izvor prema slici 21. Kada je položaj spojeva A i B takav da ram dele po dužini u razmeri 1:3, kroz električni izvor protiče struja jačine  $I=9\ \text{A}$ , pri čemu je snaga električne struje u ramu  $P=108\ \text{W}$ .



Kolika će biti snaga električne struje u ovom ramu ako se spojevi A i B pomere tako da ga po dužini dele u razmeri 1:1, pod uslovom da se jačina struje kroz električni izvor nije promenila?

1061. Dva generatora, emf  $\mathcal{E}_1=\mathcal{E}_2=\mathcal{E}$  i unutrašnjih otpornosti  $r_1$  i  $r_2$ , vezana su u električno kolo prema slici 22.

a) Kolika treba da bude otpornost  $R$  otpornika u kolu da bi napon  $U_1$  bio jednak nuli?

b) Kolika se električna snaga troši u generatorima, a kolika u otporniku  $R$ ?

c) Koliki je stepen korisnog dejstva ovakve veze električnih izvora?

1062. Tri otpornika, jednakih otpornosti  $R=10\ \Omega$ , i tri električna izvora, jednakih emf  $\mathcal{E}=\mathcal{E}=2\ \text{V}$  i jednakih unutrašnjih otpornosti  $r=0,1\ \Omega$ , vezana su u strujno kolo prikazano na slici 23.

1063. Kolika je jačina električnog polja između ploča kondenzatora C priključenog na električno kolo prikazano na slici 24? Razmak između njih iznosi  $d=2\ \text{mm}$ .

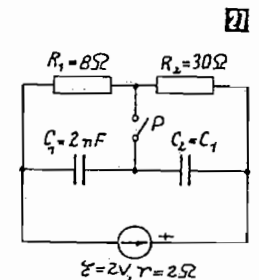
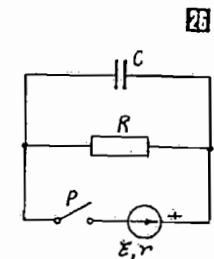
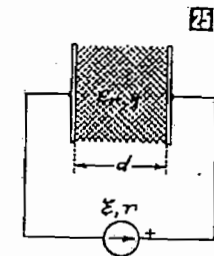
1064. Kondenzator sa ravnim pločama 25, koje se nalaze na međusobnom rastojanju  $d$ , ima kapacitivnost  $C$ . Između ploča se nalazi dielektrik, relativne permitivnosti  $\epsilon_r$  i specifične električne otpornosti  $\rho$ . Ovaj kondenzator je priključen na električni izvor emf  $\mathcal{E}$  i unutrašnje otpornosti  $r$ . Kolika je jačina električnog polja između ploča kondenzatora?

1065. Kondenzator, kapacitivnosti  $C=0,5\ \mu\text{F}$  i otpornik otpornosti  $R=20\ \Omega$ , vezani su za krajeve električnog izvora emf  $\mathcal{E}=10\ \text{V}$  i unutrašnje otpornosti  $r=5\ \Omega$  26.

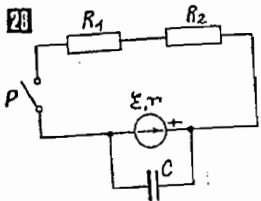
a) Kolika će količina elektriciteta proteći kroz kondenzator pri uključanju prekidača P?

b) Kolika će se količina toplote osloboditi u otporniku posle isključenja prekidača?

1066. Dato je električno kolo kao na slici 27. Prekidač P u kolu je najpre otvoren, pa se zatim zatvori. Za koliko se pri tome promeni električna energija prvog kondenzatora?

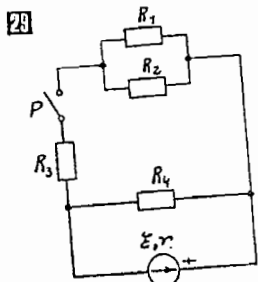






1067. Na slici 26 je prikazano električno kolo u kome je otpornost otpornika  $R_1=9\ \Omega$  i  $R_2=10\ \Omega$ , dok je kapacitivnost kondenzatora  $C=1\ \mu\text{F}$ . Ems izvora je  $\mathcal{E}=100\ \text{V}$ , a njegova unutrašnja otpornost  $r=1\ \Omega$ . Odrediti količinu elektriciteta kojom se naelektriše kondenzator i njegovu električnu energiju kada je prekidač P:

- uključen,
- isključen.



1068. Na krajevima generatora jednosmerne struje priključen je bakarni vod, dužine  $l=2\ \text{km}$  i površine poprečnog preseka  $S=10\ \text{mm}^2$ , na čijem se kraju nalazi potrošač snage  $P_p=3\ \text{kW}$ .

- Koliki treba da bude napon na krajevima generatora da bi napon na krajevima potrošača bio  $U_p=220\ \text{V}$ ?
- Koliki su gubici snage u vodu?
- Koliki je stepen korisnog dejstva ovog prenosnog sistema?

1069. Na slici 29 je prikazano električno kolo, gde je ems izvora  $\mathcal{E}=100\ \text{V}$ , a njegova unutrašnja otpornost  $r=2\ \Omega$ , dok su otpornosti u spoljašnjem delu kola  $R_1=R_2=10\ \Omega$  i  $R_3=R_4=20\ \Omega$ . Koliku će struju davati izvor kolu ako je prekidač P:

- uključen,
- isključen?

1070. Vinstonov most 30 je vezan na akumulator ems  $\mathcal{E}=2,1\ \text{V}$  i zanemarljivo male unutrašnje otpornosti. Otpornosti grana na mostu su:  $R_1=15\ \Omega$ ,  $R_2=20\ \Omega$  i  $R_3=12\ \Omega$ .

- Kolika treba da bude otpornost  $R_4$  da bi most bio u ravnoteži (da struja kroz galvanometar ne protiče)?
- Kolika će struja proticati kroz galvanometar unutrašnje otpornosti  $r=100\ \Omega$  ako se otpornik otpornosti  $R_3$  prekine?

1071. Između dva metalna štapa (A i B) 31, zanemarljive otpornosti, nalazi se razapeta metalna mreža. Razmak između štapova, tj. dužina mreže je  $L=100\ \text{m}$ , a širina  $l=0,5\ \text{m}$ , dok je dužina dijagonale jedne ćelije mreže  $a=5\ \text{cm}$ . Prečnik žice od koje je načinjena mreža je  $d=0,15\ \text{mm}$ , dok je specifična otpornost metala od koga je ona načinjena  $\rho=0,22\ \mu\Omega\cdot\text{m}$ . Kolika je ukupna otpornost mreže između štapova A i B?

1072. Metalna mreža 32 načinjena je od žice podužne otpornosti  $\rho'$ . Dužina stranice kvadratnih ćelija je  $a$ . Kolika je ekvivalentna otpornost ove mreže između čvorova A i B ako je njena površina beskonačno velika?

1073. Na električni izvor, ems  $\mathcal{E}=10\ \text{V}$ , priključen je nelinearni promenljivi otpornik 33. čija ot-

pornost zavisi od jačine struje koja protiče kroz njega po zakonu

$$R=aI$$

gde je  $a=5\ \Omega/\text{A}$ . Kolika struja protiče kroz kolo ako je unutrašnja otpornost električnog izvora:

- zanemarljivo mala,
- $r=1\ \Omega$ ?

1074. U strujnom kolu prikazanom na slici 34, ems izvora je  $\mathcal{E}=20\ \text{V}$ , a njegova unutrašnja otpornost zanemarljivo mala. Otpornost prvog otpornika je  $R_1=4\ \Omega$ , dok otpornost drugog otpornika zavisi od jačine struje po zakonu

$$R_2=a-bI$$

gde je  $a=5\ \Omega$  i  $b=0,8\ \Omega/\text{A}$ . Koliki napon pokazuje voltmetar?

1075. Na električni izvor, ems  $\mathcal{E}=100\ \text{V}$  i zanemarljive unutrašnje otpornosti, priključena su paralelno dva otpornika 35. Otpornost prvog otpornika je stalna i iznosi  $R_1=50\ \Omega$ , dok otpornost drugog zavisi od jačine struje po zakonu

$$R_2=a+bI$$

gde je  $a=20\ \Omega$  i  $b=5\ \Omega/\text{A}$ . Kolikom strujom je opterećen električni izvor?

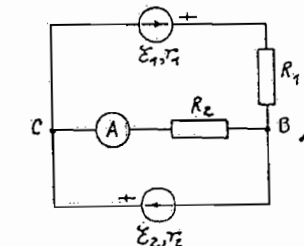
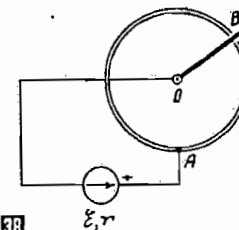
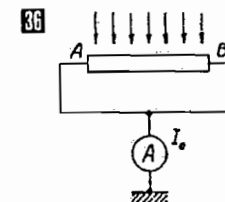
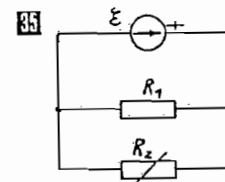
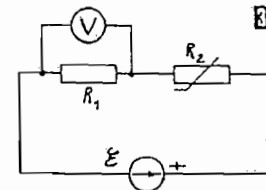
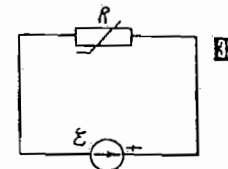
1076. Na metalni štاپ AB 36, dužine  $2L$  i otpornosti  $R$ , pada snop elektrona ravnomerno duž ose štapa. Jačina struje koju pokazuje ampermetar u kolu je  $I_0$ . Koliki je napon između tačaka A i B?

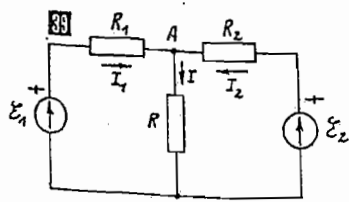
1077. U strujnom kolu se nalazi bakarni kružni prsten 37, prečnika  $D$  i površine poprečnog preseka  $S$ , po kome klizi kraj B obrtne ručice OB stalnom ugaonom brzinom  $\omega$ . Ems električnog izvora je  $\mathcal{E}$ , a unutrašnja otpornost  $r$ . Otpornost ručice i priključenih provodnika je zanemarljiva. Ustanoviti zavisnost jačine struje kroz kolo u funkciji vremena.

1078. Na slici 38 je prikazano električno kolo, u kome su ems izvora  $\mathcal{E}_1=4\ \text{V}$  i  $\mathcal{E}_2=2\ \text{V}$ , dok su njihove unutrašnje otpornosti  $r_1=0,5\ \Omega$  i  $r_2=1\ \Omega$ . Ako je otpornost prvog otpornika  $R_1=4\ \Omega$ , kolika treba da bude otpornost drugog otpornika  $R_2$  da bi kroz ampermetar A, zanemarljivo male unutrašnje otpornosti, proticala struja jačine  $1\ \text{A}$  u smeru  $B\rightarrow C$ ?

1079. Dva električna izvora imaju jednake ems,  $\mathcal{E}_1=\mathcal{E}_2=2,1\ \text{V}$ , a unutrašnje otpornosti  $r_1=0,05\ \Omega$  i  $r_2=0,1\ \Omega$ . Ako se ovi izvori vežu paralelno i optereće otpornikom tolike otpornosti da kroz njega protiče struja jačine  $I=9\ \text{A}$ , odrediti:

- jačinu struje koju daje svaki izvor,
- napon na krajevima opterećenih izvora.





1080. Kolika jačina struje protiče kroz otpornik otpornosti  $R=4\ \Omega$ , koji se nalazi u električnom kolu prikazanom na slici 99. Vrednost ostalih otpornosti u kolu su  $R_1=2\ \Omega$  i  $R_2=3\ \Omega$ , dok su ems izvora  $\mathcal{E}_1=10\ \text{V}$  i  $\mathcal{E}_2=6\ \text{V}$ , a njihove unutrašnje otpornosti zanemarljivo male.

1081. Na slici 100 je prikazano električno kolo sa dva izvora jednakih ems  $\mathcal{E}_1=\mathcal{E}_2=2\ \text{V}$  i unutrašnjih otpornosti  $r_1=r_2=1\ \Omega$ . Kolika treba da bude otpornost  $R$  da bi ampermetar A, zanemarljivo male unutrašnje otpornosti, pokazivao struju jačine  $0,1\ \text{A}$ ?

1082. Na dva paralelno vezana akumulatora, jednakih ems  $\mathcal{E}_1=\mathcal{E}_2=2\ \text{V}$ , vezan je otpornik otpornosti  $R=5\ \Omega$ .

a) Kolika će struja proticati kroz otpornik ako su unutrašnje otpornosti akumulatora zanemarljivo male?

b) Kolika je ova struja ako su unutrašnje otpornosti akumulatora jednake i iznose  $r_1=r_2=0,5\ \Omega$ ?

1083. Na slici 101 je prikazano električno kolo sa dva izvora, ems  $\mathcal{E}_1=\mathcal{E}_2=2\ \text{V}$  i unutrašnje otpornosti  $r_1=0,5\ \Omega$  i  $r_2=1\ \Omega$ , dok su ostale otpornosti u kolu  $R_1=5\ \Omega$  i  $R_2=3\ \Omega$ . Kolika jačina struje protiče kroz otpornik čija je otpornost  $R_2$ ?

1084. Na slici 102 je prikazano električno kolo u kome su ems izvora  $\mathcal{E}_1=2,1\ \text{V}$ ,  $\mathcal{E}_2=1,9\ \text{V}$ . Otpornosti otpornika u kolu su  $R_1=4,5\ \Omega$ ,  $R_2=10\ \Omega$  i  $R=10\ \Omega$ , dok su unutrašnje otpornosti izvora zanemarljivo male. Koliku struju daje kolu izvor ems  $\mathcal{E}_1$ ?

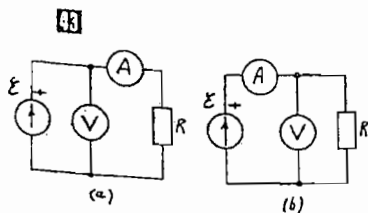
1085. Da bi se odredila otpornost otpornika merenjem napona i struje (primenom Omovog zakona), voltmetar i ampermetar moguće je vezati u kolo na dva načina prikazana na slici 103. Kolika je greška merenja otpornosti u prvom, a kolika u drugom slučaju?

1086. Voltmetrom, unutrašnje otpornosti  $R_V=2\ \text{kV}$ , može se izmeriti najveći napon od  $U_1=30\ \text{V}$ . Šta je potrebno uraditi da bi se ovim voltmetrom mogao izmeriti najveći napon  $U_2=75\ \text{V}$ ?

1087. Kolika jačina struje treba da protiče kroz rastvor  $\text{CuSO}_4$  da bi se na katodi izdvojila količina bakra, mase  $m=4\ \text{g}$ , za vreme  $t=1\ \text{h}$ ?

1088. Potrošač električne energije ima otpornost  $R=10\ \Omega$ . Da bi se izmerila jačina struje koja kroz njega protiče, njemu se redno veže ampermetar unutrašnje otpornosti  $r=1\ \Omega$ , koji pri tom pokazuje struju  $I_1=5\ \text{A}$ . Kolika je struja proticala kroz potrošač pre vezivanja ampermetra?

1089. Kolika treba da bude otpornost šanta galvanometra, unutrašnje otpornosti  $r=950\ \Omega$ , da bi se njegov merni opseg povećao 20 puta?



1090. U strujnom kolu 104 se nalaze dva jednaka ampermetra i dva jednaka voltmetra. Ampermetri  $A_1$  i  $A_2$  pokazuju struje jačine  $I_1=1,1\ \text{mA}$  i  $I_2=0,9\ \text{mA}$ , dok voltmetar  $V_2$  pokazuje napon  $U_2=0,25\ \text{V}$ .

a) Koliki napon pokazuje voltmetar  $V_1$ ?

b) Koliki je napon električnog izvora?

1091. U strujnom kolu prikazanom na slici 105 nalazi se električni izvor unutrašnje otpornosti  $r=2\ \Omega$ , kondenzator, galvanometar i dva prekidača ( $P_1$  i  $P_2$ ). Pri uključanju prekidača  $P_1$  kazaljka galvanometra se otkloni za ugao  $\alpha_1=40^\circ$ . Koliki će biti otklon  $\alpha_2$  galvanometra pri uključanju prekidača  $P_2$ ? Smatrati da je otklon galvanometra srazmeran protokloj količini elektriciteta kroz njega.

1092. Na slici 106 je prikazano strujno kolo u kome je  $\mathcal{E}_1=4\ \text{V}$ ,  $\mathcal{E}_2=10\ \text{V}$ ,  $C_1=1\ \mu\text{F}$ ,  $C_2=3\ \mu\text{F}$ ,  $R_1=100\ \Omega$ ,  $R_2=300\ \Omega$ . Kolika je razlika potencijala između ploča kondenzatora? Unutrašnje otpornosti električnih izvora su zanemarljivo male.

1093. Za koje vreme će se izvršiti elektrolitičko prečišćavanje ploče načinjene od sirovog bakra, dimenzija  $0,5 \times 1 \times 0,2\ \text{m}^2$ , ako ona sadrži 90% čistog bakra i ako kroz rastvor protiče struja jačine  $I=500\ \text{A}$ ?

1094. Kolika je masa atoma vodonika ako je poznato da je njegov elektrohemijski ekvivalent  $k=0,01042\ \text{mg/C}$ , a naelektrisanje jona vodonika  $e$ ?

1095. Pri industrijskoj proizvodnji aluminijuma elektrolizom, kroz rastvor  $\text{Al}_2\text{O}_3$  protiče struja jačine  $I=40\ \text{kA}$ , pri čemu je naponska razlika između ploča  $U=10\ \text{V}$ . Odrediti:

a) vreme za koje će se nataložiti količina aluminijuma mase  $m=100\ \text{kg}$ ;

b) utrošenu električnu energiju pri tome.

1096. Dva suda za elektrolizu vezana su redno. U prvom sudu se nalazi rastvor  $\text{AgNO}_3$ , a u drugom rastvor  $\text{CuSO}_4$ . Koliko će se bakra nataložiti na katodi za isto vreme za koje se nataloži količina srebra mase  $m_1=180\ \text{mg}$ ?

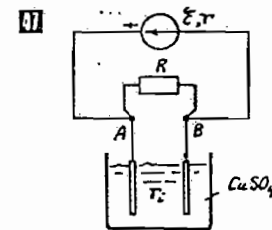
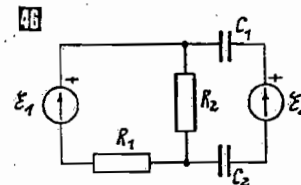
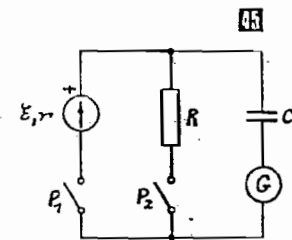
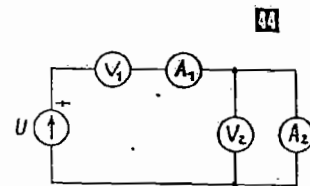
1097. Bakarna ploča površine  $15 \times 8\ \text{cm}^2$ , služi kao katoda pri elektrolizi  $\text{CuSO}_4$ . Jačina struje kroz rastvor je tako podešena da je površinska gustina struje  $j=0,02\ \text{A/cm}^2$ . U toku elektrolize se masa katode povećava za  $\Delta m=500\ \text{mg}$ . Odrediti:

a) vreme taloženja bakra,

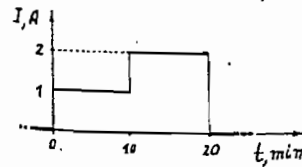
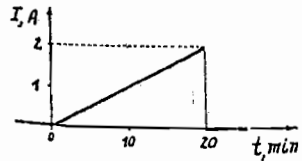
b) količinu elektriciteta koja protekne kroz rastvor za ovo vreme,

c) debljinu nataloženog sloja bakra.

1098. Sud za elektrolizu, u kome se nalazi vodeni rastvor  $\text{CuSO}_4$ , vezan je u električni izvor prema slici 107. Ems električnog izvora je  $\mathcal{E}=26\ \text{V}$ , a njegova unutrašnja otpornost  $r=2\ \Omega$ .



48



Kolika treba da bude otpornost  $R$  otpornika u kolu da bi se na katodi nataložilo  $m=2$  g bakra za vreme  $t=15$  min? Unutrašnja otpornost suda za elektrolizu je  $r_i=1 \Omega$ .

1099. Kroz vodeni rastvor  $\text{CuSO}_4$  protiče električna struja čiji se intenzitet menja sa vremenom prema dijagramu na slici 48. Kolika je masa izdvojenog bakra u oba slučaja za vreme  $t_0=20$  min?

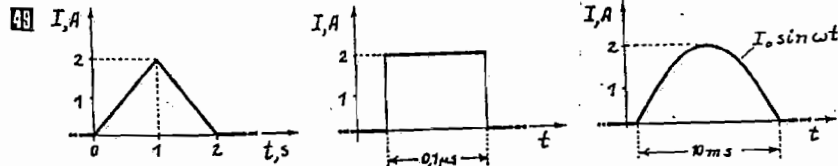
1100. Kroz vodeni rastvor  $\text{CuSO}_4$  protiče struja čija se jačina menja sa vremenom po zakonu  $I=bt$ , gde je  $b=0,05$  A/s. Kolika je masa bakra koja se nataloži na katodi za vreme  $t_1=6$  min?

1101. Kroz rastvor  $\text{AgNO}_3$  protiče električna struja čija se jačina tokom vremena menja prema dijagramima prikazanim na slici 48. Odrediti preteku količinu elektriciteta.

1102. Cu-Al spoj se nalazi na temperaturi 300 K.

a) Kolika je razlika potencijala graničnih slojeva spoja Cu-Al na toj temperaturi?  
b) Kolika je moć termoelementa načinjenog od ova dva metala? Koncentracija slobodnih elektrona u bakru iznosi  $n_1=2,1 \cdot 10^{28}$   $1/\text{m}^3$ , a u aluminijumu  $n_2=1,1 \cdot 10^{28}$   $1/\text{m}^3$ .

1103. Čemu je jednak odnos broja slobodnih elektrona bizmuta i antimona ako termoelektromotorna sila termoelementa Bi-Sb iznosi  $\mathcal{E}=10$  mV, pri temperaturskoj razlici njegovih krajeva  $\Delta T=100$  K?



### 3. Magnetno polje

Permeabilnost sredine određena je relacijom

$$\mu = \mu_r \mu_0$$

gde je  $\mu_r$  — relativna permeabilnost sredine, a  $\mu_0=4\pi \cdot 10^{-7}$  T·m/A (tačno) — magnetna konstanta, ili permeabilnost vakuuma.

Relativna permeabilnost sredine je

$$\mu_r = \chi_m + 1$$

gde je  $\chi_m$  — njena magnetna susceptibilnost.

Ako se naelektrisanja  $q$  i  $Q$  kreću brzinom  $v$  po paralelnim putanjama, koje su na rastojanju  $r$ , ona međusobno deluju električnim (Kulonovim) silama, čiji je intenzitet

$$F_e = \frac{1}{\epsilon} \frac{qQ}{4\pi r^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

a istovremeno i magnetnim (Lorenčovim) silama, čiji je intenzitet

$$F_m = \mu \frac{qQv^2}{4\pi r^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Za  $v \ll c$ , intenzitet ovih sila je

$$F_e = \frac{1}{\epsilon} \frac{qQ}{4\pi r^2} \quad \text{i} \quad F_m = \mu \frac{qQv^2}{4\pi r^2}$$

Naelektrisanja  $q$  i  $Q$  poseduju, osim električnog, i magnetno polje.

Karakteristika dejstva električnog polja je njegova jačina  $\vec{E}$ , a magnetnog polja — njegova magnetna indukcija  $\vec{B}$ .

Magnetna indukcija  $\vec{B}$  magnetnog polja, naelektrisanja  $q$ , koje se kreće brzinom  $v$ , na normalnom rastojanju  $r$ , ima intenzitet

$$B = \mu \frac{qv}{4\pi r^2}$$

gde je  $\mu$  — permeabilnost sredine u tački za koju se traži magnetna indukcija.

Jedinica magnetne indukcije je tesla (T). Dakle,

$$[B] = T$$

Magnetna indukcija  $\vec{B}$  u nekoj tački magnetnog polja može da se izrazi jačinom magnetnog polja  $\vec{H}$  i permeabilnošću sredine  $\mu$  u toj tački. Naime,

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Jedinica jačine magnetnog polja je

$$[H] = \frac{[B]}{[\mu]} = \frac{T}{T \cdot m} = \frac{A}{m}$$

Ako se naelektrisanje  $q$  kreće brzinom  $\vec{v}$  kroz magnetno polje indukcije  $\vec{B}$ , na njega deluje magnetna (Lorenčova) sila

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

čiji je intenzitet

$$F_m = qvB \sin(\vec{v}, \vec{B})$$

Magnetni fluks  $\Phi$  homogenog magnetnog polja indukcije  $\vec{B}$ , kroz površinu  $\vec{S}$ , jeste

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos(\vec{B}, \vec{S})$$

Jedinica magnetnog fluksa je veber (Wb). Dakle,

$$[\Phi] = \text{Wb}$$

pa je iz prethodne relacije jedinica magnetne indukcije

$$[B] = \frac{[\Phi]}{[S]} = \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = T$$

Magnetna indukcija elementarnog dela  $dl$  pravog i beskonačno dugog strujnog provodnika, prema Laplasovom zakonu, određena je relacijom

$$dB = \mu \frac{I dl \sin \alpha}{4\pi r^2}$$

gde je  $I$  — jačina struje koja protiče kroz provodnik,  $r$  — rastojanje tačke za koju se traži magnetna indukcija od elementa  $dl$  provodni-

ka,  $\alpha$  — ugao između elementa  $dl$  provodnika (orijentisanog u smeru proticanja struje) i njegovog vektora položaja  $\vec{r}$ .

Magnetna indukcija celokupnog pravog i beskonačno dugog strujnog provodnika, na normalnom rastojanju  $a$ , prema Bio-Savarovom zakonu je

$$B = \mu \frac{I}{2\pi a}$$

a u središtu kružnog strujnog provodnika, poluprečnika  $a$ ,

$$B = \mu \frac{I}{2a}$$

Magnetna indukcija u središtu kalema, velike dužine  $l$ , koji sadrži  $N$  navojaka kroz koje protiče struja jačine  $I$ , određena je relacijom

$$B = \mu \frac{NI}{l}$$

dok je ona na početku i kraju kalema dva puta manja.

Na strujni provodnik u magnetnom polju deluje magnetna (Amperova) sila

$$\vec{F}_m = I \vec{l} \times \vec{B}$$

čiji je intenzitet

$$F_m = IlB \sin(\vec{l}, \vec{B})$$

gde je  $I$  — jačina struje koja protiče kroz provodnik,  $l$  — njegova dužina u magnetnom polju, a  $B$  — magnetna indukcija magnetnog polja u kome se nalazi provodnik.

Dva beskonačno duga i prava provodnika međusobno deluju magnetnim silama. Intenzitet ove sile između naspramnih delova ovih provodnika, dužine  $l$ , određen je relacijom

$$F_m = \mu \frac{I_1 I_2 l}{2\pi a}$$

gde je  $\mu$  — permeabilnost sredine u kojoj se nalaze provodnici,  $I_1$  i  $I_2$  — jačine struje koje protiču kroz provodnike,  $a$  — rastojanje između provodnika.

Strujni ram, površine  $S$ , kroz koji protiče struja jačine  $I$ , poseduje magnetni moment

$$\vec{p}_m = IS$$

Jedinica magnetnog momenta je

$$[p_m] = [I][S] = A \cdot \text{m}^2$$

Ako se strujni ram, nađe u magnetnom polju indukcije  $\vec{B}$ , na njega deluje moment sprega

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$

čiji je intenzitet

$$\mathcal{K} = p_m B \sin(\vec{p}_m, \vec{B})$$

Ovaj ram tada poseduje magnetnu potencijalnu energiju

$$E_p = -\vec{p}_m \cdot \vec{B} = -p_m B \cos(\vec{p}_m, \vec{B})$$

Magnetni moment naelektrisanje čestice, mase  $m$  i naelektrisanja  $q$ , koja se kreće po kružnoj putanji poluprečnika  $r$  brzinom  $v$ , određen je relacijom

$$\vec{p}_m = \frac{q}{2m} \vec{L}$$

gde je  $\vec{L}$  — moment impulsa čestice ( $L = rmv$ ).

Sopstveni magnetni fluks strujnog kola kroz koji protiče struja jačine  $I$  je

$$\Phi_s = LI$$

gde je  $L$  — induktivnost kola, ili koeficijent samoindukcije.

Ako su dva strujna kola magnetno spregnuta, onda je međusobni magnetni fluks prvog kola kroz drugo kolo

$$\Phi_{12} = MI_1$$

a drugog kola kroz prvo kolo

$$\Phi_{21} = MI_2$$

gde je  $M$  — međusobna induktivnost, ili koeficijent međusobne indukcije,  $I_1$  i  $I_2$  — jačine struje kroz prvo i drugo kolo.

Induktivnost kalema je

$$L = \mu \frac{N^2 S}{l}$$

gde  $\mu$  — permeabilnost supstancije od koje je načinjeno jezgro,  $N$  — broj navojaka,  $S$  — površina poprečnog preseka jezgra,  $l$  — dužina kalema.

Međusobna induktivnost dva kalema namotana na torus je

$$M = \mu \frac{N_1 N_2 S}{l}$$

gde su  $N_1$  i  $N_2$  — brojevi navojaka kalerna na torusu.

Jedinica induktivnosti je henri (H). Tacke,

$$[L] = [M] = \text{H}$$

Strujni kalem induktivnosti  $L$ , kroz koji protiče struja jačine  $I$ , poseduje magnetno polje čija je energija

$$W_m = \frac{LI^2}{2}$$

dok je zapreminska gustina ove energije

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{\mu H^2}{2}$$

Pritisak magnetnog polja  $p_m$  jednak je zapremskoj gustini njegove energije  $w_m$ , tj.

$$p_m = -w_m$$

Kad Amperove sile je

$$dA = I d\Phi$$

gde je  $I$  — jačina struje koja protiče kroz provodnik, a  $d\Phi$  — magnetni fluks kroz površinu koju provodnik „prebriše.“

Prema Faradejevom zakonu indukcije, indukovana  $ems$  u ravan je

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

tj. jednaka je negativnoj vrednosti brzine promene magnetnog fluksa kroz ravan.

Ako se provodnik kreće kroz magnetno polje, u njemu će se indukovati  $ems$

$$\mathcal{E} = lvB \sin(\vec{v}, \vec{B})$$

gde je  $l$  — dužina provodnika u magnetnom polju,  $v$  — brzina provodnika i  $B$  — magnetna indukcija magnetnog polja kroz koje se kreće provodnik.

Indukovana  $ems$  samoindukcije je

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Phi_s}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

tj. jednaka je negativnoj vrednosti brzine promene sopstvenog magnetnog fluksa, gde je  $L$  — induktivnost kola a  $dI/dt$  — brzina promene jačine struje kroz kolo.

Indukovana  $ems$  međusobne indukcije je

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

odnosno

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M \frac{dI_2}{dt}$$

gde je  $d\Phi_{12}/dt$  — brzina promene magnetnog fluksa magnetnog polja prvog kola kroz drugo kolo, a  $d\Phi_{21}/dt$  — drugog kola kroz prvo kolo,  $M$  — međusobna induktivnost prvog i drugog kola,  $dI_1/dt$  — brzina promene jačine struje kroz prvo kolo, a  $dI_2/dt$  — kroz drugo kolo.

Tokom promene magnetnog fluksa  $d\Phi$  kroz površinu omeđenu ravnim, kroz ram protekne količina elektriciteta

$$dq = -\frac{1}{R} d\Phi$$

gde je  $R$  — otpornost rama.

Vektor magnetizacije supstancije  $\vec{M}$  određen je magnetnim momentom svih molekula posmatrane količine supstancije  $\vec{p}_{m1}, \vec{p}_{m2}, \vec{p}_{m3}, \dots, \vec{p}_{mN}$  i njene zapremine  $V$ . Naime,

$$\vec{M} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{p}_{mi}}{V}$$

odnosno

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

gde je  $\chi_m$  — magnetna susceptibilnost supstancije, a  $\vec{H}$  — jačina magnetnog polja u kome se ona nalazi.

Pošto je  $[\chi_m] = 1$ , to je

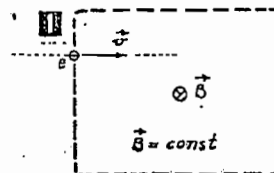
$$[M] = [H] = A/m$$

1104. Dva elektrona se kreću jednakim brzinama  $v = 0,5c$  u vakuumu, po paralelnim putanjama, koje su na rastojanju  $r = 10 \text{ nm}$ . Kolika je:

- električna (Kulonova) sila uzajamnog dejstva ovih elektrona,
- magnetna (Lorentcova) sila uzajamnog dejstva ova dva elektrona,
- rezultujuća sila koja deluje na svaki od elektrona? Koji pravac i smer ona ima?

1105. Krećući se brzinom  $v = 0,5c$ , elektron uleti u homogeno magnetno polje indukcije  $B = 1 \text{ mT}$  pod uslovima datim na slici 1105. Odrediti:

- pravac, smer i intenzitet Lorencove sile koja deluje na elektron;
- poluprečnik putanje po kojoj se kreće elektron posle ulaska u magnetno polje.



1106. Mlaz  $\alpha$ -čestica, od kojih svaka ima brzinu  $v = 1,72 \cdot 10^7 \text{ m/s}$ , kreće se kroz homogeno magnetno polje, indukcije  $B = 2 \text{ T}$ , po pravcu koji je normalan na pravac linija sile ovog polja. Kolika Lorencova sila deluje na jednu  $\alpha$ -česticu?

1107. Elektroni i protoni se ubrzaju istom potencijalnom razlikom od  $U = 0,1 \text{ MV}$ . Ovako ubrzani, oni uleću u homogeno magnetno polje, indukcije  $B = 10 \text{ mT}$ , i to u pravcu koji je normalan na magnetne linije sile.

- Koliki je poluprečnik putanje elektrona, a koliki protona?
- Nacrtati ove putanje.

1108. Linije sile magnetnog polja, indukcije  $B = 5 \text{ mT}$ , i električnog polja, jačine  $E = 15 \text{ kV/m}$ , uzajamno su normalne.

- Koliku brzinu treba da ima elektron da bi se kretao po pravolinijskoj putanji koja je normalna na linije sile oba polja?
- Koliki bi bio poluprečnik putanje elektrona kada bi se električno polje isključilo?

1109. Alfa-čestica se ubrzava električnim poljem, pri čemu pređe potencijalnu razliku  $U = 0,1 \text{ MV}$ . Ovako ubrzana  $\alpha$ -čestica uleti u homogeno magnetno polje, indukcije  $B = 2 \text{ T}$ , po pravcu koji je normalan na pravac linija sile magnetnog polja. Kolika magnetna sila deluje na  $\alpha$ -česticu?

1110. Proton, ubrzan potencijalnom razlikom  $U = 9 \text{ kV}$ , uleti u homogeno magnetno polje, indukcije  $B = 1 \text{ T}$ , po pravcu koji je normalan na pravac linija sile magnetnog polja. Odrediti: a) poluprečnik krivine putanje, b) period kretanja, c) moment impulsa protona.

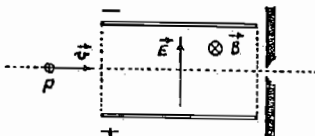
1111. Alfa-čestica se kreće u magnetnom polju po kružnoj putanji čija je ravan normalna na pravac vektora magnetne indukcije, intenziteta  $B = 40 \text{ mT}$ . Jedna  $\alpha$ -čestica ima energiju  $E = 1 \text{ MeV}$ .

- Kolika magnetna sila deluje na jednu  $\alpha$ -česticu?
- Koliki je period kretanja  $\alpha$ -čestice?
- Koliki je poluprečnik putanje  $\alpha$ -čestice u magnetnom polju?

1112. Kolika je kinetička energija protona koji se kreće po kružnoj putanji, poluprečnika  $r=60$  cm, u homogenom magnetnom polju indukcije  $B=1$  T? Ravan putanje normalna je na pravac vektora  $\vec{B}$ .

1113. Proton i elektron, ubrzani jednakom potencijalnom razlikom, ulete u homogeno magnetno polje, po pravcima koji su normalni na pravac linija sile magnetnog polja. Koliki je odnos poluprečnika krivina njihovih putanja u magnetnom polju?

1114. Proton i elektron ulete jednakim brzinama u homogeno magnetno polje, po pravcima koji su normalni na pravac linija sile magnetnog polja. Koliki je odnos poluprečnika krivina njihovih putanja u magnetnom polju?



1115. Filtar za fokusiranje i monohromatizaciju mlaza protona konstruisan je na način prikazan na slici 2. Odrediti brzine protona koje može da fokusira ovaj filtir ako je jačina električnog polja između ploča kondenzatora  $E=4$  kV/m, a magnetna indukcija primenjenog magnetnog polja  $B=0,2$  T.

1116. Elektron se kreće pravolinijski brzinom  $v=0,5c$  u vakuumu. Kolika je magnetna indukcija magnetnog polja koje stvara ovaj elektron u tački A koja se nalazi u ravni normalnoj na putanju elektrona (smatrati da se u toj ravni nalazi i elektron), i to na rastojanju  $r=1$  mm?

1117. Elektron se kreće brzinom  $v=(2/3)c$  kroz vakuum po kružnoj putanji poluprečnika  $r=10$  cm. Kolika je magnetna indukcija magnetnog polja ovog elektrona u središtu putanje?

1118. Kolikom brzinom treba da se kreće naelektrisanje  $q=0,02$  C da bi u tački koja se nalazi u ravni normalnoj na pravac kretanja, a na rastojanju  $r=0,3$  m od naelektrisanja, njegovo magnetno polje imalo jačinu  $H=2,4$  kA/m?

1119. Krećući se brzinom  $v=800$  m/s, puščani metak se naelektriše trenjem o vazduh, količinom elektriciteta  $q=6$  nC. Metak udara u vertikalni zid na udaljenosti  $r=2$  cm od tačke A, koja je takođe na zidu. Kolika je jačina magnetnog polja u tački A neposredno pre udara metka?

1120. Elektron se kreće brzinom  $v=0,5c$  u vakuumu po kružnoj putanji poluprečnika  $r=0,2$  m.

a) Kolika je magnetna indukcija magnetnog polja elektrona u središtu putanje?

b) Odrediti pravac i smer vektora  $\vec{B}$  u ovoj tački.

1121. Kroz prav i veoma dug strujni provodnik protiče struja stalne jačine  $I=10$  A.

a) Kolika je jačina magnetnog polja i magnetna indukcija u tačkama koje su na normalnom rastojanju  $a=0,1$  m od provodnika?

b) Šta predstavlja geometrijsko mesto ovih tačaka?

Posmatrane tačke se nalaze u vakuumu.

1122. Kolika je magnetna indukcija i jačina magnetnog polja u tački A, koja se nalazi na rastojanju  $a=2$  cm od beskonačno dugog i pravog provodnika, kroz koji protiče struja jačine  $I=5$  A? Tačka A se nalazi u:

a) vakuumu,

b) sredini relativne permeabilnosti  $\mu_r=10$ .

1123. Kolika je jačina magnetnog polja i magnetna indukcija u središtu kružnog provodnika, poluprečnika  $r=10$  cm, kroz koji protiče struja jačine  $I=1$  A, ako se provodnik nalazi u vakuumu?

1124. Bakarni provodnik, površine poprečnog preseka  $S=2\pi$  mm<sup>2</sup>, savijen je u vidu kružnog prstena, poluprečnika  $R=100$  cm, i priključen na električni izvor ems  $\mathcal{E}=2$  V i unutrašnje otpornosti  $r=0,02$   $\Omega$ . Kolika je jačina magnetnog polja u središtu prstena?

1125. Kalem ima  $N=200$  navojaka koji su ravnomerno namotani na dužini  $l=20$  cm. Kroz kalem protiče struja jačine  $I=10$  A. Kolika je magnetna indukcija u sredini kalema, a kolika na njegovom kraju?

1126. Kroz kalem, dužine  $l=40$  cm, koji ima  $N=800$  navojaka protiče struja jačine  $I=5$  A. Kolika je jačina magnetnog polja u središtu kalema?

1127. Po površini Zemlje, paralelno magnetnom ekvatoru, postavljen je električni provodnik kroz koji protiče struja jačine  $I=100$  A u smeru istok — zapad. Na kojoj će se visini iznad provodnika poništiti horizontalna komponenta Zemljinog magnetnog polja magnetnim poljem provodnika? Horizontalna komponenta Zemljinog magnetnog polja ima jačinu  $H_{zn}=16$  A/m.

1128. Kružni strujni provodnik deformiše se u kvadratni. Koliki je odnos magnetnih indukcija u središtu ovih strujnih provodnika?

1129. Kroz sredinu kalema, koji ima  $N=60$  navojaka namotanih na dužini  $l=40$  cm, provučena je gvozdена šipka čija je relativna permeabilnost  $\mu_r=723$ . Kroz navojke kalema protiče stalna struja jačine  $I=2$  A. Za koliko će se promeniti magnetna indukcija u sredini kalema usled uvlačenja šipke?

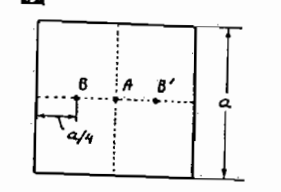
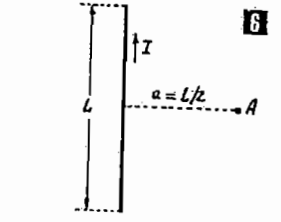
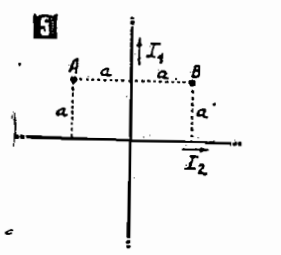
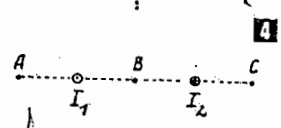
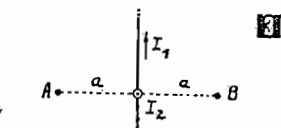
1130. Dva beskonačno duga i prava provodnika, kroz koje protiču struje jednakih jačina  $I_1=I_2=10$  A, ukrštaju se pod pravim uglom, dok su smerovi struja naznačeni na slici 3. Kolika je jačina magnetnog polja u tačkama A i B, koje su udaljene od oba provodnika za  $a=1$  m?

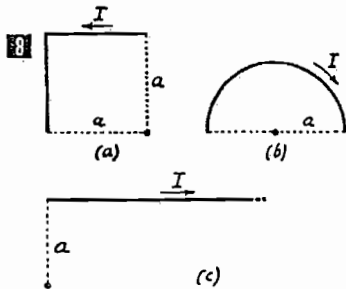
1131. Na slici 4 je prikazan presek dva strujna provodnika kroz koje protiču struje jednakih intenziteta  $I_1=I_2=100$  A, u naznačenim smerovima. Provodnici su na uzajamnom rastojanju  $d=50$  cm. Kolike su jačine magnetnog polja u tačkama A, B i C koje su na rastojanju  $d/2$  od provodnika?

1132. Dva prava i beskonačno duga provodnika kroz koje protiču struje jednakih jačina,  $I_1=I_2=10$  A, seku se pod pravim uglom. Smerovi ovih struja naznačeni su na slici 5. Kolika je magnetna indukcija u tačkama A i B, koje se nalaze na rastojanju  $a=40$  cm od oba provodnika? Provodnici se nalaze u vazduhu.

1133. Kroz prav provodnik 6, dužine  $L=2$  m, protiče električna struja jačine  $I=10$  A. Kolika je magnetna indukcija u tački A, koja se nalazi na udaljenosti  $a=L/2$  od provodnika, naspram njegove sredine? Provodnik se nalazi u vazduhu.

1134. Kroz kvadratni ram 7, stranica  $a=1$  m, protiče električna struja jačine  $I=5$  A. Kolika je jačina magnetnog polja rama u tačkama A, B i B'?





1135. Kroz provodnike prikazane na slici 8 protiče struja jačine  $I$ . Kolika je magnetna indukcija magnetnih polja ovih provodnika u tački A?

1136. Na kružnom torusu, površine poprečnog preseka  $S=100\text{ cm}^2$ , ravnomerno je namotano  $N=3000$  navojaka tanke izolovane žice. Srednji obim torusa je  $l=30\text{ cm}$ . Koliku struju treba propuštati kroz navojke kalema da bi se ostvario magnetni fluks  $\Phi=1\text{ Wb}$  kroz jedan navojak? Uzeti da je relativna permeabilnost gvožđa od koga je načinjen torus  $\mu_r=1000$ .

1137. Između polova stalnog magneta, gde vlada homogeno magnetno polje indukcije  $B=10\text{ mT}$ , postavljen je provodnik dužine  $l=0,1\text{ m}$ , pod uglom  $\alpha=30^\circ$  prema pravcu linija sila ovog polja. Ako kroz provodnik protiče struja jačine  $I=10\text{ A}$ , kolika će Amperova sila delovati na njega?

1138. Kroz prav strujni provodnik, dužine  $l=0,2\text{ m}$ , koji se nalazi u homogenom magnetnom polju jačine  $H=10\text{ A/m}$ , protiče struja jačine  $I=2\text{ A}$ . Provodnik je normalan na magnetne linije sile.

- Kolika Amperova sila deluje na provodnik?
- Odrediti pravac i smer ove sile.

1139. Beskonačno dug strujni provodnik A i provodnik C, dužine  $l=1\text{ m}$ , nalaze se na rastojanju  $a=0,5\text{ m}$  u vazduhu. Kroz prvi provodnik protiče struja jačine  $I_1=5\text{ A}$ , a kroz drugi struja jačine  $I_2=10\text{ A}$  u naznačenim smerovima.

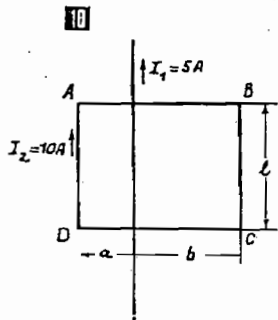
- Kolikom silom deluje provodnik A na provodnik C?
- Odrediti pravac i smer ove sile.

1140. Dva paralelna provodnika nalaze se na rastojanju  $a=4\text{ cm}$ . Kroz provodnike protiču struje jednakih jačina,  $I_1=I_2=10\text{ kA}$ , u istom smeru. Kolika magnetna sila deluje na  $1\text{ m}$  provodnika ako se provodnici nalaze u vazduhu?

1141. Tramvajske šine, koje se nalaze na rastojanju  $d=0,8\text{ m}$ , služe kao povratni vod. Ako kroz motore tramvaja protiče struja jačine  $I=50\text{ A}$ , kolika privlačna magnetna sila deluje na šine dužine  $l=1800\text{ m}$ ? Smatrati da je prosečna relativna permeabilnost tla između šina  $\mu_r=2$ .

1142. Kroz tri paralelna prava strujna provodnika protiču struje stalnih jačina  $I_1=10\text{ A}$ ,  $I_2=5\text{ A}$  i  $I_3=15\text{ A}$ . Struje kroz prvi i drugi provodnik imaju isti smer. Rastojanje između provodnika je  $a=1\text{ m}$ . Provodnici se nalaze u vazduhu. Koliki je intenzitet sile uzajamnog dejstva ovih strujnih provodnika po njihovoj jediničnoj dužini?

1143. Beskonačno dug strujni provodnik i strujni ram ABCD nalaze se u međusobnom položaju kao



na slici 10, na kojoj je  $l=b=2a=0,6\text{ m}$ . Koliki je intenzitet rezultujuće Amperove sile koja deluje na ram? Koji pravac i smer ima ova sila? Strujni provodnik i ram nalaze se u vazduhu.

1144. Na slici 11 je prikazan uzajamni položaj beskonačno dugog i pravog provodnika, kroz koji protiče struja jačine  $I_1=30\text{ A}$ , i provodnog rama, kroz koji protiče struja jačine  $I_2=10\text{ A}$  u naznačenim smerovima. Ako je  $BC=ED=EB=DC=20\text{ cm}$ , a  $AB=FE=30\text{ cm}$ , odrediti intenzitet i smer rezultujuće Amperove sile koja deluje na ram.

1145. Kvadratni ram ABCD nalazi se u homogenom magnetnom polju, indukcije  $\vec{B}$ , čije su linije sile normalne na ravan rama, a smer kao na slici 12. Ram je izraden od homogene metalne žice jednakog poprečnog preseka  $S$  u svim njenim delovima. Gustina metala od koga je načinjena žica je  $\rho$ , a njena specifična otpornost je  $\gamma$ . Krajevi rama A i C vezu se na polove električnog izvora stalnog napona  $U$ .

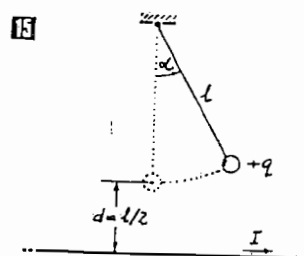
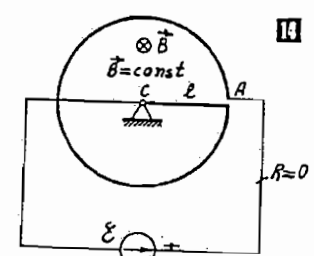
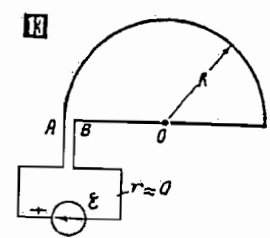
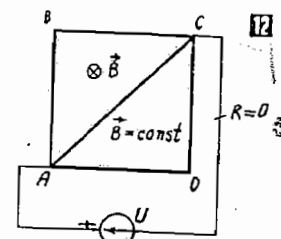
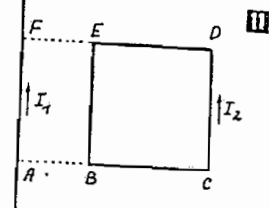
Ustanoviti od čega i kako zavisi intenzitet ubrzanja rama. Koji pravac i smer ima vektor ubrzanja  $\vec{a}$ ? Pretpostaviti da se ram ne deformiše pod dejstvom sila koje deluju na njegove delove.

1146. Od bakarnog provodnika, površine poprečnog preseka  $S=4\text{ mm}^2$ , načinjen je polukružni ram prikazan na slici 13. Poluprečnik savijenog dela rama je  $R=1\text{ m}$ . Krajevi rama A i B priključeni su na električni izvor  $\mathcal{E}=6\text{ V}$  i zanemarljive unutrašnje otpornosti. Kolika magnetna sila deluje na jediničnu dužinu rama u tački O tokom proticanja električne struje kroz njega? Ram se nalazi u vazduhu.

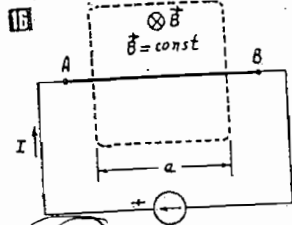
1147. Provodni ram 14 načinjen je od homogenog bakarnog provodnika površine poprečnog preseka  $S=1\text{ cm}^2$ . Ram se nalazi u homogenom magnetnom polju, indukcije  $B=1\text{ mT}$ , čije su linije sile normalne na ravan rama, a njihov je smer kao na slici. Krajevi rama A i C priključeni su na polove električnog izvora  $\mathcal{E}=34\text{ V}$  i zanemarljive unutrašnje otpornosti.

- Koliki je intenzitet rezultujuće magnetne sile koja deluje na ram?
- Opisati kretanje rama u magnetnom polju, imajući u vidu da je kraj rama C načinjen u vidu zgloba.

1148. Kuglica matematičkog klatna, dužine  $l=1\text{ m}$ , izvedena je iz ravnotežnog položaja za ugao  $\alpha=3^\circ$  i puštena da osciluje. Masa kuglice je  $m=1\text{ g}$  i ona je naelektrisana količinom elektriciteta  $q=10\text{ nC}$ . Klatno osciluje iznad pravog strujnog provodnika, prema slici 15.



Kolika jačina struje treba da protiče kroz strujni provodnik da bi zatezanje konca u najnižoj tački putanje bilo jednako težini kuglice pri mirovanju?



1149. Između polova stalnog magneta vlada homogeno magnetno polje indukcije  $B=10\text{ mT}$ . Polovi su kvadratnog oblika stranice  $a=10\text{ cm}$ . Između polova se nalazi prav strujni provodnik AB, kroz koji protiče struja jačine  $I=10\text{ A}$ . Početni položaj provodnika prikazan je na slici III.

- U kom smeru će se kretati provodnik nakon uključanja struje?
- Koliki rad će da izvrši Amperova sila?

1150. U homogenom magnetnom polju, indukcije  $B=0,5\text{ T}$ , ravnomerno se kreće provodnik, dužine  $l=10\text{ cm}$ , kroz koji protiče struja jačine  $I=2\text{ A}$ . Brzina provodnika je  $v=1\text{ m/s}$ , a ugao između pravca provodnika i linija sile ovog polja  $\theta=90^\circ$ . Koliki su:

- izvršeni rad za vreme  $t=10\text{ s}$ ,
- potrebna snaga za ovo kretanje?

1151. Dva provodnika jednakih dužina,  $l=1\text{ m}$ , nalaze se na rastojanju  $a_1=20\text{ cm}$ . Kroz provodnike teku struje jednakih jačina  $I_1=I_2=100\text{ A}$ , u suprotnim smerovima. Koliki je rad potrebno uložiti da bi se provodnici približili na rastojanje  $a_2=2\text{ cm}$ ? Provodnici se nalaze u vazduhu.

1152. Koliki je magnetni moment kružnog strujnog rama, poluprečnika  $r=0,1\text{ m}$ , kada kroz njega protiče struja jačine  $I=2\text{ A}$ ? Prikazati vektor  $p_m$  ovog rama.

1153. Normalno na pravac linija sile homogenog magnetnog polja, jačine  $H=100\text{ A/m}$ , postavljen je kvadratni ram stranica  $a=4\text{ cm}$ . Kroz ram protiče struja jačine  $I=100\text{ A}$ . Koliki su:

- magnetni moment rama,
- početni moment sprega magnetnih sila na ram,
- magnetni fluks kroz ram u početku kretanja?

1154. Provodni ram nalazi se u homogenom magnetnom polju indukcije  $B=20\text{ }\mu\text{T}$ . Kroz ram protiče struja stalne jačine  $I=100\text{ A}$ , a njegova površina je  $S=0,5\text{ m}^2$ .

- Koliki može da bude najveći moment sprega magnetnih sila koji teži da obrne ram?
- Koliki je ovaj spreg kada ugao između vektora površine rama i vektora magnetne indukcije iznosi  $\alpha=45^\circ$ ?

1155. Strujni ram načinjen je od  $N=10$  navojaka tanke žice, namotane na drvenom cilindru poluprečnika  $r=0,5\text{ m}$ . Kroz navojke rama protiče struja stalne jačine  $I=2\text{ A}$ .

- Ako se strujni ram postavi u homogeno magnetno polje, jačine  $H=280\text{ A/m}$ , odrediti veličinu momenta sprega magnetnih sila koje teže da obrnu ram. Ugao između pravca linija sile magnetnog polja i ravni u kojoj leži ram je  $\alpha=0^\circ$ .
- Koliki je ovaj moment sprega ako se umesto drvenog cilindra upotrebi gvozdni ( $\mu_r=1000$ )?

1156. Kalem osetljivog galvanometra ima  $N=600$  navojaka tanke žice, namotane na pravougaonom ramu dimenzija  $3 \times 2\text{ cm}^2$ . Ram se nalazi u homogenom magnetnom polju permanentnog magneta indukcije  $B=0,2\text{ T}$ . Kroz navojke kalema protiče struja jačine  $I=0,1\text{ }\mu\text{A}$ . Koliki je intenzitet momenta sprega magnetnih sila koji deluje na ram ako je:

- ravan kalema paralelna sa pravcem linija sile magnetnog polja,
- ugao između ravni kalema i linija sile  $\alpha=(\pi/3)\text{ rad}$ ?

1157. Magnetometar je načinjen od stalnog magneta, magnetnog momenta  $p_m=0,01\text{ A}\cdot\text{m}^2$ . Dužina tanke niti o koju je obešen magnet iznosi  $l=10\text{ cm}$ , a njen prečnik  $d=0,1\text{ mm}$ . Na rastojanju  $a=20\text{ cm}$  od niti nalazi se provodnik kroz koji protiče struja jačine  $I=30\text{ A}$ . Provodnik i nit su paralelni. Za koliki ugao će se otkloniti magnet magnetometra prilikom interakcije sa provodnikom posredstvom njihovih magnetnih polja? Modul torzije (smicanja) supstancije od koje je načinjena nit magnetometra je  $E_t=6\text{ GPa}$ . Smatrati da je uticaj drugih magnetnih polja zanemarljiv.

1158. Galvanometar ima kalem sa  $N=300$  navojaka namotanih na pravougaonom ramu, dimenzija  $2 \times 2,1\text{ cm}^2$ , koji je obešen o nit prečnika  $d=0,1\text{ mm}$  i dužine  $l=10\text{ cm}$ . Kalem se nalazi u homogenom magnetnom polju permanentnog magneta, čija je jačina  $H=4\text{ MA/m}$ . Kolika struja protiče kroz galvanometar ako njegova kazaljka pri ovome skrene za ugao  $\theta=0,5^\circ$ ? Modul torzije supstancije od koje je načinjena nit galvanometra je  $E_t=5,9\text{ GPa}$ .

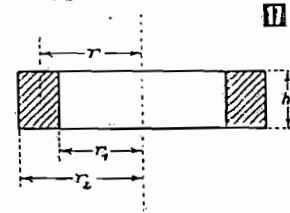
1159. Kroz  $N=400$  navojaka kalema namotanih na torusu kružnog poprečnog preseka, poluprečnika  $r=3\text{ cm}$  i dužine srednjeg obima  $l=30\text{ cm}$ , protiče struja jačine  $I=0,8\text{ A}$ .

- Kolika je induktivnost kalema ako je torus načinjen od mekog gvožđa za koje važi zavisnost  $B=B(H)$  data na strani 460?
- Kolika je relativna permeabilnost mekog gvožđa od koga je načinjen torus?
- Koliki je magnetni fluks kroz jedan navojak kalema?

1160. Koliko navojaka ima torusni kalem, induktivnosti  $L=0,02\text{ H}$ , ako pri proticanju struje, jačine  $I=10\text{ A}$ , kroz njegove navojke, ukupni magnetni fluks kroz njih iznosi  $\Phi=5\text{ mWb}$ ?

1161. Koliko najmanje navojaka treba da ima kalem, dužine  $l=4\text{ cm}$  i prečnika  $D=1\text{ cm}$ , da bi njegova induktivnost bila  $L=1\text{ mH}$ ?

1162. Kolika je induktivnost torusnog kalema, čiji je poprečni presek prikazan na slici III, gde je  $h=5\text{ cm}$ ,  $r_1=20\text{ cm}$  i  $r_2=24\text{ cm}$ ? Kalem ima  $N=660$  navojaka, dok je relativna permeabilnost metala od koga je načinjeno jezgro torusa  $\mu_r=1000$ .



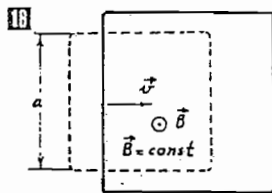
1163. Na kružnom gvozdenom torusu, srednjeg obima  $\langle l \rangle=0,7\text{ m}$ , ravnomerno je namotan izolovan bakarni provodnik čija je dužina  $l=210\text{ m}$ . Permeabilnost gvožđa je  $\mu=1,2 \cdot 10^{-4}\text{ T}\cdot\text{m/A}$ . Kolika je induktivnost ovog kalema?

1164. Na torusu načinjenom od gvožđa, relativne permeabilnosti  $\mu_r=5000$ , nalaze se dva kalema. Prvi kalem ima  $N_1=300$  navojaka, a drugi  $N_2=3000$  navojaka. Kolika je uzajamna induktivnost ovih kaleмова? Površina poprečnog preseka torusa je  $S=100\text{ cm}^2$ , a dužina njegovog srednjeg obima  $l=30\text{ cm}$ .

1165. U osi torusnog kalema iz zadatka 1161. nalazi se beskonačno dug i prav provodnik, kroz koji protiče struja jačine  $I$ . Kolika je uzajamna induktivnost provodnika i kalema?

1166. U homogenom magnetnom polju, magnetne indukcije  $B=1\text{ T}$ , kreće se provodnik, dužine  $l=0,5\text{ m}$ , brzinom  $v=20\text{ m/s}$  po pravcu koji je normalan na pravac linija sile magnetnog polja i provodnika. Kolika je indukovana  $\epsilon_{ms}$  u provodniku?

1167. Kružni ram, površine  $S=100\text{ cm}^2$ , nalazi se u homogenom magnetnom polju, magnetne indukcije  $B=1\text{ T}$ . Ravan rama je normalna na pravac vektora  $\vec{B}$ . Ko-



lika je srednja vrednost indukovane  $\mathcal{E}$  u ramu ako se jačina magnetnog polja ravnomerno smanji na nulu u toku vremenskog intervala  $\Delta t = 0,01$  s?

1168. Ispred južnog pola stalnog magneta čiji polovi imaju kvadratni poprečni presek, stranica  $a = 2$  m, kreće se strujni ram brzinom  $v = 1$  m/s. Otpornost rama je  $R = 0,1 \Omega$ . Magnetno polje ispred pola magneta može da se smatra homogepim, a njegova indukcija je  $B = 0,2$  T.

- a) Kolika je indukovana  $\mathcal{E}$  u ramu?  
 b) Koliki se rad mora uložiti da bi se jedna strana rama prevukla ispred pola?

1169. Kroz kalem, dužine  $l = 20$  cm i površine poprečnog preseka  $S = 60$  cm<sup>2</sup>, protiče struja stalne jačine  $I = 0,6$  A. Kalem ima  $N = 300$  navojaka, ravnomerno namotanih na celoj njegovoj dužini. Ako se struja kroz kalem svede na nulu (isključenjem kabela iz strujnog kola) za vreme  $\Delta t = 0,001$  s, izračunati srednju vrednost indukovane  $\mathcal{E}$  u kalem, pod pretpostavkom da se on nalazi u vazduhu.

1170. Kolika će da bude indukovana  $\mathcal{E}$  u kalemu iz prethodnog zadatka ako se u njemu nalazi jezgro od mekog gvožđa, za koje važi zavisnost  $B = B(H)$  data na strani 460?

1171. U homogenom magnetnom polju, jačine  $H = 4$  kA/m, ravnomerno rotira pravougaoni ram, površine  $S = 155$  cm<sup>2</sup>, stalnom ugaonom brzinom  $\omega = 15$  rad/s. Osa rotacije rama  $OO'$  je u ravni rama i zaklapa ugao  $\varphi = 120^\circ$  prema pravcu linija sile magnetnog polja. Kolika je amplituda indukovane  $\mathcal{E}$  u ramu?

1172. Od tanke provodne žice načinjen je kružni kalem, poluprečnika  $r = 10$  cm, sa  $N = 455$  navojaka. Magnetno polje, čije su linije sile normalne na ravan navojaka, ravnomerno povećava svoju indukciju od  $B_1 = 0$  do  $B_2 = 0,15$  T u toku vremenskog intervala  $\Delta t = 0,2$  s. Kolika je srednja vrednost indukovane  $\mathcal{E}$  u kalem?

1173. U homogenom magnetnom polju, indukcije  $B = 1$  T, ravnomerno rotira ugaonom brzinom  $\omega = 30$  rad/s pravougaoni ram, dimenzija  $4 \times 8$  cm<sup>2</sup>, načinjen od provodne žice. Ram rotira oko ose  $OO'$ , koja je normalna na pravac linija sile magnetnog polja i leži u ravni provodnika. Kolika je:  
 a) amplituda indukovane  $\mathcal{E}$  u ramu,  
 b) frekvencija indukovane  $\mathcal{E}$ ?

1174. Kružni ram, površine  $S = 100$  cm<sup>2</sup>, obrće se u homogenom magnetnom polju indukcije  $B = 2$  mT stalnom ugaonom brzinom  $\omega = 314$  rad/s na način prikazan na slici. Odrediti:

- a) zavisnost indukovane  $\mathcal{E}$  od vremena, tj. zavisnost  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(t)$ ,

- b) amplitudu indukovane  $\mathcal{E}$ ,  
 c) frekvenciju i period indukovane  $\mathcal{E}$ .

1175. Metalni ram, površine  $S = 400$  cm<sup>2</sup>, nalazi se u homogenom magnetnom polju, čija se indukcija menja po zakonu

$$B = B_0(1 - e^{-kt})$$

gde je  $B_0 = 0,5$  mT i  $k = 1$  1/s. Kolika je indukovana  $\mathcal{E}$  u ramu posle vremena  $t = 2,3$  s ako je on u položaju maksimalnog fluksa?

1176. Kroz strujno kolo, induktivnosti  $L = 3$  mH i otpornosti  $R = 0,1 \Omega$ , jačina struje se menja u toku vremena prema dijagramu na slici. Nacrtati odgovarajući dijagram indukovane  $\mathcal{E}$  samoindukcije. Kolika je struja samoindukcije u kolu?

1177. Kvadratni ram, stranica  $a = 20$  cm, postavljen je normalno na linije sile homogenog magnetnog polja indukcije  $B_0 = 0,1$  T. Kolika će da bude indukovana  $\mathcal{E}$  u provodniku ako magnetna indukcija opadne ravnomerno od svoje početne vrednosti  $B_0$  za 50% u toku vremena  $\Delta t_1 = 10$  ms, a u toku narednog vremenskog intervala od  $\Delta t_2 = 5$  ms do nule? Nacrtati dijagram promene jačine magnetne indukcije  $B = B(t)$  i indukovane  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(t)$ .

1178. Kružni ram, poluprečnika  $r = 0,1$  m, nalazi se u homogenom magnetnom polju indukcije  $B = 1$  mT. Magnetna indukcija se menja prema dijagramu na slici. Nacrtati dijagram:

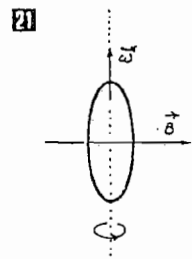
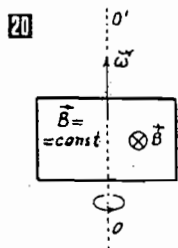
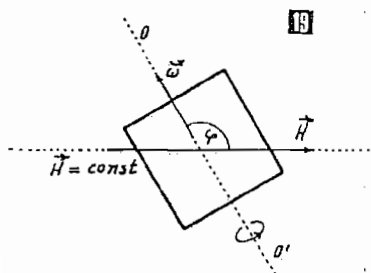
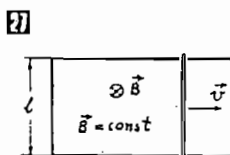
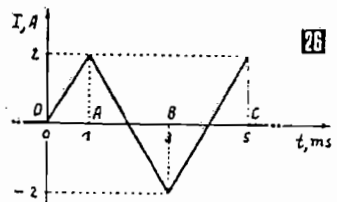
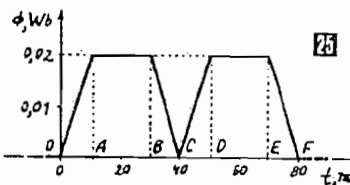
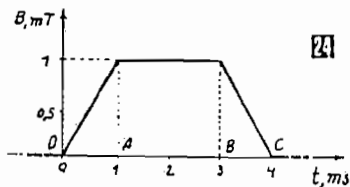
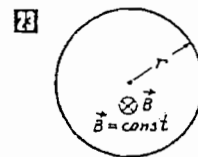
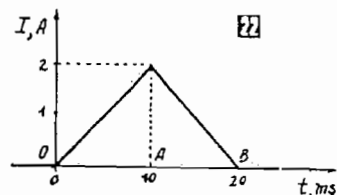
- a)  $\mathcal{E}$  u ramu, tj. zavisnost  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(t)$ ;  
 b) indukovane struje u ramu ako je otpornost rama  $R = 0,1$  k $\Omega$ , tj. zavisnost  $I = I(t)$ .

1179. Dijagram promene magnetnog fluksa kroz strujno kolo prikazan je na slici. Nacrtati odgovarajući dijagram promene indukovane  $\mathcal{E}$  u kolu, tj. dijagram zavisnosti  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(t)$ .

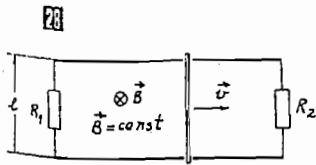
1180. Kroz kolo, induktivnosti  $L = 1$  mH, protiče struja koja se menja prema dijagramu na slici. Otpornost kola je  $R = 10 \Omega$ . Nacrtati odgovarajuće dijagrame indukovane  $\mathcal{E}$  samoindukcije  $\mathcal{E}_s = \mathcal{E}_s(t)$  i dijagram struje samoindukcije  $I_s = I_s(t)$ .

1181. Po nepokretnim šinama pomera se provodni štap na kome se nalaze dva točkica, koja se kotrljaju po šinama bez trenja. Dužina štapa je  $l = 1,5$  m. Sistem se nalazi u homogenom magnetnom polju, indukcije  $B = 0,1$  T, pri čemu vektor  $\vec{B}$  ima pravac i smer kao na slici. Štap se kreće po šinama stalnom brzinom  $v = 20$  m/s.

- a) Kolika je indukovana  $\mathcal{E}$  u štapu?  
 b) Koliki je rad Amperove sile za vreme  $t = 2$  s? Podužne električne otpornosti štapa i šine su jednake i iznose  $\rho' = 0,01 \Omega/\text{m}$ .







1182. Metalni štap se kreće po metalnim šinama na čijim krajevima su vezani otpornici otpornosti  $R_1$  i  $R_2$ . Štap se kreće brzinom  $v$ , a razmak između šina je  $l$  [20]. Sistem se nalazi u magnetnom polju, magnetne indukcije  $B$ , čije su linije sile normalne na ravan u kojoj se nalaze šine i štap. Otpornost štapa i šina se zanemaruje.

- Kolika induktivna struja protiče kroz štap?
- Kolika je potrebna snaga za pokretanje štapa pod uslovom da se trenje zanemari?

1183. Kružni metalni ram, poluprečnika  $r$ , postavljen je u homogeno magnetno polje, indukcije  $B$ , tako da je ravan rama normalna na pravac linija sile magnetnog polja. Po ovom ramu se transversalno kreće, stalnom brzinom  $v$ , metalni štap. Kolika indukovana struja protiče kroz štap? Podužna otpornost rama i štapa jednaka je i iznosi  $\rho$ .

1184. Ram načinjen od provodne žice ima oblik jednakostraničnog trougla stranica  $a=5\text{ cm}$  [21]. Ram je postavljen u homogeno magnetno polje, indukcije  $B_1=1,5\text{ T}$ , čije su linije sile normalne na ravan u kojoj leži ram. Kolika će količina elektriciteta proteći kroz ovaj ram kada se magnetna indukcija kroz njega smanji na  $B_2=0,5\text{ T}$ ? Otpornost rama je  $R=2\ \Omega$ .

1185. Pljosnati kalem sa  $N=100$  kružnih navojaka, srednjeg poluprečnika  $r=15\text{ cm}$ , postavljen je tako da je njegova osa horizontalna i paralelna Zemljinom magnetnom meridijanu. Kalem se nalazi u vazduhu i dovoljno je udaljen od svih gvozdenih predmeta. Navojci kalema su kratko vezani i imaju otpornost  $R=3,4\ \Omega$ . Kolika će količina elektriciteta proteći kroz kalem ako se on obrne za ugao  $180^\circ$  oko vertikalne ose simetrije? Horizontalna komponenta Zemljinog magnetnog polja ima jačinu  $H_z=16\text{ A/m}$ .

1186. Kvadratni ram, otpornosti  $R$  i stranice  $a$ , nalazi se u homogenom magnetnom polju indukcije  $B$  [22]. Kolika će količina elektriciteta proteći kroz ram ako se on deformiše u:

- pravougaonik čije su stranice u odnosu  $1:2$ ;
  - pravougaonik zanemarljivo male jedne stranice;
  - dva kvadrata čije su površine u odnosu  $1:4$ ?
- Linije sile magnetnog polja normalne su na ravan u kojoj se nalazi ram.

1187. Provodni ram ima  $N=100$  navojaka, svaki površine  $S_0=0,2\text{ cm}^2$ . Ram je postavljen tako da je njegova ravan vertikalna i paralelna linijama sile Zemljinog magnetnog polja, čija horizontalna komponenta ima indukciju  $B=20\ \mu\text{ T}$ . Kolika će količina elektriciteta proteći kroz ram ako se on obrne za ugao  $\theta=60^\circ$  oko vertikalne ose simetrije? Otpornost rama je  $R=0,1\ \Omega$ .

1188. Kalem sa  $N=1000$  kružnih navojaka, od kojih svaki ima površinu  $S=100\text{ cm}^2$ , postavljen je u homogeno magnetno polje, jačine  $H=0,1\text{ MA/m}$ , čije su linije sile paralelne osi kalema. Otpornost svih navojaka je  $R=2\ \Omega$ . Kolika će količina elektriciteta proteći kroz kratko vezani kalem kada se u njega uvuče gvozdeno jezgro relativne permeabilnosti  $\mu_r=500$ ?

1189. Kvadratni strujni ram, stranica  $a$ , načinjen je od provodnika specifične otpornosti  $\rho$  i površine poprečnog preseka  $S$ . Ram je postavljen pored pravog i dugog provodnika kroz koji protiče struja jačine  $I$  [23]. Kolika će količina elektriciteta proteći kroz ram kada se isključi struja koja protiče kroz provodnik?

1190. U kalemu se indukuje *ems* samoindukcije  $\mathcal{E}_s=20\text{ V}$  prilikom smanjenja jačine struje kroz njega od  $I_1=5\text{ A}$  na  $I_2=3\text{ A}$ , za vreme  $\Delta t=0,01\text{ s}$ . Kolika je induktivnost kalema?

1191. Dva kalema su namotana jedan preko drugog. Prvi ima induktivnost  $L_1=0,5\text{ H}$ , a drugi  $L_2=0,7\text{ H}$ . Termogena otpornost drugog kalema je  $R_2=100\ \Omega$ , a kroz prvi protiče struja jačine  $I_1=10\text{ A}$ , koja se sveđe na nulu (isključenjem kalema) za vreme  $\Delta t=1\text{ ms}$ . Kolika je srednja vrednost indukovane struje međusobne indukcije koja će pri ovoj proticati kroz drugi kalem? Oba kalema su u vazduhu.

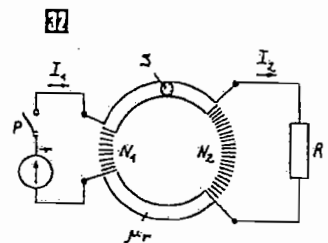
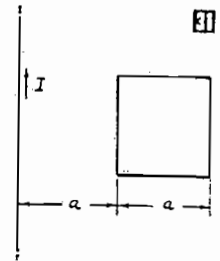
1192. Na gvozdenom torusu, srednjeg obima  $l=2\text{ m}$  i površine poprečnog preseka  $S=10\text{ cm}^2$ , namotana su dva kalema, koji imaju  $N_1=100$  navojaka i  $N_2=200$  navojaka. Na drugi kalem je vezan otpornik, otpornosti  $R=200\ \Omega$ , a na prvi — električni izvor tako da kroz njega protiče struja jačine  $I_1=10\text{ A}$  [24].

Kolika će količina elektriciteta proteći kroz otpornik kada se prekidač  $P$  isključi? Uzeti da relativna permeabilnost gvožđa od koga je torus načinjen iznosi  $\mu_r=1000$ .

1193. Električni izvor, *ems*  $\mathcal{E}=490\text{ V}$  i unutrašnje otpornosti  $r=10\ \Omega$ , vezan je na kalem otpornosti  $R=235\ \Omega$  i induktivnosti  $L=5\text{ H}$ . Kolika je energija magnetnog polja ovog kalema?

1194. Jačina magnetnog polja u gvozdenom jezgru elektromotora je  $H=2\text{ kA/m}$ . Kolika je zapreminska gustina magnetne energije u gvožđu ako za njega važi zavisnost  $B=B(H)$  data na strani 460?

1195. Koliki je odnos zapreminskih gustina magnetne energije u prerezu torusnog jezgra strujnog kalema i u gvozdenom delu jezgra ako je relativna permeabilnost gvožđa od koga je jezgro načinjeno  $\mu_r=1000$ ?



## 4. Naizmjenična struja

Trenutne vrednosti harmonijske naizmjenične struje i napona mogu se predstaviti relacijama

$$i = I_0 \sin(\omega t - \varphi_1)$$

$$u = U_0 \sin(\omega t - \varphi_2)$$

gde su  $I_0$  i  $U_0$  — njihove maksimalne vrednosti,  $\omega = 2\pi\nu$  — kružna frekvencija,  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  — njihove faze.

Efektivne vrednosti harmonijske naizmjenične struje i napona su

$$I = I_0 / \sqrt{2}$$

$$U = U_0 / \sqrt{2}$$

Impedanca kalema, induktivnosti  $L$ , je

$$Z_L = L\omega$$

a kondenzatora, kapacitivnosti  $C$ ,

$$Z_C = \frac{1}{C\omega}$$

Impedanca kola naizmjenične struje, u kome su redno vezani otpornik termogene (ornske) otpornosti  $R$ , kalem induktivnosti  $L$  i kondenzator kapacitivnosti  $C$  (skraćeno RLC-kolo) je

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

dok je jačina struje kroz ovakvo kolo

$$I = \frac{U}{Z}$$

gde je  $U$  — napon na njegovim krajevima.

Pad napona na termogenom otporniku je  $U_R = RI$ , na kalemu  $U_L = L\omega I$ , a na kondenzatoru  $U_C = \frac{1}{C\omega} I$ .

1196. Kroz termogeni otpornik, otpornosti  $R = 15 \Omega$ , protiče struja čija je jačina u zavisnosti od vremena data relacijom  $i = |I_0 \sin \omega t|$ , gde je  $I_0 = 10 \text{ A}$  i  $\omega = 314 \text{ rad/s}$ . Kolika je:

- srednja jačina ove struje,
- efektivna jačina ove struje,
- oslobodena količina toplote u otporniku za vreme  $t = 5 \text{ min}$ ?

1197. Kalem, induktivnosti  $L = 19,1 \text{ mH}$  i termogene otpornosti  $R = 8 \Omega$ , priključen je na izvor naizmjenične struje napona  $u = U_0 \sin \omega t$ , gde je  $U_0 = 179 \text{ V}$ , a  $\omega = 314 \text{ rad/s}$ . Napisati jednačine:

- jačine struje koja protiče kroz kalem,
- $ems$  samoindukcije u kalemu.

1198. Kondenzator kapacitivnosti  $C = 20 \mu\text{F}$  i otpornik termogene otpornosti  $R = 100 \Omega$  vezani su redno i priključeni na izvor naizmjeničnog napona  $U = 20 \text{ V}$  i frekvencije  $\nu = 50 \text{ Hz}$ . Kolika struja protiče kroz ovo kolo?

Fazni ugao između napona i struje u RLC kolu je

$$\varphi = \arctg \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

a faktor snage

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}$$

Snage naizmjenične struje su:

$$\begin{aligned} \text{— prividna } P &= UI & [P] &= \text{V} \cdot \text{A} \\ \text{— aktivna } P_a &= UI \cos \varphi & [P_a] &= \text{W} \\ \text{— reaktivna } P_r &= UI \sin \varphi & [P_r] &= \text{var} \end{aligned}$$

U RLC-kolu naizmjenične struje nastaje rezonancija ako je

$$L\omega = \frac{1}{C\omega}$$

pa je rezonantna kružna frekvencija kola

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

a jačina struje u kolu

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R}$$

I i II Kirhofovo pravilo za kolo naizmjenične struje primenjuju se u vektorskom obliku.

Prenosni odnos transformatora je

$$\frac{U_s}{U_p} = \frac{I_p}{I_s} = \frac{N_s}{N_p}$$

gde su  $U_p, I_p, N_p$  — napon, jačina struje i broj navojaka primara transformatora, a  $U_s, I_s, N_s$  — napon, jačina struje i broj navojaka sekundara.

1199. Kalem, koeficijenta induktivnosti  $L = 10 \text{ H}$ , i termogeni otpornik, otpornosti  $R = 1000 \Omega$ , vezani su redno i priključeni na električnu mrežu naizmjeničnog napona  $U = 220 \text{ V}$  i frekvencije  $\nu = 50 \text{ Hz}$ . Kolika jačina struje protiče kroz kolo?

1200. Frekvencija javne električne mreže u Evropi je  $\nu_1 = 50 \text{ Hz}$ , a u Severnoj Americi je  $\nu_2 = 60 \text{ Hz}$ . Za koliko je veća induktivna otpornost nekog kalema priključenog na javnu električnu mrežu u Severnoj Americi nego u Evropi?

1201. Termogeni otpornik, otpornosti  $R = 200 \Omega$ , i kalem, induktivnosti  $L = 0,5 \text{ H}$ , vezani su redno i priključeni na javnu električnu mrežu, napona  $U = 220 \text{ V}$  i frekvencije  $\nu = 50 \text{ Hz}$ . Koliki su:

- jačina struje koja protiče kroz kolo,
- naponi  $U_R$  i  $U_L$ ,
- faktor snage kola?

1202. Otpornik, termogene otpornosti  $R = 10 \Omega$ , vezan je redno sa kalemom induktivnosti  $L = 0,1 \text{ H}$ . Ovo kolo je vezano na izvor naizmjenične struje čija trenutna vrednost  $ems$  je  $e = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$ , gde je  $\mathcal{E}_0 = 494 \text{ V}$ , a  $\omega = 314 \text{ rad/s}$ . Koliki su:

- efektivna vrednost  $ems$ ,
- efektivna vrednost struje kroz kolo,
- odnos napona na krajevima otpornika  $U_R$  i kalema  $U_L$ ?

1203. Kada se torusni kalem, termogene otpornosti  $R = 11 \Omega$ , priključi na izvor naizmjenične struje, napona  $U = 210 \text{ V}$  i frekvencije  $\nu = 50 \text{ Hz}$ , kroz njega protiče struja jačine  $I = 3,5 \text{ A}$ .

- Kolika je induktivnost kalema?
- Kolika bi struja proticala kroz polovinu ovog kalema ako bi se ona priključila na isti električni izvor?

1204. Termogeni otpornik, otpornosti  $R = 200 \Omega$ , kondenzator kapacitivnosti  $C = 4 \mu\text{F}$  i kalem induktivnosti  $L = 0,3 \text{ H}$  vezani su redno i priključeni na električni izvor napona  $U = 220 \text{ V}$ . Koliki su:

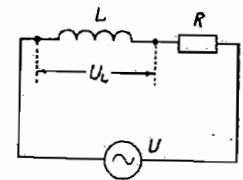
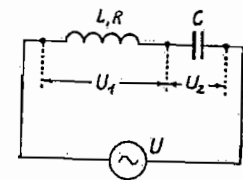
- jačina struje koja protiče kroz ovo kolo pri rezonanciji,
- rezonantna frekvencija ovog kola,
- naponi  $U_R$ ,  $U_L$  i  $U_C$  pri rezonanciji,
- faktor snage ovog kola pri rezonanciji?

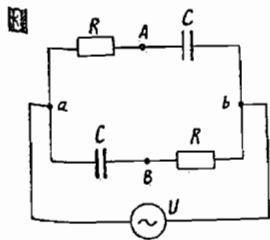
1205. Kalem, induktivnosti  $L = 0,2 \text{ H}$  i termogene otpornosti  $R = 13,5 \Omega$ , vezan je redno sa kondenzatorom kapacitivnosti  $C = 20 \mu\text{F}$ . Napon električne mreže je  $U = 218 \text{ V}$ , a frekvencija  $\nu = 50 \text{ Hz}$ .

- Kolika struja protiče kroz kolo?
- Koliki su naponi  $U_1$  i  $U_2$ ?

1206. U kolu naizmjenične struje, frekvencije  $\nu = 50 \text{ Hz}$ , nalaze se vezani termogeni otpornik, otpornosti  $R = 10 \Omega$ , i kalem zanemarljive termogene otpornosti. Kroz kolo protiče struja jačine  $I = 5 \text{ A}$ , pri čemu je napon na krajevima kalema  $U_L = 40 \text{ V}$ . Koliki su:

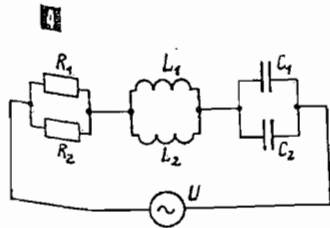
- induktivnost kalema,
- napon mreže,
- snaga koju troši ovo kolo?





1207. Električno kolo naizmjenične struje, prikazano na slici 7, sastoji se iz dva termogena otpornika jednakih otpornosti  $R$  i dva kondenzatora jednakih kapacitivnosti  $C$ . Efektivna vrednost napona na polovima generatora naizmjenične struje iznosi  $U=220$  V. Koliki je napon između tačaka A i B?

1208. Na javnu električnu mrežu priključeno je električno kolo prikazano na slici 8 u kome je:  $R_1=10 \Omega$ ,  $R_2=20 \Omega$ ,  $L_1=3,2$  mH,  $L_2=6,4$  mH;  $C_1=160 \mu\text{F}$ ,  $C_2=320 \mu\text{F}$ . Koliki su naponi na krajevima termogenih otpornika, induktivnih kalemova i kondenzatora?



1209. U kolu naizmjenične struje 9 nalaze se dva kondenzatora vezana redno, jednakih kapacitivnosti  $C_1=C_2=1 \mu\text{F}$ . Paralelno prvom kondenzatoru vezan je otpornik, otpornosti  $R=0,1$  M $\Omega$ . Frekvencija izvora naizmjenične struje iznosi  $\nu=50$  Hz, a njegov napon  $U=220$  V. Kolika je snaga električne struje koja protiče kroz otpornik?

1210. Veza dva kondenzatora 10, kapacitivnosti  $C_1=0,1 \mu\text{F}$  i  $C_2=0,2 \mu\text{F}$ , i dva otpornika, jednakih otpornosti  $R=100 \Omega$ , priključena je na javnu električnu mrežu ( $U=220$  V;  $\nu=50$  Hz). Koliki je napon na krajevima kondenzatora?

1211. Na slici 11 dato je RLC-strujno kolo u kome su  $r=18 \Omega$ ,  $L=38,3$  mH i  $C=88,5 \mu\text{F}$ . Trenutna vrednost napona električnog izvora je

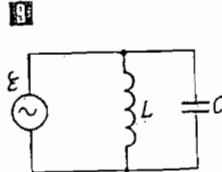
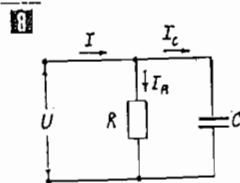
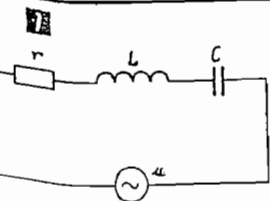
$$u = U_0 + U_1 \sin \omega_1 t + U_3 \sin 3\omega_1 t$$

gde je  $U_0=200$  V,  $U_1=300$  V,  $U_3=150$  V i  $\omega_1=314$  rad/s.

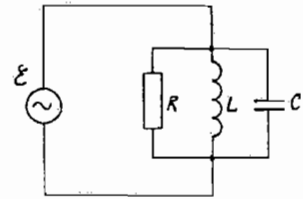
Ustanoviti jednačinu trenutne vrednosti jačine struje koja protiče kroz kolo.

1212. Na električnu mrežu, napona  $U=220$  V i frekvencije  $\nu=50$  Hz, priključeno je električno kolo prikazano na slici 12, u kome je  $R=11 \Omega$ , a  $C=50 \mu\text{F}$ . Koliku struju daje električna mreža ovom kolu?

1213. Na slici 13 prikazano je LC-kolo naizmjenične struje u kome je  $L=2$  H i  $C=10 \mu\text{F}$ , dok je *ems* izvora  $\mathcal{E}=110$  V, a njena frekvencija  $\nu=50$  Hz. Koliku struju daje električni izvor ovom kolu?



1214. Termogeni otpornik, otpornosti  $R=20 \Omega$ , kalem induktivnosti  $L=1$  mH, i kondenzator, kapacitivnosti  $C=1000$  nF, vezani su paralelno 14 na izvor naizmjenične struje čija *ems* ima amplitudu  $\mathcal{E}_0=141$  V i kružnu frekvenciju  $\omega=10^4$  rad/s. Koliku struju daje izvor ovom kolu?



1215. Motor naizmjenične struje priključen je na javnu električnu mrežu napona  $U=220$  V. Izmereno je da pri tome kroz njegove navoje protiče struja jačine  $I=20$  A. Na pločici motora naznačeno je da je njegov faktor snage  $\cos \varphi=0,90$ , a stepen korisnog dejstva  $\eta=0,85$ .

- Kolikom snagom motor opterećuje električnu mrežu?
- Kolika je aktivna snaga motora?
- Kolika je njegova korisna snaga?
- Za koje vreme bi ovim motorom mogao da se podigne teret mase  $m=4$  t na visinu  $h=10$  m?

1216. Električni motor ima namotaje termogene otpornosti  $R=35 \Omega$  i induktivnosti  $L=0,1$  H. Koliki je faktor snage motora ako je predviđen za priključenje na električnu mrežu frekvencije  $\nu=50$  Hz?

1217. Električni motor, snage  $P=6,5$  kW, ima faktor snage  $\cos \varphi=0,80$ . Kolika jačina struje protiče kroz ovaj motor kada se on priključi na električnu mrežu napona  $U=380$  V?

1218. Korisna snaga motora naizmjenične struje iznosi  $P_k=10$  kW, dok je njegov stepen korisnog dejstva  $\eta=0,80$ .

- Ako je faktor snage ovog motora  $\cos \varphi=0,90$ , izračunati snagu kojom ovaj motor opterećuje javnu električnu mrežu.
- Kolika jačina struje protiče kroz ovaj motor pri njegovom radu?

1219. Jednofazni motor, korisne snage  $P_k=1,5$  kW, ima stepen korisnog dejstva  $\eta=0,75$  i faktor snage  $\cos \varphi=0,77$ . Motor je priključen na električnu mrežu napona  $U=220$  V, dvožičnim bakarnim vodom dužine  $l=50$  m. Odrediti presek voda tako da gubitak napona duž voda ne iznosi više od 3%.

1220. Koliko se puta smanje Džulovi gubici energije na električnom vodu, pri jednakoj snazi, ako se napon 4 puta poveća?

1221. Broj navojaka u primaru transformatora je  $N_p=300$ , a u sekundaru  $N_s=3600$ .

- Koliki je prenosni odnos transformatora?
- Ako se primar priključi na električnu mrežu napona  $U_p=220$  V, koliki će da bude napon na krajevima sekundarnog kalema?

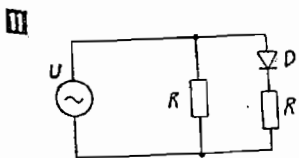
1222. Snaga sekundara transformatora iznosi  $P_s=0,5$  MW, a stepen korisnog dejstva transformatora  $\eta=0,99$ . Kolika je snaga gubitaka transformatora?

1223. Snaga sekundara transformatora je  $P_s=0,3$  MW, a stepen korisnog dejstva transformatora  $\eta=0,98$ . Primar transformatora je priključen na visokonaponsku mrežu napona  $U_p=6$  kV. Kolika struja protiče kroz njegov primar?

1224. Transformator, snage  $P=880$  W, ima prenosni odnos  $n=25$ . Kolika jačina struje protiče kroz sekundar, a kolika kroz primar ovog transformatora, ako se njegov primar priključi na električnu mrežu napona  $U=220$  V?

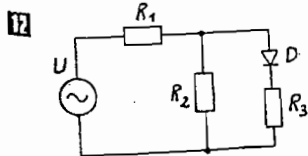
1225. a) Koliki je odnos napona  $U_L$  i  $U_C$  redno vezanog RLC-kola pri rezonanciji?

b) Koliki je ovaj odnos pri dva puta većoj, a koliki pri dva puta manjoj frekvenciji?

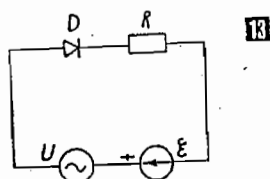


1226. Dotok vode u akumulaciju hidrocentrale je  $q=3\text{ m}^3/\text{s}$ , dok je pad vode  $h=80\text{ m}$ . Prividna snaga alternatora je  $P=6\text{ MVA}$ , faktor snage  $\cos\varphi=0,90$ , dok je ukupni stepen korisnog dejstva hidrocentrale  $\eta=0,60$ . Kolika je:

- proizvedena aktivna električna energija za vreme  $t=16$  časova,
- proizvedena reaktivna energija za isto vreme,
- potrošnja energije akumulacije za isto vreme?



1227. U kolu harmonijske naizmjenične struje nalaze se dva termogena otpornika, jednakih termogenih otpornosti  $R=2\text{ k}\Omega$ , i dioda D idealnih karakteristika. Efektivna vrednost napona električnog izvora je  $U=220\text{ V}$ . Kolika se količina toplote oslobodi u otpornicima za vreme  $t=10\text{ min}$ ?

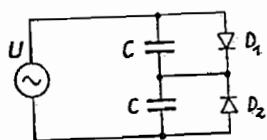


1228. Na slici 13 je prikazano kolo naizmjenične struje, u kome su otpornosti otpornika  $R_1=10\ \Omega$ ,  $R_2=20\ \Omega$ ,  $R_3=15\ \Omega$ , dok je napon izvora  $U=10\text{ V}$ . Kolika je snaga električne struje u otpornicima otpornosti  $R_2$  i  $R_3$ ?

1229. U strujnom kolu prikazanom na slici 14 nalazi se izvor naizmjenične struje, čiji se napon menja po zakonu

$$u = U_0 \cos \omega t$$

gde je  $U_0=100\text{ V}$ , a ems izvora jednosmerne struje  $\mathcal{E}=50\text{ V}$ . Ako su karakteristike diode D u kolu idealne, nacrtati dijagram struje koja protiče kroz ovo kolo.



1230. U kolu naizmjenične struje, prikazanom na slici 15, nalaze se dva kondenzatora, jednakih kapacitivnosti C i dve diode idealnih karakteristika. Kružna frekvencija napona električnog izvora je  $\omega$ . Kolika je:

- ekvivalentna kapacitivnost kola,
- impedanca kola?

1231. Tri termogena otpornika, jednakih otpornosti  $R=10\ \Omega$ , vezani su u kolo naizmjenične struje na način prikazan na slici 16. Dioda u kolu poseduju idealne ispravljačke karakteristike, dok je trenutna vrednost napona električnog izvora

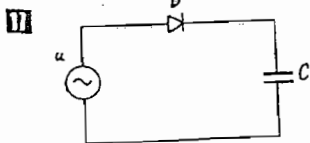
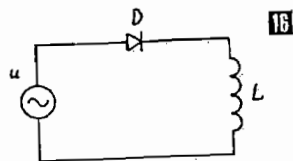
$$u = U_0 \sin \omega t$$

gde je  $U_0=100\text{ V}$  i  $\omega=314\text{ rad/s}$ .

- Napisati jednačine trenutnih vrednosti sve tri naznačene struje u kolu.
- Kolike su njihove efektivne vrednosti?

1232. Induktivni kalem L vezan je preko diode D idealnih karakteristika, na izvor naizmjenične struje, čiji se napon menja po zakonu  $u = U_0 \sin \omega t$ . Nacrtati dijagram jačine struje koja protiče kroz ovo kolo.

1233. Kondenzator C vezan je, preko diode D idealnih karakteristika, na izvor naizmjenične



struje, čiji se napon menja po zakonu  $u = U_0 \sin \omega t$ . Nacrtati dijagram jačine struje koja protiče kroz ovo kolo.

1234. Grejač, snage  $P=1\text{ kW}$ , predviđen za napon  $U=220\text{ V}$ , greškom je priključen na dva fazna provodnika električne mreže, napona  $380\text{ V}/220\text{ V}$ , umesto na jedan fazni i nulti provodnik. Šta će se dogoditi sa grejačem?

## 5. Elektromagnetne oscilacije

Elektromagnetne oscilacije u LC-oscilatornom kolu su harmonijske. Njihova kružna frekvencija je

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

a period oscilovanja

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{LC}$$

gde je L — induktivnost kalema, a C — kapacitivnost kondenzatora.

Jačina električnog polja između ploča kondenzatora i magnetnog polja kalema menjaju se tokom vremena po zakonu

$$E = E_0 \sin \frac{1}{\sqrt{LC}} t$$

$$H = H_0 \cos \frac{1}{\sqrt{LC}} t$$

što znači da su ove promene fazno pomerene za  $(\pm \pi/2)\text{ rad}$ .

Ukoliko se gubici električne energije u oscilatornom kolu ne kompenzuju, amplitude

$E_0$  i  $H_0$  opadaju tokom vremena po eksponencijalnom zakonu

$$E_0(t) = E_0 e^{-\alpha t}, \quad H_0(t) = H_0 e^{-\alpha t}$$

gde je  $\alpha = R/2L$  — koeficijent slabljenja, dok je odgovarajuća rezonantna kružna frekvencija

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

Ako se gubici električne energije u oscilatornom kolu kompenzuju, elektromagnetne oscilacije su neprigušene, i kroz kolo protiče harmonijska naizmjenična struja stalne amplitude. Dakle,

$$i = I_0 \sin \frac{1}{\sqrt{LC}} t$$

Kroz provodnik priključen na ma koju tačku ovog kola protiče električna struja koja se tokom vremena menja na isti način, jer će se potencijal spojenog kraja provodnika menjati po istom zakonu, tj.

$$\varphi = \varphi_0 \sin \omega t$$

gde je  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ .

1235. Kapacitivnost kondenzatora u LC-oscilatornom kolu je  $C=0,1\ \mu\text{F}$ . Kolika treba da bude induktivnost kalema da bi rezonantna frekvencija oscilatornog kola bila  $\nu=5\text{ kHz}$ ?

1236. LC-oscilatorno kolo se sastoji od vazdušnog kondenzatora sa ravnim pločama, površine  $S_0=100\text{ cm}^2$ , koje se nalaze na rastojanju  $d=1\text{ mm}$ , i induktivnog kalema, dužine  $l=50\text{ cm}$ , površine poprečnog preseka  $S_1=10\text{ cm}^2$ , koji sadrži  $N=1000$  navojaka bakarnog provodnika, poredanih jedan pored drugog. Koliki je period oscilovanja ovog oscilatornog kola?

1237. Kroz LC-oscilatorno kolo protiče struja  $i = I_0 \sin \omega t$ , gde je  $I_0=0,01\text{ A}$  i  $\omega=1000\text{ rad/s}$ . Izračunati kapacitivnost kondenzatora ako je induktivnost kalema  $L=20\text{ mH}$ .

1238. Ako se jačina električnog polja između ploča kondenzatora u LC-oscilatornom kolu menja po zakonu  $E = E_0 \cos \omega t$ , ustanoviti kako se menja jačina magnetnog polja kalema.

1239. LC-oscilatorno kolo je načinjeno od kondenzatora, kapacitivnosti  $C=10\text{ pF}$ , i kalema induktivnosti  $L=0,5\text{ mH}$ . Ako je amplituda struje koja protiče kroz kolo  $I_0=1,5\text{ mA}$ , odrediti amplitudu napona na krajevima kondenzatora.

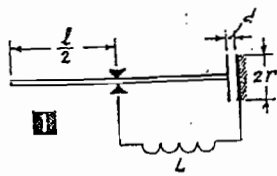
1240. Ako su sve veličine iz prethodnog zadatka poznate sa relativnom greškom od  $\pm 1\%$ , kolika je maksimalna relativna greška sa kojom je određena amplituda napona?

1241. Kada je u LC-oscilatornom kolu kondenzator (1), tada je njegova rezonantna frekvencija  $\nu_1$ , a kada se u njemu nalazi kondenzator (2), rezonantna frekvencija je  $\nu_2$ . Kolika će biti ova frekvencija kada se ovi kondenzatori vežu:

- paralelno,
- redno?

1242. LC-oscilatorno kolo se sastoji od kalema, induktivnosti  $L=0,2\text{ H}$ , i kondenzatora, kapacitivnosti  $C=10\text{ }\mu\text{F}$ . Kondenzator se tako naelektriše da je napon između njegovih krajeva  $U=2\text{ V}$ , pa se onda priključi na kalem, posle čega u kolu nastanu elektromagnetne oscilacije. Kolika je jačina struje u ovom kolu u trenutku kada je energija električnog polja kondenzatora jednaka energiji magnetnog polja kalema?

1243. U LC-oscilatornom kolu nalazi se kalem, induktivnosti  $L=24\text{ mH}$  i omske otpornosti  $R=200\text{ }\Omega$ , i kondenzator kapacitivnosti  $C=48\text{ }\mu\text{F}$ . Kolika je rezonantna frekvencija ovog oscilatornog kola?



1244. Metalni štap, dužine  $l$ , načinjen od metala Jungovog modula elastičnosti  $E_y$  i gustine  $\rho$ , uklešten je po sredini 1, pa predstavlja polutalasnih mehanički rezonator. Na čeonj površini štapa nalazi se laka metalna kružna pločica, poluprečnika  $r$ . Naspram ove pločice, na rastojanju  $d$ , nalazi se pričvršćena ista takva pločica, tako da one čine vazdušni kondenzator. Ovaj kondenzator je vezan preko polovine štapa sa kalemom, induktivnosti  $L$ , na način prikazan na slici, tako da čine električni rezonator. Kolika je rezonantna frekvencija ovog kola kada štap:

- ne osciluje,
- osciluje, i to tako da je amplituda oscilovanja njegovih krajeva  $x_0$ ?

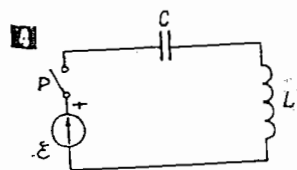
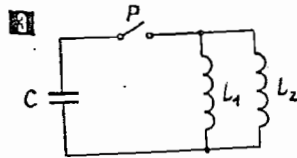
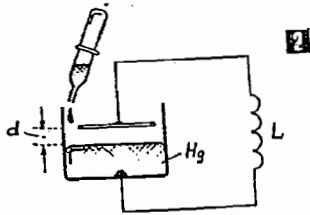
1245. LC-oscilatorno kolo se sastoji od kalema, induktivnosti  $L$ , kondenzatora načinjenog od suda sa živom i kružne metalne ploče, koja se nalazi na rastojanju  $d$  iznad slobodne površine tečnosti 2. Kolika će nastati relativna promena rezonantne frekvencije ovog kola ako se u sud unese kap žive mase  $m$ ? Smatrati da je površina poprečnog preseka suda  $S$  i da je gustina žive  $\rho$ .

1246. Koliki je relativni gubitak energije LC-oscilatora, tokom jedne oscilacije, ako je njegova omska otpornost  $R$ ? Smatrati da je oscilacija tokom ovog perioda harmonijska.

1247. Za koje vreme opadne za  $e$  puta (gde je  $e$ —osnova prirodnog logaritma):

- amplituda električnog polja kondenzatora, tj. magnetnog polja kalema,
- ukupna energija neprigušenih elektromagnetnih oscilacija koje se odvijaju u LC-oscilatornom kolu?

1248. Oscilatorno kolo 3 je načinjeno od jednog kondenzatora i dva induktivna kalema.



a) Kolika je rezonantna frekvencija ovog oscilatornog kola?

b) Pri otvorenom prekidaču P, kondenzator se naelektriše vezivanjem na električni izvor napona  $U$ . Zatim se prekidač uključi. Kolike su najveće jačine struja koje protiču kroz kalemove?

1249. U strujnom kolu prikazanom na slici 1 nalaze se kalem induktivnosti  $L$ , kondenzator kapacitivnosti  $C$ , prekidač P i električni izvor  $\mathcal{E}$  zanemarljive unutrašnje otpornosti. Koliki su:

- najveća jačina struje koja protiče kroz kalem,
- najviši napon između ploča kondenzatora posle uključenja prekidača P?

## 6. Elektromagnetno polje. Elektromagnetni talasi

Kada se naelektrisanje  $q$  ne kreće ( $v=0$ ) u odnosu na referentni sistem, tada ono poseduje samo kulonsko električno polje, čiji

vektor jačine  $\vec{E}_{kul}$ , ima radijalan pravac.

Ako se naelektrisanje kreće ravnomerno ( $v=const$ ;  $v \neq 0$ ), onda ono poseduje i magnetno polje. Vektor jačine ovog polja  $\vec{H}$  u

nekoj tački polja normalan je na vektor  $\vec{E}_{kul}$ , i leži u onoj normalnoj ravni na pravac kretanja naelektrisanja u kojoj se trenutno nalazi i naelektrisanje. Jačine obe komponente ovog elektromagnetnog polja opadaju sa kvadratom rastojanja  $r$  posmatrane tačke od izvora polja ( $E_{kul}, H \sim 1/r^2$ ), što znači da se na relativno većim rastojanjima njihov uticaj može zanemariti u mnogim praktičnim slučajevima. Naelektrisanje u ovom slučaju ne može da bude izvor elektromagnetnih talasa i pored toga što poseduje jednu vrstu elektromagnetnog polja.

Međutim, ukoliko se naelektrisanje  $q$  kreće promenljivo, ubrzanjem  $a$ , ono poseduje elektromagnetno polje koje se odlikuje talasnim svojstvima i, za razliku od prethodnog, naziva se indukcijom elektromagnetno polje. Naime, intenziteti električne i magnetne komponente ovog polja opadaju znatno sporije sa promenom rastojanja  $r$  posmatrane tačke od izvora polja ( $E_i, H_i \sim 1/r$ ). Vektori jačine

ovih polja  $\vec{E}_i$  i  $\vec{H}_i$  međusobno su normalni i oba leže u ravni normalnoj na pravac kretanja naelektrisanja  $q$  u kojoj se i ono nalazi.

Zapreminske gustine energije oba ova polja su jednake, tj.  $w_e = w_m$ . Kako se ovakvo polje najčešće razmatra u vakuumu, to je

$$\frac{cE_i^2}{2} = \frac{\mu H_i^2}{2}$$

tj.

$$cE_i^2 = \mu H_i^2$$

odakle je

$$H_i = \frac{E_i}{\sqrt{\mu/\epsilon}}$$

Ako se indukcijom elektromagnetno polje obrazuje u vakuumu, onda imenilac prethodne relacije

$$Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi\text{ }\Omega \approx 377\text{ }\Omega$$

predstavlja impedancu slobodnog prostora, pa je tada

$$H_i = \frac{E_i}{Z_0}$$

Jačina električne komponente indukcijonog elektromagnetnog polja u vakuumu je

$$E_i = \mu_0 \frac{qa}{4\pi r} \sin \theta$$

gde je  $\mu_0$  — permeabilnost vakuuma,  $q$  — naelektrisanje čestice koja se kreće,  $a$  — njeno ubrzanje,  $r$  — rastojanje tačke polja od naelektrisanja,  $\theta$  — ugao između vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{r}$ .

Jačina magnetne komponente indukcijonog elektromagnetnog polja je

$$H_i = \frac{E_i}{Z_0} = \frac{qa}{4\pi cr} \sin \theta$$

gde je  $c=1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  — brzina prostiranja elektromagnetnih talasa u vakuumu.

Prostec oko naelektrisanja  $q$  određen uslovom  $E_i > E_{kul}$  naziva se zona talasa. Naime, sve tačke za koje je  $r > c/a$  nalaze se u zoni talasa.

Slobodni nosioci elektriciteta (elektroni) u strujnom provodniku kroz koji protiče harmonijska struja osciluju duž provodnika po zakonu

$$z = z_0 \sin \omega t$$

i postaju izvor indukcijonog elektromagnetnog polja, čije se promene prenose u okolni prostor, usled čega nastaje elektromagnetni talas.

Ubrzana čestice, naelektrisanja  $q$ , koja osciluje harmonijski je

$$a = \frac{d^2z}{dt^2} = -z_0 \omega^2 \sin \omega t$$

pa su komponente elektromagnetnog talasa na udaljenosti  $r$  (sferni talas)

$$E_r = \mu_0 \frac{q z_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi r} \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right)$$

$$H_\theta = \frac{E_r}{Z_0} = \frac{q z_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi r c} \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right)$$

gde je  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  — brzina kojom se prenose promene  $E_i$  i  $H_i$  kroz vakuum, odnosno brzina prostiranja elektromagnetnih talasa kroz vakuum.

Ako se elektromagnetni talasi prostiru kroz neku drugu sredinu, onda je njihova brzina prostiranja

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$$

gde je  $\epsilon_r$  — relativna permitivnost, a  $\mu_r$  — relativna permeabilnost te sredine.

Zona talasa u ovom slučaju je određena prostorom za koji je

$$r \gg \frac{\lambda^2}{4\pi^2 z_0}$$

gde je  $\lambda = cT$  — talasna dužina elektromagnetnog talasa.

Ako je reč o ravanskom elektromagnetnom talasu, čiji je izvor prav strujni provodnik u

pravcu Z-ose, komponente polja su:

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= 0 \\ E_z &= E_0 \sin \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} H_x &= 0 \\ H_y &= H_0 \sin \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \\ H_z &= 0 \end{aligned}$$

gde je  $\omega$  — kružna frekvencija električne struje kroz provodnik.

Jačina elektromagnetnog talasa je

$$I = E_i H_i$$

a jedinica

$$[I] = [E][H] = \frac{N \cdot A}{C \cdot m} = \frac{W}{m^2}$$

Pointingov vektor je određen vektorskim proizvodom

$$\vec{P} = \vec{E}_i \times \vec{H}_i$$

Snaga zračenja naelektrisanja  $q$  kao izvora elektromagnetnog talasa je

$$P = \mu_0 \frac{q^2 z_0^2 \omega^4}{12\pi c}$$

1250. Jačina indukcionog električnog polja u nekoj tački iznosi  $E = 4 \text{ mV/m}$ . Kolika je zapreminska gustina energije ovog polja u toj tački ako se ona nalazi u vazduhu?

1251. LC-oscilatorno kolo se sastoji od kalemata, induktivnosti  $L = 2 \mu\text{H}$ , i kondenzatora, čija kapacitivnost može da se menja od  $C_1 = 20 \text{ pF}$  do  $C_2 = 90 \text{ pF}$ . Koliki je opseg talasnih dužina elektromagnetnih talasa koji mogu izazvati rezonanciju u ovom oscilatornom kolu?

1252. LC-oscilatorno kolo se sastoji od vazdušnog kondenzatora čije su ploče u obliku diska, poluprečnika  $r = 10 \text{ cm}$ , i kalemata induktivnosti  $L = 0,75 \mu\text{H}$ . Rezonantna talasna dužina ovog kola u vazduhu je  $\lambda = 9 \text{ m}$ . Koliko je rastojanje između ploča kondenzatora?

1253. Elektromagnetni talas, frekvencije  $\nu = 9 \text{ MHz}$ , prelazi iz vakuuma u nemagnetnu sredinu relativne permitivnosti  $\epsilon_r = 81$  (voda). Kolika je promena talasne dužine ovog elektromagnetnog talasa pri prelasku iz jedne sredine u drugu?

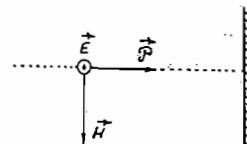
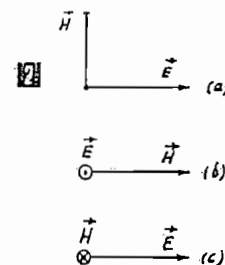
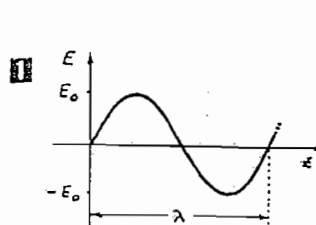
1254. Ispred provodnika, dužine  $l = 1 \text{ m}$ , jačina indukcionog električnog polja menja se po zakonu

$$E = E_0 \sin \omega t$$

gde je  $E = 100 \mu\text{V/m}$  i  $\omega = 10^5 \text{ rad/s}$ . Ako vektor  $\vec{E}$  ima pravac provodnika, napisati jednačinu indukovanе  $\mathcal{E}$  u provodniku, tj. jednačinu potencijalne razlike na krajevima provodnika.

1255. Na slici 1 je prikazan dijagram električnog polja harmonijskog elektromagnetnog talasa u nekom trenutku  $t$ . Napisati odgovarajuću zavisnost  $E(z, t)$ .

1256. Od metalnog štapa, dužine  $l$ , načini se emisiona antena u vidu polutalasnog rezonatora. Kolika je talasna dužina emitovanih elektromagnetnih talasa?



1257. Na slici 2 su prikazana tri međusobna odnosa vektora  $\vec{E}$  i  $\vec{H}$  elektromagnetnog talasa u jednoj tački na pravcu njegovog prostiranja. U kom pravcu i smeru se prostire ovaj elektromagnetni talas u sva tri slučaja?

1258. Ravanski polarizovani elektromagnetni talas prostire se u pravcu normale na ravnu metalnu ploču 3, od koje se odbije. U čemu se sastoji promena vektora  $\vec{E}$  i  $\vec{H}$  prilikom refleksije?

1259. Elektron se kreće ubrzanjem  $a = 10^{18} \text{ m/s}^2$  kroz vakuum.

a) Kolike su jačine indukcionog električnog i magnetnog polja na rastojanju  $r = 10 \text{ m}$  od elektrona?

b) Odrediti prostor oko elektrona u kome je kulonovsko polje slabije od indukcionog.

1260. Jačina električnog polja elektromagnetnog talasa menja se po zakonu

$$E(x, t) = E_0 \sin(at + bx)$$

gde je  $E_0 = 200 \text{ V/m}$ ,  $a = 6,28 \cdot 10^8 \text{ 1/s}$ ,  $b = 4,55 \text{ 1/m}$ . Ovaj elektromagnetni talas potpuno apsorbuje telo na koje talas naiđe u pravcu normale.

a) U kakvoj sredini se prostire talas?

b) Koliki je pritisak talasa na telo?

c) Koliku snagu talasa apsorbuje površina teja od  $S = 1 \text{ m}^2$ ?

1261. Elektron osciluje duž jedne prave u vakuumu. Amplituda oscilovanja iznosi  $z_0 = 2 \text{ cm}$ , a frekvencija  $\nu = 0,4 \text{ GHz}$ .

a) Napisati jednačine  $E(x, t)$  i  $H(x, t)$  za tačku koja se nalazi na rastojanju  $x = 10 \text{ m}$  od putanje elektrona.

b) Koliki je intenzitet Pointingovog vektora u ovom slučaju?

1262. Elektromagnetni polarizovani talas nailazi na bakarnu ploču koja je postavljena normalno na pravac prostiranja talasa. Koncentracija slobodnih elektrona u ploči je  $n = 10^{24} \text{ 1/m}^3$ , a specifična električna provodnost  $\gamma = 57 \text{ MS/m}$ . Jačina indukcionog električnog polja ovog talasa iznosi  $E = 200 \mu\text{V/m}$ .

a) Kolikom Lorencovom silom deluje ovo polje na jedan elektron u površinskom sloju ploče?

b) Koliki je pritisak ovog talasa na ploču?

1263. Kolika je srednja snaga zračenja elektrona koji vrši harmonijske oscilacije, amplitude  $z_0 = 0,1 \text{ nm}$  i kružne frekvencije  $\omega = 6,5 \cdot 10^{14} \text{ rad/s}$ ? Kolika je zona talasa u ovom slučaju?

1264. Amplituda jačine struje u polutalasnoj emisionoj anteni iznosi  $I_0 = 0,5 \text{ A}$ . Odrediti:

a) emisionu snagu predajnika,

b) ekvivalentnu otpornost antene.

Smatrati da je jačina struje jednaka u svim delovima antene.

1265. U sinhrotronu se kreće snop elektrona brzinom  $v = 0,990c$ , gde je  $c$  — brzina prostiranja svetlosti u vakuumu. Jačina struje koju čine ovi elektroni iznosi  $I = 0,5 \text{ A}$ . Kolika je snaga zračenja ovog snopa elektrona?

1266. Jačina magnetnog polja elektromagnetnog ravnanskog talasa menja se po zakonu

$$H = H_0 \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right)$$

Prilikom refleksije elektromagnetnog talasa od metalne ploče koja je postavljena normalno na pravac prostiranja talasa, ispred ploče se obrazuje stojeći elektromagnetni talas.

- Opisati položaj čvorova nastalog stojećeg talasa.
- Kolika je amplituda vektora  $\vec{E}$  u trbusima talasa?
- Kolika je srednja zapreminska gustina energije upadnog talasa?
- Kolika je srednja zapreminska gustina energije stojećeg talasa u njegovim trbusima?

1267. Odrediti energiju koju prenosi ravnanski harmonijski elektromagnetni talas, koji se prostire u vakuumu, u toku vremenskog intervala  $\Delta t = 1$  min, kroz površinu  $S = 10 \text{ cm}^2$  koja je normalna na pravac prostiranja talasa. Amplituda električne komponente elektromagnetnog talasa je  $E_0 = 1 \text{ mV/m}$ , a period oscilovanja talasa ispunjava uslov  $T \ll \Delta t$ .

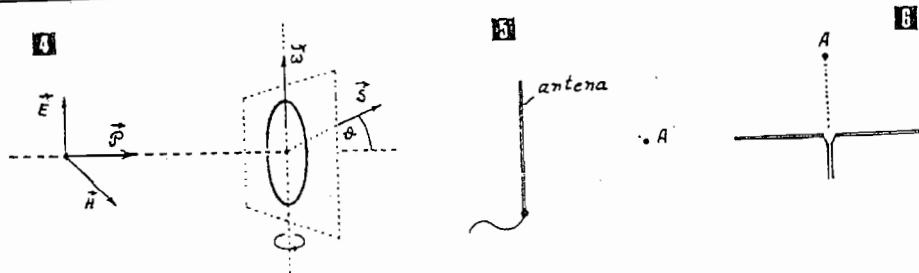
1268. Jačine električnog i magnetnog polja elektromagnetnog talasa menjaju se sinhrono. Naime, ako je elektromagnetni talas harmonijski, jačine ovih polja istovremeno imaju maksimum i istovremeno postaju jednaki nuli. Da li je to slučaj sa električnim i magnetnim poljem u LC-oscilatornom kolu?

1269. Polarizovani, harmonijski elektromagnetni talas se prostire ka kružnom metalnom ramu **A**, koji rotira tako da se vektor njegove ugaone brzine  $\omega$  nalazi u ravni oscilovanja elektromagnetnog talasa (ravan crteža), a normalan je na pravac Pointingovog vektora  $\vec{P}$ . U kom položaju rama će indukovana emf u kolu da bude:

- maksimalna,
- jednaka nuli?

1270. Na slici **B** je prikazana polutalasna antena radio-stanice koja emituje harmonijski polarizovani elektromagnetni talas. Nacrtati vektore  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{P}$  u tački A, u trenutku kada je njihov intenzitet maksimalan.

1271. Na slici **A** je prikazana prijemna polutalasna antena radio-prijemnika. Nacrtati vektore  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{P}$  prijemnog harmonijskog polarizovanog elektromagnetnog talasa u tački A ispred antene, i to u trenutku kada je njihov intenzitet maksimalan.



## OPTIKA

### 1. Fotometrija

• Svetlosni fluks predstavlja brzinu kojom se povećava izračena svetlosna energija kroz posmatranu površinu, tj. snagu svetlosnog izvora. Naime, ako se kroz neku površinu za vreme  $dt$  prenese svetlosna energija  $dW$ , posredstvom elektromagnetnih talasa, onda je odgovarajući svetlosni fluks

$$\Phi = \frac{dW}{dt}$$

Objektivna jedinica svetlosnog fluksa je

$$[\Phi]_{ob} = \frac{[W]}{[t]} = \frac{J}{s} = W$$

dok je odgovarajuća subjektivna jedinica lumen (lm), tj.

$$[\Phi]_{sub} = \text{lm}$$

pri čemu je  $1W = 621 \text{ lm}$ , ali samo za svetlost talasne dužine  $555 \text{ nm}$ .

• Svetlosna jačina svetlosnog izvora definiše se kao količnik izračenog svetlosnog fluksa  $d\Phi$  i prostornog ugla  $d\Omega$  kroz koji se ovaj fluks izračti, tj.

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}$$

Ukoliko je reč o ukupnom svetlosnom fluksu  $\Phi$  koji je izračen u prostornom uglu  $\Omega$ , onda je srednja svetlosna jačina u tom prostornom uglu

$$\langle I \rangle = \frac{\Phi}{\Omega}$$

Svetlosna jačina je jedna od 7 osnovnih veličina SI. Odgovarajuća osnovna jedinica — kandela (cd) definisana je etalonom svetlosne jačine Dakle,

$$[I] = \text{cd}$$

Za izotropni svetlosni izvor, svetlosne jačine  $I$ , ukupni svetlosni fluks ( $\Phi = 4\pi \text{ sr}$ ) dat je relacijom

$$\Phi = 4\pi I$$

Ako je reč o izotropnom svetlosnom izvoru svetlosne jačine  $I = 1 \text{ cd}$ , njegov ukupni svetlosni fluks iznosi

$$\Phi = 12,56 \text{ sr} \cdot 1 \text{ cd} = 12,56 \text{ lm}$$

• Osvetljenje predstavlja površinsku gustinu svetlosnog fluksa koji padne na posmatranu površinu. Naime, ako na površinu  $dS$  padne svetlosni fluks  $d\Phi_{pad}$ , osvetljenje površine je

$$E = \frac{d\Phi_{pad}}{dS}$$

Ukoliko je u pitanju veća površina  $S$  na koju padne ukupni svetlosni fluks  $\Phi$ , onda je srednja osvetljenost posmatrane površine

$$\langle E \rangle = \frac{\Phi_{pad}}{S}$$

Jedinica osvetljenosti je luks (lx). Naime,

$$[E] = \frac{[\Phi]}{[S]} = \frac{\text{lm}}{\text{m}^2} = \text{lx}$$

U praksi se osvetljenje izražava na osnovu ugaone raspodele svetlosne jačine datog svetlosnog izvora i položaja posmatrane tačke u odnosu na svetlosni izvor. Naime, ako je  $I$  — svetlosna jačina izvora svetlosti u pravcu svetlosni izvor — posmatrane tačke,  $r$  — rastojanje posmatrane tačke od svetlosnog izvora, a  $\theta$  — ugao između normale povučene na površinu koja se osvetljava u tački A i pravca svetlosnih zrakovana koji padaju u istu tačku, onda je osvetljenje posmatrane površine u tački A (Lamberov zakon)

$$E = \frac{I}{r^2} \cos \theta$$

• Osvetljaj predstavlja površinsku gustinu svetlosnog fluksa koji se emituje sa posmatrane površine. Naime, ako se sa površine  $dS$  emituje svetlosni fluks  $d\Phi_{em}$  (da li je reč o površini svetlosnog izvora, površini tela koje reflektuje ili površini tela koje propušta svetlost), odgovarajući osvetljaj je

$$R = \frac{d\Phi_{em}}{dS}$$

Ako je reč o većoj površini  $S$  emitera sa koje se emituje ukupni svetlosni fluks  $\Phi_{em}$ , onda je srednji osvetljaj

$$\langle R \rangle = \frac{\Phi_{em}}{S}$$

Jedinica osvetljaja je

$$[R] = \frac{[\Phi]}{[S]} = \frac{\text{lm}}{\text{m}^2}$$

Ako je osvetljaj posledica same refleksije upadnog svetlosnog fluksa, onda je

$$R = \rho E$$

gde je  $\rho$  — koeficijent refleksije osvetljene površine čiji se osvetljaj traži, a  $E$  — njena osvetljenost.

Za prozirna tela (npr. zidovi svetiljke), kod kojih je osvetljaj posledica transmisije

svetlosnog fluksa (bez refleksije upadnog fluksa), važi odnos

$$R = \tau E$$

gde je  $\tau$  — koeficijent transmisije tela, a  $E$  — osvetljenost površine tela na koju pada svetlosni fluks.

• Luminancija (sjajnost) neke površine  $dS$  koja emituje (reflektuje ili propušta) svetlost u nekom pravcu određena je svetlosnom jačinom  $I$  te površine (kao izvora svetlosti) u tom pravcu i projekcije površine  $dS$  na normalnu ravan (površine  $dS_n$ ) u odnosu na posmatrani pravac. Dakle,

$$L = \frac{I}{dS}$$

Kako je  $dS_n = dS \cdot \cos \theta$ , gde je  $\theta$  — ugao između pravca gledanja površine  $dS$  i normale na nju, to je

$$L = \frac{I}{dS \cdot \cos \theta}$$

Jedinica luminancije jeste

$$[L] = \frac{[I] \text{ cd}}{[S] \text{ m}^2}$$

Površine koje idealno rasipaju svetlost imaju luminanciju jednaku u svim pravcima.

Za ovakve površine važi Lamberov zakon i za njih je

$$R = \pi L$$

1272. Kolika je osvetljenost sferne površine, poluprečnika  $R=1$  m, u čijem se središtu nalazi izotropni svetlosni izvor jačine  $I=10$  cd?

1273. Ako bi se na sijalicama, umesto električne snage, označavala svetlosna snaga koju one mogu da emituju, kakav bi podatak trebalo da stoji na sijalici snage  $P=100$  W i stepena korisnog dejstva  $\eta=0,02$ ?

1274. Sijalica, svetlosne jačine  $I=200$  cd, nalazi se u središtu sfernog balona od mat-stakla, poluprečnika  $R=10$  cm.

- Kolika je osvetljenost balona?
- Kolika je njegova luminancija?
- Koliku snagu zrači sijalica u vidu svetlosti?

1275. Iz sijalice, snage  $P=60$  W, izrači se 2% utrošene električne energije u vidu svetlosti. Kolika je jačina ovog svetlosnog izvora? Sijalicu smatrati kao izotropni tačkasti svetlosni izvor.

1276. Bioskopsko platno, površine  $S=12$  m<sup>2</sup>, osvetljeno je električnom lučnom lampom svetlosne jačine  $I=6000$  cd. Kolika je osvetljenost platna ako 0,5% svetlosne energije pada na njega?

1277. Sijalica, snage  $P=60$  W, ima svetlosnu jačinu  $I=50$  cd.

- Kolika se električna snaga troši u ovoj sijalici da bi njen svetlosni fluks bio 1 lm?
- Koliki je stepen korisnog dejstva sijalice?

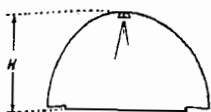
1278. Na vrhu polukružnog tunela **1**, visine  $H=8$  m, nalazi se sijalica svetlosne jačine  $I=200$  cd.

- Kolika je osvetljenost osnove tunela neposredno ispod sijalice, a kolika na na ivici osnove?
- Kolika je osvetljenost donjeg dela polukružne strane tunela?

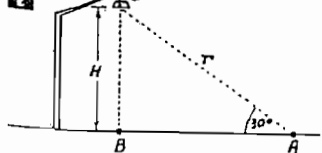
1279. Na sredini tavanice nalazi se sijalica svetlosne jačine  $I=100$  cd. Prostorija je oblika kocke, ivice  $a=3$  m. Kolika je:

- osvetljenost zidova prostorije u njenim uglovima na podu,
- osvetljenost uglova na podu ako su oni sfernog oblika,
- najveća osvetljenost u prostoriji?

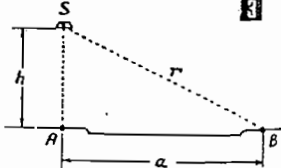
**1**



**2**



**3**



1280. U tački A na putu **2** izmerena je osvetljenost  $E_A=4$  lx, koja potiče od sijalice S. Kolika je najveća osvetljenost na putu?

1281. Otvorena knjiga, površine  $S=500$  cm<sup>2</sup>, osvetljena je sijalicom svetlosne jačine  $I=100$  cd. Knjiga je postavljena u položaj najveće osvetljenosti, koja iznosi  $E=150$  lx.

- Koliki deo svetlosnog fluksa sijalice padne na knjigu?
- Koliki je osvetljaj knjige ako je njen koeficijent refleksije  $\rho=0,63$ ?
- Na kom približnom rastojanju se nalazi knjiga od svetlosnog izvora — sijalice?

Sijalicu smatrati kao izotropni tačkasti svetlosni izvor, a osvetljenost knjige ravnomernom.

1282. Za vreme letnje ravnodnevice Sunce je u podne tačno iznad ekvatora, na geografskoj dužini koja odgovara Beogradu. Koliko puta je tada veća osvetljenost Zemljine površine na ekvatoru od osvetljenosti u Beogradu, čija je geografska širina  $\varphi \approx 45^\circ$ ? Zemlju smatrati sferom.

1283. Ulično osvetljenje je postavljeno samo iznad jedne strane ulice **1**. Kolika treba da bude visina svetiljke  $h$  da bi osvetljenost  $E$  druge strane ulice (u tački B) bila najveća? Uzeti da je srednja širina ulice  $AB=a=10$  m.

1284. Za vreme snimanja filma u studiju napon gradske mreže opadne za 20%, usled čega opadne i svetlosna jačina reflektora, srazmerno smanjenju njihovih električnih snaga. Koliko je puta potrebno povećati vreme eksponiranja filma usled ovoga?

1285. Iznad horizontalne površine nalaze se dva jednaka svetlosna izvora,  $S_1$  i  $S_2$ , od kojih svaki daje ukupan svetlosni fluks  $\Phi=4200$  lm. Izvori se nalaze na visini  $h=2$  m i na međusobnom rastojanju  $l=2$  m.

Kolika je osvetljenost ove površine u tačkama A i B, koje se nalaze ispod izvora, i u tački C, koja je tačno na sredini između ovih tačaka?

1286. Osvetljenost Zemljine površine je  $E=10^3$  lx kada je Sunce u zenitu. Kolika je luminancija površine Sunca? Poluprečnik Zemljine putanje oko Sunca je  $R=1,5 \cdot 10^{11}$  m, a poluprečnik Sunca  $r=7 \cdot 10^8$  m. Smatrati da je zračenje Sunca po Lamberovom zakonu i da je prostiranje svetlosti kroz atmosferu idealno.

1287. Koliku osvetljenost  $E$  treba ostvariti na belom listu hartije, koeficijenta refleksije  $\rho$ , da bi njegova luminancija bila  $L=5$  cd/m<sup>2</sup>? Smatrati da hartija rasipa svetlost po Lamberovom zakonu.

1288. Na kojoj visini se moraju postaviti ulične svetiljke udaljene jedna od druge za  $d=20$  m da bi osvetljenost ulice bila najveća u tačkama koje su na sredini između stubova na kojima su svetiljke?

1289. Kolika je osvetljenost zida, koeficijenta refleksije  $\rho=0,40$ , ako je njegova luminancija;

- $10^4$  cd/m<sup>2</sup>;
- $2$  cd/m<sup>2</sup>?

Smatrati da zid rasipa svetlost po Lamberovom zakonu.

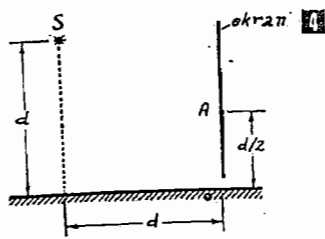
1290. Na rastojanju  $d_1=25$  cm od difuznog zaklona Lumer-Brodhunovog fotometra, postavljena je sijalica svetlosne jačine  $I_1=60$  cd.

a) Na kom rastojanju sa druge strane zaklona treba postaviti sijalicu, svetlosne jačine  $I_2=180$  cd, da bi osvetljenost zaklona bila podjednaka sa obe strane?

b) Kolika je osvetljenost zaklona?

1291. Zaklon sa masnom mrljom, kod Bunzenovog fotometra, postavljen je na vodice optičke klupe, čija je dužina  $l=1$  m, a koje sadrže centimetarsku podelu. Svetlosni izvor, jačine  $I=60$  cd, postavljen je na jedan kraj vodica





(na 0. podeljak), a izvor nepoznate svetlosne jačine na drugi kraj vodica (na 100. podeljak). Zaklon sa masnom mrljom podjednako je osvetljen kada je na 30. podeljku. Kolika je jačina nepoznatog svetlosnog izvora?

1292. U kugli od mat-stakla, prečnika  $d=6$  cm, nalazi se tačkasti svetlosni izvor, jačine  $I=100$  cd. Čiji je ukupni svetlosni fluks  $\Phi=1256$  lm. Koeficijent transmisije stakla iznosi  $\tau=0,97$ . Kolika je:

- osvetljenost unutrašnje strane kugle,
- luminancija kugle?

Svetlosni izvor smatrati izotropnim.

1293. Na ravnu ploču od mat-stakla, površine  $S=2$  m<sup>2</sup>, pada svetlosni fluks  $\Phi=1000$  lm. Koeficijent refleksije ploče je  $\rho=0,20$ , a koeficijent transmisije  $\tau=0,70$ .

- Kolika je osvetljenje, osvetljaj i luminancija one strane ploče na koju pada svetlosni fluks?
- Koliki je osvetljaj i luminancija druge strane ploče?

Pretpostaviti da ploča difuzno odbija i propušta svetlost.

1294. Svetlosni izvor u obliku ravne ploče emituje svetlost prema Lambertovom zakonu (tzv. difuzni svetlosni izvor). Dokazati da je ukupni svetlosni fluks ovakvog izvora  $\Phi=\pi I_0$ , gde je  $I_0$  jačina svetlosnog izvora u pravcu normale.

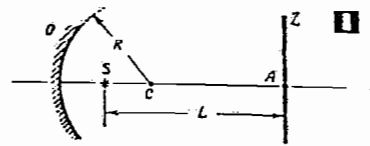
1295. Koliki je koeficijent korisnog dejstva svetiljke sa balonom od mat-stakla, čiji je koeficijent refleksije  $\rho$ , a koeficijent transmisije  $\tau$ ?

1296. Na rastojanju  $d$  od ravnog ogledala i ekrana nalazi se tačkasti svetlosni izvor. Koliki je odnos osvetljenosti u tački A kada se ogledalo nalazi ispred ekrana, i kada se ono ukloni?

1297. Tačkasti svetlosni izvor S, svetlosne jačine  $I=4000$  cd, nalazi se između dva ravna i paralelna ogledala. Koliko treba da bude rastojanje  $d$  da bi osvetljenost u tački B bila  $E_D=430$  lx?

1298. Tačkasti svetlosni izvor jačine  $I$  nalazi se između zaklona Z i ogledala O, čiji je koeficijent refleksije  $\rho_o=1$ . Rastojanje između svetlosnog izvora i zaklona je  $d$ , a između zaklona i ogledala  $D$ . Kolika je osvetljenost zaklona u tački A ako je njegov koeficijent refleksije  $\rho_z=0$ ?

1299. Na visini  $h=5$  m i na rastojanju  $l=10$  m od vertikalnog zida nalazi se sijalica svetlosne jačine  $I=100$  cd. Kolika je osvetljenost tla i zida u tački A? Odrediti njihov odnos. Smatrati da sijalica ima ravnomernu raspodelu svetlosne jačine.



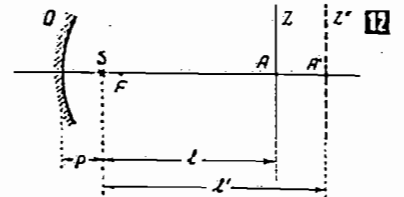
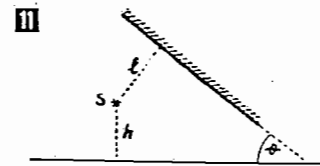
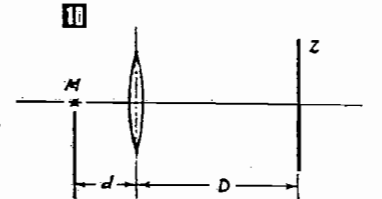
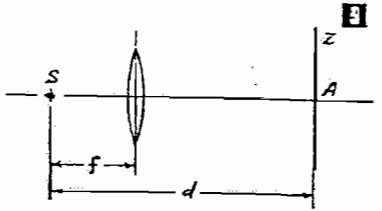
1300. U žiži izdubljenog sfernog ogledala O, poluprečnika krivine  $R$ , nalazi se tačkasti svetlosni izvor S jačine  $I$ . Na rastojanju  $L(L>R)$  od svetlosnog izvora nalazi se ekran Z. Koliko puta je osvetljenost ekrana Z u tački A veća prilikom upotrebe ogledala, a kolika je bez njega?

1301. U žiži sabirnog sočiva, žižne daljine  $f=10$  cm, nalazi se tačkasti svetlosni izvor jačine  $I=50$  cd. Na rastojanju  $d=1$  m od izvora nalazi se ekran Z. Kolika je osvetljenost ekrana u tački A kada se sočivo nalazi ispred njega, a kolika kada se ono ukloni?

1302. Pomoću tačkastog svetlosnog izvora M, svetlosne jačine  $I$ , osvetljava se ekran Z. Između svetlosnog izvora i ekrana nalazi se sabirno sočivo žižne daljine  $f$ . Rastojanje sočiva od svetlosnog izvora je  $d$ , dok je rastojanje između sočiva i ekrana  $D$ . Kolika je osvetljenost u tački A ekrana ako je  $f>D$ ?

1303. Iznad horizontalne ravni postavljeno je pod uglom  $\theta$  ravno ogledalo. Između ogledala i horizontalne ravni nalazi se tačkasti svetlosni izvor S jačine  $I$ . Normalno rastojanje svetlosnog izvora od horizontalne ravni je  $h$ , a od ogledala  $l$ . Kolika je osvetljenost horizontalne ravni u tački A? Smatrati da je koeficijent refleksije ogledala jednak jedinici.

1304. Tačkasti svetlosni izvor S nalazi se na rastojanju  $p(p<f)$  od temena izdubljenog sfernog ogledala O, poluprečnika krivine  $R$ . Kada se ekran nalazi u položaju Z', na rastojanju  $l'$  od svetlosnog izvora, osvetljenost tačke A' iznosi  $E'$ . Kolika je osvetljenost E iste tačke na ekranu kada se on nalazi na rastojanju  $l$  od svetlosnog izvora?



## 2. Geometrijska optika

Prema zakonu odbijanja svetlosti upadni ugao  $\alpha$  jednak je odbojnom uglu  $\alpha'$ , tj.

$$\alpha = \alpha'$$

pri čemu upadni zrak, normala i odbijeni zrak leže u istoj ravni.

Apsolutni indeks prelamanja  $n$  neke sredine definiše se kao količnik brzine prostiranja svetlosti u vakuumu  $c$  i brzine prostiranja svetlosti u toj sredini  $v$ , tj.

$$n = \frac{c}{v}$$

Kako je za sve supstancije  $v < c$ , za njih je  $n > 1$ .

Relativni indeks prelamanja sredine u koju svetlost ulazi (druga sredina) u odnosu na sredinu kroz koju se ona prostire pre nailaska na graničnu površinu (prva sredina) dat je relacijom

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2}$$

gde su  $v_1$  i  $v_2$  — brzine prostiranja svetlosti u prvoj i drugoj sredini, ili

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$$

gde su  $n_1$  i  $n_2$  — apsolutni indeksi prelamanja prve i druge sredine.

Prema zakonu prelamanja je

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$$

gde je  $n_1$  — apsolutni indeks prelamanja sredine iz koje svetlosni talas izlazi,  $n_2$  — apsolutni indeks prelamanja sredine u koju svetlosni talas ulazi, dok su  $\alpha$  i  $\beta$  — upadni i prelomni ugao, pri čemu upadni zrak, normala i prelomljeni zrak leži u istoj ravni.

U opštem slučaju je

$$n \cdot \sin \left( \begin{array}{l} \text{ugao između} \\ \text{pravca prosti-} \\ \text{ranja talasa} \\ \text{i normale} \end{array} \right) = \text{inv}$$

gde je  $n$  — apsolutni indeks prelamanja sredine kroz koju se svetlost prostire.

Prilikom nailaska talasa na optički red sredinu može da nastane totalna refleksija ako je upadni ugao  $\alpha$  veći od graničnog ugla totalne refleksije  $\alpha_g$ , koji je određen relacijom

$$\alpha_g = \arcsin \left( \frac{n_2}{n_1} \right)$$

gde su  $n_1$  i  $n_2$  — apsolutni indeksi prelamanja optički gušće i ređe sredine.

Ako se svetlosni talas prostire kroz sredinu apsolutnog indeksa prelamanja  $n$ , onda predenom putu  $l_0$  (geometrijska dužina puta) odgovara optička dužina puta

$$l = n l_0$$

dok je talasna dužina svetlosti u ovoj sredini

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

gde je  $\lambda_0$  — talasna dužina posmatrane monohromatske svetlosti u vakuumu.

Indeks prelamanja  $n$  supstancije od koje je načinjena optička prizma može se odrediti pomoću relacije

$$n = \frac{\sin \left( \frac{\theta + \delta_{\min}}{2} \right)}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

gde je  $\theta$  — ugao prizme, a  $\delta_{\min}$  — minimalni ugao skretanja zraka svetlosti prilikom prolaska kroz prizmu.

Za optički klin, tj. optičku prizmu malog ugla  $\theta$  može da se koristi relacija

$$\delta_{\min} = (n-1)\theta$$

Zavisnost indeksa prelamanja supstancije od talasne dužine  $n(\lambda)$  je složena. U praksi je poznata Košijeva relacija za disperzione supstancije, koja ima oblik

$$n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2}$$

gde su  $a$  i  $b$  — konstante čija vrednost zavisi od vrste disperzione supstancije.

Ako su  $n_D$ ,  $n_F$  i  $n_C$  apsolutni indeksi prelamanja supstancije za monohromatske svetlosti (linije vodonika) talasnih dužina  $\lambda_D = 589,3$  nm,  $\lambda_F = 486,1$  nm i  $\lambda_C = 656,3$  nm, onda se

$n_F - n_C$  naziva srednja disperzija

$$\frac{n_F - n_C}{n_D - 1} \quad \text{relativna disperzija}$$

$$\frac{n_D - 1}{n_F - n_C} \quad \text{koeficijent disperzije (ili Abbev broj)}$$

Žižna daljina  $f$  sfernog ogledala jednaka je polovini poluprečnika krivine  $R$  sferne površine ogledala, tj.

$$f = \frac{R}{2}$$

Jednačina sfernog ogledala ima oblik

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l}$$

gde je  $f$  — žižna daljina ogledala, a  $p$  i  $l$  — rastojanje predmeta i lika od temena ogledala.

U jednačini sfernih ogledala  $f$  se uzima kao pozitivna veličina za izdubljena (konkavna) ogledala, a kao negativna veličina — za ispupčena (konveksna) ogledala. Rastojanja  $p$  i  $l$  uzimaju se kao pozitivne veličine za realne predmete i likove, a kao negativne veličine — za imaginarne predmete i likove.

Uvećanje (linearno) sfernih ogledala definisano je relacijom

$$u = \frac{L}{P} = \frac{l}{p}$$

gde su  $P$  i  $L$  — linearne veličine predmeta i lika.

Recipročna vrednost žižne daljine  $f$  sočiva naziva se optička moć i obeležava se sa  $\omega$ . Naime,

$$\omega = \frac{1}{f}$$

Jedinica optičke moći je dioptrija (D), tj.

$$[\omega] = \frac{1}{[f]} = \frac{1}{\text{m}} = \text{D}$$

Ako se svetlost prelama na sfernoj graničnoj površini, poluprečnika krivine  $R$ , onda za taj slučaj važi relacija

$$\frac{n_2 - n_1}{R} = \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{l}$$

gde su  $n_1$  i  $n_2$  — apsolutni indeksi prelamanja sredina u kojima se nalaze predmet i lik, a  $p$  i  $l$  — rastojanja predmeta i lika od temena granične površine. Količnik  $(n_2 - n_1)/R$  naziva se optička moć sferne površine.

Optička moć sfernog sočiva koje je izrađeno od supstancije apsolutnog indeksa prelamanja  $n$ , a čiji su poluprečnici krivine  $R_1$  i  $R_2$ , određena je relacijom

$$\omega = \frac{1}{f} = \left( \frac{n}{n_2} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

gde je  $n_2$  — apsolutni indeks prelamanja sredine u kojoj se sočivo nalazi. U prethodnoj relaciji poluprečnike krivine treba uzeti kao

1305. Imajući u vidu da je magnetna konstanta  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  T·m/A, a električna konstanta  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$ , izračunati brzinu prostiranja svetlosti u vakuumu.

1306. Koliki je indeks prelamanja stakla ( $\mu_r = 1$ ) čija je relativna permitivnost  $\epsilon_r = 2,5$ ?

pozitivne veličine za ispupčene površine, a kao negativne veličine — za izdubljene površine. Na taj način se dobija da je žižna daljina (optička moć) sabirnih sočiva pozitivna, a rasipnih negativna.

Jednačina sočiva ima oblik

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l}$$

gde su  $p$  i  $l$  — rastojanja predmeta i lika od temena sočiva. Veličine  $p$  i  $l$  treba uzeti kao pozitivne veličine za realne predmete i likove, a kao negativne veličine — za imaginarne predmete i likove.

Uvećanje sočiva je

$$u = \frac{L}{P} = \frac{l}{p}$$

gde su  $P$  i  $L$  — linearne veličine predmeta i lika.

Ekvivalentna optička moć sistema od  $n$  spojenih tankih sočiva je

$$\omega_c = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$$

Ako je reč o dva sočiva optičkih moći  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , koja se nalaze na rastojanju  $a$ , ekvivalentna optička moć ovog sistema sočiva je

$$\omega_c = \omega_1 + \omega_2 - a\omega_1\omega_2$$

ili izražena odgovarajućim žižnim daljinama

$$\frac{1}{f_c} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{a}{f_1 f_2}$$

Uvećanje lupe, žižne daljine  $f$ , dato je relacijom

$$u \approx \frac{s}{f}$$

gde je  $s$  — daljina jasnog vida posmatrača (za normalan organ vida iznosi oko 0,25 m).

Uvećanje teleskopa je

$$u = \frac{f_{ob}}{f_{ok}}$$

gde su  $f_{ob}$  i  $f_{ok}$  — žižne daljine njegovog objektiva i okulara, dok je za mikroskop

$$u = \frac{l_s}{f_{ob} f_{ok}}$$

gde je  $l$  — dužina cevi mikroskopa (rastojanje između objektiva i okulara), a  $s$  — daljina jasnog vida posmatrača.

1307. Kolika je brzina prostiranja svetlosti u staklu čiji je indeks prelamanja  $n=1,5$ ?

1308. Dva paralelna snopa svetlosnih talasa kreću se kroz dve sredine različitih optičkih gustina (vakuum i voda). Koliko je duže vreme prostiranja svetlosnih talasa kroz vodu u odnosu na vreme prostiranja u vakuumu ako je geometrijska dužina njihovog puta  $l_0=10\text{ m}$ ?

1309. Kolika je optička dužina puta svetlosti, talasne dužine  $\lambda=600\text{ nm}$ , ako se u njemu sadrži  $N=10^4$  talasnih dužina?

1310. Ako je talasna dužina svetlosti u vakuumu  $\lambda_0=420\text{ nm}$ , kolika je ona u dijamantu čiji je indeks prelamanja  $n=2,4$ ?

1311. Paralelan snop svetlosti, talasne dužine u vakuumu  $\lambda_0=500\text{ nm}$ , pada pod pravim uglom na staklenu ploču, debljine  $d=8\text{ mm}$ , čiji je indeks prelamanja  $n=1,6$ . Koliko talasnih dužina svetlosti sadrži ploča u svojoj debljini  $d$ ?

1312. Kolika je kružna frekvencija natrijumove žute svetlosti talasne dužine  $\lambda=589,3\text{ nm}$ ?

1313. Ako je indeks prelamanja vode (u odnosu na vazduh)  $n_1=1,33$ , a stakla  $n_2=1,6$ , koliki je indeks prelamanja stakla u odnosu na vodu?

1314. Kolike su konstante  $a$  i  $b$  u Košijevoj jednačini za staklo ako je poznato da je indeks prelamanja stakla  $n_1=1,75$  za svetlost talasne dužine  $\lambda_1=450\text{ nm}$ , a  $n_2=1,7$  za svetlost talasne dužine  $\lambda_2=550\text{ nm}$ ?

1315. Kolika je disperziona moć i Abeov broj kron-stakla ako je njegov indeks prelamanja za natrijumovu žutu svetlost  $n_D=1,5181$ ? Indeks prelamanja kron-stakla za plavu svetlost vodonika iznosi  $n_F=1,5225$ , a za crvenu svetlost vodonika  $n_C=1,5137$ .

1316. U priloženoj tablici su date vrednosti indeksa prelamanja  $n$  kvarca za neke talasne dužine  $\lambda$  monohromatske svetlosti. Nacrtati zavisnost  $n=n(\lambda)$  za kvarc.

|                      |       |       |       |       |       |       |       |
|----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\lambda, \text{nm}$ | 786,5 | 589,3 | 486,1 | 410,0 | 303,4 | 253,7 | 198,8 |
| $n$                  | 1,539 | 1,544 | 1,549 | 1,556 | 1,577 | 1,596 | 1,651 |

1317. Zrak svetlosti, dolazeći iz vazduha, pada na ravnu površinu vode, indeksa prelamanja  $n=1,34$ , od koje se delimično reflektuje.

Koliki treba da bude upadni ugao zraka svetlosti da bi reflektovani zrak bio normalan na prelomni?

1318. Koliki treba da bude upadni ugao zraka svetlosti na graničnu površinu vazduh—staklo da bi ugao između upadnog i prelomnog zraka bio  $\varphi=150^\circ$ ? Smatrati da je indeks prelamanja stakla  $n=1,5$ .

1319. Na slobodnu površinu vode pada zrak svetlosti pod uglom  $\alpha=30^\circ$  prema normalni.

a) Koliki je prelomni ugao?

b) Odakle i pod kojim uglom treba da dođe zrak svetlosti da bi se na ovoj graničnoj površini totalno reflektovao?

c) Koliko puta je manja brzina prostiranja svetlosti u vodi nego u vazduhu? Indeks prelamanja vode je  $n=1,34$ .

1320. Koliki je granični ugao totalne refleksije za graničnu površinu dijamant—vazduh ako je apsolutni indeks prelamanja dijamanta  $n=2,42$ ?

1321. Zrak svetlosti pada na površinu neke tečnosti pod uglom  $\alpha=30^\circ$ , a prelama se pod uglom  $\beta=21^\circ$ . Koliki je indeks prelamanja ove tečnosti, a koliki je granični ugao totalne refleksije za ovu graničnu površinu?

1322. Zrak svetlosti, dolazeći iz stakla, indeksa prelamanja  $n_1=1,7$ , pada na graničnu površinu staklo—vazduh.

a) Koliki treba da bude upadni ugao zraka svetlosti na ovu graničnu površinu da bi se svetlost totalno reflektovala?

b) Koliko treba povećati ovaj ugao ako se iznad stakla nalazi voda, indeksa prelamanja  $n_2=1,33$ ?

1323. Izotropni tečkasti izvor svetlosti nalazi se u vodi na dubini  $h=5\text{ cm}$  od njene slobodne površine.

a) Izračunati poluprečnik kruga na površini vode na kojoj svetlosni zraci izlaze iz nje.

b) Kolika je najveća dužina optičkog puta ovih zrakova u vodi?

Indeks prelamanja vode je  $n=1,34$ .

1324. U širem sudu se nalazi tečnost, indeksa prelamanja  $n=1,25$ . Na dubini  $h=20\text{ cm}$  nalazi se tečkasti svetlosni izvor. Da bi se sprečio izlazak svetlosnih zrakova iz tečnosti, iznad svetlosnog izvora se postavi tanak kružni disk od plute. Koliki treba da bude najmanji prečnik diska da bi se to postiglo?

1325. Iznad staklene ploče, indeksa prelamanja  $n_1=1,60$ , nalazi se sloj vode, indeksa prelamanja  $n_2=1,34$ . Koliki treba da je upadni ugao zraka svetlosti na graničnu površinu staklo—voda da bi se:

a) na njoj totalno reflektovao,

b) totalno reflektovao na graničnoj površini voda—vazduh?

1326. Zrak svetlosti pada pod uglom  $\alpha=30^\circ$  na PP-ploču od liskuna, debljine  $d=0,1\text{ mm}$ .

a) Koliko je i kakvo ugonno pomeranje zraka svetlosti u PP-ploči?

b) Koliko je pomeranje zraka svetlosti po pravcu usled prolaska kroz PP-ploču?

c) Kolika je optička dužina puta svetlosti u PP-ploči?

Indeks prelamanja liskuna je  $n=1,80$ .

1327. Fotografskim aparatom snima se predmet. Za koliko će se pomeriti lik predmeta, u odnosu na objektiv, ako se između objektiv i filma postavi staklena PP-ploča debljine  $d=1,2\text{ cm}$ ? Brzina prostiranja svetlosti u ploči iznosi  $v=(2/3)c$ .

1328. Dve jednake staklene PP-ploče, debljine po  $d=1\text{ mm}$ , nalaze se na rastojanju  $d/2$ . Zrak svetlosti pada na jednu od njih pod uglom  $\alpha=30^\circ$ .

a) Koliko je pomeranje zraka svetlosti po površini druge ploče koju svetlosni zrak napušta?

b) Kakve promene će nastati ako se ploče spoje?

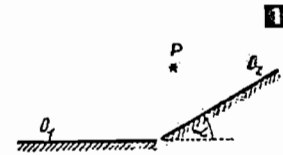
Indeks prelamanja stakla je  $n=1,60$ .

1329. U bioskopskoj sali rastojanje od objektiv projektor do ekrana iznosi  $40\text{ m}$ . Ako je veličina slike na ekranu  $3 \times 3\text{ m}^2$ , kolika je ona na prozorskom staklu ispred projektor pod pretpostavkom da je ono udaljeno  $0,8\text{ m}$  od njegovog objektiv?

1330. Za koliko će se povećati rastojanje između predmeta i lika u ravnom ogledalu ako se rastojanje između ogledala i predmeta poveća za  $10\text{ cm}$ ?

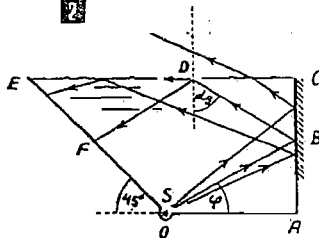
1331. Svetao predmet P se nalazi iznad dva ravna ogledala II. Grafički odrediti prostor iznad ogledala iz koga se mogu videti likovi predmeta u oba ogledala.

1332. Za koliko se prividno približi tekst čitaocu ako se iznad teksta postavi staklena PP-ploča, debljine  $d=5\text{ mm}$  i indeksa prelamanja  $n=1,6$ ? Pretpostaviti da čitalac čita tekst približno pod pravim uglom.



1333. Bazen u obliku kvadrata, strana  $a=8$  m, napunjen je do vrha vodom indeksa prelamanja  $n=1,33$ . Stojeći neposredno pored bazena, čovek posmatra njegovo dno sa visine  $H=1,5$  m u odnosu na površinu vode u bazenu. Čovek pri ovome proceni da je dubina vode u bazenu na njegovom drugom kraju  $h_p=10$  cm.

2

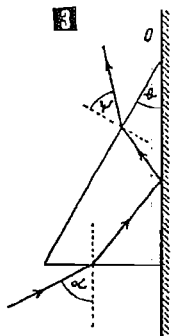


- Kolika je stvarna dubina bazena?
- Kolika bi bila procenjena dubina vode u bazenu neposredno ispred posmatrača?

1334. Sud prikazan na slici 2 napunjen je vodom indeksa prelamanja  $n=1,34$ . Dimenzije suda su  $OA=AC=10$  cm. U uglu suda O nalazi se tačkasti svetlosni izvor S, a delimično na vertikalnoj strani suda je ravno ogledalo. Ostali delovi unutrašnje površine suda apsorbiraju svetlost.

- Koliki je najmanji ugao  $\varphi$  pri kome će svetlosni zraci, reflektovani od ogledala, izlaziti iz vode?
- Kolika je najveća širina kose strane suda EF, osvetljene reflektovanim zracima od slobodne površine vode ako za njih važi zakon prelamanja i odbijanja?

3



1335. Zrak svetlosti pada na donju stranu staklene prizme 3, čiji je ugao pri vrhu  $\theta=30^\circ$ , a indeks prelamanja  $n=1,6$ . Prizma je jednom bočnom stranom naslonjena na ravno ogledalo (prema slici).

- Ako je upadni ugao zraka svetlosti na donju površinu prizme  $\alpha=45^\circ$ , pod kolikim uglom  $\psi$  on napušta prizmu?
- Kolika je najmanja vrednost upadnog ugla  $\alpha$ , pri kome će svetlosni zraci još izlaziti iz prizme?

1336. Optička prizma, čiji je ugao pri vrhu  $\theta=60^\circ$ , načinjena je od stakla indeksa prelamanja  $n=1,65$ . Koliki može da bude najmanji upadni ugao svetlosti na jednu stranu prizme da ne bi nastupila njena totalna unutrašnja refleksija pri izlasku iz prizme?

1337. Pod kolikim upadnim uglom treba da pada monohromatski snop svetlosti na optičku prizmu da bi iz nje izašao pod pravim uglom (ne prelajući se)? Ugao prizme je  $\theta=30^\circ$ , a indeks prelamanja stakla od koga je ona načinjena  $n=1,60$ .

1338. Staklena prizma sa tankim zidom, kod koje je ugao  $\theta=60^\circ$ , napunjena je vodom čiji je indeks prelamanja za ljubičastu svetlost  $n_l=1,343$ , a za crvenu  $n_c=1,329$ .

- Koliki je najveći, a koliki najmanji ugao minimalnog skretanja spektra bele svetlosti?
- Kolika je disperzija ovog spektra?

1339. Staklena prizma, čiji je ugao pri vrhu  $\theta=38^\circ$ , ima za neku monohromatsku svetlost minimalni ugao skretanja  $\delta_{\min}=27^\circ$ . Koliki je indeks prelamanja supstancije od koje je načinjena prizma?

1340. Koliki je najmanji ugao skretanja  $\delta_{\min}$ , a koliki najveći ugao skretanja  $\delta_{\max}$  neke monohromatske svetlosti pri prolasku kroz staklenu prizmu, čiji je indeks prelamanja  $n=1,61$ , a ugao pri vrhu  $\theta=45^\circ$ ?

1341. Sa kolikom bi relativnom greškom bio izračunat indeks prelamanja supstancije od koje je načinjena prizma (zad. 1339) ako bi se primenila približna relacija  $\delta_{\min}=(n-1)\theta$  koja važi samo za male uglove prizme?

1342. Minimalni ugao skretanja monohromatskog snopa svetlosti koji se prelama kroz optičku prizmu, čiji je ugao  $\theta=18^\circ$ , iznosi  $\delta_{\min}=10^\circ$ . Koliki je indeks prelamanja supstancije od koje je prizma načinjena?

1343. Snop monohromatske svetlosti pada pod pravim uglom na bočnu stranu prizme 4, načinjene od stakla, indeksa prelamanja  $n=1,60$ .

a) Kolika je najveća vrednost ugla prizme  $\theta_m$  pri kome snop svetlosti (prikazan na slici) još izlazi iz prizme?

b) Koliki je ugao skretanja  $\delta$  ovog snopa svetlosti ako je ugao prizme  $\theta_m/2$ ?

1344. Staklenom prizmom, čiji je ugao  $\theta=45^\circ$ , zatvorena je cev u kojoj se nalazi glicerina, indeksa prelamanja  $n_1=1,40$  5.

Dolazeći iz glicerina, na prizmu pada paralelni snop monohromatske svetlosti koja se prelama na njenim bočnim površinama. Indeks prelamanja stakla od koga je prizma načinjena iznosi  $n_2=1,8$ . Odrediti ugao  $\gamma$  (prikazan na slici) između pravca izlaznog svetlosnog snopa i površine prizme ako se u cevi:

- nalazi glicerina,
- ne nalazi glicerina.

1345. Snop bele svetlosti pada na bočnu površinu staklene prizme pod takvim upadnim uglom da crveni zrak napušta prizmu po pravcu koji je normalan na njenu drugu bočnu površinu. Izračunati ugao skretanja crvene i ljubičaste svetlosti u odnosu na prvobitni pravac. Ugao prizme je  $\theta=45^\circ$ , a indeks prelamanja stakla od koga je načinjena prizma iznosi za crvenu svetlost  $n_c=1,37$ , a za ljubičastu  $n_l=1,42$ .

1346. Kod Galilejevog eksperimenta rastojanja između posmatrača koji su odašiljali svetlosni signal bila je oko  $d=15$  km. Za koje vreme svetlost pređe ovo rastojanje? Koliku tačnost bi trebalo da ima elektronski hronometar, kojim bi se merilo vreme prostiranja svetlosti na ovoj relaciji, da bi se dobili rezultati zadovoljavajuće tačnosti?

1347. Poluprečnik krivine izdubljenog sfernog ogledala iznosi  $R=60$  cm. Predmet, veličine  $P=20$  cm, nalazi se na rastojanju  $p=45$  cm od ogledala. Kakav je lik predmeta, gde se nalazi i kolika je njegova veličina? Kolika je žižna daljina ogledala?

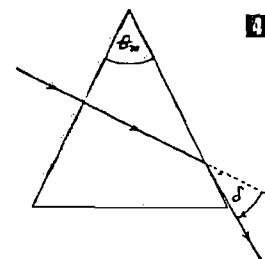
1348. Ispred izdubljenog sfernog ogledala, poluprečnika krivine  $R=40$  cm, nalazi se predmet veličine  $P=6$  cm. Na kom mestu treba da se nalazi predmet da bi njegov lik bio realan i 10 puta veći od predmeta?

1349. Poluprečnik krivine konkavnog sfernog ogledala iznosi  $R=15$  cm. Predmet, veličine  $P=2$  cm, postavi se na rastojanje  $p_1=5$  cm, a zatim na rastojanje  $p_2=20$  cm od ogledala. Kakvi su likovi predmeta, gde se nalaze i kolika je njihova veličina u oba slučaja?

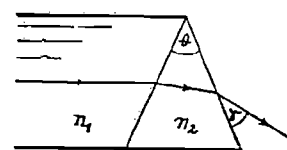
1350. Gde je potrebno postaviti predmet ispred izdubljenog sfernog ogledala, žižne daljine  $f=20$ , cm da bi se dobio dva puta veći imaginarni lik?

1351. Gde je potrebno postaviti predmet ispred izdubljenog sfernog ogledala da bi se dobio lik iste veličine kao predmet? Kakav je ovaj lik?

1352. Ispred ispućenog sfernog ogledala, poluprečnika krivine  $R=54$  cm, nalazi se predmet, veličine  $P=6$  cm na rastojanju  $p=36$  cm od njegovog teme. Kakav je lik predmeta, gde se nalazi i kolika je njegova veličina?



5



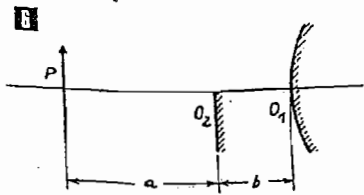
1353. Ispred konveksnog sfernog ogledala nalazi se predmet na rastojanju  $p=R$  od njegovog temena (gde je  $R$ —poluprečnik krivine ogledala). Ako se umesto sfernog ogledala postavi ravno ogledalo, za koliko će se:

- udaljiti lik predmeta od temena ogledala,
- povećati lik predmeta?

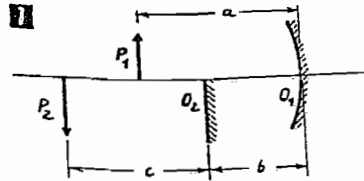
1354. Na kom rastojanju od temena ispuščenog sfernog ogledala, poluprečnika krivine  $R=60$  cm, treba postaviti predmet da bi se dobio 5 puta manji lik nego što je predmet? Kakav je ovo lik?

1355. Na izdubljeno sferno ogledalo, žižne daljine  $f=10$  cm, nanesen je tanak sloj vode indeksa prelamanja  $n=1,33$ .

- Kolika je žižna daljina ovog sistema?
- Kolika bi bila žižna daljina ogledala kada bi se ono duboko potopilo u vodu?



1356. Za određivanje žižne daljine ispuščenog sfernog ogledala  $O_1$  koristi se eksperiment čiji su elementi prikazani na slici 1356. Ravno ogledalo  $O_2$  pomera se duž ose sfernog ogledala sve dotle dok se likovi predmeta P u oba ogledala ne poklope, pri čemu su rastojanja  $a=30$  cm i  $b=10$  cm. Kolika je žižna daljina sfernog ogledala?



1357. Za određivanje žižne daljine izdubljenog sfernog ogledala koristi se eksperiment čiji su elementi prikazani na slici 1357. Ispred sfernog ogledala  $O_1$  postavljaju se dva predmeta,  $P_1$  i  $P_2$ , i ravno ogledalo  $O_2$ . Ravno ogledalo  $O_2$  i predmet  $P_2$  pomeraju se duž ose sfernog ogledala sve dotle dok se likovi predmeta  $P_1$  i  $P_2$  u oba ogledala ne poklope. Pri ovome je dobijeno da su rastojanja  $a=30$  cm,  $b=25$  cm i  $c=6$  cm. Kolika je žižna daljina sfernog ogledala?

1358. Svetao predmet se nalazi na rastojanju  $p=3R$  od temena izdubljenog sfernog ogledala poluprečnika krivine  $R$ . Za koliko će se povećati veličina lika predmeta u ogledalu ako se njegov poluprečnik krivine poveća dva puta?

1359. Svetao predmet se nalazi ispred izdubljenog sfernog ogledala, žižne daljine  $f$ , na rastojanju  $p=5f$  od njegovog temena. Koliko puta će se smanjiti uvećanje ovog predmeta ako se žižna daljina ogledala poveća dva puta?

1360. Dva jednaka izdubljena sferna ogledala, žižnih daljina  $f=3$  cm, postavljena su jedno naspram drugog na rastojanju  $d=5f$ , tako da im se optičke ose poklapaju. Na rastojanju  $p_1=50$  cm od jednog ogledala nalazi se svetao predmet, veličine  $P=2$  cm. Gde se nalazi lik predmeta koji stvara svetlosni snop ako se odbije najpre od bližeg ogledala, zatim od daljeg? Kolika je veličina ovog lika?

1361. Izdubljeno i ispušeno sferno ogledalo, jednakih poluprečnika krivine  $R$ , nalaze se jedno naspram drugog i na rastojanju  $d=3R$ , tako da im se optičke ose poklapaju. Na rastojanju  $p_1=R$  od temena ispuščenog ogledala nalazi se svetao predmet, veličine  $P=6$  cm. Gde se nalazi lik predmeta koji gradi svetlosni snop ako se odbije najpre od ispuščenog ogledala, zatim od izdubljenog? Kolika je veličina ovog lika?

1362. Svetao predmet nalazi se na rastojanju  $p=30$  cm od:

- ravnog ogledala,
  - ravne površine vode, indeksa prelamanja  $n=1,34$ .
- Odrediti položaj lika u oba slučaja.

1363. Granična površina između vazduha i sredine, indeksa prelamanja  $n=1,45$ , sfernog je oblika, poluprečnika krivine  $R=40$  cm. Ispupčena strana ove površine okrenuta je prema vazduhu.

Na optičkoj osi ovog sistema nalazi se svetla tačka na rastojanju  $p=80$  cm od temena sferne površine u vazduhu.

- Gde se nalazi i kakav je lik svetle tačke?
- Kolika je optička moć ove površine?

c) Gde se nalazi i kakav je lik svetle tačke ako se ispred sferne površine umesto vazduha nalazi: 1) voda indeksa prelamanja  $n_1=1,33$ ; 2) staklo indeksa prelamanja  $n_1'=1,80$ ?

Kolika je optička moć sferne površine u oba slučaja?

1364. Dve sredine, vazduh i staklo, razdvojene su sfernom površinom, poluprečnika krivine  $R=10$  cm, čija je izdubljena strana okrenuta vazduhu. Indeks prelamanja stakla je  $n=1,80$ . Svetla tačka se nalazi u vazduhu na rastojanju  $p=4$  cm od temena sferne površine.

a) Gde se nalazi i kakav je lik svetle tačke?

b) Koliko je transversalno, ugaono i longitudinalno uvećanje ovog sistema?

c) Kolika je optička moć sferne površine?

1365. Žižna daljina tankog sfernog sočiva, načinjenog od stakla indeksa prelamanja  $n=1,70$ , iznosi  $f=30$  cm. Koliki su poluprečnici krivina sočiva ako je ono:

- bikonkavno,
- plankonveksno?

1366. Tanko konveksno-konkavno sočivo, načinjeno od stakla indeksa prelamanja  $n_1=1,66$ , ima žižnu daljinu  $f=0,9$  m. Poluprečnik konkavne površine sočiva je  $R_1=0,5$  m. Koliki su:

a) poluprečnik krivine konveksne površine sočiva,

b) optička moć ovog sočiva u vazduhu,

c) optička moć ovog sočiva u vodi indeksa prelamanja  $n_2=1,33$ ?

1367. Tanko bikonkavno sferno sočivo, načinjeno od kron-stakla, indeksa prelamanja  $n=1,52$ , ograničeno je sfernim površinama; poluprečnika krivine  $R_1=30$  cm i  $R_2=40$  cm. Kolika je žižna daljina ovog sočiva?

1368. Bikonveksno tanko sferno sočivo načinjeno od stakla indeksa prelamanja  $n=1,60$  ima žižnu daljinu  $f=10$  cm kada se nalazi u vazduhu. Kolika će biti žižna daljina ovog sočiva:

- ako se ono potopi u tečnost indeksa prelamanja  $n_1=1,50$ ,
- u sredini indeksa prelamanja  $n_2=1,70$ ?

1369. Kolika je žižna daljina sočiva iz prethodnog zadatka ako se ono nalazi u vodi indeksa prelamanja  $n_1=1,33$ .

1370. Tanko konveksno-konkavno sferno sočivo ima poluprečnike krivina: konkavne površine  $R_1=20$  cm, a konveksne površine  $R_2=2R_1$ . Indeks prelamanja stakla od koga je sočivo načinjeno iznosi  $n=1,66$ . Kolika je optička moć ovog sočiva?

1371. Žižna daljina sočiva u vazduhu je  $f_0=1$  m, a u vodi  $f=2,4$  m. Koliki je indeks prelamanja supstance od koje je sočivo načinjeno ako je indeks prelamanja vode  $n_1=1,33$ ?

1372. Simetričnom tankom bikonveksnom sočivu može se povećati poluprečnik jedne krivine za  $10\%$ . Kolika promena žižne daljine odgovara ovoj promeni poluprečnika krivine?

1373. Kolika je optička moć: a) sabirnog sočiva, b) rasipnog sočiva žižne daljine  $f=40$  cm?

1374. Tanko plankonkavno sočivo načinjeno je od kron-stakla indeksa prelamanja  $n_1=1,52$ , a plankonveksno sočivo od flint-stakla indeksa prelamanja  $n_2=1,90$ . Poluprečnici krivina oba sočiva su jednaki i iznose  $R=40$  cm. Sočiva su spojena sfernim površinama **II**. Kolika je ekvivalentna žižna daljina ovog sistema sočiva?

1375. Tanko bikonveksno sočivo, jednakih poluprečnika krivina  $R=30$  cm, načinjeno je od stakla indeksa prelamanja  $n=1,80$ .

a) Sočivo se najpre postavi na živu **I**, pri čemu se do polovine potopi u nju (sl. a). Površina sočiva do žive deluje kao izdubljeno sferno ogledalo. Kolika je ekvivalentna žižna daljina ovog sistema?

b) Gde se nalazi žiža sistema kada je sočivo postavljeno na ravno ogledalo ili se nalazi iznad površine žive (sl. b)?

c) Kolika je, prema tome, promena žižne daljine sistema pri potapanju u živu?

1376. Na ravno ogledalo, iznad koga se nalazi tanak sloj vode, postavljeno je tanko sabirno sočivo, žižne daljine  $f_1=50$  cm, načinjeno od stakla indeksa prelamanja  $n_1=1,60$ . Sočivo se pri ovome do polovine potopi u vodu, čiji je indeks prelamanja  $n_2=1,34$ . Kolika je ekvivalentna žižna daljina ovog sistema?

1377. Tanko plankonveksno sočivo, poluprečnika krivine  $R=20$  cm, načinjeno je od stakla indeksa prelamanja  $n_1=1,60$ .

a) Kolika je žižna daljina i optička moć ovog sočiva u vazduhu?

b) Kolika je žižna daljina ovog sočiva kada se potopi u vodu indeksa prelamanja  $n_2=1,33$  kao na slici **III**, pri čemu se u konkavnom delu sočiva zadržati vazduh?

c) Kolika je žižna daljina ovog sočiva kada se ono u vodi okrene nagore?

1378. Tanko plankonveksno sočivo, poluprečnika krivine  $R=10$  cm, načinjeno je od stakla indeksa prelamanja za ljubičastu svetlost  $n_v=1,50$ , a za crvenu  $n_c=1,48$ . Kolika je dužina hromatične aberacije sočiva?

1379. Koliko puta je veća žižna daljina tankog plankonveksnog sočiva od žižne daljine konkavnog ogledala istog poluprečnika krivine? Od čega zavisi ovaj odnos?

1380. Tanko sferno sabirno sočivo, žižne daljine  $f=5$  cm, upotrebjeno je kao lupa. Na kom rastojanju od sočiva treba postaviti predmet da bi njegov imaginarni lik bio udaljen  $l=25$  cm od sočiva? Koliko je uvećanje lupe?

1381. Simetričnim tankim bikonveksnim sočivom, poluprečnika krivina  $R=30$  cm, dobija se realan lik nekog predmeta, koji je 5 puta veći od predmeta. Koliko je rastojanje predmeta od sočiva, a koliko lika? Indeks prelamanja stakla od koga je načinjeno sočivo iznosi  $n=1,50$ .

1382. Tankim plankonveksnim sfernim sočivom, poluprečnika krivine  $R=50$  cm, dobija se realan lik koji je 3 puta veći od predmeta. Koliko je rastojanje predmeta od sočiva? Indeks prelamanja stakla od koga je sočivo načinjeno iznosi  $n=1,50$ .

1383. Ispred tankog sabirnog sočiva, žižne daljine  $f=10$  cm, postavljen je predmet veličine  $P=2$  cm.

a) Gde treba postaviti predmet da bi se dobio njegov realan lik veličine  $L=8$  cm?

b) Koliki će biti i kakav je lik ovog predmeta ako se umesto sabirnog upotrebi rasipno sočivo iste žižne daljine?

1384. Na kom rastojanju je potrebno postaviti predmet od sabirnog sočiva da bi udaljenost od predmeta do njegovog realnog lika bila najmanja?

1385. Sabirno sočivo žižne daljine  $f_1=20$  cm i rasipno sočivo žižne daljine  $f_2=-30$  cm kombinuju se na taj način što se postave: a) jedno pored drugog, b) na rastojanje  $a=f_1=20$  cm, ali tako da im se optičke ose poklapaju. Kolika je ekvivalentna žižna daljina ovog sistema u oba slučaja?

1386. Sabirno sočivo, optičke moći  $\omega_1=6$  dioptrija, stvara realan lik nekog predmeta na rastojanju  $l=25$  cm od svog optičkog centra. Kada se pored sabirnog sočiva postavi jedno rasipno sočivo, tada se rastojanje lika poveća za  $\Delta l=15$  cm. Kolika je žižna daljina rasipnog sočiva?

1387. Dva tanka sabirna sočiva, jednakih optičkih moći  $\omega=5$  dioptrija, nalaze se na rastojanju  $d=5,5f$  (gde je  $f$ —žižna daljina sočiva). Svetao predmet, veličine  $P=1$  mm, nalazi se na rastojanju  $p_1=25$  cm od prvog sočiva **III**. Odrediti položaj, veličinu i karakter definitivnog lika.

1388. Tanko konvergentno sočivo daje realan lik nekog predmeta na rastojanju  $l=20$  cm od njega. Kada se neposredno uz ovo sočivo postavi jedno tanko divergentno sočivo, tako da im se optičke ose poklapaju, lik istog predmeta se nalazi na rastojanju  $l_1=40$  cm od sredine sistema ovih sočiva.

a) Kolika je žižna daljina divergentnog sočiva prema ovim podacima?

b) Koliko je uvećanje sistema u drugom slučaju ako je žižna daljina konvergentnog sočiva  $f=10$  cm?

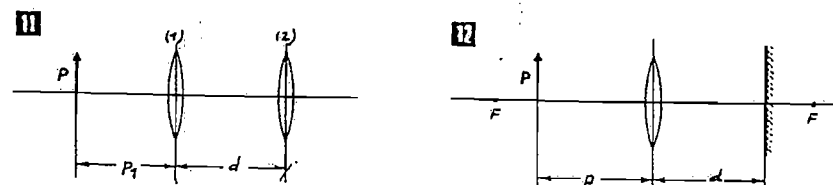
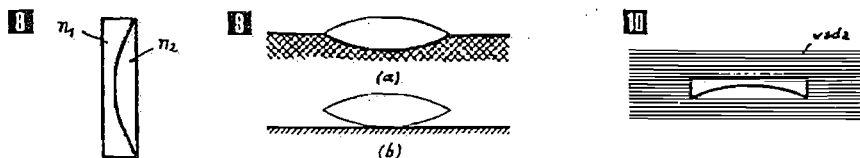
1389. Optička moć sočiva u vazduhu iznosi  $\omega_1=5$  dioptrija, a kada se sočivo nalazi u vodi, ona iznosi  $\omega_2=1,60$  dioptrija. Za koliko treba pomeriti predmet (u odnosu na sočivo) da bi se u oba slučaja dobio lik koji je dva puta veći od predmeta?

1390. Ravna površina plankonkavnog sočiva, žižne daljine  $f=10$  cm, prevučena je slojem srebra nanesenog neparazvanjem. Na optičkoj osi sočiva, na udaljenosti  $p=15$  cm sa konkavne strane sočiva, nalazi se predmet. Odrediti konačan lik predmeta.

1391. Tanko sabirno sočivo ima optičku moć  $\omega=2,5$  dioptrije. Na rastojanju  $p=20$  cm od sočiva nalazi se predmet, veličine  $P=1$  cm, a na rastojanju  $d=80$  cm sa iste strane sočiva ravno ogledalo, čija je ravan normalna na optičku osu sočiva. Odrediti položaj i veličinu realnog lika.

1392. Sa jedne strane tankog sabirnog sočiva, žižne daljine  $f=20$  cm, postavljeno je ravno ogledalo na rastojanju  $d=(3/5)f$  od njega, a sa druge strane svetao predmet, veličine  $P=1,2$  cm, na rastojanju  $p=0,6f$  od sočiva **IV**. Odrediti položaj realnog lika predmeta.

1393. U bioskopskoj sali rastojanje između filmske trake i ekrana iznosi  $d=40$  m. Na kom rastojanju od sočiva, žižne daljine  $f=1,4$  m, treba postaviti ovu traku da bi se na ekranu dobila jasna slika?



1394. Svetla slika, dimenzija  $24 \times 36 \text{ mm}^2$ , uveća se projekcionim aparatom, pri čemu se na ekranu dobije jasna slika dimenzija  $2 \times 3 \text{ m}^2$ . Kolika je žižna daljina sočiva u projekcionom aparatu ako je rastojanje između filmske trake i ekrana  $d=15 \text{ m}$ ?

1395. Koliku optičku moć treba da ima objektiv bioskopskog projektora da bi u dvorani, dužine  $d=25 \text{ m}$ , ostvario uvećanje  $u=100$ ?

1396. Žižna daljina objektiva projekcionog aparata je  $f=5 \text{ cm}$ . Rastojanje između objektiva i ekrana je  $l=10 \text{ m}$ .

a) Koliko treba da je rastojanje filma od sočiva da bi se na ekranu dobio jasan lik?

b) Kolika će biti površina slike na ekranu ako je njena površina na filmu  $16 \times 10 \text{ mm}^2$ ?

1397. Koliko je uvećanje lupe žižne daljine  $f=3 \text{ cm}$ ? Uzeti da je daljina jasnog vida  $s \approx 25 \text{ cm}$ .

1398. Dužina cevi mikroskopa je  $l=16 \text{ cm}$ , a žižna daljina njegovog objektiva  $f_{ob}=1,6 \text{ mm}$ , dok je uvećanje mikroskopa  $u=2000$ . Kolika je žižna daljina okulara?

1399. Objektiv mikroskopa je sočivo žižne daljine  $f_{ob}=4 \text{ mm}$ , a okular je sočivo žižne daljine  $f_{ok}=9 \text{ mm}$ . Koliko treba da je međusobno rastojanje objektiva i okulara da bi uvećanje mikroskopa bilo  $u=100$ ?

1400. Ramsdenov okular se sastoji iz dva jednaka plankonvexna sočiva, žižnih daljina  $f=12 \text{ cm}$ , koja su na rastojanju  $a=(2/3)f$ . Kolika je ekvivalentna žižna daljina okulara?

1401. Kolike su žižne daljine objektiva i okulara astronomskog durbina ako je rastojanje između njih  $d=1,8 \text{ m}$ , a uvećanje durbina  $u=120$ ?

1402. Objektiv Galilejevog teleskopa (pozorišni dogled) je sabirno sočivo žižne daljine  $f_{ob}=14 \text{ cm}$ , a okular je rasipno sočivo žižne daljine  $f_{ok}=-5 \text{ cm}$ . Koliko je uvećanje teleskopa?

1403. Koliku žižnu daljinu treba da ima objektiv fotografskog aparata da bi se njime mogla snimiti površina na Zemlji od  $S_1=4 \text{ km}^2$  iz aviona koji leti na visini  $H=2200 \text{ m}$ ? Raspoloživa površina filma je  $S_2=9 \text{ cm}^2$ .

1404. a) Kolika površina Zemlje može da se snimi iz veštačkog Zemljinog satelita u trenutku kada je on udaljen  $d=160 \text{ km}$  od njene površine? Fotografski zparat ima objektiv žižne daljine  $f=10 \text{ cm}$ , a raspoloživa površina filma je  $S_1=9 \text{ cm}^2$ .

b) Koliko će biti pomeranje lika objekta na snimku ako je vreme eksponiranja filma  $t=(1/50) \text{ s}$ , a brzina satelita  $v=8 \text{ km/s}$ ?

1405. Fotografskim aparatom, koji ima objektiv žižne daljine  $f=15 \text{ cm}$ , snima se raketa u pokretu, i to u trenutku kada se nalazi ispred fotografskog aparata, na rastojanju  $d=600 \text{ m}$ . Putanja rakete je normalna na osu fotografskog aparata, a njena brzina je  $v=2 \text{ km/s}$ . Koliko treba da bude najveće vreme eksponiranja filma u fotografskom aparatu da pomeranje lika rakete na snimku ne bude veće od  $\Delta L=0,1 \text{ mm}$ ?

### 3. Talasna optika

Pri interferenciji dva koherentna svetlosna talasa, koji su se od svetlosnog izvora prostirala pod jednakim uslovima, nastaje njihovo:

- maksimalno pojačanje ako je  
– razlika faza talasa

$$\Delta\varphi=2k\pi$$

- razlika pređenih puteva talasa

$$\Delta s=k\lambda$$

- maksimalno slabljenje ako je  
– razlika faza talasa

$$\Delta\varphi=(2k+1)\pi$$

- razlika pređenih puteva

$$\Delta s=(2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

gde je  $k=0, 1, 2, 3, \dots$ ,  $\lambda$  – talasna dužina upotrebljene monohromatske svetlosti.

Rastojanje između interferentnih pruga kod Frenelovog ogleda je

$$x=\lambda\frac{a}{d}$$

gde je  $\lambda$  – talasna dužina svetlosti,  $d$  – međusobno rastojanje imaginarnih likova svetlosnog izvora,  $a$  – srednje normalno rastojanje ovih likova od zaklona.

Pri interferenciji svetlosti na tankim providnim listovima, u slučaju kada se sa obe strane lista nalazi optički reda sredina, nastaje

- maksimalno pojačanje ako je

$$2nd \cos \beta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

- maksimalno slabljenje ako je

$$2nd \cos \beta = k\lambda$$

gde je  $n$  – indeks prelamanja supstancije od koje je načinjen list u odnosu na sredinu iz koje dolazi svetlost,  $\lambda$  – talasna dužina svetlosti,  $\beta$  – prelomni ugao, a  $k=0, 1, 2, 3, \dots$

Ako se na suprotnoj strani lista nalazi optički gušća sredina (kao kod lista za odstranjivanje refleksije), onda za maksimalno pojačanje i maksimalno slabljenje svetlosti važe obratni uslovi od prethodnih.

Poluprečnici Njutnovih prstenova u propuštenoj svetlosti određeni su relacijom:

- tamni prstenovi

$$r = \sqrt{R \frac{k\lambda}{n}}$$

- svetli prstenovi

$$r = \sqrt{R \frac{2k+1}{n} \frac{\lambda}{2}}$$

gde je  $R$  – poluprečnik krivine upotrebljenog plankonvexnog sočiva,  $n$  – indeks prelamanja sredine između sočiva i PP-ploče,  $\lambda$  – talasna dužina svetlosti,  $k=1, 2, 3, \dots$  – broj svetlog ili tamnog prstena računat od tačke dodira sočiva i PP-ploče.

Ako je reč o Njutnovim prstenovima koji se posmatraju u reflektovanoj svetlosti, onda su uslovi za nastajanje svetlih i tamnih prstenova obratni od prethodnih.

Pri prolasku paralelnog snopa svetlosti kroz uzani prorez, širine  $a$ , nastaje njeno maksimalno slabljenje u pravcima koji su određeni uglovima  $\theta_k$  prema normali, a koji zadovoljavaju uslov

$$\sin \theta_k = \frac{k\lambda}{a}$$

gde je  $k=1, 2, 3, \dots$ ,  $\lambda$  – talasna dužina svetlosti.

Ako paralelni snop svetlosti prolazi kroz difrakcionu rešetku (pod uslovom da je svetlosni snop normalan na rešetku), maksimalno pojačanje svetlosti nastaje u pravcima koji su određeni uglovima  $\theta_k$  prema normali, a koji zadovoljavaju uslov

$$\sin \theta_k = \frac{k\lambda}{d}$$

gde je  $k=0, 1, 2, 3, \dots$  – red svetle linije na interferogramu,  $\lambda$  – talasna dužina svetlosti i  $d$  – konstanta rešetke ( $d=1/N$ , gde je  $N$  – broj zarezna na rešetki po jediničnoj dužini).

Moć razlaganja difrakcione rešetke određena je relacijom

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN$$

gde je  $k$  – red spektra,  $N$  – ukupan broj zarezna na rešetki,  $\lambda$  i  $\lambda+\Delta\lambda$  – talasne dužine dve najbliže spektralne linije koje se još mogu vizuelno razlučiti.

Moć razlaganja optičke prizme određena je relacijom

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = b \frac{\Delta n}{\Delta\lambda}$$

gde je  $b$  – širina osnovice prizme,  $\Delta n/\Delta\lambda$  – nagib tangente krive  $n=n(\lambda)$ ,  $\lambda$  i  $\lambda+\Delta\lambda$  – talasne dužine dve najbliže spektralne linije u dobijenom spektru koje se još mogu vizuelno razlučiti.

Moć razlaganja teleskopskog sistema određena je uglom  $\theta$  pod kojim se još mogu vizuelno razlučiti dva bliska predmeta kada se posmatraju kroz teleskopski sistem. Ona je određena relacijom

$$\theta_{\text{rad}} \approx 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

gde je  $\lambda$ —talasna dužina svetlosti,  $D$ —prečnik ulaznog snopa svetlosti (najčešće je to prečnik okulara). U praksi se koristi i relacija

$$\theta'' \approx \frac{140''}{D}$$

gde prečnik  $D$  treba uzeti u mm.

Moć razlaganja čovečjeg oka iznosi  $\theta \approx 60''$ . Moć razlaganja mikroskopa određena je rastojanjem  $\Delta s$  dva najbliži predmeta koja se još mogu vizuelno razlučiti. Ona je određena relacijom

$$\Delta s = \frac{\lambda}{2A}$$

gde je  $\lambda$ —talasna dužina upotrebljene svetlosti,  $A$ —numerička apertura mikroskopa ( $A = n \cdot \sin \varphi$ , gde je  $n$ —apsolutni indeks prelamanja sredine između objektivna i predmeta, a  $\varphi$ —aperturni ugao).

Ugaona disperzija difrakcione rešetke određena je relacijom

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{k}{d \cdot \sin \theta_k}$$

gde je  $k=1, 2, 3, \dots$ —red spektra,  $d$ —konstanta rešetke,  $\theta_k$ —ugao prema normali na rešetku pod kojim se nalazi spektar  $k$ -tog reda.

Najveći stepen polarizacije svetlosti pri odbijanju, odnosno prelamanju dobija se ako upadni ugao  $\alpha_b$  svetlosnog snopa zadovoljava uslov (Brusterov zakon)

$$\operatorname{tg} \alpha_b = n$$

gde je  $n$ —relativni indeks prelamanja sredine na koju svetlosni snop nailazi (u koju prelazi) u odnosu na sredinu kroz koju se do tada prostirao.

Prema Malusovom zakonu, jačina polarizovane svetlosti  $I$  koja je prošla kroz analizator određena je relacijom

$$I = I_0 \cos^2 \theta$$

1406. Kada se ogledalo Majkelsonovog interferometra pomeri za  $d=0,16$  mm, posmatrač odbroji  $k=820$  svetlih interferentnih pruga, koje prođu kroz vidno polje mikroskopa. Kolika je talasna dužina upotrebljene monohromatske svetlosti?

1407. Tanak sloj ulja, indeksa prelamanja  $n=1,4$ , nanesen je na staklenu ploču. Ploča je osvetljena paralelnim snopom zrakova bele svetlosti, koji padaju na nju pod pravim uglom. Kolika treba da bude debljina sloja ulja da bi nastalo pojačanje zelene svetlosti talasne dužine  $\lambda=560$  nm?

1408. Paralelan snop svetlosti, koji sadrži boje talasnih dužina od 360 nm do 780 nm, pada pod pravim uglom na sloj ulja, debljine  $d=0,06$  nm i indeksa prelamanja  $n=1,5$ , koji je nanesen na staklenu ploču. Koje boje ovog spektra posmatrač neće videti iznad ploče, usled njihovog poništavanja pri interferenciji?

1409. Sferni mehur sapunice, indeksa prelamanja  $n=1,35$ , obasja se paralelnim snopom bele svetlosti.

gde je  $I_0$ —jačina polarizovane svetlosti ispred analizatora, a  $\theta$ —ugao između ravni polarizacije svetlosti i analizatora.

Ako na graničnu površinu padne svetlosni fluks  $\Phi_0$ , i ako su  $\Phi_r$ ,  $\Phi_a$  i  $\Phi_t$ —reflektovani, apsorbovani i transmijovani svetlosni fluks, onda je

$$- \text{koeficijent refleksije } \rho = \Phi_r / \Phi_0$$

$$- \text{koeficijent apsorpcije } \alpha = \Phi_a / \Phi_0$$

$$- \text{koeficijent transmisijsije } \tau = \Phi_t / \Phi_0$$

pri čemu je

$$\rho + \alpha + \tau = 1$$

Za prozirna tela je najčešće  $\alpha \approx 0$ , pa je za njih  $\rho + \tau = 1$ .

Ako svetlosni fluks pada na graničnu površinu između dva dielektrika (za koje je  $\alpha \approx 0$ ) u pravcu normale, onda je

$$\rho = \left( \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2$$

$$\tau = 1 - \rho = \frac{4n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2}$$

gde su  $n_1$  i  $n_2$ —apsolutni indeksi prelamanja prve i druge sredine.

Ako je  $\epsilon_r$ —relativna permitivnost dielektrika, tj. optičke supstancije, onda je njen apsolutni indeks prelamanja

$$n = \sqrt{\epsilon_r}$$

a brzina prostiranja svetlosti, tj. elektromagnetnih talasa u njoj ( $\mu_r = 1$ )

$$v = \frac{c}{n} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_0 \mu_r}}$$

gde su  $\epsilon_0$  i  $\mu_0$ —permitivnost i permeabilnost vakuumu, a  $c$ —brzina svetlosti u vakuumu.

a) Kolika je minimalna debljina opne mehura ako se na njemu vidi prsten plave svetlosti, talasne dužine  $\lambda=480$  nm, oko sredine njegovog osvetljenog dela?

b) Koja će boja spektra bele svetlosti oslabiti u tačkama čiji radialni pravac zaklapa ugao  $\beta=60^\circ$  prema pravcu upadne svetlosti?

1410. Na prozorsko staklo, indeksa prelamanja  $n=1,75$ , potrebno je naneti sloj providne supstancije kojom treba da se odstrani refleksija. Koliki je najpogodniji indeks prelamanja te supstancije, a kolika najmanja debljina sloja?

1411. Odrediti ugao  $\Delta \varphi$  između Frenelovih ogledala **1** ako je rastojanje između susjednih interferentnih pruga na zastoru  $\Delta x=1,5$  mm, rastecjanje  $OB=1$  m i udaljenost svetlog izvora u obliku proreza od linije preseka ogledala  $SB=0,1$  m. Talasna dužina monohromatske svetlosti je  $\lambda=350$  nm. Svetlosni zraci padaju na zastor približno pod pravim uglom.

1412. Kolika je žižna daljina plankonveksnog sočiva, upotrebljenog za dobijanje Njutnovih prstenova, ako je poluprečnik 4. tamnog interferentnog kruga u propuštenoj svetlosti  $r=1,2$  mm, indeks prelamanja stakla od koga je sočivo načinjeno  $n=1,6$ ? Talasna dužina upotrebljene monohromatske svetlosti je  $\lambda=550$  nm. Sočivo se nalazi u vazduhu.

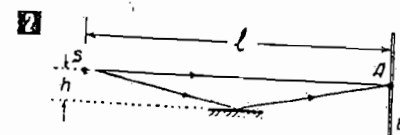
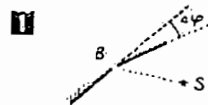
1413. U tačku A na ekranu **2** padaju dva koherentna monohromatska snopa svetlosti, talasne dužine  $\lambda=500$  nm. Ako je  $h=1$  mm, ustanoviti da li će u tački A nastati interferencijski maksimum ili minimum. Udaljenost svetlosnog izvora S od ekrana iznosi  $SA=l=1$  m. Ogledalo O je postavljeno paralelno svetlosnom snopu SA.

1414. Pod kojim najmanjim upadnim uglom prema normali treba da pada paralelan snop monohromatske svetlosti, talasne dužine  $\lambda=589$  nm, na liskunski list, debljine  $d=0,9$   $\mu\text{m}$ , da bi na njegovoj osvetljenoj površini nastalo maksimalno pojačavanje ove svetlosti? Indeks prelamanja liskuna je  $n=1,80$ . Smatrati da je sa obe strane lista vazduh.

1415. Paralelan snop kadmijumove crvene svetlosti, talasne dužine  $\lambda=643,8$  nm, pada upravno na klinastu staklenu ploču, indeksa prelamanja  $n=1,55$ . Pri ovome se na osvetljenoj površini ploče javi interferentne pruge koje su na međusobnom rastojanju  $a=2$  mm. Koliki je ugao klinaste ploče?

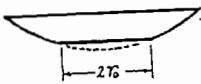
1416. Poluprečnik 3. interferentnog svetlog Njutnovog prstena je  $r=1,3$  mm pri korišćenju filtra ljubičaste svetlosti talasne dužine  $\lambda_1=420$  nm. Poluprečnik 4. tamnog prstena crvene svetlosti, izdvojene iz spektra bele svetlosti takođe filtrom, iznosi  $r_2=2$  mm. Izračunati poluprečnik krivine plankonveksnog sočiva koje se koristi pri ovome, kao i talasnu dužinu  $\lambda_2$  koju propušta drugi filter. Između sočiva i ploče ispod njega nalazi se tečnost, čiji je indeks prelamanja za ljubičastu svetlost  $n_1=1,48$ , a za crvenu  $n_2=1,42$ . Njutnovi prstenovi se posmatraju u propuštenoj svetlosti.

1417. Plankonveksno sočivo, poluprečnika krivine sferne površine  $R=12,5$  cm, dodiruje ravnu staklenu ploču. Prečnici 10. i 15. svetlog Njutnovog prstena u reflektovanoj svetlosti iznose  $d_{k1}=1$  mm i  $d_{k2}=1,5$  mm. Odrediti talasnu dužinu upotrebljene monohromatske svetlosti.





1418. Na sfernoj površini plankonveksnog sočiva postoji uglašani deo, poluprečnika  $r_0 = 3 \text{ mm}$ , kojim sočivo naleže na ravnu staklenu ploču (usled mehaničke deformacije sočiva). Poluprečnik krivine sočiva je  $R = 120 \text{ cm}$ . Koliki je poluprečnik 5. tamnog Njutnovog prstena u reflektovanoj svetlosti ako je sistem osvetljen monohromatskom svetlošću talasne dužine  $\lambda = 600 \text{ nm}$ ?



1419.



1419. Dva jednaka plankonveksna sočiva izrađena od stakla, indeksa prelamanja  $n = 1,6$ , postavljena su tako da se dodiruju sfernim površinama. Odrediti optičku moć ovog sistema sočiva ako u reflektovanoj svetlosti, talasne dužine  $\lambda = 600 \text{ nm}$ , poluprečnik 4. tamnog Njutnovog prstena iznosi  $r_4 = 1,5 \text{ mm}$ .

1420. Helijumov spektar se sastoji iz osam linija, od kojih su dve izrazite po intenzitetu. Njihove talasne dužine su  $\lambda_1 = 388,9 \text{ nm}$  i  $\lambda_2 = 587,6 \text{ nm}$ . Razlika poluprečnika 10. tamnog Njutnovog prstena ovih svetlosti je  $\Delta r = 0,1 \text{ mm}$ . Koliki je poluprečnik krivine, odnosno žižna daljina upotrebljenog plankonveksnog sočiva ako je njegov indeks prelamanja  $n = 1,6$ ? Smatrati da se sočivo nalazi u vazduhu i da se Njutnovi prstenovi posmatraju u propuštenoj svetlosti.

1421. Za dobijanje Njutnovih prstenova u propuštenoj svetlosti koristi se plankonveksno sočivo, žižne daljine  $f = 20 \text{ cm}$  i indeksa prelamanja  $n_1 = 1,6$ . Poluprečnik 10. tamnog prstena je  $r_1 = 1,2 \text{ mm}$ , a 30. iznosi  $r_2 = 1,5 \text{ mm}$ . Kolika je talasna dužina upotrebljene monohromatske svetlosti? Između ploče i sočiva nalazi se voda indeksa prelamanja  $n_2 = 1,34$ .

1422. Paralelan snop monohromatske svetlosti, talasne dužine  $\lambda = 540 \text{ nm}$ , pada pod pravim uglom na vrlo uzani prorez širine  $a$ . Zraci se nakon difrakcije fokusiraju sočivom, koje se nalazi neposredno iza proreza, pa se na zaslona, udaljenom  $l = 0,6 \text{ m}$  od proreza, vide tri izrazito tamna difrakciona lika proreza. Rastojanje ovih likova je  $\Delta s = 1,62 \text{ mm}$ . Kolika je širina proreza  $a$ ?

1423. Koliko je potrebno da ima zareza optička difrakciona rešetka, širine  $b = 3 \text{ cm}$ , da bi se njome mogao pouzdano dobiti spektar 3. reda monohromatske svetlosti talasne dužine  $\lambda = 750 \text{ nm}$ ?

1424. Normalno na difrakcionu rešetku, čija je konstanta  $d = (1/400) \text{ mm}$ , pada snop monohromatske svetlosti talasne dužine  $\lambda = 520 \text{ nm}$ .

- Koliki je broj difrakcionih maksimuma koje daje ova rešetka?
- Koliki ugao odgovara difrakcionom maksimumu najvećeg reda?

1425. Na kojoj udaljenosti od difrakcione rešetke je potrebno postaviti ekran da bi rastojanje lika 0. reda i lika 4. reda iznosilo  $\Delta s = 50 \text{ mm}$ ? Konstanta ove rešetke iznosi  $d = 0,02 \text{ mm}$ , a talasna dužina upotrebljene monohromatske svetlosti je  $\lambda = 500 \text{ nm}$ .

1426. Na optičku rešetku pada monohromatska svetlost talasne dužine  $\lambda = 625 \text{ nm}$ . Spektar 2. reda nalazi se pod uglom  $\theta = 30^\circ$ . Koliki je broj zareza na dužini od  $1 \text{ cm}$  ove optičke rešetke?

1427. Koliki je najveći red spektra dobijen difrakcionom optičkom rešetkom, čija je konstanta  $d = (1/800) \text{ mm}$ , ako se koristi natrijumova svetlost talasne dužine  $\lambda = 460 \text{ nm}$ ?

1428. Da li se preklapaju spektri 1. i 2. reda bele svetlosti pri upotrebi difrakcione optičke rešetke?

1429. Normalno na difrakcionu rešetku pada paralelan snop bele svetlosti. Pri ovome se dobije spektar 2. reda u kome se linija talasne dužine  $\lambda_1 = 460 \text{ nm}$

vidi pod uglom  $\theta_1 = 4^\circ 58'$  prema normali. Kolika je talasna dužina linije spektra istog reda za koju je ovaj ugao  $\theta_2 = 7^\circ 28'$ ? Kolika je konstanta upotrebljene optičke rešetke?

1430. Paralelan snop bele svetlosti pada normalno na optičku rešetku čija je konstanta  $d = (1/10) \text{ mm}$ . Na zaslona, udaljenom  $l = 1 \text{ m}$  od optičke rešetke, dobijaju se likovi proreza u vidu spektra, pomoću konvergentnog sočiva koje se nalazi neposredno iza rešetke. Kolika je širina vidljivog spektra 2. reda na zaslona? Smatrati da se vidljivo zračenje nalazi u opsegu od  $\lambda_1 = 380 \text{ nm}$  do  $\lambda_2 = 760 \text{ nm}$ .

1431. Kolika je moć razlaganja spektra 2. reda optičke difrakcione rešetke, širine  $b = 2,5 \text{ cm}$ , čija je konstanta  $d = (1/250) \text{ mm}$ ?

1432. Kolika treba da bude konstanta optičke rešetke, širine  $b = 3 \text{ cm}$ , da bi u spektru 2. reda razložila dve bliske linije živinog spektra, talasnih dužina  $\lambda_1 = 365 \text{ nm}$  i  $\lambda_2 = 365,5 \text{ nm}$ ?

1433. Kolika je ugaona disperzija difrakcione optičke rešetke u spektru 2. reda za svetlost talasne dužine  $\lambda = 450 \text{ nm}$ ? Konstanta rešetke je  $d = 10^{-4} \text{ cm}$ .

1434. a) Kolika treba da je konstanta difrakcione optičke rešetke, širine  $b = 3 \text{ cm}$ , da bi u spektru 2. reda razložila dve linije natrijuma, talasnih dužina  $\lambda_1 = 568,3 \text{ nm}$  i  $\lambda_2 = 568,8 \text{ nm}$ ?

b) Kolika je ugaona disperzija ove rešetke?

1435. Pod kojim se uglom vide dve najbliže tačke koje se mogu još raspoznati ako se gledaju durbinom čiji okular ima prečnik  $D = 3 \text{ cm}$ ?

1436. Kolika treba da je najmanja širina  $b$  optičke prizme da bi mogla razložiti dve bliske linije živinog spektra, talasnih dužina  $\lambda_1 = 365 \text{ nm}$  i  $\lambda_2 = 365,5 \text{ nm}$ ? Za staklo od koga je načinjena prizma je  $\frac{\Delta n}{\Delta \lambda} = 960 \frac{1}{\text{cm}}$ .

1437. Koliko se povećava moć razlaganja udaljenih predmeta ako se posmatraju durbinom čiji objektiv ima poluprečnik  $D = 5 \text{ cm}$ ? Uzeti da je prečnik čovečje zenice  $d = 5 \text{ mm}$ .

1438. Kolika je moć razlaganja mikroskopa ako se pri radu sa njim koriste:

- neimerzionni objektiv numeričke aperture  $A = 0,85$ ,
- isti objektiv sa imerzionim uljem indeksa prelamanja  $n = 1,65$ ?

Predmet je osvetljen svetlošću talasne dužine  $\lambda = 600 \text{ nm}$ .

1439. a) Koliko puta se povećava moć razlaganja mikroskopa ako se posmatra predmet osvetli monohromatskom svetlošću talasne dužine  $\lambda_1 = 380 \text{ nm}$  umesto sa  $\lambda_2 = 760 \text{ nm}$  (donja i gornja granica vidljivog spektra)?

b) Koliko se dalje poboljšanje postiže korišćenjem ultralubičastog zračenja talasne dužine  $\lambda_3 = 250 \text{ nm}$ ? Numerička apertura mikroskopa je  $A = 0,9$ .

1440. Televizijski prijemnik ima ekran dimenzija  $53 \times 53 \text{ cm}^2$ , a radi sa 825 horizontalnih linija, pri čemu ekran zrači plavu svetlost talasne dužine  $\lambda = 477 \text{ nm}$ . Sa koje daljine posmatrač treba da gleda televizijski program da ne bi primećivao tamne horizontalne pruge? Uzeti da je prečnik čovečje zenice  $d = 3 \text{ mm}$ .

1441. Sa koje visine može orao da vidi u travi miša veličine  $5 \text{ cm}$ ? Uzeti da je prečnik orlove zenice  $d = 1 \text{ mm}$ .

1442. a) Da li kosmonaut, leteći na visini  $H = 257 \text{ km}$ , može raspoznati zgrade velikih gradova?

b) Koliko normalno uvećanje bi trebalo da ima njegov durbin da bi mogao raspoznati ljude na Zemlji? Koliki je potreban prečnik objektiva ovog durбина? Uzeti da je prečnik čovečje zenice  $d = 5 \text{ mm}$ .

1443. Koliki je najpogodniji upadni ugao zraka nepolarizovane svetlosti na graničnu površinu vazduh—led da bi se izvršila najbolja polarizacija reflektovanog zraka? Granični ugao totalne refleksije za ove dve sredine je  $\alpha_p = 60^\circ$ .

1444. Pod kojim uglom prema horizontu treba da se nalazi Sunce da bi se reflektovani svetlosni zraci od slobodne površine vode najbolje polarizovali? Indeks prelamanja vode je  $n = 1,34$ .

1445. Najbolja polarizacija prelomnog odnosno odbojnog zraka svetlosti na graničnoj površini vazduh—staklo obrazuje se pri prelomnom uglu  $\beta = 32^\circ$ . Koliki je indeks prelamanja stakla?

1446. U kojim granicama treba da se kreće veličina upadnog ugla na graničnu površinu vazduh—staklo da bi se izvršila najbolja polarizacija svetlosti pri odbijanju odnosno prelamanju na ovoj graničnoj površini? Indeks prelamanja stakla nalazi se u granicama od  $n_1 = 1,51$  do  $n_2 = 1,90$ .

1447. Za dobijanje linearno polarizovane svetlosti koristi se kristal islandskog kalcita, pri čemu se zrak svetlosti razloži na redovan i neredovan. Indeks prelamanja ovog kristala za redovan zrak je  $n_R = 1,658$ , a za neredovan  $n_V = 1,486$  za natrijumovu svetlost talasne dužine  $\lambda = 589 \text{ nm}$  u vakuumu. Kolika je talasna dužina redovnog, a kolika neredovnog zraka ove svetlosti u kristalu?

1448. Koji deo svetlosti prolazi kroz analizator ako je ugao između glavnih polarizacionih ravnih analizatora i polarizatora  $\theta = 30^\circ, 60^\circ$  i  $90^\circ$ ? Zanimati apsorpciju svetlosti u staklu.

1449. Svetlosni zrak pada normalno na graničnu površinu vazduh—staklo. Koliki je koeficijent refleksije svetlosti ako je indeks prelamanja stakla  $n = 1,54$ ?

## 4. Toplotno zračenje

Ako se sa površine tela  $S$  emituje fluks  $\Phi_{em}$  elektromagnetnog zračenja svih talasnih dužina (dakle,  $0 < \lambda < \infty$ ), onda energijski osvetljaj tog tela je

$$R = \frac{\Phi_{em}}{S}$$

dok je odgovarajuća objektivna jedinica

$$[R] = \frac{[\Phi]}{[S]} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

pri čemu objektivna jedinica  $\text{lm}/\text{m}^2$  nema biološki smisla s obzirom da je reč o zračenju na koje, većim delom, čovečiji organ vida nije osetljiv.

Energijski osvetljaj tela zavisi od njegove temperature, tj.  $R = R(T)$ .

Emisiona moć tela  $r(\lambda, T)$  definiše se kao količnik energijskog osvetljaja  $dR(\lambda, T)$  određenog talasnog područja  $d\lambda$  i tog talasnog područja, tj.

$$r(\lambda, T) = \frac{dR(\lambda, T)}{d\lambda}$$

dok je odgovarajuća jedinica  $\text{W}/\text{m}^2$ .

Apsorpciona moć tela  $a(\lambda, T)$  definiše se kao količnik apsorbovanog fluksa  $d\Phi_a(\lambda)$

određenog talasnog područja i ukupnog fluksa  $d\Phi(\lambda)$  tog talasnog područja koji padne na telo. Naime,

$$a(\lambda, T) = \frac{d\Phi_a(\lambda)}{d\Phi(\lambda)}$$

Za apsolutno crno telo je  $a(\lambda, T) = 1$ , pa je emisiona moć apsolutno crnog tela  $r(\lambda, T)$  jednaka univerzalnoj Kirhofovoj funkciji  $f(\lambda, T)$ , koja je prema Plankovom zakonu

$$f(\lambda, T) = \frac{2\pi c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1}$$

gde je  $c$  — brzina prostiranja elektromagnetnih talasa u vakuumu,  $\lambda$  — talasna dužina,  $h$  — Plankova konstanta,  $k$  — Bolcmanova konstanta i  $T$  — temperatura tela.

Energijski osvetljaj apsolutno crnog tela je

$$R = \int_0^\infty r(\lambda, T) d\lambda = \sigma T^4$$

gde je  $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} = 5,670 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$  — Stefan-Bolcmanova konstanta. Prethodna relacija izražava Stefan-Bolcmanov zakon.

Za tela koja nisu apsolutno crna (već siva) energijski osvetljaj je

$$R = k\sigma T^4$$

gde je  $k$  — koeficijent crnoće čija brojna vrednost zavisi od prirode tela i sastava njegove površine. Za sva tela je  $k < 1$ .

Prema Vinovom zakonu pomeranja, stalan je proizvod talasne dužine  $\lambda_m$  (za koju je maksimalna emisiona moć  $r(\lambda, T)$  apsolutno crnog tela) i njegove temperature  $T$ . Naime,

$$\lambda_m \cdot T = b$$

gde je  $b = \frac{hc}{4,965 k} = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$ . U ovoj relaciji je  $k$  — Bolcmanova konstanta.

Pošto se energijski osvetljaj  $R$  tela može definisati i kao količnik snage  $P$  zračenja tela svih talasnih dužina i površine tela  $S$ , tj.

$$R = \frac{P}{S}$$

to je snaga zračenja apsolutno crnog tela, površine  $S$

$$P = RS = \sigma T^4 S$$

1450. Koliko puta se poveća energijski osvetljaj apsolutno crnog tela kada se njegova apsolutna temperatura povisi 10 puta?

1451. Energijski osvetljaj apsolutno crnog tela iznosi  $R = 80 \text{ kW}/\text{m}^2$ . Kolika talasna dužina odgovara maksimumu emisione moći ovog tela?

1452. Kolika se energija IR-zračenja emituje kroz otvor za osmatranje na visokoj peći u toku vremenskog intervala  $\Delta t = 1 \text{ min}$ ? Temperatura peći je  $T = 1500 \text{ K}$ , a površina otvora  $S = 10 \text{ cm}^2$ . Smatrati da peć zrači kao apsolutno crno telo.

1453. Koliku energiju izrači u toku svakog vremenskog intervala od 1 s površina  $S = 1 \text{ cm}^2$  tela od volframa pri topljenju? Temperatura topljenja volframa je  $3380^\circ \text{C}$ . Smatrati da se volfram na ovoj temperaturi ponaša kao sivo telo i da je tada njegov koeficijent crnoće  $k = 0,45$ .

1454. Ako se 40% utrošene električne energije u sijalici, snage  $P = 60 \text{ W}$ , emituje kao IR-zračenje, izračunati temperaturu njenog vlakna dužine  $l = 0,2 \text{ m}$  i prečnika  $d = 0,01 \text{ mm}$ . Zračenje vlakna sijalice smatrati kao zračenje apsolutno crnog tela.

1455. Kroz otvor peći, površine  $S = 100 \text{ cm}^2$ , izrači se za vreme  $t = 10 \text{ s}$  količina toplote  $Q = 60 \text{ kJ}$ . Odrediti temperaturu u peći pod pretpostavkom da peć zrači kao apsolutno crno telo.

1456. Snaga IR-zračenja sfere, poluprečnika  $R = 10 \text{ cm}$ , na nekoj temperaturi iznosi  $P = 2 \text{ kW}$ . Odrediti ovu temperaturu, smatrajući sferu sivim telom čiji je koeficijent crnoće  $k = 0,25$ .

1457. Koliki je energijski osvetljaj čovečjeg tela pri normalnoj temperaturi ( $t \approx 36^\circ \text{C}$ ), smatrajući da je čovečje telo sivo telo i da je za njega koeficijent crnoće  $k \approx 0,90$ ?

1458. Temperatura jednog tela je  $T_1 = 2500 \text{ K}$ . Kolika je temperatura drugog tela ako je talasna dužina IR-zračenja koje odgovara maksimumu njegove emisione moći za  $\Delta \lambda = 0,5 \mu \text{m}$  veća od odgovarajuće talasne dužine drugog tela? Telo smatrati apsolutno crnim.

1459. Kada se pocrnjeni bakarni provodnik, prečnika  $d = 3 \text{ mm}$  i dužine  $l = 10 \text{ cm}$ , priključi na električni izvor, tada se u njemu električna snaga  $P_1 = 66,8 \text{ W}$  troši na termičke procese u provodniku.

a) Koliki je energijski osvetljaj provodnika ukoliko se 80% utrošene električne energije zračenjem prenese na okolinu?  
b) Kolika je temperatura provodnika?

1460. Kolika je temperatura usijane metalne kugle, prečnika  $D = 10 \text{ cm}$ , ako se pomoću optičkog pirometra utvrdi da je njen energijski osvetljaj  $R = 6,27 \text{ W}/\text{m}^2$  na udaljenosti  $d = 10 \text{ m}$ ? Smatrati da kugla zrači kao apsolutno crno telo.

1461. Ispitivanja zračenja Sunca pokazala su da talasna dužina koja odgovara maksimumu njegove emisione moći iznosi  $\lambda_m = 500 \text{ nm}$ . Smatrajući Sunce kao apsolutno crno telo, odrediti:

- energijski osvetljaj Sunca,
- snagu zračenja Sunca,
- najveću osvetljenost površine Zemlje zanemarujući apsorpciju energije u atmosferi.

Stefan-Bolcmanova konstanta je  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K}^4)$ , Viňova konstanta je  $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$ , poluprečnik Sunca  $R_S = 6,95 \cdot 10^8 \text{ m}$ , a rastojanje od Sunca do Zemlje  $d = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ .

1462. U otvorenom širokom sudu, nalazi se količina vode, mase  $m = 6,5 \text{ kg}$ , čija slobodna površina iznosi  $S = 960 \text{ cm}^2$ . Kada se ova količina vode izloži Sunčevom zračenju, tada se njena temperatura povisi za  $\Delta T = 10 \text{ K}$  za vreme  $t = 30 \text{ min}$ . Kolika je temperatura Sunca? Smatrati da Sunce zrači kao apsolutno crno telo i da je površina suda normalna na pravac Sunčevog zračenja. Apсорpciju atmosfere Sunca i Zemlje zanemariti.

1463. Smatrajući Sunčevo zračenje monohromatskim, srednje talasne dužine  $\lambda = 500 \text{ nm}$ , odrediti broj fotona ovakvog Sunčevog zračenja koji padnu na deo površine Zemlje od  $S = 1 \text{ m}^2$  svakog vremenskog intervala od  $1 \text{ s}$ .

Poznate veličine i konstante:

- |                               |  |
|-------------------------------|--|
| — temperatura Sunca           | $T = 6000 \text{ K}$   |
| — poluprečnik Sunca           | $R = 6,95 \cdot 10^8 \text{ m}$                                |
| — rastojanje Sunce—Zemlja     | $d = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$                              |
| — Plankova konstanta          | $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$             |
| — Stefan-Bolcmanova konstanta | $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K}^4)$ |

# TEORIJA RELATIVNOSTI

## 1. Specijalna i opšta teorija relativnosti

### Specijalna teorija relativnosti (STR)

U STR razmatraju se inercijalni sistemi referencije, tj. sistemi referencije za koje važi I Njutnov zakon.

Postulati STR mogu da se izraze rečima na sledeći način:

- Svi zakoni fizike su invarijantni u odnosu na svaki inercijalni sistem.
- Brzina prostiranja elektromagnetnih talasa u vakuumu je invarijantna u odnosu na svaki inercijalni sistem i ona je najveća moguća brzina u prirodi.

Na osnovu Lorencovih transformacija dobijaju se relacije koje povezuju dužinu, vreme i masu u dva inercijalna sistema referencije.

Neka je  $S_0$  inercijalni sistem referencije koji se kreće brzinom  $v$  u odnosu na inercijalni sistem  $S$ . Ako se u sistemu  $S_0$  uoči nepokretno telo dužine  $l_0$  u pravcu kretanja sistema, onda je njegova dužina u sistemu  $S$  određena relacijom

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Analogno ovoj relaciji, veza između vremenskog intervala  $\Delta t_0$  u sistemu  $S_0$ , koji se kreće brzinom  $v$  u odnosu na sistem  $S$ , i vremenskog intervala  $\Delta t$  u sistemu  $S$ , određena je izrazom

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Relacija koja povezuje mase u dva inercijalna sistema ima oblik

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

gde je  $m_0$  — masa tela u sistemu referencije  $S_0$ , koji se kreće brzinom  $v$  u odnosu na sistem  $S$ , a  $m$  — masa istog tela u sistemu referencije  $S$ .

Prema STR, relacija za impuls čestice ima oblik

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

odakle se za brzine  $v \ll c$  dobija klasični izraz

za impuls čestice

$$p = m_0 v$$

Ajnštajnova relacija za ukupnu energiju čestice ima oblik

$$E = mc^2$$

a kako je  $m_0 c^2$  — energija čestice u mirovanju, onda je relativistički izraz za kinetičku energiju

$$E_k = mc^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

Za brzine  $v \ll c$  dobija se klasični izraz za kinetičku energiju

$$E_k = \frac{m_0 v^2}{2}$$

Prema STR, relativna brzina jedne čestice u odnosu na drugu je

$$v_r = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

gde se u slučaju da je  $v_1, v_2 \ll c$  dobija klasični izraz za relativnu brzinu

$$v_r = v_1 + v_2$$

### Opšta teorija relativnosti (OTR)

U OTR se razmatraju fizičke pojave u neinercijalnim sistemima referencije. Ona se zasniva na principu ekvivalencije, koji glasi:

● Pojave u neinercijalnom sistemu referencije,

koji se kreće ubrzanjem  $\vec{a}$ , ekvivalentne su pojavama u inercijalnom sistemu referencije koji se nalazi u gravitacionom polju u kome

je ubrzanje sile teže  $\vec{g}$  jednako ubrzanju  $\vec{a}$ .

Prema OTR, relacije koje povezuju dužinu i vreme u dva neinercijalna sistema referencije jesu

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}} \quad \text{i} \quad \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}}}$$

gde je  $\varphi$  — potencijal posmatranog gravitacionog polja,  $\Delta t_0$  i  $l_0$  — vremenski interval i dužina u sistemu koji se nalazi izvan gravitacionog polja,  $\Delta t$  i  $l$  — vremenski interval i dužina u sistemu koji se nalazi u gravitacionom polju.

1464. Kolikom brzinom treba da se kreće štap, dužine  $l_0$ , po pravcu svoje duže ose, da bi mu se dužina smanjila za 50%?

1465. Zemljin satelit se kreće brzinom  $v=8$  km/s. Za koliko je duže zemaljsko vreme od 1 h u satelitu?

1466. U nepokretnom referentnom sistemu vremenski događaj traje  $\Delta t$ . Kolikom brzinom treba da se kreće drugi referentni sistem da bi isti vremenski događaj u njemu trajao dva puta kraće?

1467. Za koliko će da bude kraći put avionom na relaciji od 450 km, na kojoj on leti brzinom  $v=900$  km/h, ako se primene relativistički stavovi?

1468. Kako teče zemaljsko vreme u referentnom sistemu vezanom za foton?

1469. U gornjim slojevima atmosfere stvaraju se  $\mu$ -mezoni. Oni se kreću brzinom  $v=0,99c$ . Od svog nastanka pa do raspada  $\mu$ -mezon pređe rastojanje  $l=5$  km.

a) Koliko je vreme života  $\mu$ -mezona u sistemu referencije vezanom za Zemlju, a koliko njegovo sopstveno vreme života?

b) Koliki je sopstveni pređeni put  $\mu$ -mezona od nastanka do raspada?

1470. Štap, dužine u mirovanju  $l_0$ , kreće se u pravcu svoje ose brzinom:

– 8 km/s (1. kosmičkom brzinom)

– 11,2 km/s (2. kosmičkom brzinom)

– 16,7 km/s (3. kosmičkom brzinom)

– 30 km/s (brzina Zemlje po putanji)

– 30 000 km/s =  $0,1c$

– 70 000 km/s (brzinom elektrona u TV katodnoj cevi)

–  $0,5c$

–  $0,9c$

–  $0,99c$

–  $0,999c$

–  $0,999\ 999c$

–  $0,999\ 999\ 9c$

Kolika je dužina štapa u nepokretnom sistemu referencije?

1471. Dve čestice kreću se po istoj pravoj, u istom smeru, jednakim brzinama  $v=0,8c$ . Obe udare u nepokretnu prepreku u vremenskom intervalu od  $\Delta t=25$  ns, jedna posle druge. Koliko je sopstveno rastojanje između ove dve čestice pre udara o prepreku?

1472. U nepokretnom sistemu referencije,  $\pi$ -mezon od trenutka nastanka do trenutka raspada pređe rastojanje  $l=75$  m. Brzina  $\pi$ -mezona je  $v=0,995c$ . Koliko je sopstveno vreme života  $\pi$ -mezona?

1473. Kolika je sopstvena dužina štapa  $l_0$  ako je u sistemu referencije koji miruje njegova brzina  $v=c/2$ , dužina  $l=1$  m, a ugao između štapa i pravca kretanja  $\theta=45^\circ$ ?

1474. Automatska letilica kreće se od Zemlje ka zvezdi koja se nalazi na rastojanju  $r=4,3$  svetlosne godine, 4. kosmičkom brzinom. Kada je došla do zvezde, letilica se vraća na Zemlju. Kolika će biti razlika u pokazivanju časovnika na Zemlji i u letilici ako su na početku putovanja časovnici na Zemlji i u letilici pokazivali isto vreme? Svetlosna godina iznosi  $9,46 \cdot 10^{15}$  m, a 4. kosmička brzina je  $v_4 \approx 300$  km/s.

1475. U procesu nestajanja para elektron–pozitron nastanu dva  $\gamma$ -fotona, koji se kreću u istom pravcu u suprotnim smerovima. Kolika je brzina jednog  $\gamma$ -fotona u odnosu na drugi?

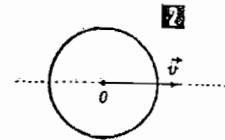
1476. Kolika greška nastaje ako se zbir brzina  $v_1=2c/3$  i  $v_2=c/3$ , umesto relativistički, razmatra klasično?

1477. Telo u obliku pravouglog trougla ABC 1 kreće se brzinom  $v$  u pravcu stranice:

a) AB,

b) BC.

Kolika je površina trougla (u oba slučaja) za posmatrača koji se kreće zajedno sa trouglom, a kolika za posmatrača koji se ne kreće?



1478. Telo u obliku kružnog diska zanemarljive debljine, poluprečnika  $R_0$  2, kreće se brzinom  $v$  u ravni u kojoj se nalazi. Kolika je površina diska u sistemu referencije koji je vezan za disk i u nepokretnom sistemu referencije?

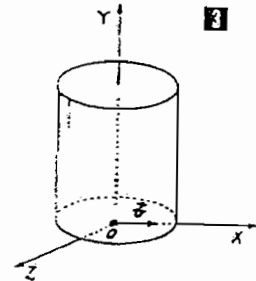
1479. Cilindrično telo 3, poluprečnika osnove  $R_0$  i visine  $h_0$ , kreće se brzinom  $v$  u pravcu ose a) X; b) Y.

Kolika je zapremina cilindra u oba slučaja u sistemu referencije vezanom za cilindar, a kolika u nepokretnom sistemu referencije?

1480. Kolika promena mase  $\Delta m$  odgovara promeni energije od:

a) 1 eV; b) 1 kWh; c) 1 J?

1481. Izračunati relativističku promenu mase elektrona, protona i deuteron a čije su energije 0,1 MeV, 1 MeV, 10 MeV, 100 MeV i 1000 MeV. Dobijene rezultate prikazati tabelarno.



1482. Koliku ukupnu energiju ima deuteron, a koliku proton ako im je relativno povećanje mase pri kretanju 10% u odnosu na njihove mase u mirovanju? Masa deuteron u mirovanju je  $m_d=2,0147$  u, a protona  $m_p=1,0075$  u.

1483. Koliku brzinu treba da ima elektron da bi njegova masa bila za 70% veća od njegove mase u mirovanju?

1484. Koliki je rad potrebno uložiti da bi se čestici, čija je masa u mirovanju  $m_0$ , povećala brzina od  $v_1=0,3c$  na  $v_2=0,6c$ ? Uporediti dobijeni rezultat sa onim koji bi se dobio prema klasičnoj fizici.

1485. Telo, mase  $m=1$  kg, zagreje se tako da se njegova temperatura povisi za  $\Delta t=400$  K. Za koliko se poveća masa tela usled zagrevanja?

1486. Kolika je brzina čestice pri kojoj je njen relativistički impuls za  $n=2$  puta veći od njenog njutnovskog impulsa?

1487. Elektron, čija se početna brzina može zanemariti, kreće se u homogenom električnom polju jačine  $E=1$  MV/m. Koliku će energiju imati elektron posle vremena  $t=10$  ns od početka kretanja?

1488. Koliki je gravitacioni potencijal pri kome:

a) vreme teče upola sporije,

b) gubi se pojam o vremenu?

1489. Koliko puta, prema OTR, vreme teče sporije na površini Zemlje nego u kosmičkom brodu koji se nalazi na visini  $h=R$ , gde je  $R$ —poluprečnik Zemlje?

1490. Koliko puta su manje dimenzije nekog predmeta na Zemlji nego na Mesecu?

1491. Koliki je uticaj gravitacionog polja Zemlje na talasnu dužinu fotona?

1492. Koliki bi poluprečnik trebalo da ima Zemlja pa da, prema OTR, vreme na njoj teče upola sporije?

1493. Koliki bi trebalo da bude poluprečnik Zemlje da bi telo na njenoj površini izgubilo dimenzije? Kolika bi u tom slučaju bila gustina Zemlje?

1494. Koliki je odnos jednakih vremenskih intervala  $T_1$  i  $T_2$  u tački na površini Zemlje i na visini  $h \ll R_Z$ , gde je  $R_Z$  — poluprečnik Zemlje?

1495. Kolika je relativna promena talasne dužine  $\gamma$ -fotona prilikom premeštanja radioaktivnog izvora iz prizemlja neke šestospratne zgrade na njen poslednji sprat?

1496. Par proton—antiproton može da nastane pri sudaru protona energije  $E_k \approx 6$  GeV sa protonom u mirovanju. Imajući ovaj podatak u vidu, odrediti koliku energiju treba da imaju protoni pri sudaru, ako se kreću jednakim brzinama, da bi pri njihovom sudaru takođe nastao par proton—antiproton?

1497. U sastavu kosmičkog zračenja nalaze se protoni energije 10 EeV. Ako Galaktika ima dimenzije reda veličine  $10^5$  svetlosnih godina, odrediti vreme za koje ovakvi protoni prođu kroz Galaktiku u odnosu na referentni sistem vezan za:

- Galaktiku,
- proton.

## 2. Doplerov efekat

Doplerov efekat je posledica STR i odnosi se na talasne procese kod kojih se izvor talasa i prijemnik talasa kreću brzinama  $v$  koje su značajne u odnosu na brzinu prostiranja talasa  $c$ . To se odražava u promeni frekvencije primljenog talasa u odnosu na frekvenciju  $\nu_0$  izvora talasa. U ovom smislu se razlikuju 4 karakteristična slučaja.

1. Izvor talasa miruje, a prijemnik se kreće brzinom  $v$ , pri čemu se udaljava od izvora talasa. Tada je frekvencija primljenog talasa

$$\nu_1 = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c}}$$

a za brzine prijemnika  $v \ll c$  (npr. kod mehaničkih talasa)

$$\nu_1 = \nu_0 \frac{c}{c + v}$$

2. Izvor talasa miruje, a prijemnik se kreće brzinom  $v$ , približavajući se izvoru talasa. U ovom slučaju je frekvencija primljenog talasa

$$\nu_2 = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}}$$

a za brzine prijemnika  $v \ll c$

$$\nu_2 = \nu_0 \frac{c}{c - v}$$

3. Izvor talasa kreće se prema prijemniku brzinom  $v$ , a prijemnik miruje. Frekvencija primljenog talasa je

$$\nu_3 = \nu_0 \frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

a za brzine izvora  $v \ll c$

$$\nu_3 = \nu_0 \frac{c + v}{c}$$

4. Izvor talasa kreće se udaljavajući se od prijemnika brzinom  $v$ , pri čemu prijemnik miruje. Frekvencija primljenog talasa u ovom slučaju je

$$\nu_4 = \nu_0 \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

a za brzine talasa  $v \ll c$

$$\nu_4 = \nu_0 \frac{c - v}{c}$$

Razlika frekvencije primljenog talasa  $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$  i frekvencije emitovanog talasa  $\nu_0$  naziva se Doplerova frekvencija i obeležava se sa  $\nu_d$ . Dakle,

$$\nu_d = \nu \frac{\text{primljenog talasa}}{\text{emitovanog talasa}} - \nu_0$$

1498. Slepi miš leti prema steni brzinom  $v = 6$  m/s, pri čemu proizvodi ultrazvuk frekvencije  $\nu = 45$  160 Hz. Kolika je frekvencija ultrazvuka koji slepi miš prima? Smatrati da je brzina prostiranja ultrazvuka  $c = 340$  m/s.

1499. U avionu koji leti stalnom brzinom  $v$  nalazi se sirena. Čovek prema kome se avion obrušava čuje zvuk frekvencije  $\nu_1 = 1000$  Hz. Kada se avion udalji od čoveka, on čuje zvuk frekvencije  $\nu_2 = 400$  Hz. Kolika je brzina aviona? Smatrati da je brzina zvuka  $c = 330$  m/s.

1500. Za određivanje brzine aviona koristi se emisiona radio-stanica u njemu, koja emituje elektromagnetne talase frekvencije  $\nu_0 = 500$  000,00 kHz. Kada se avion kreće ka radio-prijemniku, frekvencija primljenih talasa je  $\nu = 500$  000,56 kHz. Kolika je: a) Doplerova frekvencija, b) brzina aviona?

1501. Pored puta se nalazi radarski uređaj za kontrolu brzine vozila. Rad uređaja zasniva se na principu refleksije elektromagnetnih talasa i Doplerovom efektu. Frekvencija emitovanih elektromagnetnih talasa je  $\nu_0 = 10$  GHz.

Kolika je frekvencija odbijenih elektromagnetnih talasa ako je brzina vozila  $v = 72$  km/h? Kolika je Doplerova frekvencija?

1502. Radio-lokator, koji služi za navođenje aviona u smanjenim uslovima vidljivosti, emituje elektromagnetne talase u vidu impulsa frekvencije  $\nu_0 = 600$  MHz. Kolika je brzina približavanja aviona ako je Doplerova frekvencija, tj. razlika između frekvencije emitovanog impulsa i frekvencije primljenog (reflektovanog) impulsa  $\nu_d = 1$  kHz?

1503. Na avionu se nalazi radarski uređaj koji emituje elektromagnetne talase frekvencije  $\nu_0 = 15$  GHz  $\pm 0,1$  kHz. Avion se kreće ka planinskom masivu, od koga se reflektuju elektromagnetni talasi. Za koliko je viša frekvencija ovih talasa (tj. kolika je Doplerova frekvencija) ako se avion kreće brzinom  $v = 300$  m/s?

1504. Kolikom se brzinom udaljava od naše Galaksije neka maglina ako je eksperimentalno utvrđeno da je linija vodonikovog spektra, talasne dužine  $\lambda_0 = 434$  nm, u spektru ove magline pomerena za  $\Delta\lambda = 130$  nm prema crvenom delu spektra?

1505. Pri izučavanju spektralnog sastava Sunčevog zračenja uočeno je da se spektralna linija, talasne dužine  $\lambda = 590$  nm, kada se posmatraju suprotni krajevi Sunčevog diska (u odnosu na Sunčev ekvator) razlikuje za  $\Delta\lambda = \pm 4$  pm. Na osnovu ovih podataka izračunati period rotacije Sunca oko njegove ose.

1506. Kojom brzinom bi morao da leti kosmički brod ka Zemlji da bi crveni laserski zrak (upućen sa Zemlje prema kosmičkom brodu) kosmonaut u brodu video kao zeleni? Talasne dužine crvene i zelene svetlosti su  $\lambda_c = 620$  nm i  $\lambda_z = 550$  nm.

1507. Talasna dužina jedne Fraunhoferove linije Sunčevog spektra je  $\lambda_0 = 627,8$  nm kada je ono u zenitu nad ekvatorom. Kolika je promena ove talasne dužine pri Sunčevom zalasku, kada Sunčevi zraci padaju približno tangencijalno na Zemlju? Uzeti da je brzina tačkaka na ekvatoru Zemlje usled njene rotacije  $v = 0,56$  km/s. Zanemariti uticaj atmosfere i smatrati da se merenja vrše na ekvatoru.

1508. Kapsula sa astronautom je snabdevena radio-prijemnikom za komunikacije sa Zemljom, koji radi na frekvenciji  $\nu_0 = 31,5$  MHz. Pri izbacivanju u orbitu ovakve kapsule imaju brzinu  $v \approx 10$  km/s u nekoj fazi leta. Ako je prijemnik na Zemlji moguć pri najvećoj promeni frekvencije primljenog radio-talasa od  $\Delta\nu = \pm 6$  kHz, proveriti da li će se moći komunicirati sa kosmičkim brodom uz najnepovoljnije uslove leta. Smatrati da je frekvencija radio-predajnika stalna.

1509. Kolika je relativna širina spektralne linije, talasne dužine  $\lambda$ , koju emituje vodonik kada je njegova temperatura  $t = 400$  K?

### 3. Ubrzavači naelektrisanih čestica

Kinetička energija  $E_k$  čestice, naelektrisanja  $q$ , koja pri ubrzanju pređe u električnom polju potencijalnu razliku  $\Delta\varphi$ , određena je relacijom

$$E_k = q\Delta\varphi$$

pri čemu kod velikih potencijalnih razlika treba uzeti relativističku masu čestice ( $m = m_0\sqrt{1-v^2/c^2}$ ).

Kinetička energija  $E_k$  čestice, naelektrisanja  $q$ , ubrzanice u ciklotronu, određena je relacijom

$$E_k = NqU_{\max}$$

gde je  $N$ —broj prolazaka čestice između duanata, a  $U_{\max}$ —maksimalna vrednost napona između duanata.

Najveći poluprečnik putanje čestice u ciklotronu je

$$r_{\max} = \frac{mv}{qB}$$

gde je  $m$ —masa čestice,  $v$ —njena brzina,  $q$ —naelektrisanje čestice i  $B$ —magnetna indukcija magnetnog polja.

1510. Neki kosmički zraci imaju energiju i do 3,5 GeV.

a) Koliku potencijalnu razliku treba da pređe elektron da bi imao ovoliku energiju, ukoliko pođe iz mirovanja?

b) Koliku brzinu treba da ima telo, mase 1 g, da bi imalo ovoliku energiju?

1511. Van de Grafovim akceleratorom ubrzavaju se elektroni, pri čemu prelaze potencijalnu razliku  $U=0,1$  MV. Kolika je najveća relativistička promena njihove mase pri ovome?

1512. Jezgra atoma vodonika ubrzavaju se u linearnom akceleratoru potencijalnom razlikom  $U=0,1$  MV, pre ubacivanja u maseni spektrograf u kome vlada magnetno polje indukcije  $B=0,7$  T. Da bi nepoznata čestica, istog naelektrisanja kao i proton, pala na isto mesto u spektrografu gde i proton, potrebno je potencijalnu razliku za njeno ubrzanje smanjiti dva puta.

a) Koja je ova nepoznata čestica?

b) Kolika je njena energija posle ubrzanja (pre ulaska u spektrograf)?

c) Koja se čestica duže kreće kroz spektrograf?

1513. Kolikom je potencijalnom razlikom potrebno ubrzati deuterona da bi imao istu kinetičku energiju kao neutron čija je brzina  $c/5$ , gde je  $c$ —brzina svetlosti u vakuumu?

1514. Elektron se ubrza električnim poljem, pri čemu pređe potencijalnu razliku  $U=1,5$  MV.

a) Koliki je odnos masa elektrona  $m/m_0$ , gde je  $m_0$ —njegova masa u mirovanju a  $m$ —masa ubrzanog elektrona?

b) Kolika je brzina elektrona posle ubrzanja?

Smatrači da je elektron pošao iz mirovanja.

1515.  $\alpha$ -čestica i proton ubrzavaju se istom potencijalnom razlikom. Koliki je odnos njihovih:

a) energija,

b) brzina, ne uzimajući u obzir relativističke stavove?

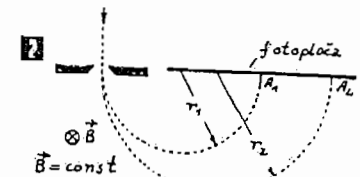
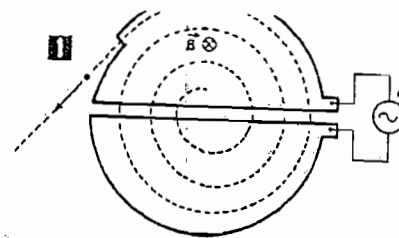
1516. Iz jonskog izvora uleću u ciklotron 1 protoni čija je energija  $E_0 = 0,1$  MeV. Na krajevima duanata ciklotrona priključen je harmonijski naizmenični napon

$$u = U_0 \sin 2\pi\nu t$$

gde je  $U_0 = 25$  kV i  $\nu = 1$  MHz.

a) Koliko obrtaja treba da načini proton u ciklotronu da bi pri izlasku iz njega imao energiju  $E_1 = 5,1$  MeV?

b) Za koje će vreme proton izaći iz ciklotrona?



1517. Jezgra izotopa vodonika, deuterijum  $^2\text{H}$  i tricijum  $^3\text{H}$  ubrzaju se potencijalnom razlikom  $U=0,1$  kV pre ulaska u maseni spektrograf 2, u kome vlada magnetno polje indukcije  $B=1$  T.

Koliki su poluprečnici putanja ovih jezgara u spektrografu? Koliko je rastojanje  $A_1A_2$ ? Koje će jezgro pasti u tačku  $A_1$ , a koje u tačku  $A_2$ ?

1518. Betatronom se mogu dobiti elektroni energije  $E=500$  MeV pri magnetnoj indukciji  $B=1$  T.

a) Kolika je najveća brzina elektrona u betatronu?

b) Kolika najveća Lorencova sila deluje na elektron?

c) Koliki je najveći poluprečnik putanje elektrona u betatronu?

d) Koliki je najveći moment impulsa elektrona u betatronu?

1519. Ciklotronom se dobijaju deuteroni  $^2\text{H}$  čija je energija  $E=10$  MeV, pri magnetnoj indukciji u ciklotronu od  $B=2$  T.

a) Koliki je najveći poluprečnik putanje deuterona u ciklotronu?

b) Kolika je njegova brzina na ovoj putanji?

1520. Na duante ciklotrona, najvećeg poluprečnika  $r_{\max}=150$  cm, priključen je naizmenični harmonijski napon maksimalne vrednosti  $U_m=100$  kV i frekvencije  $\nu=10$  MHz.

a) Kolika je magnetna indukcija u ciklotronu ako se u njemu ubrzavaju  $\alpha$ -čestice?

b) Kolika je najmanja energija  $\alpha$ -čestica pri izlasku iz ciklotrona?

c) Koliko obrtaja načini  $\alpha$ -čestica u toku ubrzanja ako je u ciklotron ubačena sa neznatnom energijom? Masa  $\alpha$ -čestice u mirovanju je  $m_0=4,033$  u, a njeno naelektrisanje  $q=2e=0,32$  aC.

1521. Naelektrisan čestica kreće se po krugu, poluprečnika  $r=10$  cm, u homogenom magnetnom polju indukcije  $B=10$  mT. Odrediti njenu brzinu i period rotacije ako je u pitanju:

a) nerelativistički proton,

b) relativistički elektron.

1522. Proton se ubrzava u ciklotronu, pri čemu maksimalni poluprečnik njegove putanje iznosi  $r=50$  cm. Odrediti:

a) kinetičku energiju protona na kraju procesa ubrzanja u ciklotronu ako je jačina indukcije magnetnog polja u njemu  $B=1$  T;

b) minimalnu frekvenciju izvora naizmenične struje kojim se napaja ciklotron, pri kojoj će na kraju procesa ubrzanja proton imati energiju  $E_k=20$  MeV.

1523. Ciklotron se nalazi u homogenom magnetnom polju indukcije  $B=1,5$  T. Prečnik duanata ciklotrona iznosi  $D=60$  cm. Do kolike energije se mogu ubrzati  $\alpha$ -čestica, deuteron i proton u ovom ciklotronu?

1524. Iz fazatrona se mogu dobiti protoni energije 680 MeV. Kolika talasna dužina odgovara protonima ovolikih energija uzimajući u obzir relativističke stavove?

1525. Kolikom brzinom treba da se kreće neko telo da bi njegova kinetička energija bila jednaka njegovoj energiji u mirovanju?

# ATOMSKA I NUKLEARNA FIZIKA

## 1. Kvantna priroda elektromagnetnog zračenja, Talasna svojstva čestica

Energija fotona elektromagnetnog zračenja (svetlosti), ili kvant-energije, određena je relacijom

$$E = h\nu \quad \text{ili} \quad E = \hbar\omega$$

gde je  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  J·s, odnosno  $\hbar = h/2\pi = 1,055 \cdot 10^{-34}$  J·s — Plankova konstanta,  $\nu$  — frekvencija,  $\omega$  — kružna frekvencija elektromagnetnog zračenja koje pripada posmatrani foton.

Kako je masa fotona  $m = h\nu/c^2$ , njegov impuls je

$$p = mc = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

gde je  $\lambda$  — talasna dužina fotona.

Prilikom fotoelektričnog efekta, energija fotona  $h\nu$  troši se na izlazni rad elektrona  $A_1$  iz metala i na povećanje njegove kinetičke energije  $mv^2/2$ . Prema Ajnštajnovoj relaciji, tj. zakonu održanja energije je

$$h\nu = A_1 + \frac{mv^2}{2}$$

gde je  $v$  — brzina fotoelektrona.

Pritisak elektromagnetnog talasa je

$$p = \frac{E}{c} (1 + \rho)$$

gde je  $E$  — energijska osvetljenost tela na koje elektromagnetni talasi deluju pritiskom, tj. fluks elektromagnetnog zračenja koji padne u normalnom pravcu na jediničnu površinu tela,  $c$  — brzina prostiranja elektromagnetnih talasa u vakuumu, a  $\rho$  — koeficijent refleksije tela.

1526. Koliku energiju treba da ima foton da bi njegova masa bila jednaka masi elektrona u mirovanju?

1527. Koliku energiju i koliku količinu kretanja ima  $\gamma$ -foton talasne dužine  $\lambda = 1$  fm?

1528. Kolika je ekvivalentna masa fotona:

- svetlosti talasne dužine  $\lambda_1 = 500$  nm,
- X-fotona talasne dužine  $\lambda_2 = 0,02$  nm,
- $\gamma$ -fotona talasne dužine  $\lambda_3 = 1,5$  pm?

1529. Kolika talasna dužina odgovara elektromagnetnom zračenju čija energija fotona iznosi 3 GeV?

Promena talasne dužine fotona rendgenskog zračenja prilikom komptonovskog rasejavanja je

$$\Delta\lambda = \frac{2h}{m_0c} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

gde je  $h$  — Plankova konstanta,  $m_0$  — masa u mirovanju čestice (elektrona, protona, neutrona) na kojoj se vrši rasejavanje,  $c$  — brzina prostiranja elektromagnetnih talasa u vakuumu i  $\theta$  — ugao rasejavanja.

Komptonova talasna dužina  $\lambda_k$  određena je prethodnom relacijom za  $\theta = \pi/2$

$$\lambda_k = \frac{h}{m_0c}$$

Čestici mase  $m$ , koja se kreće brzinom  $v$ , tj. koja poseduje kinetičku energiju  $E_k$ , odgovara De Brojjeva talasna dužina

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}}$$

Ako je brzina čestice  $v$  velika (u odnosu na brzinu prostiranja elektromagnetnih talasa u vakuumu), onda je  $m = m_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ , tj.

$$\lambda = \frac{h}{m_0v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{2m_0E_k + \frac{E_k^2}{c^2}}$$

gde je  $m_0$  — masa čestice u mirovanju.

1530. Najveća talasna dužina svetlosti koja još izaziva fotoefekt kod natrijuma je  $\lambda_{max} = 530$  nm.

- Koliki je izlazni rad elektrona iz natrijuma?
- Kolikom će brzinom izlaziti fotoelektroni iz natrijuma ako se on izloži UV-zračenju talasne dužine  $\lambda = 260$  nm?

1531. Pod dejstvom ultraljubičastog zračenja frekvencije  $\nu = 1,5$  PHz izleću elektroni iz nekog metala brzinom  $v = 800$  km/s.

- Koliki je izlazni rad elektrona?
- Kolika je njihova energija u eV?
- Koliki i kakav potencijal treba da ima ova metalna ploča, u odnosu na drugu ploču, da bi se sprečilo izlaženje elektrona u prostor između njih?

1532. Kada se površina platine osvetli UV-zračenjem talasne dužine  $\lambda_1 = 180$  nm, javlja se fotoelektrični efekat, koji nestaje kada je potencijal ploče  $\varphi_1 = +1$  V.

- Koliki je izlazni rad elektrona iz platine?
- Za koliko treba da se poveća potencijal ploče da bi se sprečio fotoelektrični efekat pri dejstvu na ploču X-zračenja talasne dužine  $\lambda_2 = 10$  nm?

1533. Kolika je brzina fotoelektrona prilikom osvetljavanja srebra UV-zračenjem talasne dužine  $\lambda = 150$  nm? Crvena granica fotoelektričnog efekta za srebro je  $\lambda_0 = 260$  nm.

1534. Pri osvetljavanju površine nekog metala svetlošću talasnih dužina  $\lambda_1 = 350$  nm i  $\lambda_2 = 540$  nm, maksimalne brzine fotoelektrona koji se dobijaju u ovom eksperimentu razlikuju se jedna od druge za  $n = 2$  puta. Koliki je izlazni rad ovog metala? Koji je to metal?

1535. Volframova kuglica, poluprečnika  $r = 1$  cm, nalazi se u vakuumu. Kolikom količinom elektriciteta će se naelektrisati kuglica kada se izloži UV-zračenju talasne dužine  $\lambda = 200$  nm? Izlazni rad za volfram iznosi  $A_1 = 4,5$  eV.

1536. Za određivanje Plankove konstante  $h$  koriste se podaci dobijeni iz sledećeg oglada. Metalna ploča se obasja elektromagnetnim zračenjem frekvencije  $\nu_1 = 2$  PHz, pri čemu se zaustavi izlaženje fotoelektrona potencijalom razlikom  $U_1 = 5,4$  V. Kada se ista ploča obasja elektromagnetnim zračenjem frekvencije  $\nu_2 = 4,5$  PHz, tada je ovu potencijalnu razliku potrebno povećati na  $U_2 = 10,44$  V. Kolika je Plankova konstanta prema ovim podacima?

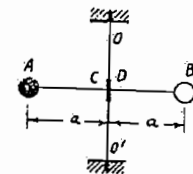
1537. Izvor monohromatske svetlosti, talasne dužine  $\lambda = 480$  nm, ima snagu  $P = 90$  W, od čega se 5% izrači u vidu svetlosti. Kolika je ekvivalentna masa svih fotona oslobođenih iz svetlosnog izvora u toku vremenskog intervala od 1 s?

1538. Sijalica, snage  $P = 100$  W, emituje monohromatsku svetlost talasne dužine  $\lambda = 670$  nm. Stepem korisnog dejstva sijalice iznosi  $\eta = 0,02$ . Koliko fotona emituje ova sijalica svakog vremenskog intervala od 1 s?

1539. Krukov radiometar **II** sastoji se iz četiri pločice, koje su postavljene na uzajamno normalne krake. Dve pločice ovog radiometra (A i B) vide se na slici, dok su druge dve (C i D) na kraku koji je normalan na ravan crteža. Jedna pločica na svakom kraku je crna, a druga metalno sjajna. Svaka pločica ima površinu  $S = 2$  cm<sup>2</sup>, a nalazi se na srednjem rastojanju  $a = 5$  cm od ose rotacije OO'.

Ako se radiometar osvetli paralelnim snopom koji pada normalno na pločice A i B, izračunati intenzitet početnog momenta koji teži da okrene krak sa pločicama.

Jučina svetlosnog snopa je takva da pločica A apsorbira svetlosnu energiju od 4,6 J u toku vremena od 1 min na svojoj površini od 1 cm<sup>2</sup>.



1540. Električna sijalica, snage  $P=200\text{ W}$ , ima loptast stakleni balon poluprečnika  $r=6\text{ cm}$ . U vidu svetlosne energije izrači se samo 6% snage sijalice. Koliki je pritisak svetlosti na balon ako je indeks prelamanja stakla  $n_1=1,6$  a gasa u sijalici  $n_2=1$ ?

1541. a) Koliki je pritisak Sunčevog zračenja na Zemlju ako se ono smatra apsolutno crnim telom? Zna se da  $1\text{ cm}^2$  Zemljine površine prima od Sunca tokom svakog vremenskog intervala od 1 min količinu toplote od 8,09 J.

b) Kolikom silom deluje Sunčevo zračenje na Zemlju ako se ona smatra ravnim diskom na koji Sunčevo zračenje pada u pravcu normale?

Srednji poluprečnik Zemlje je  $R=6370\text{ km}$ .

1542. a) Kolika je talasna dužina molekula žive po De Brojlu ako je kinetička energija ovog molekula 1 MeV?

b) Kolika je talasna dužina ovog molekula na temperaturi  $T=300\text{ K}$ ? Molarana masa žive je  $M=0,206\text{ kg/mol}$ .

1543. Kolika je De Broljeva talasna dužina relativističke čestice, čija je masa u mirovanju  $m_0$ , ubrzane potencijalnom razlikom  $U$ , ako je njeno naelektrisanje  $q$ ?

1544. Kolika je De Broljeva talasna dužina molekula vodonika koja odgovara njegovoj najverovatnijoj brzini na standardnim uslovima?

1545. Paralelan snop elektrona, ubrzanih potencijalnom razlikom  $U=25\text{ V}$ , pada normalno na dijafragmu sa dva uzana otvora koji se nalaze na rastojanju  $d=50\text{ }\mu\text{m}$ . Odrediti rastojanje susednih difrakcionih maksimuma na ekranu, koji se nalazi na rastojanju  $a=1\text{ m}$  od dijafragme sa otvorima.

1546. Elektron, čija se početna brzina može zanemariti, ubrza se potencijalnom razlikom  $U$ . Kolika je De Broljeva talasna dužina ovog elektrona ako je potencijalna razlika: a) 51; b) 510 kV?

1547. Koliki je odnos kinetičke energije čestice i njene energije u mirovanju pod uslovom da je njena Komptonova talasna dužina jednaka De Broljevoj talasnoj dužini?

1548. Kolika je najveća relativna promena energije fotona, talasne dužine  $\lambda=0,1\text{ nm}$ , prilikom komptonovskog rasejavanja na elektronima?

1549. Odrediti graničnu talasnu dužinu X-fotona za koju je Komptonov efekat zanemarljiv. Smatrati da je promena od 0,1% zanemarljiva.

1550. Kao rezultat Komptonovog efekta, foton posle sudara sa elektronom biva rasejan pod uglom  $\theta=90^\circ$ . Energija rasejanog fotona je  $E_1=0,4\text{ MeV}$ . Kolika je bila energija fotona pre rasejavanja?

1551. Kolikom brzinom treba da se udaljava impulsni svetlosni izvor monohromatske svetlosti, talasne dužine  $\lambda=400\text{ nm}$ , da bi se talasna dužina primljenog svetlosnog impulsa promenila za iznos koji odgovara promeni talasne dužine fotona ove svetlosti pri komptonovskom rasejavanju pod uglom  $\theta=\pi\text{ rad}$ ?

1552. Talasna dužina fotona rendgenskog zračenja  $\lambda_0=100\text{ pm}$  poveća se za Komptonovu talasnu dužinu  $\Delta\lambda_k$  pri rasejavanju pod uglom  $\theta=(\pi/2)\text{ rad}$ . Kolika je promena energije ovog fotona?

1553. Kolika je talasna dužina X-fotona ako se ona promeni za 100% pri komptonovskom rasejavanju pod uglom  $\theta=(\pi/2)\text{ rad}$ ?

1554. Koliku najmanju energiju treba da ima  $\gamma$ -foton da bi se mogao preobraziti u par elektron—pozitron?

1555.  $\pi^0$ -mezon, čija se kinetička energija može zanemariti, raspada se na dva  $\gamma$ -fotona jednakih energija. Odrediti energiju ovako nastalih fotona. Masa mirovanja  $\pi^0$ -mezona je  $m_\pi=264,2 m_e$ , gde je  $m_e$ —masa elektrona u mirovanju.

1556. Svaka od čestica para pozitron—elektron se kreće brzinom  $v=0,8c$ . Kolika je talasna dužina fotona koji nastaju pri nestajanju ovog para? Sma-

trati da su nastali fotoni jednakih energija.

1557. Pozitron, kinetičke energije  $E_{e^+}=1\text{ MeV}$ , sudari se sa slobodnim elektronom čija se kinetička energija može zanemariti. U procesu nestajanja para pozitron—elektron nastaju dva  $\gamma$ -fotona jednakih energija. Odrediti ugao  $\theta$  pod kojim se kreću ova dva fotona posle njihovog nastanka.

## 2. Borova teorija. Rendgensko zračenje

Prema I Borovom postulatu, ili postulatu stacionarnih stanja, u atomu postoje neka stacionarna stanja, koja se ne menjaju tokom vremena bez spoljašnjeg dejstva. U tim stanjima atom ne emituje elektromagnetne talase.

Prema II Borovom postulatu, ili pravilu kvantovanja orbita, elektron u stacionarnom stanju atoma, krećući se po kružnoj orbiti, poseduje diskretne, kvantne vrednosti momenta impulsa

$$L = mvr = nh$$

gde je  $m$ —masa elektrona,  $v$ —njegova brzina,  $r$ —poluprečnik kružne orbite elektrona,  $n=1, 2, 3, \dots$ —broj orbite i  $h$ —Plankova konstanta.

Prema III Borovom postulatu, ili pravilu frekvencija, prilikom prelaska atoma iz jednog stacionarnog stanja u drugo emituje se ili apsorbuje jedan kvant energije.

Ako je  $\Delta E$  promena energije atoma, onda je u procesu emisije i apsorpcije jednog fotona

$$\Delta E = h\nu$$

Naime, ako su  $E_n$  i  $E_k$  energije atoma u dva stacionarna stanja, onda je

$$E_n - E_k = h\nu$$

pri čemu nastaje emisija fotona ako je  $E_n > E_k$  i apsorpcija ako je  $E_n < E_k$ .

Talasne dužine pojedinih linija vodonikovog spektra određene su relacijom

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

gde su  $k$  i  $n$ —brojevi orbita, a  $R$ —Ridbergova konstanta, koja iznosi

$$R = \frac{me^4}{8h^3c_0^2} = 1,097 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{m}}$$

gde je  $m$ —masa elektrona,  $e$ —njegovo naelektrisanje,  $h$ —Plankova konstanta i  $c_0$ —električna konstanta.

Poluprečnik  $n$ -te Borove orbite je

$$r_n = n^2 \frac{4\pi\epsilon_0 h^2}{me^2}$$

dok je energija elektrona na njoj

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} = -\frac{1}{n^2} Rch$$

gde je  $n=1, 2, 3, \dots$ —glavni kvantni broj.

Izlazni rad elektrona sa  $n$ -te orbite je

$$A_n = |E_n| = \frac{1}{n^2} Rch$$

Energijsko stanje za koje je  $n=1$  je osnovno stanje, dok je za pobuđena stanja atoma  $n>1$ .

Najmanja talasna dužina zakočnog rendgenskog zračenja  $\lambda_{\text{min}}$  određena je relacijom

$$h \frac{c}{\lambda_{\text{min}}} = eU$$

gde je  $U$ —napon između katode i anode rendgenske cevi.

Prema Mozlijevom zakonu, talasne dužine pojedinih linija spektra karakterističnog rendgenskog zračenja određene su relacijom

$$\frac{1}{\lambda} = R(Z-b)^2 \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

gde je  $Z$ —redni broj elementa (metala) od kog je načinjena anoda rendgenske cevi, a  $b$ —konstanta (za  $K$ -seriju je  $b=1$ ).

Prema Bregovom zakonu, za difrakciju rendgenskog zračenja je

$$2d \sin \theta = k\lambda$$

gde je  $d$ —rastojanje između atomskih ravni kristala,  $\theta$ —ugao između površine kristala i snopa rendgenskog zračenja,  $k=0, 1, 2, 3, \dots$ —red svetlog lika na interferogramu.

Intenzitet rendgenskog zračenja opada po eksponencijalnom zakonu, tokom prostiranja kroz supstanciju. Naime, ako je  $I_0$  intenzitet rendgenskog zračenja ispred ploče debljine  $x$ , a  $I$ —intenzitet istog zračenja iza ploče, onda je

$$I = I_0 e^{-\mu x}$$

gde je  $\mu$ —linearni koeficijent slabljenja rendgenskog zračenja. Najčešće koeficijent slabljenja  $\mu$  zavisi od talasne dužine  $\lambda$  rendgenskog zračenja i gustine  $\rho$  supstancije, tj.  $\mu = \mu(\lambda, \rho)$ .

U praksi se najčešće koristi maseni koeficijent apsorpcije  $\mu_0 = \mu/\rho$ .



1558. Brzina vasijske rakete na startu je  $v \approx 12$  km/s. Vrh rakete je od volframa, a osvetljen je Sunčevim zracima koji su paralelni sa osom rakete. Da li će fotoelektroni nastali na vrhu rakete jonizovati vodonik u atmosferi? Uzeti da je najmanja talasna dužina UV-zračenja Sunca koje dopire do Zemlje  $\lambda = 100$  nm. Izlazni rad elektrona iz volframa iznosi  $A_i = 4,50$  eV, a potencijal jonizacije vodonika  $U_i = 13,6$  V.

1559. Kolika je najveća talasna dužina X-fotona koji mogu da jonizuju vodonik?

1560. Koliki je moment impulsa elektrona u atomu vodonika na 2. Borovoj orbiti?

1561. Kolika je jačina električnog polja jezgra vodonika na 1. Borovoj orbiti?

1562. Kolike i kakve sile deluju između jezgra vodonika i elektrona na prvoj Borovoj orbiti?

1563. Koliku je energiju potrebno uložiti za jonizovanje količine vodonika od 1 mol kada se nalazi na standardnim uslovima?

1564. Kolika je najmanja, a kolika najveća talasna dužina spektralnih linija Limanove serije?

1565. Pri prelasku elektrona sa jedne Borove orbite na drugu nastaje emisija elektromagnetnog zračenja frekvencije  $\nu = 0,45$  PHz. Za koliko se promeni energija elektrona pri ovome?

1566. a) Koliki je rad potrebno uložiti da bi se elektron sa druge Borove orbite udaljio u beskonačnost?

b) Koliku najmanju brzinu treba da ima elektron da pri udaru u atom vodonika izazove emisiju fotona vidljivog zračenja (svetlosti)?

1567. Koliki je potencijal jonizacije atoma vodonika? Koliki je rad potrebno uložiti da bi se elektron sa 1. Borove orbite udaljio u beskonačnost, tj. izašao iz sastava atoma?

1568. Kolika je najveća, a kolika najmanja talasna dužina vidljive (Balmerove) serije vodonikovog spektra?

1569. a) Koliku energiju treba da ima elektron, kojim se bombarduje vodonik, da bi uslovio prelazak elektrona u vodonikovom atomu sa 1. na 2. Borovu orbitu?

b) Kolika treba da bude ova energija da bi se dobio spektar sa najmanje dve spektralne linije?

1570. Na kojoj temperaturi molekuli vodonika imaju energiju dovoljnu za sopstvenu jonizaciju? Potencijal jonizacije vodonika je  $U_i = 13,6$  V.

1571. Veštački Zemljini sateliti kreću se brzinom  $v_0 \approx 10$  km/s. Da li može elektron, koji se odvoji od satelita, pri najpovoljnijim uslovima odvajanja, da jonizuje vodonik u atmosferi? Potencijal jonizacije vodonika je  $U_i = 13,6$  V.

1572. Jezgro elementa, rednog broja  $Z$  u Periodnom sistemu elemenata, bombarduje se  $\alpha$ -česticama. Pri tome odbojna kulonovska sila između čestica dostigne vrednost  $F$ .

a) Do kog najmanjeg rastojanja su se približile čestice?

b) Kolika je bila brzina  $\alpha$ -čestica?

Uticaj elektronskog omotača atoma zanemariti.  
1573. a) Ako je razlika potencijala između katode i anode rendgenske cevi  $U = 60$  kV pri kojoj nastaje emisija X-fotona najveće frekvencije  $\nu_{\max} = 14,54$  EHz, izračunati brojnu vrednost Plankove konstante.

b) Kolika je najveća energija X-fotona?  
c) Koliki je odnos energije elektrona pre udara u katodu i najveće energije X-fotona?

1574. Koliku potencijalnu razliku  $U$  treba da pređe elektron da bi imao istu energiju kao foton rendgenskog zračenja talasne dužine  $\lambda = 100$  pm?

1575. Između katode i anode rendgenske cevi vlada napon  $U = 40$  kV. Elektron, polazeći iz mirovanja sa katode, udari u anodu, pri čemu 40% njegove kinetičke energije biva emitovano u vidu X-fotona. Kolika je talasna dužina ovih fotona?

1576. U televizijskoj katodnoj cevi ubrzavaju se elektroni potencijalnom razlikom  $U = 20$  kV. Kolika je najmanja talasna dužina X-fotona koji nastaju na ekranu katodne cevi usled njenog bombardovanja elektronima?

1577. X-fotoni, talasne dužine  $\lambda_0 = 120$  pm, rasejavaju se prilikom prolaska kroz vosak.

a) Koliko je smanjenje talasne dužine X-fotona koji se rasejavaju pod uglom  $\theta_1 = 90^\circ$ ?

b) Kolika je izmenjena talasna dužina X-fotona u pravcima  $\theta_2 = (2\pi/3)$  rad i  $\theta_3 = \pi$  rad?

1578. Elektron (v. zad. 1575) ne pođe sa katode iz mirovanja, već početnom brzinom  $v_0$ . Kolika je ova brzina ako je talasna dužina dobijenih X-fotona  $\lambda = 70$  pm?

1579. Kolika treba da bude potencijalna razlika između elektroda rendgenske cevi da bi se dobile sve linije K-serije rendgenskog zračenja ako je anoda od:

- a) volframa,  
b) molibdena?

1580. Kolika je najveća talasna dužina K-serije rendgenskog zračenja ako je anoda cevi načinjena od molibdena?

1581. Od čega treba da bude anoda rendgenske cevi da bi se dobilo rendgensko zračenje sa fotonima najmanje talasne dužine  $\lambda = 20$  pm?

1582. Pri prelasku elektrona sa L-te na K-tu orbitu dobija se X-foton talasne dužine  $\lambda = 752$  pm. Od čega je načinjena anoda rendgenske cevi?

1583. Pri kojem se najmanjem uglu  $\theta$  odbijaju X-fotoni, talasne dužine  $\lambda = 30$  pm, od kristalne rešetke kod koje je razmak između ravni kristala  $d = 150$  pm?

1584. Koliki je najmanji ugao  $\theta$  iz prethodnog zadatka za kristal kuhinjske soli ako je njena gustina  $\rho = 2200$  kg/m<sup>3</sup>, a molarna masa  $M = 0,058$  kg/mol? Kristal kuhinjske soli ima pravilnu strukturu, pri čemu se joni Na i C nalaze na naizmeničnim rogljevima kocke. Talasna dužina primenjenog rendgenskog zračenja je  $\lambda = 38$  pm.

### 3. Hajzenbergove relacije neodređenosti

Prilikom istovremenog određivanja  $x, y, z$  koordinata čestice i komponenti  $p_x, p_y, p_z$  njenog impulsa javlja se neodređenost ovih veličina. Naime, nemoguće je istovremeno tačno odrediti obe ove veličine, što je neposredna posledica dualističke prirode čestice.

Ako su  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  neodređenost koordinata čestica pri njihovom merenju, a  $\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z$  odgovarajuće neodređenosti kom-

ponenti njenog impulsa, onda je prema Hajzenbergu

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx h$$

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \approx h$$

$$\Delta z \cdot \Delta p_z \approx h$$

gdje je  $h = \frac{h}{2\pi} = 1,055 \cdot 10^{-34}$  J·s — Plankova konstanta.

Korpuskularno-talasna priroda čestica onemogućava istovremeno tačno određivanje energije i vremena kada čestica raspolože određenom energijom. Naime, ako je  $\Delta E$  neodređenost energije, a  $\Delta t$  vremena, onda je

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar$$

Ako je čestica lokalizovana u prostor dimenzija  $a$ , pri čemu su koordinate  $x, y, z$  tog prostora određene relacijama

$$x_0 < x < x_0 + a$$

$$y_0 < y < y_0 + a$$

$$z_0 < z < z_0 + a$$

onda su neodređenosti ovih koordinata

$$\Delta x \approx \Delta y \approx \Delta z \approx a$$

dok su neodređenosti komponenti impulsa

$$\Delta p_x \approx \Delta p_y \approx \Delta p_z \approx \hbar/a$$

1585. Elektron, čija je kinetička energija  $E_k$ , lokalizovan je u prostoru dimenzija  $a$ . Oceniti, na osnovu relacije neodređenosti, relativnu neodređenost brzine ovog elektrona.

1586. Oceniti na osnovu relacije neodređenosti relativnu grešku sa kojom je određena brzina elektrona na prvoj Borovoj orbiti atoma vodonika. Smatrati da je neodređenost koordinate elektrona jednaka prečniku orbite.

1587. Pretpostavljajući da je neodređenost položaja elementarne čestice, mase  $m$ , koja se kreće brzinom  $v$ , jednaka njenoj De Broljevoj talasnoj dužini, naći relativnu grešku sa kojom je određen impuls ove čestice.

1588. Oceniti najmanju grešku sa kojom se može odrediti brzina elektrona, protona i sferne kuglice (mase  $m_k = 1$  mg) prilikom njihovog kretanja duž X-ose ako je položaj čestica i centra mase sfere određen sa tačnošću  $\Delta x = 1 \mu\text{m}$ .

1589. Vreme trajanja pobuđenog stanja jezgra nekog atoma iznosi  $\tau = 1$  ps. Oceniti neodređenost energije  $\gamma$ -fotona koji emituje ovo jezgro pri povratku u osnovno stanje.

1590. Oceniti relativnu frekventnu širinu  $\Delta\omega/\omega$  spektralne linije emisnog spektra nekog atoma ako je poznato da je vreme trajanja pobuđenog stanja ovog atoma  $\tau \approx 1$  ns, a talasna dužina emitovanog fotona za to vreme  $\lambda = 600$  nm.

1591. Oceniti srednju kinetičku energiju i brzinu elektrona u omotaču atoma ako oblast lokalizacije ovog atoma ima dimenzije  $a \approx 0,1$  nm.

1592. Elektron se kreće u katodnoj cevi brzinom  $v = 10^6$  m/s, pri čemu je ova brzina određena sa greškom  $\Delta v = \pm 100$  m/s. Oceniti neodređenost položaja elektrona u pravcu kretanja.

1593. Kinetička energija elektrona u sastavu atoma vodonika je reda veličine  $10$  eV. Na osnovu relacije neodređenosti, oceniti minimalne dimenzije ovog atoma.

1594. Brzina  $\alpha$ -čestica, koje se koriste pri Raderfordovom eksperimentu u kome nastaje rasejavanje  $\alpha$ -čestica atomima, može se odrediti sa greškom koja nije veća od  $\Delta v = 10^4$  m/s. Oceniti neodređenost položaja  $\alpha$ -čestica ( $m \approx 6,7 \cdot 10^{-27}$  kg).

1595. Elektron se kreće u betatronu, po kružnoj putanji poluprečnika  $r$ , brzinom  $v$ . Oceniti na osnovu relacije neodređenosti, s kojom tačnošću mogu

pri čemu je srednja vrednost impulsa ovako definisane lokalizovane čestice

$$\langle p \rangle \approx \hbar/a$$

Srednja kinetička energija lokalizovane čestice u nerelativističkom slučaju je

$$\langle E_k \rangle = \frac{\langle p \rangle^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{2ma^2}$$

dok je za ultrarelativističke čestice

$$\langle E_k \rangle_{rel} = \langle p \rangle c \approx \frac{\hbar c}{a}$$

Ako je poznata koncentracija  $n$  čestica, onda je za njih

$$\langle E_k \rangle \approx \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{2m}$$

$$\langle E_k \rangle_{rel} \approx \hbar c n^{1/3}$$

gde je  $m$  — masa čestice.

da budu zadani poluprečnik putanje elektrona i njegova brzina ako je:

a) poluprečnik putanje  $r = (1 \pm 0,001)$  m,

b) greška prilikom određivanja radialne komponente brzine  $\Delta v_r = \pm 0,001$  m/s.

1596. Na stolu se nalazi novčić, mase  $m = 1$  g. Prostor njegove lokalizacije ima dimenzije  $a \approx 1$  cm. Oceniti srednji impuls i brzinu novčića.

1597. Pretpostavljajući da se elektron u sastavu atoma vodonika kreće po kružnoj putanji, oceniti poluprečnik ove orbite.

1598. Oceniti koliku kinetičku energiju treba da ima elektron da bi mogao da uđe u jezgro atoma. Dimenzije oblasti lokalizacije jezgra su  $a \approx 10^{-15}$  m.

1599. Oceniti srednju kinetičku energiju slobodnih elektrona u metalu ako je njihova koncentracija  $n = 10^{29}$   $1/\text{m}^3$ .

1600. Pretpostavljajući da se pulsar sastoji praktično samo od neutrona, oceniti njihovu srednju kinetičku energiju ako je masa pulsara  $m = 2 \cdot 10^{30}$  kg, tj. ako je jednaka masi Sunca, i ako je njegov prečnik  $d \approx 10$  km.

1601. Pošto se stanje molekula gasa na apsolutnoj nuli može smatrati odgovarajućim stanjem lokalizovane čestice, oceniti graničnu temperaturu koja odgovara takvom stanju za helijum koncentracije  $n \approx 10^{25}$   $1/\text{m}^3$ .

## 4. Radioaktivnost

Ako posmatrana količina radioaktivne supstance sadrži  $N$  atoma, broj jezgara  $dN$  ovih atoma u kojima je izvršena dezintegracija upravo je srazmeran vremenu  $dt$  u kome su se izvršile dezintegracije ( $dN \sim dt$ ) i broju atoma  $N$  (dakle  $dN \sim N$ ). To znači da je  $dN \sim \lambda N dt$ , ili

$$dN = -\lambda N dt \quad (1)$$

gde je  $\lambda$  — konstanta radioaktivnosti posmatrane supstance.

Količnik  $dN/dt$  predstavlja brzinu kojom se povećava broj dezintegriranih jezgara i naziva se aktivnost posmatrane količine radioaktivne supstance, a obeležava se sa  $A$ . Dakle,

$$A = -\frac{dN}{dt}$$

Jedinica aktivnosti je bekerel (Bq). Naime,

$$[A] = \frac{1}{[t]} = \frac{1}{s} = \text{Bq}$$

Prema relaciji (1) je

$$A = \lambda N$$

što znači da je konstanta radioaktivnosti svojstvo radioaktivne supstance, a aktivnost svojstvo posmatrane količine (čiji je broj atoma  $N$ ) iste radioaktivne supstance.

Na osnovu relacije (1) dobija se zakon radioaktivnog raspada, čija matematička formulacija ima oblik

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

gde je  $N_0$  — broj neraspadnutih jezgara u početnom trenutku, a  $N$  — posle vremena  $t$ .

Umeto konstante radioaktivnosti  $\lambda$  često se koristi vreme poluraspada  $T$  i vreme života  $\tau$  radioaktivne supstance, pri čemu je

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0,693}{\lambda}$$

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

U slučaju radioaktivne ravnoteže, aktivnost svakog člana niza je međusobno jednaka, pa je

$$A_1 = A_2 = A_3 = \dots$$

tj.

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 = \lambda_3 N_3 = \dots$$

Ekspoziciona doza  $D_{exp}$  jonizujućeg zračenja definiše se kao ukupno naelektrisanje jona istog znaka nastalih jonizujućim ozračenjem količine supstance čija je masa  $1$  kg.

Jedinica ekspozicione doze je

$$[D_{exp}] = \frac{C}{kg}$$

Pri ekspozicionoj dozi od  $1$  C/kg u količini supstance, čija je masa  $1$  kg, nastane  $6,28 \cdot 10^{14}$  jonskih parova, od kojih svaki ima po jedno pozitivno i po jedno negativno elementarno naelektrisanje.

Apsorbovana doza  $D_a$  jonizujućeg zračenja definiše se kao energija jonizujućeg zračenja apsorbovana u količini supstance čija je masa  $1$  kg. Ako se u telu, mase  $m$ , apsorbuje energija jonizujućeg zračenja  $E$ , odgovara

rajuća apsorbovana doza je

$$D_a = \frac{E}{m}$$

Jedinica apsorbovane doze je grej (Gy).  
Dakle,

$$D_a = \frac{[E]}{[m]} = \frac{J}{kg} = Gy$$

Ekvivalentna doza  $D_e$  jonizujućeg zračenja definiše se kao i apsorbovana doza, ali se vodi računa o ekvivalentnoj biološkoj efikasnosti pojedinih vrsta jonizujućeg zračenja ( $\beta$ -čestica,  $\alpha$ -čestica, protona, neutrona) u od-

nosu na X- i  $\gamma$ -zračenje. Ta veza se izražava relacijom

$$D_e = KD_a$$

gde je  $K$ —relativna biološka efikasnost ( $K=1$  za X- i  $\gamma$ -zračenje, dok je za ostale vrste zračenja  $0 < K < 20$ ).

Jedinica ekvivalentne doze je sivert (Sv).  
Dakle,

$$[D_e] = \frac{J}{kg} = Sv$$

Brzina doze definiše se kao količnik odgovarajuće doze i vremena za koje je ta doza primljena.

1602. Masa posmatrane količine radioaktivnog izotopa natrijuma  $^{22}Na$  iznosi  $m=0,248 \mu g$ . Period poluraspada ovog izotopa je  $T=62$  s. Kolika je početna aktivnost ove količine natrijuma? Kolika će ona da bude posle vremena  $t=600$  s?

1603. Period poluraspada fosfora  $^{32}P$  iznosi  $T=15$  dana. Kolika je aktivnost fosfora posle 20 dana od trenutka kada je njegova aktivnost bila  $A_0=3,62$  MBq?

1604. Koliki je period poluraspada radijuma ako se zna da aktivnost količine radijuma, mase  $m=1$  g, iznosi  $A=36,2$  GBq?

1605. Pri radioaktivnom raspadu jezgra  $^{24}Na$  nastaje emisija  $\alpha$ -čestice. Period poluraspada ovoga jezgra iznosi  $T=14,8$  h. Koliko se jezgara  $^{24}Na$  raspadne za vreme  $t=10$  h u uzorku mase  $m=1$  mg?

1606. Pri izučavanju  $\beta$ -raspada  $^{22}Mg$  u trenutku  $t=0$  uključen je GM-brojač. U toku prvog narednog vremenskog intervala  $\Delta t_1=2,0$  s broj registrovanih  $\beta$ -čestica je  $n_1$ , a u toku sledećeg vremenskog intervala, koji je 3 puta duži od prvog, broj registrovanih  $\beta$ -čestica je 2,26 puta veći. Kolika je konstanta radioaktivnosti  $^{22}Mg$ ?

1607. Koliko atoma RaA nastane iz  $10^6$  atoma RaEm za vreme  $t=2$  h? Period poluraspada RaEm je  $T_{RaEm}=3,82$  dana.

1608. Odrediti konstantu radioaktivnosti supstancije čiji intenzitet  $\beta$ -zračenja opadne za 10% u toku vremena od 1 h. Produkte raspada smatrati neradioaktivnim.

1609. Pomoću GM-brojača može se utvrditi da količina urana  $^{238}U$ , čija je masa  $m=1$  g, emituje  $1,15 \cdot 10^4$   $\alpha$ -čestica u svakom vremenskom intervalu od 1 s. Kolika je konstanta radioaktivnosti urana, a koliko vreme života?

1610. Koliko helijuma nastane iz količine radijuma, mase  $m=1$  g, u toku jednog meseca? Smatrati da je helijum na standardnim uslovima.

1611. U cilju medicinskih ispitivanja, u krv čoveka uneta je mala količina rastvora koji sadrži radioaktivni element natrijuma  $^{22}Na$ . Aktivnost unesene količine  $^{22}Na$  bila je  $A_0=2$  kBq. Aktivnost količine krvi, zapremine  $1$  cm<sup>3</sup>, uzete posle vremena  $t=5$  h, od istog čoveka, iznosila je  $A_1=0,267$  Bq/cm<sup>3</sup>. Period poluraspada  $^{22}Na$  iznosi  $T \approx 15$  h. Kolika je ukupna zapremina krvi ovog čoveka, pod pretpostavkom da je radioaktivni preparat homogeno raspoređen u njoj?

1612. Energija svake  $\alpha$ -čestice koju emituje radon je  $E_0=5,49$  MeV. Ako se energija  $\alpha$ -čestice pretvara u unutrašnju energiju, izračunati:

- koliku količinu toplote oda količina Rn, čija je aktivnost  $A=36,2$  GBq, za vreme od 1 h,
- kolika se količina toplote oslobodi na ovaj način za vreme života Rn.

1613. Aktivnost posmatrane količine RaD iznosi  $A=10^5$  Bq i nalazi se u radioaktivnoj ravnoteži sa produktima raspada. Koliko atoma RaD, RaE i Po sadrži posmatrana količina radioaktivnog preparata? Koliko  $\alpha$ - i  $\beta$ -čestica emituje ovaj preparat svakog vremenskog intervala od 1 s? Period poluraspada RaD iznosi  $T_{RaD}=22$  godine.

1614. Uran  $^{238}U$  javlja se kao produkt u toku radioaktivnog raspada osnovnog izotopa urana  $^{238}U$ , i to u iznosu 0,006%. Odrediti period poluraspada urana  $^{238}U$  ako je pri ovom uspostavljena radioaktivna ravnoteža.

1615. Šta nastaje od urana  $^{238}U$  posle pet  $\alpha$ -i jednog  $\beta$ -raspada? Koliko je vreme života novonastale supstancije? Koristiti tablice na kraju knjige.

1616. Kolika je masa i zapremina radona koji je u radioaktivnoj ravnoteži sa količinom radijuma čija je masa  $m=1$  g? Smatrati da je radon na standardnim uslovima. Period poluraspada radona iznosi  $T_{Rn}=3,62$  dana.

1617. GM-brojačem se ustanovi da spontana jonizacija daje  $z_0=18$  impulsa/min. Kada se ispred GM-brojača postavi radioaktivni izvor koji emituje monohromatsko  $\gamma$ -zračenje a između njih se umetne metalna pločica, brojačem se registruje  $z_1=122$  impulsa/min. Ako se uz prethodnu pločicu postavi druga pločica od istog metala, debljine  $d=2$  mm, brojač registruje  $z_2=97$  impulsa/min.

Koliki je linearni koeficijent apsorpcije metala od koga je načinjena pločica? Koliki je odgovarajući maseni koeficijent apsorpcije? Gustina metala od koga su načinjene pločice iznosi  $\rho=8400$  kg/m<sup>3</sup>.

1618. Atomska centrala, snage  $P=500$  MW, u svom radu koristi uran  $^{235}U$  i ima stepen korisnog dejstva  $\eta_1=20\%$ . Termocentrala, iste snage, u kojoj se upotrebljava kameni uglj, ima stepen korisnog dejstva  $\eta_2=75\%$ . Kolika je godišnja potrošnja goriva ovih centrala ako se pri fisiji jednog jezgra urana  $^{235}U$  oslobodi energija  $E=200$  MeV i ako je toplotna moć upotrebljenog kamenog uglja  $q_k=29,3$  MJ/kg?

1619. Vozilo se kreće na nuklearni pogon, pri čemu se koristi energija fisije urana 235. Prilikom fisije jednog jezgra urana 235 oslobađa se energija  $E=200$  MeV. Intenzitet srednje otporne sile pri kretanju vozila iznosi  $F_0=0,5$  MN, dok je stepen korisnog dejstva pokretačkog sistema  $\eta=0,35$ . Kolika je masa one količine urana 235 koja se utroši za pokretanje vozila na putu dužine  $s=600$  km?

1620. Čovek, mase  $m=77$  kg, u toku vremena  $t=6$  h izložen je jonizujućem zračenju, pri čemu apsorbuje energiju  $E=10$  J. Kolika je apsorbovana doza jonizujućeg zračenja i brzina apsorbovane doze?

1621. U tkanini, mase  $m=20$  g, apsorbuje se  $n=10^{10}$   $\alpha$ -čestica, od kojih svaka poseduje energiju  $E_\alpha=4,9$  MeV. Kolika je apsorbovana i ekvivalentna doza  $\alpha$ -zračenja? Uzeti da je za  $\alpha$ -čestice relativna biološka efikasnost  $K=20$ .

1622. Da bi se izmerio intenzitet rendgenskog zračenja, koristi se jonizaciona komora, zapremine  $V=100$  cm<sup>3</sup>, u kojoj se nalazi vazduh na standardnim uslovima. Pri izlaganju komore rendgenskom zračenju, jačina struje kroz komoru je  $I=0,01$   $\mu A$ . Kolika je ekspozična doza rendgenskog zračenja kojoj je izložen vazduh u komori?

1623. Pod dejstvom kosmičkog zračenja, u vazduhu se u zapremini  $V=1$  cm<sup>3</sup> obrazuje prosečno  $N_1=120$  jonskih parova u toku vremenskog intervala  $\Delta t=60$  s. Kolika je ekspozična doza zračenja kojoj je izložen čovek u toku vremenskog intervala od 1 h?

1624. Koliko se procenata molekula vazduha, koji se nalazi na standardnim uslovima, jonizuje pod dejstvom  $\gamma$ -zračenja ako je ekspozična doza kojoj je izložen vazduh  $D_{exp}=320$  MC/kg?

## 5. Nuklearne reakcije

Energija veze jezgra određena je Ajnštajnovom relacijom

$$E_v = \Delta m \cdot c^2$$

gde je  $\Delta m$  — razlika masa čestica iz kojih je jezgro izgrađeno i mase jezgra, tj. defekt mase.

Defekt mase je određen relacijom

$$\Delta m = Zm_p + (A-Z)m_n - m_j$$

gde je  $Z$  — redni broj elementa,  $m_p$  — masa protona,  $A$  — maseni broj elementa,  $m_n$  — masa neutrona i  $m_j$  — masa jezgra.

Kako je  $m_j = m_a - Zm_e$ , gde je  $m_a$  — masa atoma posmatranog elementa, a  $m_e$  — masa elektrona, prethodna relacija može se napisati u obliku

$$m = Zm_{\text{H}} + (A-Z)m_n - m_a$$

gde je  $m_{\text{H}}$  — masa atoma vodonika  ${}^1_1\text{H}$ .

Energija koja se oslobađa ili troši pri nuklearnoj reakciji određena je relacijom

$$E = (\Sigma m_1 - \Sigma m_2)c^2$$

gde je  $\Sigma m_1$  — zbir masa čestica pre reakcije, a  $\Sigma m_2$  — zbir masa čestica posle reakcije.

Ako je masa  $\Sigma m_1 > \Sigma m_2$ , nuklearna reakcija se odvija uz oslobađanje energije, a ako je  $\Sigma m_1 < \Sigma m_2$ , reakcija se odvija uz utrošak energije.

Energija koja je u vezi sa procesima u jezgru atoma u praksi se najčešće, osim u džulima, izražava i u elektronvoltima (eV), tj. megaelektronvoltima (MeV), pri čemu je

$$1 \text{ MeV} = 0,160 22 \text{ pJ}$$

1625. U prirodi se nalazi izotop azota  ${}^{14}_7\text{N}$ , koji se pri nuklearnoj reakciji transformiše u vodonik  ${}^1_1\text{H}$  i ugljenik  ${}^{14}_6\text{C}$ , pod dejstvom neutrona nastalih kosmičkim zračenjem. Napisati jednačine ove nuklearne reakcije.

1622. Za indikaciju neutronskog zračenja koristi se bor  ${}^{10}_5\text{B}$ , pri čemu se dobijaju  $\alpha$ -čestice, kao dokaz neutronskog zračenja. Napisati jednačinu ove nuklearne reakcije.

1627. Radioaktivni fosfor  ${}^{30}_{15}\text{P}$  je veoma nestabilan element, sa periodom poluraspada 2,65 minuta, pri čemu emituje  $\beta^+$ -česticu. Napisati jednačinu ove nuklearne reakcije.

1628. U nuklearnim laboratorijama neutroni se dobijaju pri reakciji  ${}^9_4\text{B}$  sa  $\alpha$ -česticama. Napisati jednačinu ove nuklearne reakcije.

1629. Pri bombardovanju izotopa aluminijuma  ${}^{27}_{13}\text{Al}$  neutronima  ${}^1_0\text{n}$  prema nuklearnoj reakciji  ${}^{27}_{13}\text{Al} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{28}_{13}\text{Al}$  dobija se aluminijum  ${}^{28}_{13}\text{Al}$ , koji je veoma nestabilan, sa periodom poluraspada 2,31 minuta, pri čemu emituje  $\beta^-$ -česticu. Koji se element pri ovome dobija?

1630. Koliko protona, a koliko neutrona imaju jezgra:

- a)  ${}^{25}_{13}\text{Al}$ ; b)  ${}^7_3\text{Li}$ ; c)  ${}^{32}_{15}\text{P}$ ; d)  ${}^{137}_{55}\text{Cs}$ ; e)  ${}^{235}_{92}\text{U}$ ?

1631. Pri raspadu urana  ${}^{238}_{92}\text{U}$  nastaju  $\alpha$ -zraci čija je energija  $E = 4,75 \text{ MeV}$ . Koliki defekt mase jezgra odgovara emisiji  $\alpha$ -čestice ovolike energije?

1632. Neutron može da pređe u proton sa periodom poluraspada od 12 minuta, pri čemu se dobije elektron energije 0,78 MeV. Na osnovu ovog izračunati za koliko je masa neutrona veća od mase protona.

1633. Kolika energija u MeV odgovara masi od 1 u? Uzeti da je brzina svetlosti u vakuumu  $c = 299 792 458 \text{ m/s}$  i da je  $1 \text{ u} = 1,660 565 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ .

1634. Kolika je energija veze jezgra  ${}^9_4\text{B}$ ?

1635. Kolika je energija veze jezgra  ${}^{14}_7\text{N}$ ?

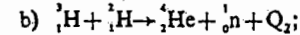
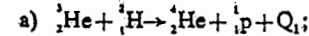
1636. Koliki je defekt mase pri nastajanju jednog atoma  ${}^4_2\text{He}$ ? Kolika je energija veze jezgra ovog atoma?

1637. Odrediti energiju veze jezgara definisanih u priloženoj tablici.

| Jezgro                  | Sastav jezgra | Masa jezgra, u | Zbir masa protona i neutrona, u | Defekt mase, u |
|-------------------------|---------------|----------------|---------------------------------|----------------|
| ${}^2_1\text{H}$        | 1 p + 1 n     | 2,013 55       | 2,015 94                        | 0,002 39       |
| ${}^3_1\text{H}$        | 1 p + 2 n     | 3,016 05       | 3,024 61                        | 0,008 56       |
| ${}^7_3\text{Li}$       | 3 p + 4 n     | 7,015 84       | 7,056 49                        | 0,040 65       |
| ${}^{12}_6\text{C}$     | 6 p + 6 n     | 11,096 70      | 12,095 65                       | 0,098 95       |
| ${}^{16}_8\text{O}$     | 8 p + 8 n     | 15,990 51      | 16,127 53                       | 0,137 02       |
| ${}^{238}_{92}\text{U}$ | 92 p + 146 n  | 238,002        | 239,935                         | 1,935          |

1638. Kolika se energija oslobađa u vodoničnoj bombi pri sintezi 1 kg  ${}^4_2\text{He}$ ?

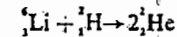
1639. U termonuklearnom reaktoru sa deuteronima mogu da nastupe dve reakcije:



pri kojima se oslobađa energija. Kolike su količine toplota  $Q_1$  i  $Q_2$  oslobodene pri ovim reakcijama?

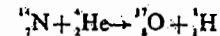
1640. Kolika se energija troši pri nuklearnoj reakciji  ${}^{40}_{20}\text{Ca} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^{41}_{20}\text{K} + {}^1_2\text{He}$ ?

1641. a) Kolika se količina toplote oslobodi pri termonuklearnoj reakciji



b) Kolika količina toplote može da se dobije od količine  ${}^7_3\text{Li}$  mase  $m = 1 \text{ g}$ ?

1642. Koliku je energiju potrebno uložiti za nuklearnu reakciju



1643. Kolika se energija oslobodi pri nuklearnoj reakciji  ${}^7_3\text{Li} + {}^1_1\text{H} \rightarrow 2 {}^4_2\text{He}$ ?

1644. Litijum  ${}^7_3\text{Li}$  bombarduje se protonima, energije 0,125 MeV, pri čemu se dobijaju dve  $\alpha$ -čestice. Koliku energiju imaju obe  $\alpha$ -čestice koje nastanu pri ovome?

1645. Kolika je snaga nuklearne centrale ako njena dnevna potrošnja urana — 235 iznosi  $m = 0,22 \text{ kg}$  i ako je njen stepen korisnog dejstva  $\eta = 0,25$ ? Pri dobi jednog jezgra urana — 235 oslobodi se energija  $E_0 = 200 \text{ MeV}$ .

1646. Snaga Sunčevog zračenja koje pada na Zemlju iznosi  $P = 1 \text{ PW}$ . Kolika je masa one količine vodonika koja prilikom termonuklearnih procesa na Suncu prelazi u helijum, pri čemu se odvija energetski proces čija snaga zračenja iznosi 1 PW?

1647. Povećanje mase čestice pri njenom ubravanju u fazotronu kompenzuje se povećanjem perioda napona na duantima. Prilikom ubravanja protona, frekvencija ovog napona se smanji od  $\nu_1 = 25 \text{ MHz}$  na  $\nu_2 = 18,0 \text{ MHz}$  pri svakom uzastopnom prolasku protona između duanata. Kolika je

a) magnetna indukcija,

b) kinetička energija izlazćih protona?

## NEKE PRAKTIČNE NAPOMENE

Praksa je pokazala da je izrada zadataka iz fizike najbolji način za proveru suštinskog shvatanja zakona fizike, fizičkih pojava i pojmova. Potrebno je imati u vidu da se pri tome javljaju mnoge teškoće koje se ne mogu jednostavno definisati ni ograničiti jer su najčešće individualne prirode. S tim u vezi je potrebno ukazati na neke opšte stavove o kojima se mora voditi računa prilikom izrade zadataka iz fizike i korišćenja ove Zbirke.

• Pre početka izrade zadatka iz neke oblasti fizike potrebno je upoznati uvodni tekst za tu oblast, a ako to nije dovoljno, koristiti udžbenik, i to sve dok se ne prevaziđe formalno znanje fizike.

• Posle upoznavanja teksta zadatka potrebo je učiniti moguće aproksimacije, na primer: da je trenje zanemarljivo, da se telo može smatrati materijalnom tačkom, da je telo homogeno, da je ubrzanje slobodnog padanja jednako u svim tačkama putanje, da je sočivo tanko, da je sredina izotropna u pogledu električnih i magnetnih svojstava, da je jezgro atoma sfernog oblika, da se svetlost prostire pravolinijski, da su oscilacije harmonijske, i sl.

• Tokom izučavanja teksta zadatka potrebno je nacrtati odgovarajuću sliku i na njoj naznačiti sve date veličine, kao i veličine koje se traže, a zatim pored slike napisati i njihove vrednosti izražene u SI jedinicama. I orde je potrebno istaći da se sve više u praksi potvrđuje da je "dobra slika pola rešenja".

• Zadatak je potrebno rešavati u opštem obliku, a rezultat izraziti datim veličinama i poznatim konstantama. Samo ovakav način rešavanja zadataka omogućava potpunu analizu rezultata i otklanja mogućnost kumulativnih grešaka.

• S obzirom na značaj poznavanja jedinica u fizici, potrebno je izučiti poglavlje o Međunarodnom sistemu jedinica izloženo na stranama 5—10.

• Zamena brojnih vrednosti pojedinih fizičkih veličina u dobijenoj relaciji vrši se tako što se one izraze u obliku  $a \cdot 10^n$ , gde je  $1 \leq a < 10$ . Pri tome sve veličine treba da budu izražene sa jednakim stepenom tačnosti, a to u praksi najčešće znači sa tri značajne cifre, na primer:  $2,45 \cdot 10^{-6} \text{C}$ ;  $9,01 \cdot 10^7 \text{kg}$ , itd.

• S obzirom da sve fizičke veličine imaju svoje približne vrednosti, osim onih koje su uslovno proglašene tačnim (kao što su standardni pritisak, standardna temperatura, standardno ubrzanje slobodnog padanja), to je tačno računanje sa netačnim brojevima beskoristan posao i ukazuje na nedovoljnu stručnost, odnosno nedovoljno poznavanje problema. Da bi se u ovom smislu pravilno postupalo prilikom korišćenja ove Zbirke ili u opštoj stručnoj praksi, potrebno je izučiti odeljak o greškama izložen na stranama 427—437.

• Jedn od najefikasnijih načina provere ispravnosti dobijenog rezultata jeste primena jediničnih jednačina, pa je u tom smislu potrebno izučiti gradivo izloženo na stranama 437—445.

• Neophodno je da se učini dovoljan napor da bi se samostalno izradio svaki zadatak, pa ako se u tome ne uspe, tek onda izučiti rešenje zadatka, imajući u vidu da su u tekstu rešenja najčešće izloženi samo kritični delovi postupka. Zbog toga je neophodno da čitalac samostalno izradi potpun mozaik rešenja, jer će samo tako njegov trud da ima trajnu vrednost.

• Prilikom izražavanja rezultata računavanja pogodno je koristiti dekadne predmetke SI.

# REŠENJA I ODGOVORI

## MEHANIKA

### 1. KINEMATIKA TRANSLATORNOG KRETANJA

1. Srednja brzina automobila je

$$\langle v \rangle = \frac{\sum_{i=1}^2 s_i}{\sum_{i=1}^2 t_i} = \frac{s_1 + s_2}{\frac{t}{2} + \frac{t}{2}}$$

gde je  $s_1 = v_1 t_1$ , a kako je  $t_1 = t_2 = t/2$ , to je  $s_1 = v_1 t_1$

$$\langle v \rangle = \frac{v_1 + v_2}{2} = 45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

1. Srednja brzina automobila je

$$2. \langle v \rangle = \frac{\sum_{i=1}^2 s_i}{\sum_{i=1}^2 t_i} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2}$$

gde je  $t_1 = s_1/v_1$  i  $t_2 = s_2/v_2$ , a kako je  $s_1 = s_2$ , to je

$$\langle v \rangle = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 43,2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$3. \langle v \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n s_i}{\sum_{i=1}^n t_i} = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} + \dots + \frac{s_n}{v_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i}}$$

$$4. \langle v \rangle = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n \Delta t}$$

$$= \frac{v_1 \Delta t + v_2 \Delta t + \dots + v_n \Delta t}{n \Delta t} = \frac{\sum_{i=1}^n v_i}{n}$$

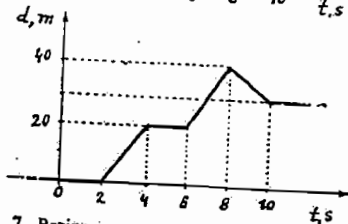
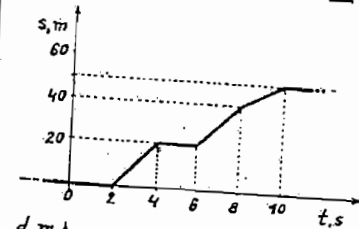
5. Kako je

$$t = t_1 + t_2 = \frac{s/3}{v_1} + \frac{2s/3}{v_2} = \frac{s}{\langle v \rangle}$$

to je

$$v_1 = \frac{\langle v \rangle v_2}{3v_2 - 2\langle v \rangle} = 21,6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

6. a)  $s = 450 \text{ m}$ , b)  $d = 30 \text{ m}$ , c)  $\square$



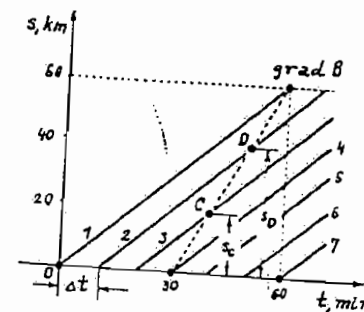
7. Brzina voza u odnosu na lokomotivu je  $v = v_1 + v_2$ , pa je vreme trajanja susreta

$$t = \frac{l}{v_1 + v_2} = 6 \text{ s}$$

8. a)  $\square$

b) Prvi automobil dođe u grad B za vreme  $t = \frac{d}{v} = 1 \text{ h}$ , odnosno u trenutku kada iz grada A pođe sedmi automobil. Potrebna brzina četvrtog automobila je  $v_4 = \frac{s}{t - 3\Delta t}$ . Kako je  $t = 6\Delta t$ , to je

$$v_4 = \frac{s}{3\Delta t} = 120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

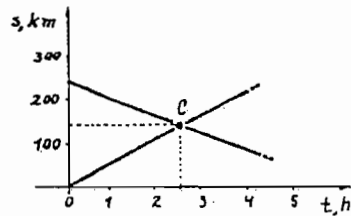


Četvrti automobil će stići treći automobil posle pređenog puta  $s_C = v_4 \Delta t = 20 \text{ km}$  ili posle vremena  $\Delta t = 10 \text{ min}$  od polaska. Mesto susreta

nja drugog automobila u koloni je udaljeno

$$s_D = 2v_1 \Delta t = \frac{4vt}{6} = 40 \text{ km}$$

od grada A, a desiće se posle vremena  $t_2 = 5 \Delta t = 50 \text{ min}$ .



9. Ako se automobili sretnu posle vremena  $t_C$ , udaljenje mesta susreta od grada A je  $s_A = v_A t_C$ , a od grada B je  $s_B = v_B t_C$ . Kako je  $d = s_A + s_B$ , to je

$$t_C = \frac{d}{v_A + v_B} = 2,5 \text{ h}$$

Prema tome, koordinate mesta susreta (tačke C) su  $t_C = 2,5 \text{ h}$  i  $s_C = v_A t_C = 150 \text{ km}$ .

10. Pri kretanju niz reku brzina čamca u odnosu na obalu je  $v_c + v_r$ , pa je  $s = (v_c + v_r)t$ , odnosno

$$v_r = \frac{s}{t} - v_c = 1,6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

11. Pri kretanju uzvodno je  $d = (v_p - v_r)t_1$ , a nizvodno  $d = (v_p + v_r)t_2$ . Odatve je brzina reke  $v_r = \frac{d}{2t_2} \left(1 - \frac{t_2}{t_1}\right) = 5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Brzina parobroda u odnosu na vodu je

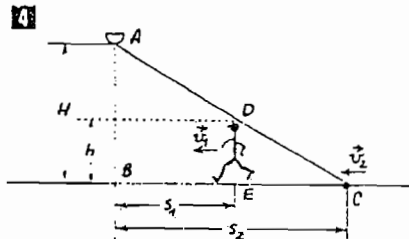
$$v_p = \frac{d}{2t_2} \left(1 + \frac{t_2}{t_1}\right) = 13 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

12. Za vreme dok čovek pređe put  $s_1 = v_1 t$ , vrh senke pređe put  $s_2 = v_2 t$ . Iz sličnosti trouglova ABC i DEC sledi da je

$$\frac{H}{h} = \frac{s_2}{s_1 - s_2} = \frac{v_2 t}{v_1 t - v_2 t} = \frac{v_2}{v_1 - v_2}$$

odnosno

$$v_2 = v_1 \frac{H}{H - h} = 1,36 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



13. a) Ako je  $l$ —rastojanje gledaoca do orkestra, a  $d$ —rastojanje radio-slušaoća do pozorišta, onda je  $\frac{l}{c} = \frac{d}{c_0}$ , odnosno  $l = d \frac{c}{c_0} = 8,5 \text{ m}$ .

b) Ako je  $l_1$ —rastojanje gledaoca od orkestra,  $l_2$ —rastojanje slušaoća od radio-aparata i  $d$ —rastojanje radio-aparata od pozorišta, onda je  $\frac{l_1}{c} = \frac{d}{c_0} + \frac{l_2}{c}$ , odnosno  $l_2 = l_1 - \frac{c}{c_0} d = 21,5 \text{ m}$ .

14. Granata će da stigne avion za vreme  $t = \frac{d}{v_2} = 3,6 \text{ s}$ , pa će avion za ovo vreme da pređe put  $s = v_1 t = 1200 \text{ m}$ .

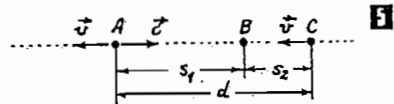
15. Vreme kretanja granate je  $t_1$ , dok je  $t_2$  zbir vremena kretanja granate i vremena prostiranja zvuka od tenka do gledaoca, koji se nalazi pored oruda. Prema tome, vreme prostiranja zvuka je  $t = t_2 - t_1$ , pa je rastojanje od oruda do tenka  $d = ct = c(t_2 - t_1) = 510 \text{ m}$ . Brzina kretanja granate je

$$v = \frac{d}{t_1} = c \frac{t_2 - t_1}{t_1} = 850 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

16. Brzina jednog voza u odnosu na drugi je  $v = v_1 + v_2 = 36 \text{ m/s}$ , pa je vreme prolaženja drugog voza pored jednog prozora prvog voza  $t_1 = \frac{l_2}{v_1 + v_2} = 2,77 \text{ s}$ . Drugi voz će za ovo vreme da pređe put  $s = v_2 t_1 = 55,4 \text{ m}$ .

17. Zvučni talas pucnja će se sresti sa zadnjim avionom u tački B, koja je udaljena od prednjeg aviona za  $s_1 = ct$ , a od zadnjeg za  $s_2 = vt$ , gde je  $t$ —vreme prostiranja zvuka od tačke A do tačke B, odnosno vreme kretanja zadnjeg aviona od tačke C do tačke B. Kako je  $d = s_1 + s_2$ , to je brzina aviona

$$v = \frac{d - ct}{t} = 410 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1476 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$



18. Putovanje uzvodno traje  $t_1 = \frac{d}{v_1 - v_2}$ , a nizvodno  $t_2 = \frac{d}{v_1 + v_2}$ . Zbir ova dva vremena je  $t = t_1 + t_2 = \frac{2v_1 d}{v_1^2 - v_2^2}$ . Ako bi se brod kretao po mirnoj vodi, onda bi putovanje na ovoj relaciji trajalo  $t' = \frac{2d}{v_1}$ . Odnos ovih vremena je

$$\frac{t}{t'} = \frac{v_1^2}{v_1^2 - v_2^2} = 1,07$$

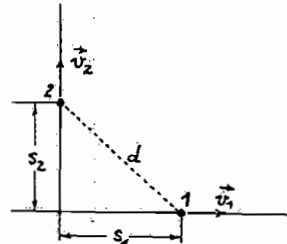
19. Pri kretanju broda niz reku, brod pređe put po njoj  $s_1 = v_1 t_1 = d \frac{v_1}{v_1 + v_2} = 0,8 \text{ km}$ . Kada se brod kreće uzvodno, tada pređe put po reci  $s_2 = v_2 t_2 = d \frac{v_2}{v_2 - v_1} = 1,3 \text{ km}$ . Zbir ovih puteva predstavlja pređeni put po vodi, pri odlasku i povratku broda. Naime,  $s_1 + s_2 = 2,1 \text{ km}$ . Odatve je  $2d < s$ , što ukazuje na nepovoljne uslove kretanja broda po tekućoj vodi.

$$20. t = \frac{2t_1 t_2}{t_1 - t_2} = 12 \text{ h}$$

21. Ako su brzine tela stalne, onda je brzina udaljavanja tela  $v' = v_1 + v_2$ , a približavanja  $v'' = v_1 - v_2$ . Odatve se dobija da su brzine tela  $v_1 = \frac{v' + v''}{2}$  i  $v_2 = \frac{v' - v''}{2}$ .

$$\text{Kako je } v' = \frac{\Delta d_1}{\Delta t_1} = 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ i } v'' = \frac{\Delta d_2}{\Delta t_2} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

to je  $v_1 = 1,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  i  $v_2 = 0,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

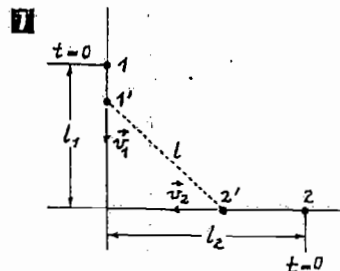


22. Kako se tela kreću stalnim brzinama, to je  $s_1 = v_1 t$  i  $s_2 = v_2 t$ . Prema slici 6 je  $d = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$ , odnosno  $d(t) = t \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ . Prvo telo će da pređe put  $s_1 = 90 \text{ km}$  za vreme  $t_1 = s_1/v_1 = 3 \text{ h}$ , pa je u tom trenutku rastojanje između tela

$$d_1 = t_1 \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 150 \text{ km}$$

23. a) Rastojanje između čestica 1 i 2 posle vremena  $t$  je

$$l = \sqrt{(l_1 - v_1 t)^2 + (l_2 - v_2 t)^2} \quad (1)$$



Iz uslova  $d/dt = 0$  nalazi se vreme  $t_0$  posle koga će rastojanje da bude najmanje. Naime,

iz uslova

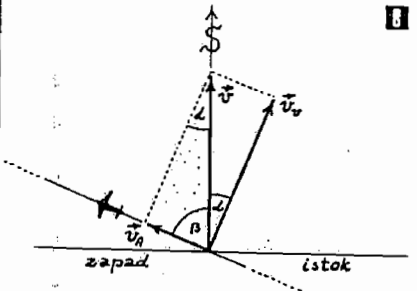
$$\frac{t_0(v_1^2 + v_2^2) - (l_1 v_1 + l_2 v_2)}{\sqrt{(l_1 - v_1 t_0)^2 + (l_2 - v_2 t_0)^2}} = 0$$

nalazi da je

$$t_0 = \frac{l_1 v_1 + l_2 v_2}{v_1^2 + v_2^2} \quad (2)$$

b) Prema relacijama (1) i (2) je

$$l_{\min} = \frac{|l_1 v_2 - l_2 v_1|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$



24. Iz vektorskog dijagrama brzine prikazanog na slici 8 vidi se da avion treba da ima brzinu

$$v_A = \sqrt{v^2 + v^2 - 2v v \cos \alpha} = 274,3 \text{ km/h}$$

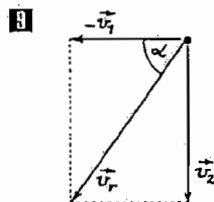
Kako je prema sinusnoj teoremi,

$$\frac{v_A}{\sin \alpha} = \frac{v}{\sin \beta}$$

to je potreban kurs aviona

$$\beta = \arcsin \left( \frac{v}{v_A} \sin \alpha \right) = 4^\circ 17'$$

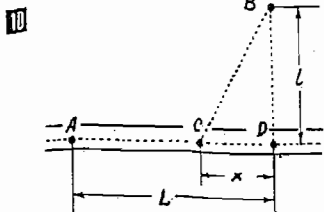
25. Ako je  $\vec{v}_1$ —brzina kapljice u odnosu na zemlju, a  $\vec{v}_2$ —brzina vagona, onda je pravac rezultujuće brzine  $\vec{v}_r$ . Njen intenzitet je  $v_r = v_1 \tan \alpha = 5,6 \text{ m/s}$



26. Ako biciklista skrene sa puta u tački C, onda je vreme njegovog kretanja do tačke B

$$t(x) = \frac{L-x}{v} + \frac{\sqrt{x^2+l^2}}{v/k}$$

gde je  $v$ —brzina bicikliste na asfaltnom putu.



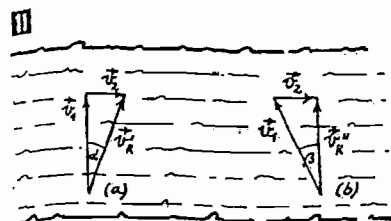
Minimalno vreme kretanja bicikliste po putu  $ABC$  određeno je uslovom

$$\frac{d t(x)}{d x} = \left( \frac{kx - \sqrt{x^2+l^2}}{\sqrt{x^2+l^2}} \right) = 0$$

tj.  $kx - \sqrt{x^2+l^2} = 0$ , odakle je

$$x = \frac{l}{\sqrt{k^2-1}}$$

27. Na slici su dati vektorski dijagrami brzina u oba slučaja.



a) Čamac će se kretati po putanji koja zaklapa ugao  $\alpha$  prema normalni na rečni tok, pri čemu je  $\alpha = \arctg \frac{v_2}{v_1} = 26^\circ 33'$ . Rezultujuća brzina čamca je prema tome

$$v_R' = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 4,47 \frac{m}{s}$$

pa on pređe put

$$s' = \frac{d}{\cos \alpha} = 1,12 \text{ km}$$

dok je vreme prelaženja reke

$$t' = \frac{s'}{v_R'} = 250 \text{ s}$$

b) Čamac je potrebno usmeriti pod uglom

$$\beta = \arcsin \frac{v_2}{v_1} = \arcsin \frac{2}{4} = 30^\circ$$

pri čemu je njegova brzina

$$v_R'' = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \approx 3,5 \text{ m/s}$$

pa je vreme prelaženja reke

$$t'' = \frac{d}{v_R''} = 295 \text{ s}$$

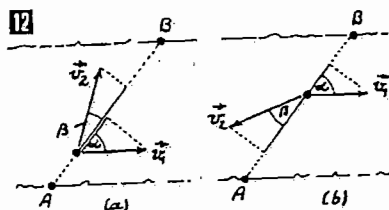
c)  $t/t'' = 0,85$ .

28. Na vektorskom dijagramu prikazani su vektori brzina  $\vec{v}_1$  i  $\vec{v}_2$  za oba smera kretanja čamca. Ako se brzine  $\vec{v}_1$  i  $\vec{v}_2$  razlože na komponente koje su paralelne i normalne pravcu  $AB$ , onda je za prvi slučaj kretanja

$$v_1 \sin \beta = v_1 \sin \alpha \quad (1)$$

što predstavlja uslov kretanja čamca po pravcu  $AB$ . Potrebna brzina čamca u ovom slučaju je

$$v_{AB}' = v_1 \cos \alpha + v_2 \cos \beta \quad (2)$$



Ako je  $t_1$  vreme prelaženja reke u smeru  $AB$ , onda je širina reke

$$d = v_{AB}' t_1 = (v_1 \cos \alpha + v_2 \cos \beta) t_1 \quad (3)$$

a ako je  $t_2$  vreme prelaženja reke u smeru  $BA$ , onda je analogno

$$d = v_{BA}'' t_2 = (v_1 \cos \beta - v_1 \cos \alpha) t_2 \quad (4)$$

Prema relacijama (3) i (4), vreme prelaženja reke u oba smera je

$$t = \frac{d}{v_1 \cos \beta + v_1 \cos \alpha} + \frac{d}{v_1 \cos \beta - v_1 \cos \alpha} \quad (5)$$

Eliminisanjem brzine  $v_2$  iz relacija (1) i (5) dobija se da je ugao  $\beta$  pod kojim je potrebno usmeriti čamac prema pravcu  $AB$

$$\beta = \arccotg \frac{d + \sqrt{d^2 + v_1^2 t^2 \cos^2 \alpha}}{v_1 t \sin \alpha} \approx 35^\circ$$

pa je prema relaciji (1) brzina čamca

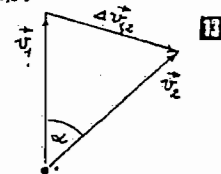
$$v_2 = v_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 2,49 \frac{m}{s}$$

odnosno 8,9 km/h.

29. a)  $\vec{v}_{1,2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ , pri čemu je

$$v_{1,2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \alpha}$$

b)  $d = v_{1,2} t_0$



30. Ukupni pređeni put automobila je

$$s = s_1 + s_2$$

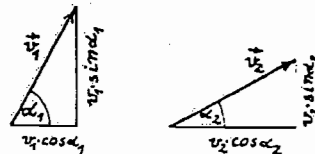
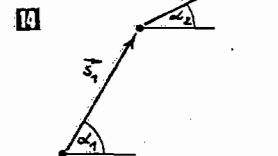
pa je  $\langle v \rangle t = v_1 t_1 + v_2 t_2$ , odakle je

$$\langle v \rangle = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t}$$

ili

$$\langle v \rangle = \frac{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{1}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$$

jer je  $s_1 = s_2 = s/2$  i  $t_1 = s/v_1$ ,  $t_2 = s/v_2$



Komponente ove brzine su

$$\langle v \rangle_x = \frac{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = 32,8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$\langle v \rangle_y = \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = 32,8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

pa je

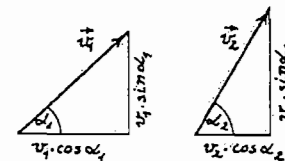
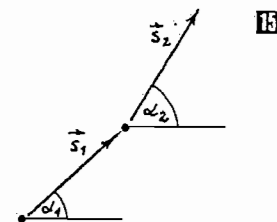
$$\langle v \rangle = \sqrt{\langle v \rangle_x^2 + \langle v \rangle_y^2} = 46,3 \text{ km/h}$$

31. Ukupan pređeni put je  $\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$ , pa je srednja brzina

$$\langle v \rangle = \frac{s}{t} = \frac{s_1 + s_2}{2 \frac{\Delta t}{2}}$$

Kako je  $s_1 = v_1 \frac{\Delta t}{2}$  i  $s_2 = v_2 \frac{\Delta t}{2}$ , to je

$$\langle v \rangle = \frac{v_1 + v_2}{2}$$



Imajući u vidu da je

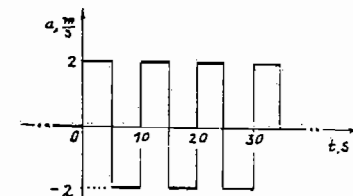
$$\langle v \rangle_x = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{1}{2} (v_1 \cos \alpha_1 + v_2 \cos \alpha_2) = 37,9 \text{ km/h}$$

$$\langle v \rangle_y = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{1}{2} (v_1 \sin \alpha_1 + v_2 \sin \alpha_2) = 50,3 \text{ km/h}$$

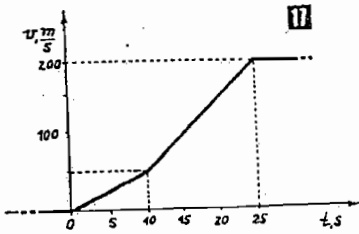
to je

$$v = \sqrt{\langle v \rangle_x^2 + \langle v \rangle_y^2} = 62,5 \text{ km/h}$$

32. [16]

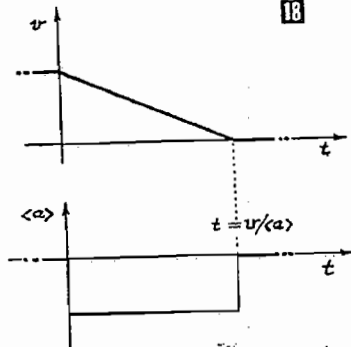


33. 17.



34. a) Iz relacije  $v = \sqrt{2\langle a \rangle s}$  nalazi se da je intenzitet ubrzanja  $\langle a \rangle = \frac{v^2}{2s} = 1,2 \frac{m}{s^2}$ .

b) 18.

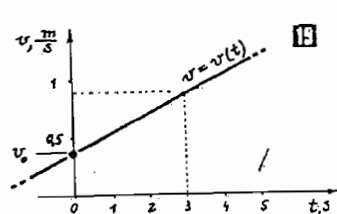


35. Kako metak polazi iz mirovanja, njegovo srednje ubrzanje je  $\langle a \rangle = v/t$ , gde je  $t$  - vreme kretanja metka kroz cev, pa je traženi vremenski interval

$$t = \sqrt{\frac{2l}{\langle a \rangle}}, \text{ odnosno } t = \frac{2l}{v} = 2 \text{ ms}$$

36. a) Brzina tela u trenutku  $t_1$  je  $v_1 = v_0 + at_1$ , pa je njegova početna brzina  $v_0 = v_1 - at_1 = 40 \text{ cm/s}$ . Za vreme  $t_2$  telo će da pređe put  $s = v_0 t_2 + \frac{1}{2} at_2^2 = 11 \text{ m}$ .

b) 19.



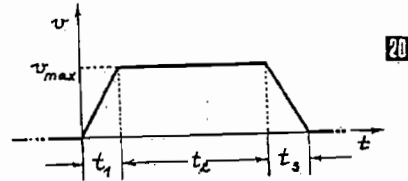
37. Srednja brzina rakete pri kretanju po rampi je  $\langle v \rangle = \frac{v_0 + v_1}{2} = \frac{v_1}{2}$ , pošto je  $v_0 = 0$ .

Odavde je brzina rakete pri napuštanju rampe  $v_1 = 2\langle v \rangle$ . Kako je  $\langle v \rangle = \frac{l}{t_1} = 20 \frac{m}{s}$ , to je  $v_1 = 40 \frac{m}{s}$ . Srednje ubrzanje rakete je  $\langle a \rangle = \frac{v_1}{t_1} = 114,3 \frac{m}{s^2}$ , dok je pređeni put rakete za vreme  $t_2$

$$s = \frac{1}{2} \langle a \rangle t_2^2 = 228 \text{ m}$$

38.  $v_0 = 10 \text{ m/s}$  i  $s = 6 \text{ km}$ .

39. Kako trolejbus polazi iz mirovanja, on će postići  $v_{max}$  za vreme  $t_1 = \frac{v_{max}}{a} = 9,2 \text{ s}$ .



Sa dijagrama se vidi da je vreme zaustavljanja  $t_3 = t_1$ . U toku ubrzanja odnosno usporenja trolejbus će preći put

$$s = s_1 + s_3 = 2s_1 = 2 \frac{at_1^2}{2} = at_1^2 = 104 \text{ m}$$

Deo puta  $d-s$  trolejbus će preći za vreme  $t_2 = \frac{d-s}{v_{max}} = 171 \text{ s}$ , pa je najkraće vreme kretanja trolejbusa između dve susedne stanice

$$t_{min} = 2t_1 + t_2 \approx 190 \text{ s}$$

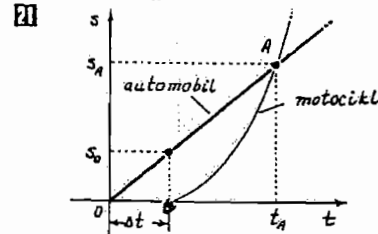
40. Ako je  $t_0$  trenutak kada vozač zapazi signal, on će primeniti kočnice u trenutku  $t_1$ , a automobil će stati u trenutku  $t_2$ . Ako je  $t_0 = 0$ , automobil će za vreme  $t_1$  preći put  $s_1 = v_0 t_1 = 19,4 \text{ m}$ . Kako je  $t_2 - t_1$  vreme kočenja, to je  $v_0 - a(t_2 - t_1) = 0$  odnosno  $t_2 - t_1 = \frac{v_0}{a} = 5,5 \text{ s}$ . Automobil će za ovo vreme preći put  $s_2 = v_0(t_2 - t_1) - \frac{1}{2} a(t_2 - t_1)^2 = 79,8 \text{ m}$ . Ukupan pređeni put je prema tome

$$s = s_1 + s_2 = 79,8 \text{ m} + 19,4 \text{ m} = 98,8 \text{ m}$$

41. U trenutku kada motociklista pade automobil se nalazi na rastojanju  $s_0 = v\Delta t$  od kontrolne stanice 21. Ako je  $t_A$  - trenutak stizanja, onda je  $s_1 = s_2 = s_A$ , gde je  $s_A$  - udaljenost mesta stizanja od kontrolne stanice,  $s_1 = \frac{1}{2} a(t_A - \Delta t)^2$  - pređeni put motocikliste, a  $s_2 = vt_A$  - pređeni put automobila. Prema tome je  $vt_A = \frac{1}{2} a(t_A - \Delta t)^2$ , odakle se dobija jed-

načina  $t_A^2 - 2 \left( \frac{v + a\Delta t}{a} \right) t_A + \Delta t^2 = 0$ , odnosno

$$t_A^2 - 12t_A - 1 = 0$$



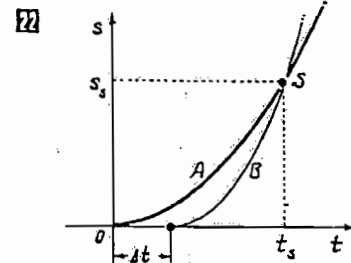
Realan koren ove jednačine (u fizičkom smislu) je  $t_A \approx 12 \text{ s}$ , pa je udaljenost mesta stizanja od kontrolne stanice  $s_A = vt_A = 275 \text{ m}$ .

42. Telo se kreće uz strmu ravan ubrzanjem  $a = g \sin \alpha$ , pa je brzina tela  $v = v_0 + at = v_0 - gt \sin \alpha$ . Telo će se zaustaviti posle vremena  $t_1 = \frac{v_0}{g \sin \alpha}$ , pri čemu će preći put

$$s_1 = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \sin \alpha = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha} = 235 \text{ m}$$

43. Pređeni put automobila A je  $s_A = \frac{1}{2} at^2$ , dok je pređeni put automobila B, u odnosu na isto referentno vreme

$$s_B = v_0(t - \Delta t) + \frac{1}{2} a(t - \Delta t)^2.$$



Sa slike 22 vidi se da je za mesto susretanja  $s_A = s_B$ , odnosno

$$\frac{1}{2} at_3^2 = v_0(t_3 - \Delta t) + \frac{1}{2} a(t_3 - \Delta t)^2,$$

odakle je proteklo vreme do susreta

$$t_3 = \frac{\Delta t(2v_0 - a\Delta t)}{2(v_0 - a\Delta t)}$$

Vreme  $t_3$  je realno ako je  $v_0 > a\Delta t$ , što i predstavlja uslov stizanja. Za  $v_0 = 40 \text{ km/h}$ , ovo vreme iznosi  $t_3 = 49,5 \text{ s}$ , pa je odgovarajući

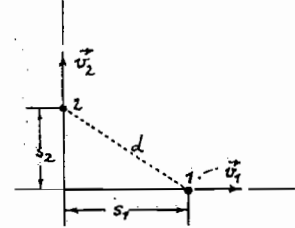
pređeni put automobila A

$$s_A = \frac{1}{2} at_3^2 = 4900 \text{ m}$$

44.  $v_0 = 30 \frac{m}{s}$ ,  $a = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A} = \frac{v_A}{t_B} = -7,14 \frac{m}{s^2}$ .

U tački B telo izvesno vreme stoji, pa zatim kreće u suprotnom smeru ubrzanjem  $a = 7,14 \text{ m/s}^2$ .

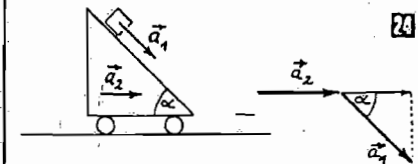
23.



45. Za vreme  $t$  prvo telo pređe put  $s_1 = vt$ , a drugo  $s_2 = \frac{1}{2} at^2$ . U tom trenutku je rastojanje između tela 23

$$d = t \sqrt{v^2 + \frac{a^2 t^2}{4}} = 22,4 \text{ m}$$

46. Ubrzanje tela u odnosu na tle 24 je  $a = a_1 \cos \alpha + a_2 = 21,2 \text{ m/s}^2$



47. Pređeni put u toku prvog vremenskog intervala je

$$s_1 = v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a(\Delta t)^2 \quad (1)$$

a drugog

$$s_2 = (v_0 + a\Delta t)\Delta t + \frac{1}{2} a(\Delta t)^2 \quad (2)$$

U relaciji (2) izraz  $v_0 + a\Delta t$  predstavlja brzinu koju telo ima posle pređenog puta  $s_1$ . Oduzimanjem relacije (1) od (2) dobija se da je

$$s_2 - s_1 = a(\Delta t)^2$$

odnosno

$$a = \frac{s_2 - s_1}{(\Delta t)^2} = 2,5 \frac{m}{s^2}$$

pa je početna brzina tela, prema relaciji (1)

$$v_0 = \frac{s_1}{\Delta t} - \frac{1}{2} a\Delta t = \frac{s_1}{\Delta t} - \frac{s_2 - s_1}{2\Delta t} = \frac{3s_1 - s_2}{2\Delta t} = 1 \frac{m}{s}$$



48. Ako je dužina jednog vagona  $l$ , onda je za prvi vagon

$$l = \frac{1}{2} a t_1^2$$

za prvi i drugi

$$2l = \frac{1}{2} a t_2^2$$

a za  $n$  prvih vagona

$$nl = \frac{1}{2} a t_n^2$$

pa je

$$\frac{t_n^2}{t_1^2} = n, \text{ tj. } t_n = t_1 \sqrt{n}$$

Prema prethodnim relacijama, vreme prolaska  $n$ -tog (petog) vagona je

$$\begin{aligned} \Delta t_n &= t_n - t_{n-1} = \\ &= t_1 (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = 0,94 \text{ s} \end{aligned}$$

49. a)  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2At\vec{i} + B\vec{j}$ ,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2A\vec{i};$$

b)  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(2At)^2 + B^2} = 20,22 \text{ m/s};$

c)  $a = 2A = 10 \text{ m/s}^2.$

50. a) Kako je

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = bt\vec{i} - ct^2\vec{j}$$

tj.

$$x = bt; \quad y = -ct^2$$

dobija se da je

$$y = -\frac{c}{b^2} x^2$$

b)  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(bt\vec{i} - ct^2\vec{j}) = b\vec{i} - 2ct\vec{j}$

$$= b\vec{i} - 2ct\vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -2c\vec{j}$$

Intenziteti brzine i ubrzanja su

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{b^2 + 4c^2 t^2}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(2c)^2} = 2c$$

51. a)  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (1-2bt)k\vec{r}_0$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -2bk\vec{r}_0$$

pri čemu je  $v = (1-2bt)k$  i  $a = 2bk$ .

b) Ako se telo vraća u početni položaj, onda je

$$\vec{r}(0) = \vec{r}(\Delta t)$$

tj.

$$\vec{r}(0) = 0 \quad \text{i} \quad \vec{r}(1/b) = 0$$

pa je  $\Delta t = 1/b$ .

c)  $s = \int_0^{1/b} v dt = \int_0^{1/b} (1-2bt)k dt + \int_{1/2b}^{1/b} (1-2bt)k dt = \frac{k}{2b}$

52. a)

b)  $\Delta \vec{v} = \vec{v}_k - \vec{v}_0 =$

$$= (E-A)\vec{i} + (F-B)\vec{j} + (G-C)\vec{k}$$

c)  $\Delta v = \sqrt{(E-A)^2 + (F-B)^2 + (G-C)^2} = 4,12 \text{ m/s}$

53.  $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(kt^2) = 2kt$ , pa je  $v = 100 \text{ m/s}.$

54. a) Eliminisanjem vremena iz relacija  $x = bt^2$  i  $y = ct^2$  dobija se jednačina putanje

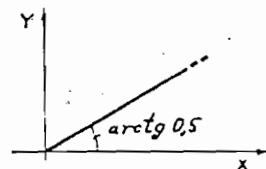
$$y(x) = \frac{c}{b} x = \frac{1}{2} x \quad \text{23}$$

b)  $v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 2t \sqrt{b^2 + c^2}$

$$a = \frac{dv}{dt} = 2 \sqrt{b^2 + c^2} \approx 9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Što znači da je ubrzanje stalno tokom kretanja tela.

23



55. a)  $v = \frac{dx}{dt} = 2Bt + 3Ct^2$

$$a = \frac{dv}{dt} = 2B + 6Ct$$

b) Iz uslova  $v=0$ , tj.

$$2Bt + 3Ct^2 = 0$$

dobija se da je  $t_1 = 0$  i

$$t_2 = -\frac{2B}{3C} = 1 \text{ s}$$

c) Vreme za koje telo dostigne maksimalnu brzinu nalazi se iz uslova  $dv/dt = 0$ , tj.

$$2B + 6Ct = 0$$

odakle je to vreme

$$t = -\frac{2B}{6C} = 0,5 \text{ s}$$

pa je

$$v_{\text{max}} = -\frac{B^2}{3C} = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

56. Pošto je

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

vektor položaja tela određen je relacijom

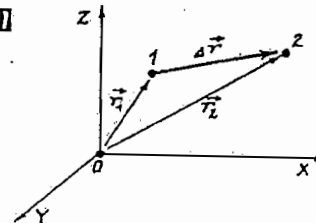
$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t) dt = At\vec{i} + \frac{Bt^2}{2}\vec{j} + \frac{Ct^3}{3}\vec{k}$$

pa je

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2(t_2) - \vec{r}_1(t_1) =$$

$$= A(t_2 - t_1)\vec{i} + \frac{B}{2}(t_2^2 - t_1^2)\vec{j} + \frac{C}{3}(t_2^3 - t_1^3)\vec{k}$$

21



57. Kako je

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = b\vec{i} + cx\vec{j}$$

može se napisati da je

$$v_x = \frac{dx}{dt} = b; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = cx$$

odakle je

$$x = \int_0^t b dt = bt \quad (1)$$

$$y = \int_0^t cx dt = \int_0^t cb dt = \frac{cbt^2}{2} \quad (2)$$

Na osnovu relacija (1) i (2) dobija se da je

$$y(x) = \frac{c}{2b} x^2$$

58. a) Kako se telo kreće po X-osi, intenzitet njegove brzine je  $v = dx/dt$ , pa je

$$\frac{dx}{dt} = b\sqrt{x}$$

tj.

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^t b dt$$

odakle je pređeni put tela

$$x = \frac{b^2 t^2}{4}$$

Brzina i ubrzanje tela su

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{b^2 t}{2} \quad \text{i} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{b^2}{2}$$

b)  $\langle v \rangle = \frac{v_0 + v}{2} = \frac{b^2 t}{4}$ . Kako je  $t = 2\sqrt{x/b}$ ,

dobija se da je

$$\langle v \rangle = \frac{b\sqrt{x}}{2}$$

59. a) Kako je

$$a = \frac{dv}{dt} = -k\sqrt{v} \quad (1)$$

tj.

$$\int_{v_0}^0 \frac{dv}{\sqrt{v}} = -\int_0^{t_2} k dt$$

vreme za koje se telo zaustavi je

$$t_2 = \frac{2\sqrt{v_0}}{k}$$

b) Prema relaciji (1) je

$$v = \frac{1}{4} k^2 t^2$$

a kako je  $v = ds/dt$ , dobija se da je

$$s = \int_0^{t_2} v dt = \frac{1}{4} k^2 \int_0^{t_2} t^2 dt = \frac{2}{3k} v_0^{3/2}$$

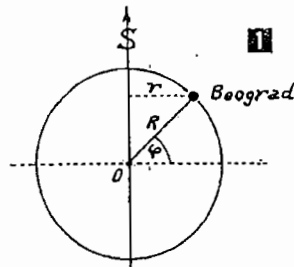
$$60. a) x(t) = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t v_0 \left(1 - \frac{t}{k}\right) dt = v_0 t - \frac{v_0 t^2}{2k};$$

$$b) a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -\frac{v_0}{k} = -2 \frac{m}{s^2}.$$

## 2. KINEMATIKA ROTACIONOG KRETANJA

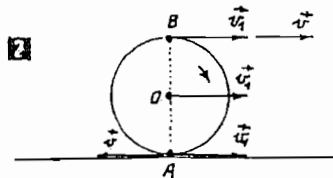
61. Ugaona brzina Zemlje je  $\omega = 2\pi/T = 7.2 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$ , pa je linijska brzina tačke u Beogradu **11**

$$v = \omega r = \omega R \cos \varphi = 329 \text{ m/s}$$



62. Ugaona brzina minutne kazaljke je  $\omega_m = \theta/t = 1.7 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$ , a časovne kazaljke  $\omega_h = 7.2 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$  (jednaka je ugaonoj brzini rotacije Zemlje oko sopstvene ose). Brzina vrha minutne kazaljke je  $v_m = R\omega_m = 2.1 \text{ mm/s}$ , a časovne  $v_h = r\omega_h = 72 \mu\text{m/s}$ .

63. Svaka tačka na točku ima brzinu jednaku rezultanti brzine  $\vec{v}_1$ , koja je posledica translatorskog kretanja točka (ona je po pravcu, smeru i intenzitetu jednaka za sve tačke na točku) i brzine  $\vec{v}$ , koja je posledica rotacije točka. Za periferijske tačke točka ova brzina je po intenzitetu jednaka, dok joj je pravac tangencijalan. Za tačke A i B pravac i smer ove brzine su prikazani na slici **2**, odakle se zaključuje da rezultujuća brzina tačke A iznosi  $v_A = 0$ , a tačke B je  $v_B = 2v = 80 \text{ km/h}$ , pošto je  $v = v_1$ .



64. Kako je  $v_A = R\omega$ , a  $v_B = (R-AB)\omega$ , to je  $\frac{v_A}{R} = \frac{v_B}{R-AB}$ , pa je  $R = \frac{v_A \cdot AB}{v_A - v_B} = 0.25 \text{ m}$ .

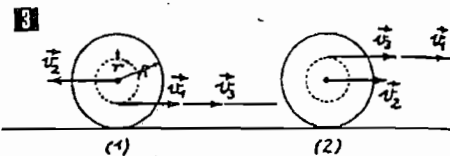
Ugaona brzina zamajca je prema tome  $\omega = \frac{v_A}{R} = 200 \frac{\text{rad}}{s}$ .

65. Oba cilindra imaju jednake linijske brzine tačaka na svom obodu, pa je  $v_1 = v_2$ , odnosno  $R\omega_1 = r\omega_2$ , odakle je

$$r = R \frac{\omega_1}{\omega_2} = 6 \text{ cm}$$

66. Brzina i smer kretanja ose kalema su zavisi od smera rotacije (odmotavanja konca) **13**. Očigledno je da su periodi rotacije cilindra poluprečnika R i r jednaki. Za vreme T (period oba cilindra) osa kalema se pomeri za  $2\pi R$ , pri čemu se odmotava konac dužine  $2\pi r$ . Prema tome, brzina ose kalema u slučaju (1) je  $v_2 = \frac{2\pi R}{T}$ , dok je brzina od-

motavanja konca  $v_1 = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi R}{T} \cdot \frac{r}{R} = v_2 \frac{r}{R}$ .



Brzina kretanja konca u odnosa na kalem je

$$v_1 = v_2 - v_3 = v_2 - v_2 \frac{r}{R} = v_2 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

odnosno

$$v_1 = v_2 \frac{R}{R-r} = 1 \frac{m}{s}$$

što znači da se osa kalema kreće brže od konca, i to u suprotnom smeru.

U slučaju (2), analognim postupkom se dobija da je brzina kretanja ose kalema  $v_2 = v_1 \frac{R}{r-R} = 0.33 \frac{m}{s}$ . U ovom slučaju se osa kalema kreće sporije od konca, i to u istom smeru.

$$67. a) v = r\omega = r \cdot 2\pi v = 628 \text{ m/s};$$

$$b) a_n = r\omega^2 = r \cdot 4\pi^2 v^2 \approx 4 \cdot 10^5 \text{ m/s}^2;$$

$$c) \alpha = \frac{\omega^2}{2\theta} = \frac{(2\pi v)^2}{12\pi} \approx 10 \frac{\text{rad}}{s};$$

$$d) a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = a_n \approx 4 \cdot 10^5 \text{ m/s}^2.$$

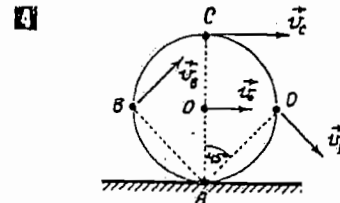
68. Brzina središta točka je  $v_0 = v$ , dok brzina tačke A **4** iznosi  $v_A = 0$ . Kako je ugaona brzina točka  $\omega = \frac{v}{R} = 4 \frac{\text{rad}}{s}$ , to je brzina

ostalih tačaka:

$$v_B = AB \cdot \omega = \frac{R\omega}{\cos 45^\circ} = 2.83 \frac{m}{s}$$

$$v_C = AC \cdot \omega = 2R \cdot \omega = 4 \text{ m/s}$$

$$v_D = AD \cdot \omega = \frac{R\omega}{\sin 45^\circ} = 2.83 \frac{m}{s}$$



69. a) Do trenutka O, telo je vršilo ravnomerno kružno kretanje ugaonom brzinom  $\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$ . U trenutku O telo započne ravnomerno usporeno kretanje i u trenutku A ono stane i stoji do trenutka B. Tada započne njegovo ravnomerno ubrzano kretanje, koje se vrši do trenutka C, kada ugaona brzina dostigne vrednost  $\omega_1$  i postane stalna.

Jednačine koje definišu kretanje tela u

– vremenskom intervalu OA su:

$$\omega = \omega_0 - \alpha t; \theta = \omega_0 t - \frac{1}{2} \alpha t^2;$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\alpha\theta; \alpha = \text{const}$$

– vremenskom intervalu AB su:

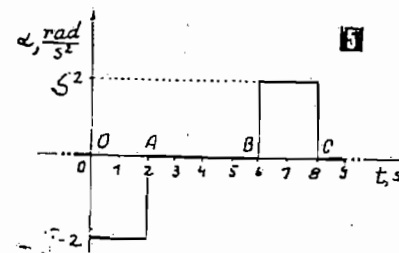
$$\omega = 0; \alpha = 0.$$

– vremenskom intervalu BC su:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t; \theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2;$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta; \alpha = \text{const}$$

b) **5**



c) Za vreme  $t_{OA} = 2 \text{ s}$  telo će opisati ugao  $\theta$ , koji se dobija iz jednačine

$$\omega_0^2 - 2\alpha\theta_{OA} = 0$$

gde je  $\alpha = \frac{\omega_0}{t_{OA}}$ , pa je

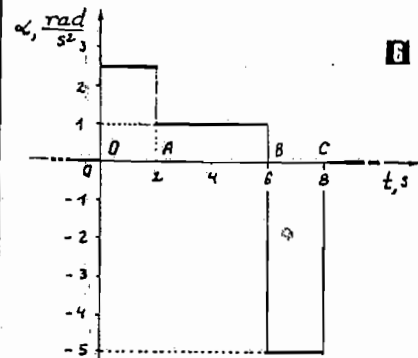
$$\theta_{OA} = \frac{\omega_0^2}{2\alpha} = \frac{\omega_0^2}{2} \cdot \frac{t_{OA}}{\omega_0} = \frac{\omega_0 t_{OA}}{2} = 10 \text{ rad}$$

Tokom vremena  $t_{AB}$  telo stoji, pa je  $\theta_{AB} = 0$ , dok je  $\theta_{BC} = \theta_{OA}$ . Na ovaj način je  $\theta_{OC} = 2\theta_{OA} = 20 \text{ rad}$ , čemu odgovara broj obrtaja

$$N = \frac{\theta_{OC}}{2\pi} = \frac{10}{\pi} \text{ ob}$$

70. a) U vremenskom intervalu OA **6** telo se kreće ravnomerno ubrzano bez početne brzine, sa ugaonim ubrzanjem

$$\alpha_{OA} = \frac{\omega_A}{t_{OA}} = 10 \frac{\text{rad}}{s^2}$$



U vremenskom intervalu AB telo se takođe kreće ravnomerno ubrzano, sa početnom brzinom  $\omega_0 = \omega_A = 20 \frac{\text{rad}}{s}$  i sa ugaonim ubrzanjem

$$\alpha_{AB} = \frac{\omega_B - \omega_A}{t_B - t_A} = 2.5 \frac{\text{rad}}{s^2}$$

U trenutku B telo počne da se kreće ravnomerno usporeno, i to sa usporenjem

$$\alpha_{BC} = \frac{\omega_B - \omega_C}{t_C - t_B} = 5 \frac{\text{rad}}{s^2}$$

i u trenutku C telo stane.

b) Opisani ugao za ovo vreme je

$$\theta = \theta_{OA} + \theta_{AB} - \theta_{BC} = \frac{1}{2} \alpha_{OA} t_{OA}^2 + \omega_A t_{AB} +$$

$$+ \frac{1}{2} \alpha_{AB} t_{AB}^2 - \omega_B t_{BC} - \frac{1}{2} \alpha_{BC} t_{BC}^2 = 110 \text{ rad}$$

pa je odgovarajući broj obrtaja  $N = \theta/2\pi = 17.5 \text{ ob}$ .

71. Ugaono ubrzanje automobila je  $\alpha = a/R$ , dok je početna ugaona brzina  $\omega_0 = v_0/R$ . Tokom prvog obrtaja, odnosno za vreme  $t_1 = T$  automobil opiše ugao  $\theta_1 = 2\pi$  rad, pa je

$$\theta_1 = \omega_0 t_1 + \frac{1}{2} \alpha t_1^2$$

odnosno

$$2\pi = \frac{v_0}{R} T + \frac{1}{2} \frac{a}{R} T^2$$

odakle je

$$T^2 + \frac{2v_0}{a} T - \frac{4\pi R}{a} = 0$$

Realan koren ove kvadratne jednačine je

$$T = -\frac{v_0}{a} \sqrt{\frac{v_0^2}{a^2} + \frac{4\pi R}{a}} = 12 \text{ s}$$

što predstavlja traženo vreme.

72. a) Kada teg pređe put  $h$ , on ima brzinu  $v = \sqrt{2ah} \approx 7 \text{ m/s}$ , pa je ugaona brzina

$$\omega = \frac{v}{R} = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

b) Ubrzanje tačaka na obodu točka je

$$a_A = \sqrt{a^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)} = a \sqrt{1 + \frac{4h^2}{R^2}} \approx 140 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Preporučujemo da izračunate ugaono ubrzanje točka u ovom trenutku, kao i trajanje narednog obrtaja točka.

73. Srednje ugaono ubrzanje osovine je

$$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = -5 \frac{\text{ob}}{\text{s}^2} = -10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Osovinu će za vreme kočenja opisati ugao  $\theta = \omega_1 \Delta t - \frac{1}{2} \alpha \Delta t^2 = 720\pi$  rad, pa je broj obrtaja

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = 360 \text{ ob.}$$

74. a) Ugaona brzina točka pre kočenja je  $\omega_1 = 40\pi \text{ rad/s}$ , a posle vremena  $\Delta t$  je  $\omega_2 = 20\pi \text{ rad/s}$ , pa je ugaono ubrzanje

$$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = -2\pi \text{ rad/s}^2$$

Točak će se zaustaviti kada je  $\omega = \omega_1 - \alpha t_0 = 0$ , odnosno za vreme  $t_0 = \frac{\omega_1}{\alpha} = 20 \text{ s}$ . Pri ovome će točak opisati ugao

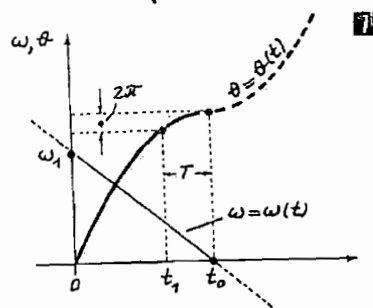
$$\theta_0 = \omega_1 t_0 - \frac{1}{2} \alpha t_0^2 = \frac{\omega_1^2}{2\alpha} \quad (1)$$

b) Zavisnosti  $\theta = \theta(t)$  i  $\omega = \omega(t)$  prikazane su na dijagramu 7. U vremenskom intervalu  $T = t_0 - t_1$  (2) točak će izvršiti poslednji obrtaj. Kako je

$$\theta - 2\pi = \omega_1 t_1 - \frac{1}{2} \alpha t_1^2 \quad (3)$$

to se na osnovu relacija (1), (2) i (3) dobija da je

$$T = 2\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 1,41 \text{ s}$$



75. a) Do trenutka kada je dobilo stalno ugaono ubrzanje telo je imalo ugaonu brzinu  $\omega_0$ , pa je njegova brzina posle vremena  $t$

$$\omega = \omega_0 - \alpha t = 3,5 \text{ rad/s}$$

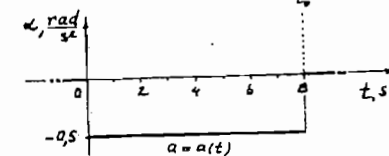
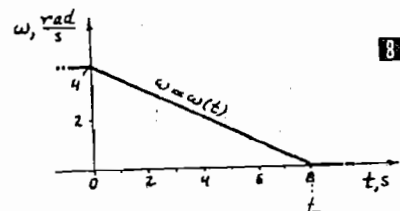
b) Ugaoni pomeraj od početka kočenja je  $\theta = (\pi/3)$  rad, pa je

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha\theta} = 3,9 \text{ rad/s}$$

c) U ovom slučaju je opisani ugao  $\theta = 2\pi N = 12,56$  rad, pa  $\omega = 1,85 \text{ rad/s}$ .

d) Iz relacije  $\omega = \omega_0 - \alpha t_0 = 0$  nalazi se da je  $t_0 = \omega_0/\alpha = 8 \text{ s}$ .

e) 8.



76. Ugaono ubrzanje zamajca je

$$\alpha = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t} = -\frac{\omega_0}{t} = -0,1\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

a) tangencijalno ubrzanje tačke na periferiji zamajca  $a_t = \alpha R = -0,25 \text{ m/s}^2$

$$77. \alpha = -11,6 \text{ rad/s}^2$$

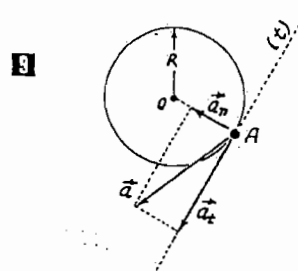
$$78. a = \sqrt{(R\alpha)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2} \approx 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \text{ dok je uga-}$$

$$\text{ona brzina } \omega = \frac{v}{r} = 33,3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$79. a = R\alpha \sqrt{1 + \alpha^2 t^2} = 1,92 \text{ m/s}^2$$

80. Ugaona brzina u trenutku  $t$  iznosi  $\omega = \alpha t = 31,4 \text{ rad/s}$ , odnosno brzina tačke na obodu točka je  $v = R\omega = 6,28 \text{ m/s}$ , pa je intenzitet ukupnog ubrzanja tačke na obodu točka u ovom trenutku

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^2} = 197,2 \text{ m/s}^2$$



$$81. a) \frac{d\vec{\theta}}{dt} = 3Bt^2 \vec{n}_0, \quad \omega = 3Bt_0^2;$$

$$b) \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 6Bt \vec{n}_0, \quad \alpha = Bt_0$$

$$82. a) \frac{d\vec{\theta}}{dt} = \frac{A}{2\sqrt{t}} \vec{n}_0, \text{ odakle je}$$

$$\omega = \frac{A}{2\sqrt{t}} = 0,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$b) \alpha = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = -\frac{A}{4\sqrt{t^3}} \vec{n}_0, \text{ odakle je}$$

$$\alpha = \frac{A}{4\sqrt{t^3}} = \frac{1 \text{ rad}}{16 \text{ s}^2}$$

83. Ukupno ubrzanje je

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

gde je  $a_t = dv/dt$  i  $a_n = v^2/R$ .

Kako je  $v = R\omega = R \frac{d\theta}{dt} = 2kRt$  (1), dobija se da je

$$a_t = 2kR \text{ i } a_n = 4k^2 R$$

a pošto je prema relaciji (1)  $R = v/(2kt)$ , ukupno ubrzanje je

$$a = \frac{v}{t} \sqrt{1 + 4k^2 t^2} \approx 10 \text{ m/s}^2$$

$$84. a) \omega = \frac{d\theta}{dt} = 2Bt = 1,2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$b) \alpha = \frac{d\omega}{dt} = 2B = 0,4 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

85. a) Kako je  $\omega = d\theta/dt$ , to je

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 - k\theta$$

tj.

$$\int \frac{d\theta}{\omega_0 - k\theta} = \int dt$$

odakle je

$$\theta(t) = \frac{\omega_0}{k} (1 - e^{-kt}) \quad (1)$$

b) Prema postavci zadatka i relaciji (1) je

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 e^{-kt}$$

Iz uslova  $\omega_0/\omega = 2$  nalazi se da je

$$t = \frac{1}{k} \ln 2 = 0,35 \text{ s}$$

86. Ukupno ubrzanje materijalne tačke je

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \quad (1)$$

gde je

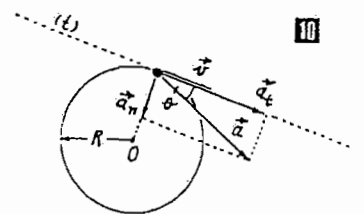
$$\left. \begin{aligned} a_t &= \frac{dv}{dt} = \frac{d(bt)}{dt} = b \\ a_n &= \frac{v^2}{R} = \frac{(bt)^2}{R} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Imajući u vidu da je  $d\theta/dt = \omega = v/R$ , dobija se da je

$$\theta = \int_0^t \omega dt = \frac{bt^2}{2R}$$

odnosno  $t^2 = 2R\theta/b = 1,2\pi R/b$ , pa je prema relacijama (1) i (2)

$$a = b \sqrt{1 + (1,2\pi)^2} = 3,9 \text{ m/s}^2$$



87. Traženi ugao  $\theta$ , prema slici 10, je

$$\theta = \arctg\left(\frac{a_n}{a_t}\right)$$

gde je

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad \text{i} \quad a_t = \frac{dv}{dt}$$

Kako je prema postavci zadatka  $v = k\sqrt{s}$ , dobija se da je

$$a_n = \frac{k^2 s}{R}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v = \frac{k^2}{2}$$

pa je  $\theta = \arctg \frac{2s}{R}$ .

88. a) Iz relacije  $a_n = R\omega^2$  nalazi se da je

$$\omega = \sqrt{\frac{A+2Bt^2}{R}}$$

b) Kako je  $a_n = v^2/R$ , to je

$$v = \sqrt{Ra_n} = \sqrt{R(A+2Bt^2)}$$

pa je

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{R(A+2Bt)}{2\sqrt{R(A+2Bt^2)}}$$

Ukupno ubrzanje je

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\frac{R(A+2Bt)^2}{4(A+2Bt^2)} + (A+2Bt^2)}$$

89. Komponente brzine ovog tela su:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin \omega t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = A\omega \cos \omega t$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = B$$

pa je brzina tela

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{A^2\omega^2 + B^2} = 10,8 \text{ m/s}$$

Kako je  $v = \text{const}$ , to je  $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$ , pa je poluprečnik krivine putanje

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^2}{\frac{A^2\omega^2 + B^2}{v^2}} = \frac{v^4}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

odnosno

$$R = \frac{A^2\omega^2 + B^2}{A\omega^2} = 2,32 \text{ m}$$

90. a) Kako je

$$\vec{r} = (A+Bt^2)\vec{i} + Ct\vec{j} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

dobija se da je

$$x = A+Bt^2 \quad \text{i} \quad y = Ct$$

pa je jednačina putanje materijalne tačke

$$y(x) = \sqrt{\frac{C^2}{B}x - \frac{AC^2}{B}}$$

$$\text{b) } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2Bt\vec{i} + C\vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2B\vec{i}$$

pa su intenziteti ovih vektora

$$v = \sqrt{4B^2t^2 + C^2}$$

$$a = 2B$$

$$\text{c) } a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{4Bt}{\sqrt{4B^2t^2 + C^2}}$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = 2B \sqrt{1 - \frac{4B^2t^2}{4B^2t^2 + C^2}}$$

91. a) Prema uslovu zadatka je  $a_n = a_t$  ili (pošto je kretanje usporeno)  $-R\alpha = R\omega^2$ . Kako je  $\alpha = d\omega/dt$ , dobija se da je

$$-\frac{d\omega}{\omega^2} = dt$$

tj.

$$-\int \frac{d\omega}{\omega^2} = \int dt$$

odakle je

$$\omega(t) = \frac{\omega_0}{1 + \omega_0 t}, \quad \text{tj. } v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{v_0 t}{R}}$$

Polazeći od činjenice da je  $v(t) = ds(t)/dt$  i eliminisanjem vremena  $t$  iz prethodnih relacija dobija se da je

$$v(s) = v_0 e^{-s/R}$$

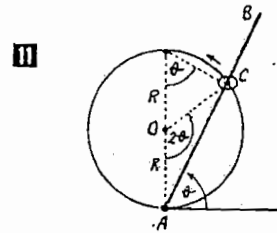
$$\text{b) } a = \sqrt{2} \frac{v^2}{R}, \quad \text{ili}$$

$$a = \sqrt{2} \frac{v_0^2}{R} e^{-2s/R}$$

92. Ugaoni pomeraj štapa je  $\theta$

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0$$

gde je  $\theta_0$  — početni ugao štapa u odnosu na X-osu.



Pređeni put alke je

$$s(t) = AC = R \cdot 2\theta(t) = 2R\omega t + 2R\theta_0$$

pa je brzina alke

$$v = \frac{ds(t)}{dt} = 2R\omega = 12,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

a njeno tangencijalno ubrzanje  $a_t = dv/dt = 0$ . Prema tome, ukupno ubrzanje alke iznosi

$$a = a_n = \frac{v^2}{R} = 4R\omega^2 = 204,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

### 3. KINEMATIKA KRETANJA TELA U GRAVITACIONOM POLJU

93. Ako je telo B pušteno sa visine  $h_B$ , onda je  $h_B = \frac{1}{2}gt_B^2$ , pa je vreme padanja  $t_B = \sqrt{\frac{2h_B}{g}} = 5,53 \text{ s}$ . Vreme padanja tela A je  $t_A = t_B + \Delta t = 5,53 \text{ s} - 3,5 \text{ s} \approx 2 \text{ s}$ , pa je ovo telo pušteno sa visine

$$h_A = \frac{1}{2}gt_A^2 = 39,7 \text{ m}$$

94. Vreme padanja bombe je  $t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ , a vreme prostiranja zvuka  $t_2 = \frac{H}{c}$ , pa je proteklo vreme od trenutka otpuštanja bombe do trenutka kada se začula eksplozija

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}} + \frac{H}{c} = 17 \text{ s}$$

95. Ako je  $t_1$  vreme padanja kamena, onda je dubina ponora  $H = \frac{1}{2}gt_1^2$ . Kako je vreme prostiranja zvuka  $t - t_1$ , onda je takođe  $H = c(t - t_1)$ . Iz ovih jednačina se dobija da je  $t_1^2 - \frac{2c}{g}t_1 - \frac{2c}{g} = 0$ . Realan koren ove jed-

načine u fizičkom smislu je

$$t_1 = -\frac{c}{g} + \sqrt{\frac{c^2}{g^2} + \frac{2c}{g}} \approx 4 \text{ s}$$

pa je dubina ponora

$$H = c(t - t_1) = 316 \text{ m}$$

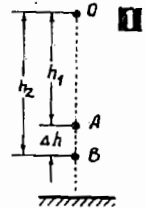
$$96. t_3 = \sqrt{0,729} t_2 = \sqrt{0,729} \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,386 \text{ s}$$

97. Brzina tela u tački A je  $v_A = gt_A$  a u tački B je  $v_B = gt_B$ , pa je  $t_A = \frac{v_A}{g}$  i  $t_B = \frac{v_B}{g}$ . Telo će preći put AB za vreme

$$\Delta t = t_B - t_A = \frac{v_B - v_A}{g} = 2 \text{ s}$$

pa je

$$\Delta h = AB = h_2 - h_1 = \frac{g}{2}(t_B^2 - t_A^2) = 78,5 \text{ m}$$



98. Za vreme  $t$  prvo telo pređe put  $h_1 = \frac{1}{2}gt^2$ , a drugo  $h_2 = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$ . Razlika  $d = h_2 - h_1 = v_0 t$  predstavlja zakon promene rastojanja između tela. Drugo telo će pasti na zemlju kada je  $h_2 = H$  odnosno  $H = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$ , pa je vreme padanja drugog tela

$t_1 = -\frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2H}{g}} = 24,6 \text{ s}$ , pošto se negativni koren ne uzima u obzir, kao nerealan u fizičkom smislu. U ovom trenutku razdaljina između tela iznosi  $d = v_0 t_1 = 4920 \text{ m}$ .

$$99. v_0 = \sqrt{gH} = 280 \text{ m/s}$$

100. U trenutku susreta prvo telo ima brzinu

$$v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g \frac{H}{2}} = \sqrt{gH} = 280 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

U istom trenutku je brzina drugog tela

$$v_2 = v_0 - gt = \sqrt{gH} - g \sqrt{\frac{H}{g}} = 0$$

pa je relativna brzina tela  $v = v_1 + v_2 = v_1$ .

101. Kako telo pređe put  $h/2$  za vreme  $\Delta t$ , to je  $\frac{h}{2} = \frac{1}{2}g(t - \Delta t)^2$ , pri čemu je  $h = gt^2/2$ , gde je  $t$  — vreme padanja tela sa visine  $h$ . Izjednačavanjem desnih strana ovih jednačina dobija se kvadratna zavisnost po  $t$ , čiji su koreni  $t_1 = 3,4 \text{ s}$  i  $t_2 = 0,58 \text{ s}$ . Drugi koren je nerealan u fizičkom smislu. Visina sa koje je telo pušteno iznosi  $h = gt_1^2/2 = 56,8 \text{ m}$ .

102. a, b) U najvišoj tački putanje brzina tela je  $v=0$ , pa je iz relacije

$$v = v_0 - gt_0$$

vreme kretanja tela naviše  $t_0 = \frac{v_0}{g}$ . Isto toliko vreme telo i pada, pa će ono da padne na zemlju posle vremena

$$t = 2t_0 = \frac{2v_0}{g} = 2,04 \text{ s}$$

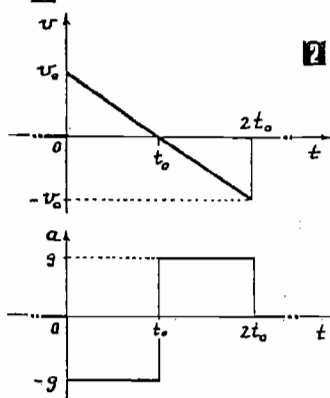
Telo će dostići visinu

$$h = v_0 t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2 = \frac{v_0^2}{2g} = 5,1 \text{ m}$$

c) Telo će pri padu imati brzinu

$$v = -v_0 = -10 \text{ m/s}$$

d) 2.



103. Brzina tela izbačenog naviše je  $v = v_0 - gt$ . Kada je  $v=0$ , telo dostiže najveću visinu  $h_1 = \frac{v_0^2}{2g}$ . Ovu visinu će telo dostići za vreme  $t_1 = \frac{v_0}{g}$ . Najveća visina tela je prema tome

$$h = h_1 + H = \frac{v_0^2}{2g} + H = 30,1 \text{ m}$$

Vreme padanja tela sa ove visine je  $t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ , pri čemu će imati brzinu

$$v = \sqrt{2gh} = 24,3 \text{ m/s}$$

Telo će da padne na zemlju posle vremena

$$t = t_1 + t_2 = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{2h}{g}} = 3,5 \text{ s}$$

104. Ako su kuglice počele da padaju sa visine  $H$ , onda je za prvu kuglicu  $H =$

$\frac{1}{2} g(t + \Delta t)^2$ , a za drugu  $H = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ , gde je  $t$  - vreme padanja druge kuglice. Na osnovu ovih jednačina dobija se da je

$$t = \frac{1}{2} \frac{g \Delta t^2}{v_0 - g \Delta t} = 51,6 \text{ s}$$

pa je visina sa koje su kuglice puštene

$$H = \frac{1}{2} g(t + \Delta t)^2 = 1,41 \text{ km}$$

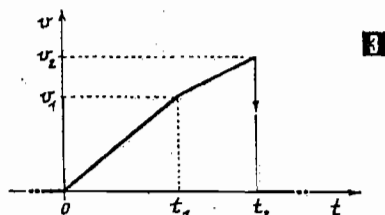
105. a) Bomba će da padne na površinu jezera posle vremena  $t_1 = \sqrt{2H/g}$ , pri čemu će imati brzinu  $v_1 = gt_1 = \sqrt{2gH}$ . Kako je  $t_2$  vreme padanja do dna jezera, tj. do trenutka eksplozije, to je vreme kretanja bombe kroz vodu

$$t_2 = t_2 - t_1 = t_2 - \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

pa je dubina jezera

$$H_2 = \left( t_2 - \sqrt{\frac{2H}{g}} \right) \left[ \sqrt{2gH} - \frac{a}{2} \left( t_2 - \sqrt{\frac{2H}{g}} \right) \right] = 772 \text{ m}$$

b) 3.



106. Ako telo posle vremena  $t_A$  dođe u tačku A koja se nalazi na visini  $\Delta h$  iznad zemlje, onda je  $h_A = \frac{1}{2} g t_A^2$ , gde je  $h_A$  - pređeni put tela za vreme  $t_A$ .

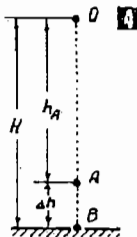
Ako pak telo padne na zemlju posle vremena  $t_B$ , onda je

$$H = h_A + \Delta h = \frac{1}{2} g t_B^2$$

odakle je

$$\Delta h = H - h_A =$$

$$= \frac{1}{2} g t_B^2 - \frac{1}{2} g t_A^2$$



Prema uslovu zadatka je  $\Delta t = t_B - t_A = 0,6 \text{ s}$ . Prema prethodnim relacijama je

$$t_B = \frac{\Delta h}{g \Delta t} + \frac{\Delta t}{2} = 5,3 \text{ s}$$

pa je visina sa koje je telo pušteno

$$H = \frac{1}{2} g t_B^2 \approx 132 \text{ m}$$

107. Zvuk pada kamena čuče se posle vremena  $t = t_1 + t_2$ , gde  $t_1$  - vreme padanja kamena, a  $t_2$  - vreme prostiranja zvuka. Kako je  $H = v_0 t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2$ , odnosno  $H = c t_2 = c(t - t_1)$ , to se sintezom ovih jednačina dobija da je

$$t_1^2 + \frac{2(v_0 + c)}{g} t_1 - \frac{2c}{g} t = 0$$

Realan koren ove jednačine u fizičkom smislu je  $t_1 = 1,8 \text{ s}$ , pa je dubina bunara  $H = c(t - t_1) = 68 \text{ m}$ .

108. a) Kretanje tereta je isto kao kad bi se sa visine  $H$  bacio vertikalno naviše početnom brzinom  $v_1 = v$ . Visina tereta u odnosu na zemlju posle vremena  $t_1$  je

$$H_1 = H + v t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = 20,4 \text{ m}$$

b) Teret će da dostigne najveću visinu

$$H_{\max} = H + \frac{v^2}{2g} \text{ za vreme } t_2 = \frac{v}{g}$$

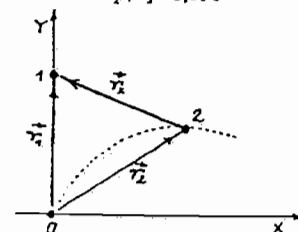
a sa visine  $H_{\max}$  telo će da padne za vreme

$$t_3 = \frac{1}{g} \sqrt{2gH + v^2}$$

pa će teret da padne na zemlju posle vremena

$$t = t_2 + t_3 = 3,01 \text{ s}$$

5.



109. Vektor položaja 1. tela 6 posle vremena  $t$  je

$$\vec{r}_1 = \left( v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \right) \vec{j}$$

a 2. tela

$$\vec{r}_2 = v_0 t \cos \theta \vec{i} + \left( v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2 \right) \vec{j}$$

gde su  $\vec{i}, \vec{j}$  - jedinični vektori X- i Y-osa.

Traženo rastojanje je

$$\vec{r}_x = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

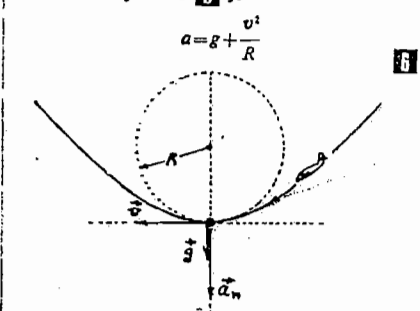
a njegov intenzitet

$$r_x = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

tj.

$$r_x = \sqrt{v_0^2 t^2 \cos^2 \theta + v_0^2 t^2 (1 - \sin \theta)^2} = v_0 t \sqrt{2(1 - \sin \theta)} = 46 \text{ m}$$

110. Ubrzanje pilota u tački A na putanji u vertikalnoj ravni 6 je



Kako mora da bude  $a < a_{\max} = 4,6g$ , to je

$$R > \frac{v^2}{3,6g} = 87,2 \text{ m}$$

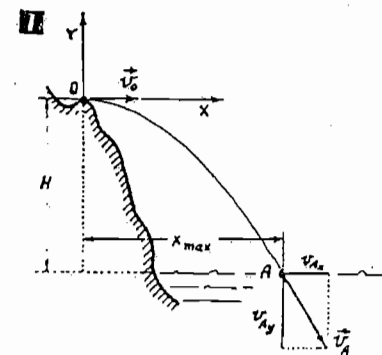
111. Iz uslova  $a_n = g$ , tj.  $v^2/R = g$ , nalazi se da je  $v = \sqrt{gR} \approx 7913 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

112. U toku padanja granate, njene komponente brzine menjaju se prema relacijama

$$v_x = v_0 \text{ i } v_y = -gt \quad (1)$$

a koordinate položaja granate prema relacijama 7

$$\left. \begin{aligned} x &= v_0 t \\ y &= -\frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$



Granata će pasti na površinu vode kada je  $y = -H$ , odnosno  $-H = gt_1^2/2$ , odakle je vreme njenog padanja  $t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ .

Za ovo vreme će granate preći put čija je horizontalna projekcija

$$x = x_{\max} = v_0 t_1 = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}} = 1568 \text{ m}$$

Komponente brzine granata prilikom pada su

$$v_{Ax} = v_0 = 320 \text{ m/s}$$

$$v_{Ay} = -gt_1 = -\sqrt{2g|H|} = -49 \text{ m/s}$$

pa je intenzitet brzine granate pri padu

$$v_A = \sqrt{v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2} \approx 324 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Granata će pasti na površinu vode pod uglom

$$\alpha = \arctg \left( \frac{v_{Ay}}{v_{Ax}} \right) = 8^\circ 42'$$

113. a)  $x = 700 \text{ m}$ ,  $y = -490 \text{ m}$ ;

b)  $v = 268,1 \text{ m/s}$ ;

c)  $\alpha = 21^\circ 48'$ .

114. a)  $t_1 = t_2 = t_3 = \frac{D_1}{v_{01}} = 2 \text{ s}$ ;

b)  $h_1 = h_2 = h_3 = \frac{1}{2} g t_1^2 = 19,6 \text{ m}$ ;

c)  $v_1 = \sqrt{v_{01}^2 + (gt_1)^2} = 53,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  i analogno je  $v_2 = 77,4 \text{ m/s}$  i  $v_3 = 102 \text{ m/s}$ .

115. a)  $t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = 20,2 \text{ s}$ ;

b)  $AB = v_0 t = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}} = 6060 \text{ m}$ .

116. a)  $d = (v_1 - v_2) \sqrt{2h/g}$ ;

b)  $(v_1 + v_2) \sqrt{2h/g}$ .

117. a) Kako je  $x_{\max} = \sqrt{l^2 - h^2}$ , ili

$$x_{\max} = v_0 t = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

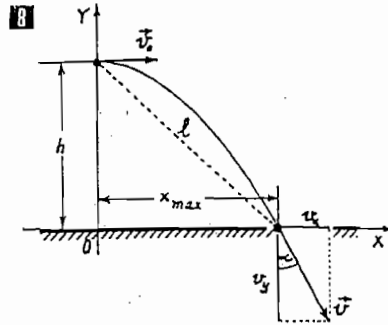
gde je  $t$  – vreme kretanja tela do mesta pada, to je

$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{2h} (l^2 - h^2)} = 7,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b)  $\text{tg } \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{2h}{\sqrt{l^2 - h^2}}$ , pa je ugao pod ko-

jim telo padne na horizontalnu ravan

$$\alpha = \arctg \frac{2h}{\sqrt{l^2 - h^2}} = 56^\circ 18'$$



c) Kako je  $y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$ , to je

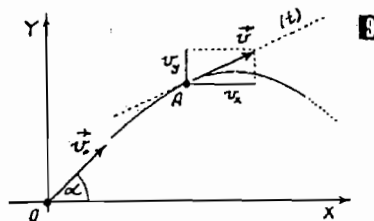
$$y(x) = h \left( 1 - \frac{x^2}{l^2 - h^2} \right)$$

118. Posle vremena  $t$  telo dode u tačku A, gde ima brzinu čije su komponente  $v_x = v_0 \cos \alpha$  i  $v_y = v_0 \sin \alpha - gt$ . Intenzitet brzine tela u tački A je prema tome

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - gt)^2}$$

odakle je

$$v_0^2 - 2v_0 g t \sin \alpha + g^2 t^2 - v^2 = 0$$



Realan koren ove jednačine predstavlja početnu brzinu tela. Naime,

$$v_0 = g t \sin \alpha + \sqrt{g^2 t^2 \sin^2 \alpha - g^2 t^2 + v^2} \approx 410 \text{ m/s}$$

119. Komponente brzine tela su u položaju tela O:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha = 100 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha = 173 \text{ m/s}$$

u položaju tela A:

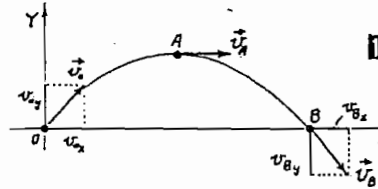
$$v_{Ax} = v_{0x} = 100 \text{ m/s}$$

$$v_{Ay} = 0$$

u položaju tela B:

$$v_{Bx} = v_{0x} = 100 \text{ m/s}$$

$$v_{By} = -v_{0y} = -173 \text{ m/s}$$



120.  $x_{\max} = (v_0^2 \sin 2\alpha)/g \approx 1,4 \text{ km}$ ,  
 $t_{\max} = (2v_0 \sin \alpha)/g = 40,8 \text{ s}$ .

121. a)  $\frac{y_{\max 1}}{y_{\max 2}} = \frac{2g}{v_0^2 \sin^2 \alpha_2} = \left( \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \right)^2 = 2$ ;

b)  $\frac{x_{\max 1}}{x_{\max 2}} = \frac{g}{v_0^2 \sin 2\alpha_2} = \frac{\sin 2\alpha_1}{\sin 2\alpha_2} = 1,15$ ;

c)  $\frac{t_{B1}}{t_{B2}} = \frac{g}{2v_0 \sin \alpha_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \sqrt{2}$ .

122. U najvišoj tački putanje rakete će imati samo horizontalnu komponentu brzine, dok je vertikalna komponenta  $v_y = v_0 \sin \alpha - gt_m = 0$ , pa je početna brzina rakete  $v_0 = \frac{gt_m}{\sin \alpha} \approx 816 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Domet rakete je

$$x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{2gt_m^2}{\text{tg } \alpha} = 3,33 \text{ km}$$

123. Telo će da padne na udaljenosti  $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ , i to pod uglom  $\alpha = \arctg \left( \frac{gx}{v_0^2} \right)$ .

Ako je  $x < x_{\text{opt}} = \frac{v_0^2}{g}$ , postoje dva ugla  $\alpha$  u

intervalu  $\left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$  sa kojima se može postići isto mesto pada tela, uz iste ostale uslove kretanja. Ovaj zaključak se izvodi na osnovu dobijene jednačine za ugao  $\alpha$ , njenom trigonometrijskom interpretacijom, ako se zna da je

$$\sin 2\alpha = \sin (\pi - 2\alpha) = \sin 2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

Naime, ako se telo izbacuje istom početnom brzinom, ono može da padne na isto mesto pod uglom  $\alpha$  i  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  prema horizontu, pošto

je vrednost sinusa u oba slučaja jednaka.

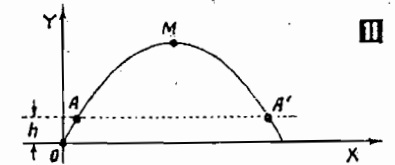
124. a) Kako je  $y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_1}{2g}$ , odnosno

$$x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_1}{g}$$
, to se iz uslova  $y_{\max} = x_{\max}$  dobija da je  $\text{tg } \alpha_1 = 4$ , odnosno  $\alpha_1 = 75^\circ 58'$ .

b) Iz uslova  $\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_2}{g}$  nalazi se da je  $\alpha_2 = 15^\circ$ .

125.  $h = x \text{tg } \alpha = \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = 476,3 \text{ m}$ .

126. Granata treba da eksplodira u tački A'. Vreme  $t$  kretanja granate do tačke A'



određeno je uslovom  $y = v_0 t \sin \alpha - gt^2/2$ , odakle se dobija jednačina

$$t^2 - \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} t + \frac{2h}{g} = 0$$

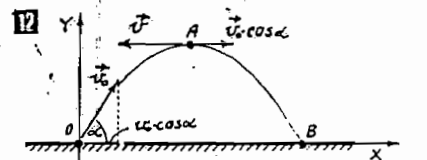
pa je

$$t_{1/2} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} - \frac{2h}{g}} = (14,30 \pm 14,24) \text{ s}$$

Potrebno je uočiti da se koren  $t_1 = 0,06 \text{ s}$  odnosi na tačku A, a koren  $t_2 = 28,54 \text{ s}$  na tačku A'.

Preporučujemo da na osnovu poznavanja vremena  $t_1$  i  $t_2$  odredite vreme za koje bi granata pala na zemlju, došla u položaj najveće visine M i prošla put AA'.

127. U tački A raketa ima samo horizontalnu komponentu brzine  $v_{Ax} = v_0 \cos \alpha$  (1).



Kako je raketa u vazduhu, čitav sistem se može smatrati izolovanim, pa je na osnovu zakona održanja impulsa

$$mv_{Ax} = (m - m_1)v_x - m_1(v - v_x) \quad (2)$$

gde je  $v_x$  – brzina rakete posle razdvajanja i  $v$  – brzine odvojenog dela rakete u odnosu na

raketu. Iz relacija (1) i (2) je

$$v_x = v_0 \cos \alpha + v \frac{m_1}{m} \approx 62 \frac{m}{s}$$

Preporučujemo da izračunate položaj mesta pada raketa.

128. a) Granata će da padne na vodu posle vremena  $t_1 = (2v_0 \sin \alpha)/g$ , pa će brod za ovo vreme da pređe put **13**

$$OO' = vt_1 = \frac{2vv_0 \sin \alpha}{g}$$

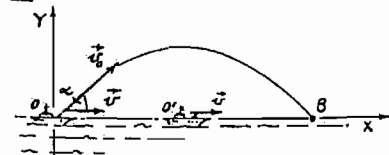
a kako je

$$OB = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

to je udaljenost broda od mesta eksplozije

$$O'B = OB - OO' = \frac{v_0}{g} (v_0 \sin 2\alpha - 2v \sin \alpha)$$

**13**



b) Iz slova  $OB = OO'$ , tj.  $v_0 \sin 2\alpha = 2v \sin \alpha$ , dobija se da je  $\alpha_2 \approx 90^\circ$  i  $\alpha_1 \approx 0^\circ$ .

Jednačina putanje je

$$y(x) = \frac{v_0}{v} x - \frac{g}{2v^2} x^2$$

c) Vreme kretanja granate u prvom slučaju je  $t_1$ , a u drugom slučaju se dobija iz analognog uslova  $y = v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 = 0$ , odakle je  $t_2 = 2v_0/g$ , što odgovara i vertikalnom hicu.

d) Najveća visina granate u drugom slučaju je

$$y_{\max} = v \left( \frac{t_1}{2} \right) - \frac{g}{2} \left( \frac{t_1}{2} \right)^2 = \frac{v_0^2}{2g}$$

dok za vreme  $t_2$  brod pređe put

$$x_{\max} = vt_2 = \frac{2v_0 v}{g}$$

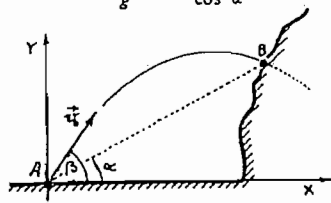
Potrebna brzina broda iznosi  $v = v_0/2$ .

129. Koordinate mine u funkciji vremena su  $x = v_0 t \cos \beta$  i  $y = v_0 t \sin \beta - gt^2/2$  **14**, a objekta (mesta pada)  $x_B = AB \cos \alpha$  i  $y_B = AB \sin \alpha$ . Iz ovih relacija dobija se da je

$$AB = \frac{2v_0^2 (\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha) \cos \beta}{g \cos^2 \alpha}$$

odnosno

$$BA = \frac{2v_0^2 \sin(\beta - \alpha) \cos \beta}{g \cos^2 \alpha}$$



Kako je  $\beta = 2\alpha$ , to je

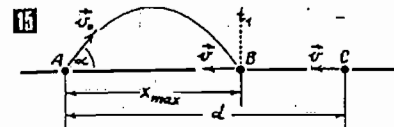
$$AB = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos 2\alpha}{g \cos^2 \alpha} = 1530 \text{ m}$$

130. Granata će pasti na zemlju posle vremena  $t_1 = (2v_0 \sin \alpha)/g$  i za ovo vreme ona će preći put čija je horizontalna projekcija  $x_{\max} = (v_0^2 \sin 2\alpha)/g$ . Da bi granata pogodila tenk, on mora da bude u trenutku  $t$  u tački B **15**. To znači da za ovo vreme tenk mora da pređe put  $d - x_{\max}$ , pa je

$$v = \frac{d - x_{\max}}{t_1} = \frac{gd - v_0^2 \sin 2\alpha}{2v_0 \sin \alpha}$$

tj.

$$v_0^2 + \frac{v}{\cos \alpha} v_0 - \frac{gd}{\sin 2\alpha} = 0$$



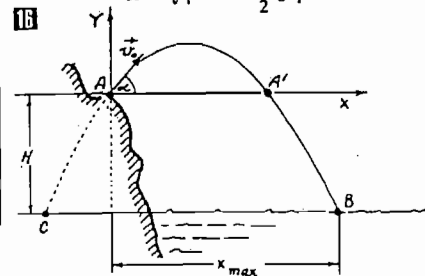
Realan koren ove jednačine u fizičkom smislu predstavlja traženu početnu brzinu granate. Naime,

$$v_0 = -\frac{v}{2 \cos \alpha} + \sqrt{\frac{v^2}{4 \cos^2 \alpha} + \frac{gd}{\sin 2\alpha}} = 295 \frac{m}{s}$$

131. Koordinate tela su  $x = v_0 t \cos \alpha$  i  $y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$ . Kada telo padne na vodu, tada je  $y = -H$  **16**, pa je

$$-H = v_0 t_1 \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_1^2$$

**16**



gde je  $t_1$ —vreme padanja tela. Uređenjem ove jednačine dobija se kvadratna jednačina

$$t_1^2 - \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} t_1 - \frac{2H}{g} = 0$$

čiji su koreni

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} + \frac{2H}{g}} = (7,65 \pm 8,13) \text{ s}$$

Prvi koren  $t_1' = -0,48$  s je nerealan u fizičkom smislu jer odgovara tački C, dok koren  $t_1'' = 15,78$  s predstavlja vreme padanja i odgovara tački B. Udaljenost mesta pada tela je  $x_{\max} = v_0 t \cos \alpha \approx 1,06$  km.

Preporučujemo da izračunate vreme kretanja tela po putu  $AA'$ .

132. a) Brzina tela pri odvajanju od poluge je  $v = \omega r = 314$  m/s, a to je ujedno početna brzina kosog hica, pa će telo da padne na udaljenosti

$$x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \approx 10050 \text{ m.}$$

$$\text{b) } h_{\max} = y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 2513 \text{ m.}$$

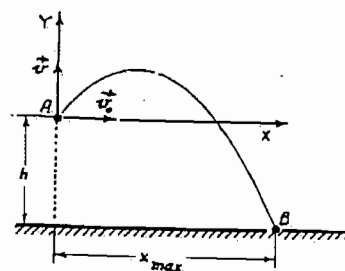
133. U trenutku  $t_0$  brzina rakete je

$$v = at_0 = (Ag - g)t_0 = 3gr_0 = 235 \text{ m/s}$$

a visina

$$h = \frac{1}{2} at_0^2 = \frac{3}{2} gr_0^2 \approx 942 \text{ m}$$

**17**



Odvojeni deo rakete kretaće se po zakonu kosog hica. Komponente brzine dela rakete u tački O **18** su  $v_{Ax} = v_x$  i  $v_{Ay} = v$ , dok su ove komponente za proizvoljnu tačku putanje  $OB$

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_x \\ v_y &= v - gt \end{aligned} \right\} (1)$$

Koordinate odvojenog dela rakete su

$$\left. \begin{aligned} x &= v_x t \\ y &= vt - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \right\} (2)$$

Deo rakete će da padne na zemlju kada je  $y = -h$ , odnosno  $-h = vt_1 - gt_1^2/2$ , gde je  $t_1$ —njegovo vreme padanja. Realan koren ove jednačine u fizičkom smislu je

$$t_1 = \frac{v}{g} \sqrt{v^2 + 2h} - \frac{2h}{g} \approx 51 \text{ s}$$

Drugi koren je nerealan u fizičkom smislu jer je negativan. Mesto pada dela rakete je prema relaciji (2)  $x_{\max} = v t_1 = 4080$  m.

134. Na osnovu jednačine horizontalnog hica  $y = -gt^2/2$ , imajući u vidu da je  $y = -(H-h)$ , tj.

$$H-h = \frac{gt_x^2}{2}$$

nalazi se da je vreme „tempiranja“ granate

$$t_x = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = 13,54 \text{ s}$$

135. Rastojanje od mesta bacanja do prvog pada je **19**

$$x_{\max 1} = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

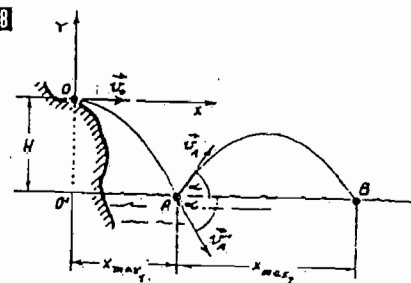
a tangens ugla pod kojim kamen pada

$$\text{tg } \alpha = \frac{v_{Ay}}{v_{Ax}} = \frac{\sqrt{2gH}}{v_0} \approx 0,40$$

odakle je  $\alpha = 22^\circ$ , dok je

$$v_A = \sqrt{v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gH} \approx 27 \text{ m/s}$$

**18**



Isto tako je  $x_{\max 2} = \frac{v_A^2 \sin 2\alpha}{g}$ , pa je mesto ponovnog pada kamena

$$O'B = x_{\max 1} + x_{\max 2} =$$

$$= v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}} + \frac{(v_0^2 + 2gH) \sin 2\alpha}{g} \approx 77 \text{ m}$$

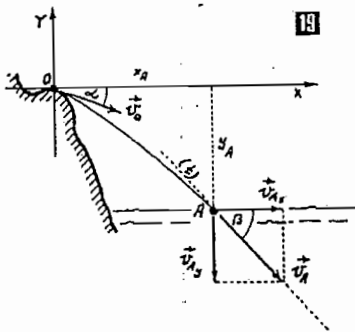
136. Posle vremena  $t_A$  telo će doći u tačku A [19], gde su komponente njegove brzine

$$v_{Ax} = v_0 \cos \alpha = 8,66 \text{ m/s}$$

$$v_{Ay} = -v_0 \sin \alpha - g t_A = -24,6 \text{ m/s}$$

tj. intenzitet brzine

$$v_A = \sqrt{v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2} = 26,5 \text{ m/s}$$



Koordinate položaja tačke A su

$$x_A = v_0 t_A \cos \alpha = 17,3 \text{ m}$$

$$y_A = -v_0 t_A \cos \alpha - \frac{1}{2} g t_A^2 = -36,9 \text{ m}$$

137. Iz relacije  $D = (v_0^2 \sin 2\alpha)/g$  (1) nalazi se da je početna brzina tela

$$v_0 = \sqrt{\frac{Dg}{\sin 2\alpha}}$$

Iz uslova

$$\frac{dv_0}{d\alpha} = \sqrt{Dg} \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{(\sin 2\alpha)^{1/2}} =$$

$$= -\sqrt{Dg} \frac{\cos 2\alpha}{(\sin 2\alpha)^{3/2}} = 0$$

nalazi se da je brzina  $v_0$  minimalna za ugao  $\alpha$  koji zadovoljava uslov  $\cos 2\alpha = 0$  ili  $\alpha = \pi/4$ .

Ova brzina iznosi

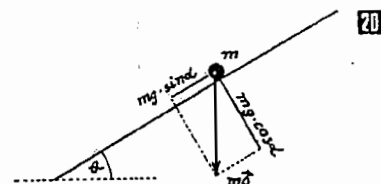
$$v_{0 \min} = \sqrt{Dg} \approx 25 \text{ m/s}$$

$$138. y_{\max} = \frac{g t^2}{8} = 44,1 \text{ m.}$$

139. Ako metak pređe rastojanje  $d$  za vreme  $t$ , onda je  $d = vt$ . Za isto vreme metak u vertikalnom pravcu pređe put  $h = gt^2/2$ , pa je brzina metka

$$v = d \sqrt{\frac{g}{2h}} = 443 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

140. a) Kretanje tela po strmoj ravni je analogno kosom hicu, pri čemu na telo u



ravni putanje ne deluje sila  $mg$  već sila  $mg \sin \theta$  [20], što znači da je ubrzanje tela u ravni putanje  $g_t = g \sin \theta$ , pa je prema pomenu-toj analogiji

$$l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g_t} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g \sin \theta} = 5,1 \text{ m}$$

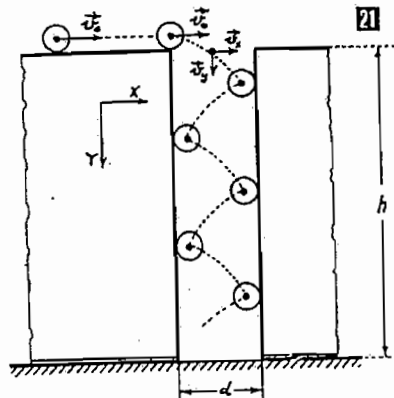
$$b) y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g \sin \theta} = 2,55 \text{ m}$$

141. Put koji pređe kuglica do prvog sudara duž X-ose je [21]

$$s_{1x} = d - R \approx d - 2R = v_0 t_1$$

između prvog i drugog sudara  $s_{2x} = d - 2R = v_0 t_2$ , itd., a duž Y-ose

$$s_{1y} = \frac{1}{2} g t_1^2 = \frac{1}{2} g \left( \frac{d - 2R}{v_0} \right)^2$$



Pređeni put duž Y-ose posle drugog sudara je

$$s_{2y} = \frac{1}{2} g (2t_1)^2 = \frac{1}{2} g 2^2 \left( \frac{d - 2R}{v_0} \right)^2$$

a posle  $n$ -tog sudara

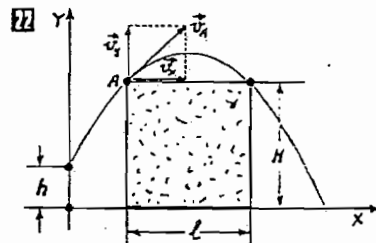
$$s_{ny} = \frac{1}{2} g n^2 \left( \frac{d - 2R}{v_0} \right)^2 = h$$

pa je broj sudara

$$n = \frac{v_0}{d - 2R} \sqrt{\frac{2h}{g}} = 12,3$$

tj.  $n = 12$ .

142. Kamen će se prebaciti preko stene minimalnom početnom brzinom  $v_0$  ako je pravac brzine  $v_A$  u tački A [22] takav da je ugao  $\alpha = 45^\circ$ .



Vreme  $t$  potrebno da kamen tada pređe put  $AB$  određeno je uslovom

$$v_y = v_A \sin \alpha = g \frac{t}{2}$$

odakle je

$$t = \frac{2v_A \sin \alpha}{g} = \frac{\sqrt{2} v_A}{g}$$

Širina stene je

$$l = v_x t = v_A \cos \alpha \cdot t = \frac{v_A^2}{g}$$

odakle je  $v_A = \sqrt{gl}$ , pa je na osnovu zakona održanja energije

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv_A^2}{2} + mgH$$

Odavde se dobija da je

$$v_0 = \sqrt{g(l + 2H - 2h)}$$

143. Brzina tela pri padu na strmu ravan je  $v_0 = \sqrt{2gh}$ , pa su komponente početne brzine, u odnosu na usvojeni koordinatni sistem,

$$v_{0x} = v_0 \sin \alpha; v_{0y} = v_0 \cos \alpha$$

pa je

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t$$

odnosno

$$x = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$y = v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

gde je  $a_x = g \sin \alpha$  i  $a_y = -g \cos \alpha$ .

Vreme  $t_1$  kretanja tela do prvog dodira sa strmom ravni nalazi se iz uslova  $y=0$ , tj.

$$v_0 \cos \alpha - \frac{1}{2} g t_1 \cos \alpha = 0$$

odakle je

$$t_1 = \frac{2v_0}{g} = \frac{2\sqrt{2gh}}{g}$$

pa je

$$x_1 = v_0 \sin \alpha \cdot \frac{2v_0}{g} + \frac{4v_0^2}{g^2} \cdot \frac{g \sin \alpha}{2} = 8h \sin \alpha$$

Komponente brzine prilikom drugog odbijanja tela od strme ravni su

$$v_x = v_0 \sin \alpha + g \sin \alpha \cdot \frac{2v_0}{g} = 3v_0 \sin \alpha$$

$$v_y = -v_0 \cos \alpha + g \cos \alpha \cdot \frac{2v_0}{g} = v_0 \cos \alpha$$

Vreme  $t_2$  između prvog dodira strme ravni ne zavisi ni od jedne promenljive veličine, pa je jednako vremenima  $t_2, t_3, \dots, t_n$  koja proleću između sledećih uzastopnih dodira strme ravni. Na taj način je

$$x_2 = 3v_0 \sin \alpha \cdot \frac{2v_0}{g} + g \sin \alpha \left( \frac{2v_0}{g} \right)^2 = 2 \cdot 8h \sin \alpha$$

ili za opšti slučaj

$$x_n = 8nh \sin \alpha$$

#### 4. DINAMIKA TRANSLATORNOG KRETANJA

144. Zapremina grumena je

$$V = \frac{m}{\rho} = 6 \text{ cm}^3$$

Ako su  $V_1$  i  $V_2$  zapremine kvarca i zlata u grumenu, a  $\rho_1$  i  $\rho_2$  njihove gustine, onda je

$$\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 = \rho V = m$$

$$V_1 + V_2 = V$$

odakle je

$$V_2 = \frac{m - \rho_1 V}{\rho_2 - \rho_1} = 2,07 \text{ cm}^3$$

pa je masa zlata  $m_2 = \rho_2 V_2 = 40 \text{ g}$ .

145. Ako je  $\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$  — gustina vode,  $\rho_2 = 700 \text{ kg/m}^3$  — gustina alkohola,  $K = 0,97$  — koeficijent smanjenja zapremine, onda je gustina smeše  $\rho = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{K(V_1 + V_2)}$ , odakle je odnos zapremina

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\rho_2 - \rho K}{\rho K - \rho_1} = \frac{1}{14}$$



146. a)  $m_Z = m_M = \rho V = \rho a^3 = 8,6 \text{ kg}$ ;

b)  $Q_Z = P_Z = mg_Z = 84,4 \text{ N}$ ;  
 $Q_M = P_M = mg_M = 14,1 \text{ N}$ .

147. a)  $P_Z = mg_Z = 98,1 \text{ N}$ ;  
 $P_M = mg_M = 16,2 \text{ N}$ ;

b)  $F_Z = P_Z$ ,  $F_M = P_M$ ;

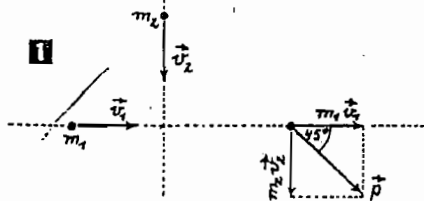
c)  $Q_Z = P_Z$ ,  $Q_M = P_M$ ;

d)  $Q_Z = m(g_Z + a) = 5mg = 5P_Z$ ;

e)  $Q_M = m(g_M + a) = 5mg_M = 5P_M$ .

148. Prema slici 1 je rezultujući impuls kuglica

$$p = \sqrt{(mv_x)^2 + (mv_y)^2} = \sqrt{2} mv = 0,56 \text{ N} \cdot \text{s}$$

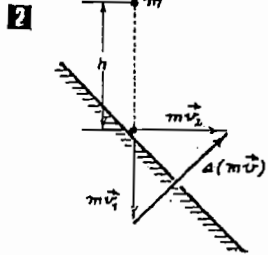


149. Promena impulsa loptice je  $\Delta(mv)$  2 Intenzitet ove promene je

$$\Delta(mv) = \sqrt{(mv_x)^2 + (mv_y)^2}$$

pa kako je  $mv_x = mv_y$ , tj.  $v_x = v_y = \sqrt{2gh}$ , dobija se da je

$$\Delta(mv) = 2m\sqrt{gh} = 0,18 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$



150. Intenzitet impulsa sile je  $i_F = F\Delta t = 0,6 \text{ N} \cdot \text{s}$ . Kako je  $i_F = \Delta(mv) = mv_2 - mv_1$ , a  $v_1 = 0$ , to je brzina tela koju ono stekne tokom dejstva impulsa  $i_F$

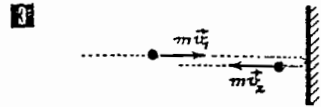
$$v_2 = \frac{i_F}{m} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

151. Kako je  $i_F = \Delta p$ , tj.  $F\Delta t = \Delta(mv) = m\Delta v$ , to je

$$m = \frac{F\Delta t}{\Delta v} = 8 \text{ kg}$$

152. Kako je  $i_F = \Delta p$ , tj.  $i_F = m(v_2 - v_1)$  impuls sile koji deluje na loptu tokom njenog odbijanja od stene i  $mv_2 = -mv_1$ , to je

$i_F = 2mv$ , pošto je  $v_1 = v_2 = v$ . Zamenuom se nalazi da je  $i_F = 4 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ .



Intenzitet srednje sile kojom lopta deluje na stenu je

$$\langle F \rangle = \frac{i_F}{\Delta t} = 40 \text{ mN}$$

153. Neposredno pre pada na ploču, kuglica ima brzinu  $v = \sqrt{2gH}$  i impuls  $mv$ , pa je impuls sile kojom kuglica deluje na ploču

$$i_F = \langle F \rangle \Delta t = \Delta(mv) = m\Delta v = 2m\sqrt{2gH} = 0,48 \text{ N} \cdot \text{s}$$

a intenzitet srednje sile kojom kuglica deluje na ploču

$$\langle F \rangle = \frac{i_F}{\Delta t} = 485,2 \text{ N}$$

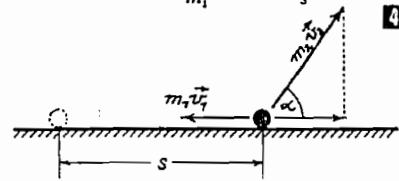
154. Impuls vučne sile je  $i_F = Ft$ . Pod dejstvom ovog impulsa, prvi čamac će dobiti brzinu  $v_1 = Ft/m_1 = 1,96 \text{ m/s}$ . Analogno, brzina drugog čamca je  $v_2 = Ft/m_2 = 0,87 \text{ m/s}$ . Brzina prvog čamca u odnosu na drugi, odnosno drugog čamca u odnosu na prvi je  $v = v_1 + v_2 = 2,83 \text{ m/s}$ .

155. a) Prema zakonu održanja impulsa, za sistem top – granata je 4

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 \cos \alpha = 0$$

odakle je brzina trzaja topa

$$v_1 = v_2 \frac{m_2 \cos \alpha}{m_1} \approx 0,17 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



b) Na kraju puta je  $v = 0$ , pa je, prema relaciji  $v^2 = v_1^2 - 2as$ , traženo ubrzanje

$$a = \frac{v_1^2}{2s} = 0,0073 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

156. Kako je impuls sistema vagon – rakete pre izbacivanja raketa jednak nuli, to je

$$m_1 v_1 = 2m_2 v_0 \quad (1)$$

gde je  $m_1 v_1$  – impuls vagona posle lansiranja raketa. Prema relaciji (1) se dobija da je

$$v_1 = 2v_0 \frac{m_2}{m_1} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ubrzanje vagona je  $a = -\mu g$ , pa će on preći put

$$s = \frac{v_1^2}{2a} = \frac{v_1^2}{2\mu g} = 408 \text{ m}$$

157. Impuls granate pre eksplozije je  $(m_1 + m_2)v_0$ , a posle eksplozije impulsi delova rakete su  $m_1 v_1$  i  $m_2 v_2$ . Na osnovu zakona održanja impulsa je

$$(m_1 + m_2)v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

odakle je

$$v_1 = \frac{(m_1 + m_2)v_0 - m_2 v_2}{m_1} = -15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Znak (-) ukazuje da je smer kretanja manjeg dela rakete suprotan prvobitnom.

158. Impuls sistema pre početka kretanja čoveka po lestvicama jednak je nuli. Pošto je sistem izolovan, impuls sistema ostaje jednak nuli i u toku kretanja čoveka po lestvicama. Zbog toga, ako se čovek kreće nagore brzinom  $v$ , helikopter treba da se kreće nadole brzinom  $v_1$ . Brzina kretanja čoveka u odnosu na zemlju je  $v - v_1$ , dok je njegov impuls  $m_1(v - v_1)$ , a impuls helikoptera  $m_2 v_1$ , pa je

$$m_2(v - v_1) - m_1 v_1 = 0$$

odnosno

$$v_1 = v \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 1,5 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

159. Prema zakonu održanja impulsa, kretanje čoveka A izazvaće kretanje kotura, odnosno čoveka B. Ako je ugaona brzina kotura  $\omega$ , onda čovek B ima brzinu  $v_B = R\omega$ , dok čovek A ima brzinu  $v_A = R\omega - v = v_B - v$  u odnosu na zemlju. Prema tome je

$$m_A(v_B - v) + m_B v_B = 0$$

odakle je  $v_B = v/2$  ili  $v_A = -v/2$ . Ovo pokazuje da će se čovek A i čovek B kretati jednakim brzinama u odnosu na zemlju, ali u suprotnim smerovima.

160. Primenom zakona održanja impulsa na sistem čamac – paket za prvi susret čamca je:

$$(m + m_1)v_0 - m_1 v_0 = (m + 2m_1)v_1 \text{ – za prvi čamac}$$

$$-mv_0 + m_1 v_1 = (m + m_2)v_2 \text{ – za drugi čamac}$$

odakle su brzine čamca posle razmene paketa

$$v_1 = -v_2 = v_0 \frac{m}{m + 2m_1} = 2,45 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

U slučaju kada se paketi razmenjuju isto-

vremeno, tj. za drugi susret čamca je

$$mv_0 - m_1 v_0 = (m + m_1)v_1'$$

$$-mv_0 - m_1 v_0 = (m + m_1)v_2'$$

odakle su brzine čamca posle ovakve razmene paketa

$$v_1' = -v_2' = v_0 \frac{m - m_1}{m + m_1} = 2,40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

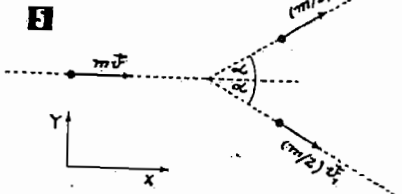
161. Na osnovu zakona održanja impulsa je 5

$$p_x = \frac{m}{2} v_1 \cos \alpha + \frac{m}{2} v_2 \cos \alpha = mv$$

$$p_y = \frac{m}{2} v_1 \sin \alpha - \frac{m}{2} v_2 \sin \alpha = 0$$

pa je brzina delova granate

$$v_1 = v_2 = \frac{v}{\cos \alpha} = 461,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



162. Prema zakonu održanja impulsa je

$$\frac{m}{4} v_1 = \frac{3}{4} mv_0$$

odakle je  $v_0 = v_1/3 = 600 \text{ m/s}$ .

Mesto pada rakete je na udaljenosti

$$x_{\text{max}} = (v_0^2 \sin^2 2\alpha)/g = 28,8 \text{ km}$$

163.  $F_{\text{max}} > mg + F_c = mg + ml\omega^2$ , odakle je

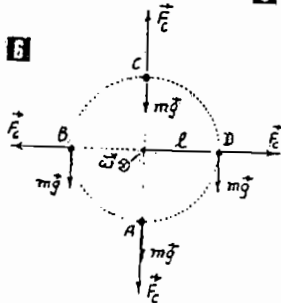
$$\omega < \sqrt{\frac{F_{\text{max}} - mg}{ml}} = 54,1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

164. a)  $F_1 = mg$ ,  $Q_1 = F_1$ ;

b)  $F_2 = mg - (mv^2/R)$ ,  $Q_2 = F_2$ ;

c)  $F_3 = mg + (mv^2/R)$ ,  $Q_3 = F_3$ .

165. Sila zatezanja užeta 6 jednaka je



zbiru centrifugalne sile  $\vec{F}_c$  i sile teže  $m\vec{g}$  koja deluje na telo, tj.

$$\vec{F} = \vec{F}_c + m\vec{g}$$

pa je njen intenzitet u pojedinim položajima tela:

$$F_A = mg + F_c = mg + ml\omega^2 = 59,8 \text{ N}$$

$$F_C = F_c - mg = 40,2 \text{ N}$$

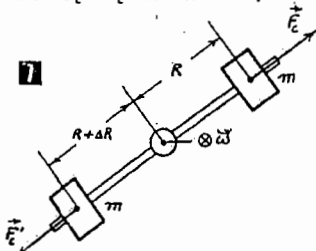
$$F_B = F_D = F_c = 50 \text{ N}$$

$$166. F_A = mg + (mv^2/R) = 4,5 \text{ kN};$$

$$F_B = (mv^2/R) - mg = 2,92 \text{ kN}.$$

167. Prvo telo se nalazi na većem rastojanju, pa je  $\vec{F}_c' > \vec{F}_c$  **7**, odakle je

$$\Delta F = F_c' - F_c = m \cdot \Delta R \cdot \omega^2 = 2,37 \text{ kN}$$



Pravac dejstva sile  $\Delta F$  poklapa se sa pravcem poluge, a ima isti smer kao sila  $\vec{F}_c'$ .

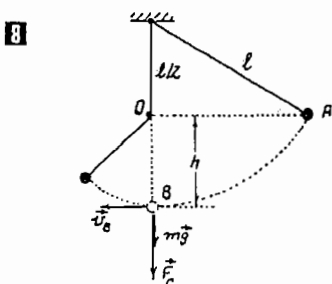
168. Donje telo će biti u mirovanju ako je  $mg = F_c$  tj.  $mg = mR\omega^2$ , odakle je

$$\omega_0 = \sqrt{g/R}$$

Za  $\omega > \omega_0$  donje telo će se kretati nagore, a za  $\omega < \omega_0$  nadole.

169. Brzina kuglice klatna u tački B **8** je  $v_B = \sqrt{2gh}$ . Kako je  $h = l(1 - \cos\theta) = l/2$ , to je  $v_B = \sqrt{gl}$ . Sila zatezanja konca neposredno pre udara o osovinu je

$$R_2 = mg + mv_B^2/l$$



a neposredno posle udara

$$F_z' = mg + mv_B^2/(l/2)$$

pa je promena intenziteta sile zatezanja

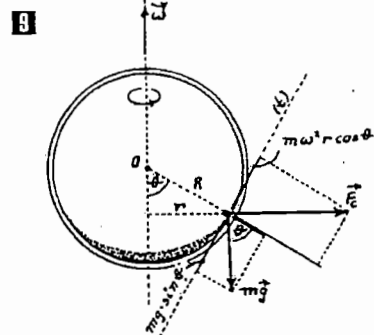
$$\Delta F = F_z' - F_z = mg$$

170. Krajnji ugaoni položaj zrnaca peska prilikom rotacije sfere **9** određen je uglom  $\theta$ , koji se nalazi iz uslova

$$m\omega^2 r \cos\theta = mg \sin\theta$$

pa kako je  $r = R \sin\theta$ , dobija se da je

$$\theta = \arccos\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)$$



Ako je  $g/R\omega^2 > 1$ , onda je  $\theta = 0$ , tj. zrnca peska su na dnu sfere, a za  $g/R\omega^2 < 1$  mogući su svi uglovi u intervalu  $(0, \pi/2)$ .

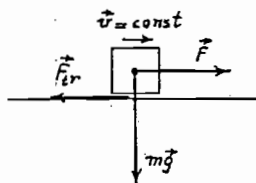
171. Pošto se telo kreće ravnomerno, to je **10**

$$F = F_{tr}$$

gde je  $F_{tr} = \mu mg$ , pa je

$$\mu = F/mg = 0,2$$

**10**



172. a) Intenzitet inercijalne sile je  $F = ma = 255 \text{ N}$ , a sile trenja  $F_{tr} = \mu mg = 83,3 \text{ N}$ ;

$$b) F_1 = F - F_{tr} = 171,7 \text{ N};$$

c) Ako se čovek odupre normalnom silom  $F_2$ , onda ona mora da bude tolikog intenziteta da je  $\mu(mg + F_2) = F$ , odnosno

$$F_2 = \frac{F}{\mu} - mg = 1716 \text{ N}$$

173. Sila trenja je  $F_{tr} = \mu m_1 g = 7,85 \text{ N}$ , pa je  $F_{tr} > F_1$ , što ukazuje da se telo neće kretati po platformi, već će se telo i platforma zajedno kretati ubrzanjem (prvi slučaj)

$$a = \frac{F_1}{m_1 + m_2} = 0,045 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

U drugom slučaju je  $F_2 > F_{tr}$ , pa je ubrzanje platforme  $a_1 = \frac{F_{tr}}{m_1} = 0,196 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , a ubrzanje tela u odnosu na platformu  $a_2 = (F_2 - F_{tr})/m_2 = 22,5 \text{ m/s}^2$ .

174. Prvi razlog je taj što se kompozicija dovede u kretanje, pa se time smanji trenje, s obzirom na to da je statičko trenje veće od dinamičkog. Drugi razlog je taj što se naizmeničnim udarima lokomotive nagomila elastična energija u spojnim oprugama između vagona, koja teži da razdvoji vagona, stvarajući na prednjim spojivima takvu silu koja može da ima isti smer kao vučna sila lokomotive.

175. a) Intenzitet sile pritiska kuglice na ploču je  $F = ma_1 = 4mg = 0,78 \text{ N}$ .

b) Uslov da se kuglica održi na ravni je da je  $F_{tr} > mg$ . Kako je  $F_{tr} = \mu N = \mu ma_2$ , dobija se da je

$$a_2 = \frac{g}{\mu} = 19,62 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

c) Ubrzanje kuglice pri padanju niz ravan je  $a = g - \mu a_1$ , pa je vreme padanja

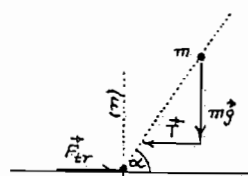
$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{g - \mu a_1}} = \sqrt{\frac{2h}{g(1 - \mu)}} = 2 \text{ s}$$

176. Vučna sila tegljača treba da je  $F_2 > F_{tr1} = \mu m_1 g = 27,5 \text{ kN}$ . Tegljač će moći da ostvari ovu vučnu silu ako je  $F_{tr2} > F_2$ , gde je  $F_{tr2}$  — sila trenja između tegljača i podloge. U graničnom slučaju je  $F_{tr2} = F_{tr1}$ , odnosno  $\mu_1 m_1 g = \mu_2 m_2 g$ , pa se dobija da je

$$m_2 = \frac{\mu_1}{\mu_2} m_1 = 14 \text{ t}$$

177. Biciklista će se kretati bez klizanja sve dok je  $T < F_{tr}$  **11**. Kako je  $T = mg \text{ ctg } \alpha$ , a  $F_{tr} = \mu mg$ , to je u graničnom slučaju

$$\alpha = \arccotg \mu$$

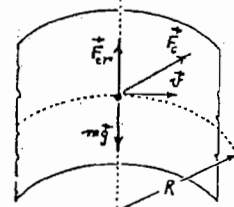


178. Motociklista neće kliziti niz cilindar ako je  $F_{tr} > mg$ , gde je **12**

$$F_{tr} = \mu N = \mu \frac{mv^2}{R}$$

pa je tražena brzina

$$v > \sqrt{Rg/\mu} = 19,2 \text{ m/s} \approx 60 \text{ km/h}$$



179.  $\mu mg > \frac{mv^2}{R}$ , odakle je

$$v_{\max} = \sqrt{\mu Rg} = 8,5 \text{ m/s}$$

180.  $F_c = mR\omega^2 = 1000 \text{ N}$ ;

$$\omega_{\max} = \sqrt{\mu g/R} \approx 2 \text{ rad/s}.$$

181. Sila trenja između sanduka i platforme je  $F_{tr} = \mu mg = 3,5 \text{ kN}$ , a inercijalna sila  $F = ma$ . Sve dok je  $F < F_{tr}$  sanduk neće kliziti po platformi. Maksimalno ubrzanje je

$$a_{\max} = \frac{F_{tr}}{m} = 2,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

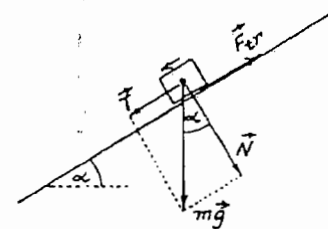
182.  $F > \mu pS = 60,29 \text{ N}$ , gde je  $S = 2\pi r l$  — površina čepa u dotiru sa cevju.

183. Impuls vučne sile lokomotive je  $F_{tr} t$ , a sile trenja  $\mu mg t$ . Kako je impuls rezultujuće sile jednak promeni impulsa lokomotive sa vagonima, to je

$$F_{tr} t - \mu mg t = \Delta(mv) = mv_2 - mv_1$$

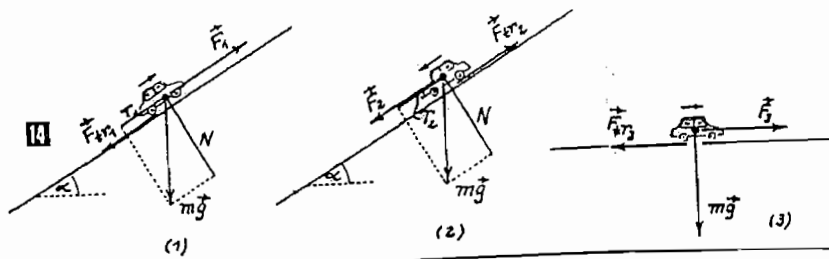
pa kako je  $v_1 = 0$ , dobija se da je

$$F_{tr} = m \left( \frac{v}{t} + \mu g \right) \approx 0,53 \text{ MN}$$



184. Kako se kocka kreće ravnomerno, to je  $F_{tr} = T$  **13**, gde je  $F_{tr} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$ , a  $T = mg \sin \alpha$ , pa je

$$\mu = \text{tg } \alpha = 0,62$$



185. Na slici 14 su prikazana tri slučaja kretanja automobila, gde su označeni pravci i smerovi brzina, i sila koje utiču na ovo kretanje, pa je

$$F_1 = T_1 + F_{ir1}; F_2 = T_2 - F_{ir2}; F_3 = F_{ir3}$$

Kako je  $T_1 = T_2 = mg \sin \alpha$ ;  $T_3 = 0$ ;  $F_{ir1} = F_{ir2} = \mu mg \cos \alpha$  i  $F_{ir3} = \mu mg$  to je prema navedenim relacijama

$$F_1 = mg (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

$$F_2 = mg (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

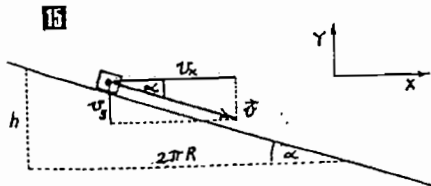
$$F_3 = \mu mg$$

Snaga motora u sva tri slučaja je jednaka, pa je  $P = F_1 v_1 = F_2 v_2 = F_3 v_3$ , odakle je

$$v_3 = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} \approx 10 \frac{m}{s}$$

186. Na telo u žlebu deluje sila teže  $mg$ ,

sila trenja  $F_{tr}$  i centripetalna sila  $F_{cp}$ . Međutim, u pravcu putanje tela deluju projekcije ovih sila, tj.  $mg \sin \alpha$ , zatim sila trenja o donju površinu žleba  $\mu mg \cos \alpha$  i sila trenja o bočnu površinu žleba  $\mu mv_x^2/R = (\mu mv^2 \cos^2 \alpha)/R$ .



U trenutku kada telo počne da se kreće stalnom brzinom je

$$mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha - \frac{\mu mv^2 \cos^2 \alpha}{R} = 0$$

Kako je  $\sin \alpha = h/\sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2}$ , a  $\cos \alpha = 2\pi R/\sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2}$ , nalazi se da je

$$v = \sqrt{gR \left( \frac{h}{2\pi \mu R} - 1 \right) \sqrt{1 + \left( \frac{h}{2\pi R} \right)^2}}$$

Telo će se kretati niz žleb ako je  $\mu < h/2\pi R$ .

187. Intenzitet sile trenja iznosi  $F_{tr} = 0,005mg = 24,5 \text{ kN}$ , pa je intenzitet efektivne vučne sile  $F_v = F - F_{tr} = 35,5 \text{ kN}$ .

Kako je

$$mv - mv_0 = F_v \cdot \Delta t \text{ i } v_0 = 0$$

dobija se da je

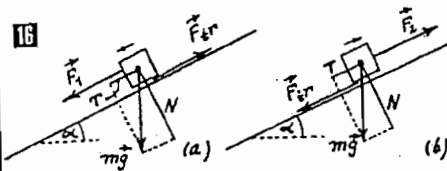
$$v = \frac{F_v \cdot \Delta t}{m} = 4,4 \frac{m}{s}$$

188. a) U slučaju da se telo kreće ravnomerno niz strmu ravan 16 (sl. a) treba da je  $F_1 + T = F_{tr}$  odnosno  $F_1 + mg \sin \alpha = \mu mg \cos \alpha$ , odakle je

$$\mu = \frac{F_1 + mg \sin \alpha}{mg \cos \alpha} = 0,52$$

b) Ako se telo kreće uz strmu ravan, tražena sila je

$$F_1 > mg (\mu \cos \alpha + \sin \beta) = 1493 \text{ N}$$



189. Dato telo će se kretati pod dejstvom rezultante sila  $\vec{F}$  i  $mg$ , čiji je smer suprotan, pa je ubrzanje tela  $a = (F - mg)/m$ , a dostignuta visina

$$h = \frac{1}{2} at^2 = \frac{(F - mg)t^2}{2m} = 50 \text{ m}$$

190. Srednje ubrzanje je  $\langle a \rangle = -v_0/t$ , pa je  $m \langle a \rangle = \langle F \rangle + mg$ , te je intenzitet srednje otporne sile

$$\langle F \rangle = m \langle a \rangle - mg = m \left( \frac{v_0}{t} - g \right) \approx 0,14 \text{ N}$$

191. Kako je  $s = at^2/2$ , odnosno  $a = 2s/t^2$ , to je

$$F = ma = \frac{2ms}{t^2} = 0,75 \text{ N}$$

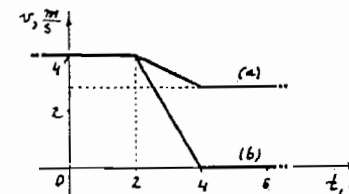
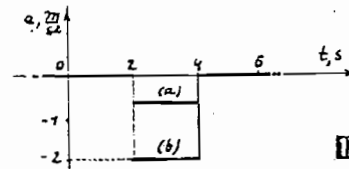
192. a)  $F_{\max} = m(g + a) = 6,6 \text{ kN}$ ;

b)  $F_{\max} = 2mg = 11,8 \text{ kN}$ ;

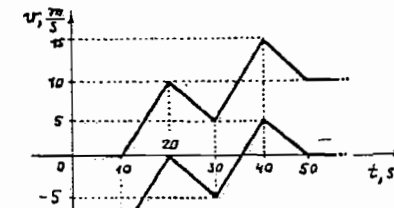
c)  $F = mg = 5,9 \text{ kN}$ .

193. a)  $v = \frac{F}{m} t_0 = 1,2 \frac{m}{s}$ ;

b)  $F = \frac{mv_1}{t_1} = 100 \text{ N}$ ; c) 17.



194. a, b) 18.



195. a)  $a = 20 \text{ m/s}^2$ ;

b)  $v = 8 \text{ m/s}$ ;

c) 18.

196. Ubrzanje lifta pri polasku je  $a_1 = \Delta v/\Delta t = 0,5 \text{ m/s}^2$ . U toku kretanja stalnom brzinom je  $a_2 = 0$ , dok je ubrzanje pri kočenju lifta je  $a_3 = -a_1$ .

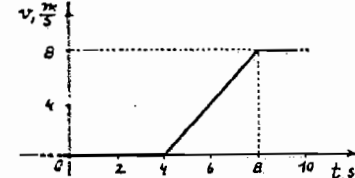
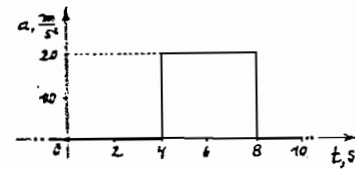
Prema II Njutnovom zakonu je

$$ma_1 = F_1 - mg$$

$$0 = F_2 - mg$$

$$ma_3 = mg - F_3$$

gde su  $F_1, F_2, F_3$  — intenziteti sila zatezanja užeta u uzastopnim fazama kretanja lifta, pa je  $F_1 = 6180 \text{ N}$ ,  $F_2 = 5886 \text{ N}$  i  $F_3 = 5586 \text{ N}$ .



197. Pri kretanju lifta naviše ubrzanjem  $a$ , potrebno je na lift delovati vertikalnom silom intenziteta  $F_1 = mg + ma = 11,8 \text{ kN}$  sa smerom naviše, a za kretanje naniže — vertikalnom silom istog smera, intenziteta  $F_2 = mg - ma = 7,8 \text{ kN}$ .

198.  $\alpha(a) = \arctg(a/g)$ .

199. Prema II Njutnovom zakonu, u prvom slučaju je 20

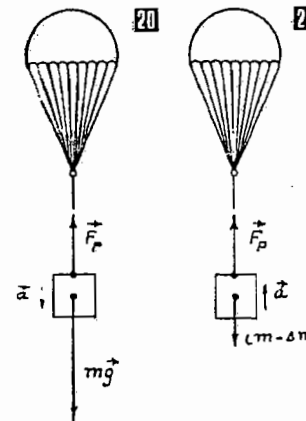
$$ma = mg - F_p \quad (1)$$

a u drugom 21

$$(m - \Delta m)a = F_p - (m - \Delta m)g \quad (2)$$

Iz relacija (1) i (2) nalazi se da je

$$\Delta m = \frac{2m}{1 + (g/a)}$$



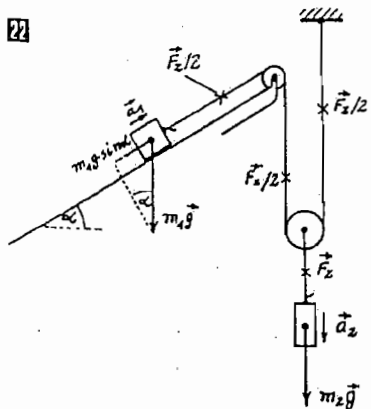
200. Primenom II Njutnovog zakona je [22]

$$m_1 a_1 = m_1 g - F_2$$

$$m_1 a_1 = (F_2/2) - m_1 g \sin \alpha$$

gde je  $F_2$  — intenzitet sile zatezanja užeta.

[22]



Kako su ubrzanja tela vezana relacijom  $a_2 = a_1/2$  (što posredno proizlazi iz činjenice da pomeraju  $\Delta s$  tela mase  $m_2$  odgovara pomeraj  $2\Delta s$  tela mase  $m_1$ , u istom vremenskom intervalu), to je traženo ubrzanje

$$a_2 = g \frac{m_1 - 2m_1 \sin \alpha}{4m_1 + m_2} = 3,27 \frac{m}{s^2}$$

201. Kako je

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \vec{F}$$

i  $v_x = v_0 \cos \alpha$ ,  $v_y = v_0 \sin \alpha - gt$ , dobija se da je

$$\frac{d(mv_x)}{dt} = 0$$

$$\frac{d(mv_y)}{dt} = -mg$$

tj.

$$\Delta p = \Delta(m\vec{v}_y) = m\vec{g}t$$

202. Vektor sile je

$$\vec{F} = F_x \vec{i} - F_y \vec{j}$$

gde su

$$F_x = m \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin \omega t$$

$$F_y = m \frac{d^2y}{dt^2} = -B\omega^2 \cos \omega t$$

pa se dobija da je

$$\vec{F} = -m\omega^2 (A \sin \omega t \vec{i} + B \cos \omega t \vec{j}) =$$

$$= -m\omega^2 (x \vec{i} + y \vec{j}) = -m\omega^2 \vec{r}$$

što znači da vektor sile  $\vec{F}$  ima pravac vektora položaja  $\vec{r}$  tela tokom kretanja tela. Intenzitet sile je

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = m\omega^2 \sqrt{x^2 + y^2}$$

203. a) Prema II Njutnovom zakonu je

$$m \frac{dv}{dt} = \Sigma F = A \sin \omega t$$

pa je

$$\int_0^{v(t)} dv = \frac{A}{m} \int_0^t \sin \omega t dt$$

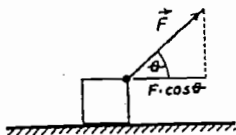
ili

$$v(t) = \frac{A}{m\omega} (1 - \cos \omega t)$$

b) Na osnovu relacije  $v = ds(t)/dt$  nalazi se da je

$$s(t) = \int_0^t v(t) dt = \frac{A}{m\omega^2} (\omega t - \sin \omega t)$$

204. Kako između tela i podloge nema trenja, promenu brzine tela uslovljava samo



horizontalna komponenta sile  $\vec{F}$  [23], tj. sila  $F \cos \theta$ , pa je

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{mg}{2} \cos \theta$$

ili

$$dv = \frac{g}{2} \cos \left( \frac{\pi}{k} s \right) dt = \frac{g}{2} \cos \left( \frac{\pi}{k} s \right) \frac{dt}{ds} ds =$$

$$= \frac{g}{2} \cos \left( \frac{\pi}{k} s \right) \frac{1}{v} ds$$

odnosno

$$\int_0^v v dv = \frac{g}{2} \int_0^s \cos \left( \frac{\pi}{k} s \right) ds$$

tj.

$$v = \sqrt{\frac{gk}{\pi} \sin \left( \frac{\pi}{k} s \right)}$$

Kada je  $\theta = (\pi/2)$  rad, brzina je

$$v = \sqrt{\frac{gk}{\pi}} \approx 5 \frac{m}{s}$$

205. a) Na osnovu II Njutnovog zakona je

$$m \frac{dv}{dt} = kt^2$$

pa je

$$m \int_0^{v(t)} dv = k \int_0^t t^2 dt$$

ili

$$mv(t) = p = \frac{kt^3}{3}$$

tj. za  $t = \tau$  je  $p = 90 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ .

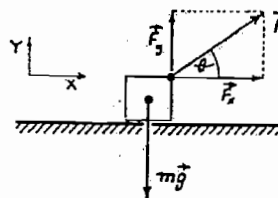
b) Pređeni put je

$$s(t) = \int_0^t v(t) dt = \frac{k}{3m} \int_0^t t^3 dt = \frac{kt^4}{12m} = 67,5 \text{ m}$$

206. a) Prema slici [24] je

$$F_x = F \cos \theta = kt \cos \theta; \quad F_y = F \sin \theta = kt \sin \theta$$

[24]



Telo će da se odvoji od podloge posle vremena  $t_0$ , kada je  $F_y = mg$ , tj.  $mg = kt_0 \sin \theta$ , odakle je

$$t_0 = \frac{mg}{k \sin \theta}$$

pa je prema II Njutnovom zakonu

$$m \frac{dv}{dt} = kt \cos \theta$$

ili

$$\int_0^v dv = \frac{k \cos \theta}{m} \int_0^{t_0} t dt$$

Prema prethodnim relacijama, brzina tela u trenutku odvajanja od podloge je

$$v = \frac{mg^2}{2k \sin \theta \cdot 1g \theta}$$

b) Kako je brzina  $v = ds/dt$ , dobija se da je

$$\int_0^s ds = \int_0^{t_0} v(t) dt = \frac{k \cos \theta}{2m} \int_0^{t_0} t^2 dt$$

ili

$$s = \frac{m^2 g^2}{6k^2 \sin^2 \theta \cdot 1g \theta}$$

207. a) Prema II Njutnovom zakonu je  $ma = F_{ot}$ , tj.

$$m \frac{dv}{dt} = -kv \quad (1)$$

odakle je

$$\int_{v_0}^0 \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} \int_0^{t_2} dt$$

ili

$$v(t) = v_0 e^{-kt/m} \quad (2)$$

što znači da će brzina čamca biti jednaka nuli tek posle vremena  $t = \infty$ .

b) Relacija (1) može se napisati u obliku

$$m \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = -kv$$

tj.

$$\frac{dv}{ds} v = -\frac{k}{m} v$$

odakle je

$$\int_{v_0}^0 dv = -\frac{k}{m} \int_0^s ds$$

ili

$$v(s) = v_0 - \frac{k}{m} s$$

c) Ukupni pređeni put čamca do zaustavljanja je

$$s = \int_0^{t_2} v(t) dt$$

ili prema relaciji (1)

$$s = v_0 \int_0^{\infty} e^{-kt/m} dt = v_0 \frac{m}{k}$$

208. a) Prema II Njutnovom zakonu je

$$m \frac{dv}{dt} = -kv^2$$

ili

$$\frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} = -\frac{k}{m} v^2$$

gde je  $x$  pređeni put metka u gredi, pa je

$$\int_{v_0}^{v(x)} \frac{dv}{v} = - \int_0^x \frac{k}{m} dt$$

tj.

$$v(x) = v_0 e^{-kx/m} \quad (1)$$

b) Pošto je brzina kretanja metka kroz gredu

$$v(x) = \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kx/m}$$

dobija se da je

$$\int_0^D e^{kx/m} dx = \int_0^t v_0 dt$$

pa je

$$t = \frac{1}{v_0} \frac{m}{k} (e^{kD/m} - 1)$$

Prema relaciji (1) je

$$\frac{m}{k} = \frac{D}{\ln \frac{v_0}{v(D)}}$$

pa se dobija da je

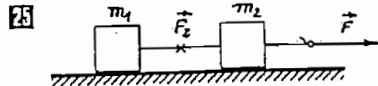
$$t = \frac{D}{\ln(v_0/v_1)} \cdot \frac{v_0 - v_1}{v_1 v_0} = 0,16 \text{ ms}$$

pošto je  $v(D) = v_1$ .

Dokazati da je

$$\left[ \frac{D}{\ln(v_0/v)} \cdot \frac{v_0 - v}{v v_0} \right] = s$$

209. Pod dejstvom sile  $F$  vagoni se kreću ravnomerno ubrzano, pa je prema II Njutnovom zakonu  $(m_1 + m_2 + \dots + m_n) a = F$  odnosno  $nma = F$ , odakle je ubrzanje vagona  $a = F/nm$  (1). Intenzitet sile na spoju prvog i drugog vagona je  $F_{n-1} = (n-1)ma = \frac{n-1}{n} F$ , a između  $i$ -tog i  $(i+1)$ -og vagona je  $F_{n-i} = \frac{n-i}{n} F$ .



210. Prema II Njutnovom zakonu je

$$m_2 a = F - F_2$$

$$m_1 a = F_2$$

pa je ubrzanje sistema

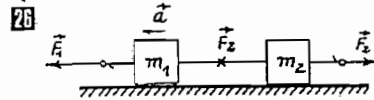
$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{2}{3} \frac{m}{s^2}$$

a intenzitet sile zatezanja užeta  $F_2 = 6,67 \text{ N}$ .

211. Prema II Njutnovom zakonu je

$$m_1 a = F_2 - F_1$$

$$m_2 a = F_2 - F_2$$



pa je sila zatezanja

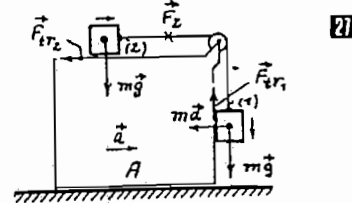
$$F_2 = F_1 = (F_2 - F_1) \frac{m_1}{m_1 - m_2}$$

ili

$$F_2 = k t \frac{2m_1 - m_2}{m_1 - m_2}$$

pa će užo da se prekine posle vremena

$$t = \frac{F_{\max} (m_1 - m_2)}{k (2m_1 - m_2)} = 25 \text{ s}$$



212. Ako se tela (1) i (2) ne kreću u odnosu na telo A, onda je prema II Njutnovom zakonu za telo (1)

$$mg = F_2 + \mu na$$

a za telo (2)

$$ma = F_2 - \mu mg$$

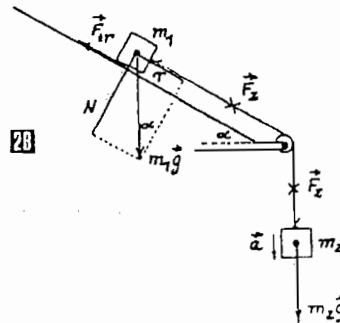
odakle je

$$a = g \frac{1 - \mu}{1 + \mu}$$

213. a) Prema II Njutnovom zakonu je

$$m_2 a = m_2 g - F_2$$

$$m_1 a = F_2 - T - F_{fr}$$



Kako je  $T = m_1 g \sin \alpha$ , a  $F_{fr} = \mu m_1 g \cos \alpha$ , to je

$$a = g \frac{m_1 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) + m_2}{m_1 + m_2} = 5,4 \frac{m}{s}$$

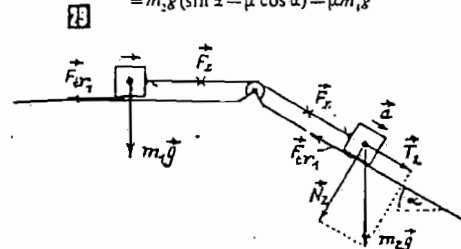
b)  $F_2 = m_2 (g - a) = 22 \text{ N}$ .

214. a)  $t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}} = 4,2 \text{ s}$ ;

b)  $v = at = (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) gt = 14,4 \text{ m/s}$ .

215. Ako je  $F_{fr1} + F_{fr2} < T_3$ , sistem će se kretati. Intenzitet rezultujuće sile koja vrši kretanje je

$$\begin{aligned} F &= T_3 - F_{fr1} - F_{fr2} = \\ &= m_2 g \sin \alpha - \mu m_1 g - \mu m_2 g \cos \alpha = \\ &= m_2 g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - \mu m_1 g \end{aligned}$$



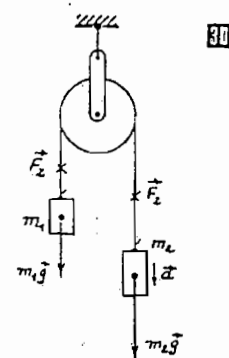
Prema II Njutnovom zakonu je  $F = ma$ , odnosno  $F = (m_1 + m_2) a$ , pa je ubrzanje sistema

$$a = g \frac{m_2 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - \mu m_1}{m_1 + m_2}$$

a intenzitet sile zatezanja užeta

$$\begin{aligned} F_2 &= m_1 a + F_{fr1} = \\ &= \frac{m_1 g}{m_1 + m_2} [m_2 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - \mu m_1] + \mu m_1 g \end{aligned}$$

216. Pošto je  $m_2 > m_1$ , kotur će se obrtati u naznačenom smeru. Prema II Njutnovom



zakonu je

$$m_1 a = F_2 - m_1 g$$

$$m_2 a = m_2 g - F_2$$

odakle je

$$a = g \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} = \frac{g}{5}$$

Preporučujemo da izračunate intenzitet sile zatezanja užeta  $F_2$ .

217. Na slici je  $F_2$  — sila zatezanja užeta,  $F_1$  — sila kojom preteg deluje na telo mase  $m$ ,  $F_3$  — reakcija ležišta osovine. Prema II Njutnovom zakonu je

$$ma = F_2 - mg$$

$$ma = F_1 + mg - F_3$$

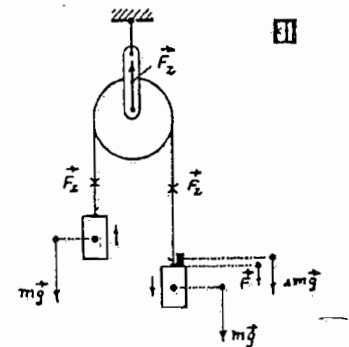
$$\Delta ma = \Delta mg - F_1$$

odakle je ubrzanje sistema

$$a = g \frac{\Delta m}{2m + \Delta m}$$

intenzitet sile zatezanja užeta

$$F_2 = \frac{2mg(m + \Delta m)}{2m + \Delta m}$$



intenzitet sile kojom preteg deluje na telo

$$F_1 = \frac{2mg \Delta m}{2m + \Delta m}$$

a reakcija ležišta osovine  $F_3 = 2F_1$ .

218. Iz uslova dinamičke ravnoteže sile koje deluju u pravcu kretanja

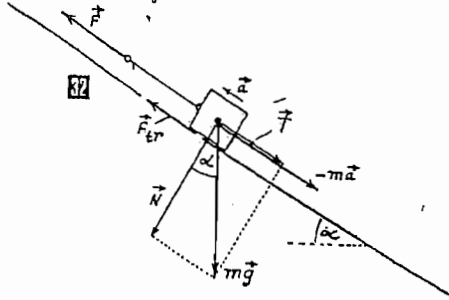
$$\vec{T} + m\vec{a} + \vec{F}_{fr} + \vec{F} = 0$$

tj.

$$mg \sin \alpha + ma - \mu mg \cos \alpha - F = 0$$

gde je  $a = v_0/t_0$ , dobija se da je intenzitet tražene sile

$$F = m \frac{v_0}{t_0} + mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = 2225 \text{ N}$$



219. Kako se telo ne kreće, to je **87**

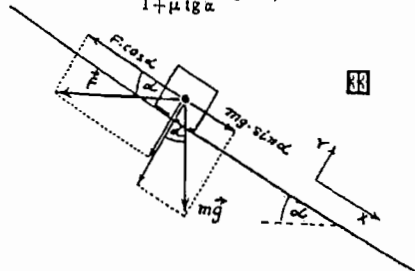
$$\sum \vec{F}_{sd} = 0$$

tj.

$$mg \sin \alpha - F \cos \alpha - \mu(mg \cos \alpha + F \sin \alpha) = 0$$

odakle je

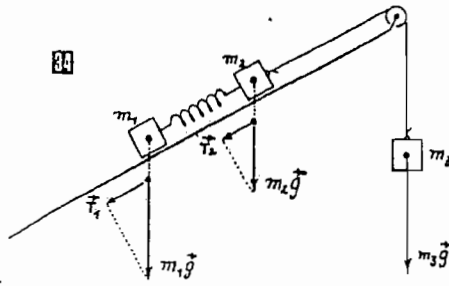
$$F = \frac{tg \alpha - \mu}{1 + \mu tg \alpha} mg = 6,64 \text{ N}$$



220. Intenzitet rezultujuće sile koja vrši kretanje sistema tela je **89**

$$\sum F = m_3g - T_1 - T_2 = \dots$$

$$= m_3g - m_1g \sin \alpha - m_2g \sin \alpha$$



pa je prema II Njutnovom zakonu ubrzanje sistema tela

$$a = \frac{\sum F}{\sum m} = g \frac{m_3 - (m_1 + m_2) \sin \alpha}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Intenzitet sile zatezanja opruge je

$$F_2 = T_1 + m_1 a$$

pa je izduženje opruge

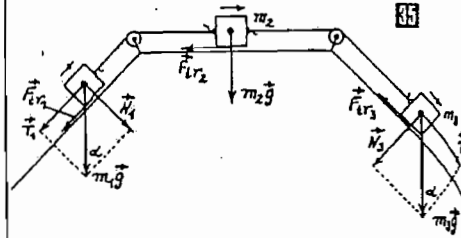
$$x = \frac{F_2}{k} = \frac{m_1 g}{k} \left[ \sin \alpha + \frac{m_3 - (m_1 + m_2) \sin \alpha}{m_1 + m_2 + m_3} \right] = 2,3 \text{ cm}$$

221. Ubrzanje sistema je  $a = \frac{\sum F}{\sum m}$ , gde je za usvojeni smer kretanja **85**

$$\begin{aligned} \sum F &= T_3 - F_{fr3} - F_{fr2} - T_1 - F_{fr1} = \\ &= m_3g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - \mu m_2g - \\ &\quad - m_1g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \end{aligned}$$

$$\sum m = m_1 + m_2 + m_3$$

pa je



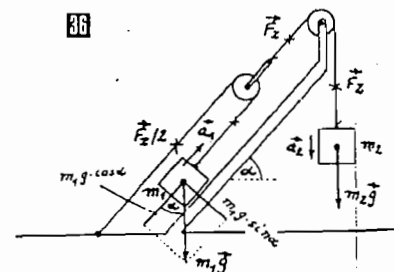
$$a = g \frac{(m_3 - m_1) \sin \alpha - \mu(m_3 + m_1) \cos \alpha - \mu m_2}{m_1 + m_2 + m_3} = 0,133 \text{ m/s}^2$$

Kolike su sile zatezanja oba užeta?

222. a) Iz II Njutnovog zakona je **86**

$$m_1 a_1 = \frac{F_2}{2} - m_1 g \sin \alpha - \mu m_1 g \cos \alpha$$

$$m_1 a_2 = m_2 g - F_2$$



pa kako je  $a_1 = 2a_2$ , dobija se da je

$$a_2 = g \frac{m_2 - m_1(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{4m_1 + m_2}$$

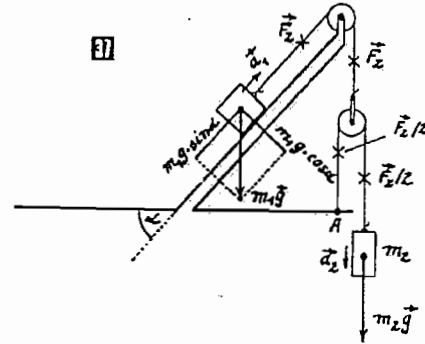
$$\begin{aligned} \text{b) } F_2 &= m_2(g - a_2) = \\ &= g \frac{m_1 m_2 (4 - \sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{4m_1 + m_2} \end{aligned}$$

$$\text{c) } F_A = F_2/2.$$

223. a) Prema II Njutnovom zakonu je **87**

$$m_1 a_1 = F_2 - m_1 g \sin \alpha - \mu m_1 g \cos \alpha$$

$$m_1 a_2 = m_2 g - F_2/2 \quad (1)$$



Pošto je  $a_2 = 2a_1$  i  $m_2 = km_1$ , dobija se da je

$$a_2 = g \frac{2(2k - \sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{4k + 1}$$

b) Otpor oslonca A je prema relaciji (1)

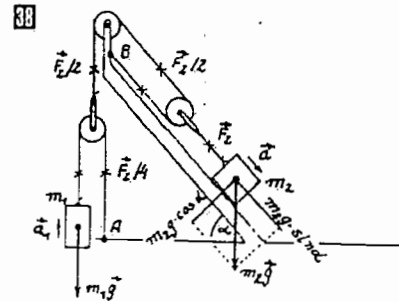
$$F_A = \frac{F_2}{2} = m_2(g - a_2)$$

Za koju vrednost k će sistem da miruje?

224. a) Prema II Njutnovom zakonu je **88**

$$m_1 a = m_2 g \sin \alpha - \mu m_2 g \cos \alpha - F_2$$

$$m_1 a_1 = (F_2/4) - m_1 g \quad (1)$$



Kako je  $a_1 = 4a_2$ , dobija se da je

$$a = g \frac{m_2(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - 4m_1}{m_1 + 16m_2} = 1,14 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (2)$$

b) Prema relacijama (1) i (2) intenzitet sile zatezanja užeta je

$$F_2 = 4m_1(4a + g)$$

pa su otpori oslonaca A i B

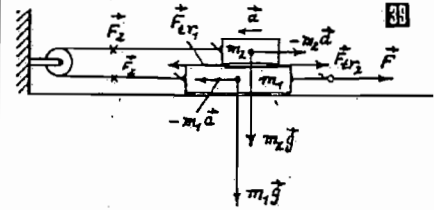
$$F_A = \frac{F_2}{4} = m(4a + g) = 14,37 \text{ N}$$

$$F_B = \frac{F_2}{2} = 2m(4a + g) = 28,74 \text{ N}$$

225. U toku kretanja tela uspostavljena je dinamička ravnoteža sila koje deluju u pravcu kretanja **89**, pa je

$$m_2 a + \vec{F}_{fr2} + \vec{F}_2 = 0$$

$$m_1 a + \vec{F}_{fr1} + \vec{F}_2 + \vec{F} = 0$$



ili vodeći računa o smerovima ovih sila i činjenici da je  $F_{fr1} = F_{fr2} = \mu mg = F_{fr}$

$$m_1 a = F_2 - F_{fr}$$

$$m_1 a = F - F_2 - F_{fr}$$

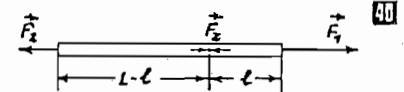
odakle je

$$F = m_1 a + m_2(a + 2\mu g) = 24,5 \text{ N}$$

226. Prema II Njutnovom zakonu primenom na deo štapa dužine  $l$  **89** i na ostatak štapa je

$$\begin{cases} m_1 a = F_1 - F_2 \\ m_{L-l} a = F_2 - F_1 \end{cases} \quad (1)$$

Kako je  $m_1 = \frac{m}{L} l$  i  $m_{L-l} = \frac{m}{L} (L-l)$ , prema



relacijama (1) dobija se da je intenzitet sile koja deluje u nekom poprečnom preseku štapa

$$F_2 = F_1 - \frac{l}{L} (F_1 - F_2)$$

227. a) Prema II Njutnovom zakonu je 41

$$m \frac{dv}{dt} = \sum F_i = mg \sin \alpha - ksmg \cos \alpha$$

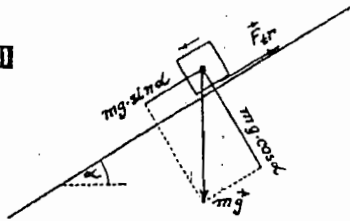
odakle je

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{ds} = g \sin \alpha - ksg \cos \alpha$$

odnosno  $v dv = g(\sin \alpha - ks \cos \alpha) ds$ , pa se dobija da je  $v^2 = 2sg(\sin \alpha - \frac{1}{2} ks \cos \alpha)$ .

$$v^2 = 2sg \left( \sin \alpha - \frac{1}{2} ks \cos \alpha \right)$$

41



Pređeni put do zaustavljanja se dobija iz uslova  $v=0$ . Prvi koren ove jednačine  $s=0$  nema fizički značaj, dok je drugi koren

$$s = \frac{2}{k} \operatorname{tg} \alpha$$

b) Maksimalna brzina tela određena je iz uslova  $dv/ds=0$ , tj.

$$\frac{d}{ds} \sqrt{2gs \sin \alpha - ks^2 g \cos \alpha}$$

ili  $s = \frac{1}{k} \operatorname{tg} \alpha$ , odakle je

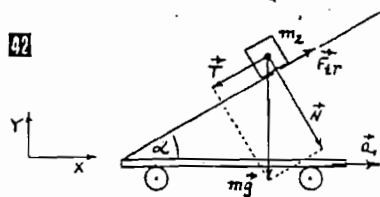
$$v_{\max} = \sqrt{\frac{g}{k} \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}$$

228. Uzrok kretanja tela niz strmu ravan je sila intenziteta  $F = T - F_{Tr}$  42 odnosno

$$F = m_2 g \sin \alpha - \mu m_2 g \cos \alpha$$

Prema II Njutnovom zakonu, je  $F = m_1 a = m_2 g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$ , pa je ubrzanje tela  $a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$ .

42



Intenzitet horizontalne komponente sile  $\vec{F}$  je

$$F_x = F \cos \alpha = m_2 g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \cos \alpha$$

Prema III Njutnovom zakonu, intenzitet sile koja pokreće vagonet je  $F_1 = F_x$ . Kako je  $F_1 = m_1 a_1$ , ubrzanje platforme je

$$a_1 = F_1 / m_1 = -F_x / m_1 = -\frac{m_2}{m_1} g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \cos \alpha \quad (1)$$

Znak (-) označava da će se vagonet kretati u suprotnom smeru od smera kretanja tela (po pravcu X-ose). Telo će da pređe put  $l$  za vreme

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}} \quad (2)$$

Za isto vreme vagonet će da pređe put  $s = a_1 t^2 / 2$ . Prema relacijama (1) i (2) dobija se da je

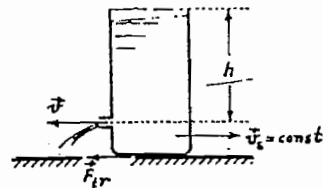
$$s = \frac{m_2}{m_1} l \cos \alpha$$

229. Na letelicu deluje sila teže  $mg$ , dok je intenzitet reaktivne sile  $F = d(m_1 v_1) / dt$ , gde je  $m_1$  — masa izbačenih produkata sagorevanja, a  $v_1$  — njihova brzina. Iz uslova ravnoteže ovih sila (pošto je  $a=0$ ) dobija se da je

$$mg = \frac{d(m_1 v_1)}{dt} = v_1 \frac{dm_1}{dt}$$

Kako je  $dm_1 / dt = \rho S v_1$ , dobija se da je tražena brzina

$$v_1 = \sqrt{\frac{mg}{\rho S}}$$



43

230. Prema II Njutnovom zakonu je 43

$$m \vec{a} = \vec{F} + v \frac{dm}{dt}$$

gde je  $a=0$  (pošto je brzina suda stalna),  $F = -\mu mg$  — sila trenja između suda i podloge,  $v = \sqrt{2gh}$  — brzina mlaza vode u odnosu na sud i  $dm/dt = \rho S \sqrt{2gh}$  — maseni protok vode kroz otvor, pa je

$$\mu mg = 2\rho ghS$$

odakle je koeficijent trenja

$$\mu = \frac{2\rho hS}{m}$$

231. a) Prema II Njutnovom zakonu je

$$m \frac{dv}{dt} = \vec{F}_z + u \frac{dm}{dt}$$

gde je  $\vec{F}_z$  — rezultanta spoljašnjih sila koje deluju na raketu, pa je

$$(m_0 - kt) \frac{dv}{dt} = -(m_0 - kt)g - u \frac{d(m_0 - kt)}{dt}$$

odakle je ubrzanje rakete posle vremena  $t$

$$a = -g + \frac{ku}{m_0 - kt} \quad (1)$$

a u početku kretanja ( $t=0$ )

$$a = -g + \frac{ku}{m_0} = 0,2 \frac{m}{s^2}$$

b) Prema relaciji (1), brzina kretanja rakete u funkciji vremena je

$$\int_0^v dv = -\int_0^t g dt + \int_0^t \frac{uk}{m_0 - kt} dt$$

odnosno

$$v = u \ln \frac{m_0}{m_0 - kt} - gt$$

Kako rad motora rakete može da traje  $t = \frac{m_0 - m_0'}{k} = 180$  s, njena krajnja brzina je  $v_{\max} = 2,84$  km/s, što znači da ona ne može dostići prvu kosmičku brzinu (7,9 km/s).

232. a) Prema relaciji (v. zad. 231)

$$m \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt}$$

dobija se da je

$$(m_0 - kt) \frac{dv}{dt} = -u \frac{d(m_0 - kt)}{dt}$$

odakle je  $v = u \ln \frac{m_0}{m_0 - kt}$

ili

$$t = \frac{m_0}{k} (1 - e^{-v/u}) = 1,45 \text{ s}$$

b) Vreme rada raketnog motora iznosi  $t_r = m_0' / k = 6$  s, pa će raketa da dostigne brzinu  $v_{\max} = 1,39$  km/s.

233. Primenom zakona održanja količine kretanja na raketu kao izolovani sistem nalazi se da je

$$m \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt} \quad (1)$$

U pravcu kretanja rakete brzina je stalna, pa je

$$\frac{dv}{dt} = v_0 \omega = v_0 \frac{d\theta}{dt} \quad (2)$$

Na osnovu relacija (1) i (2) je

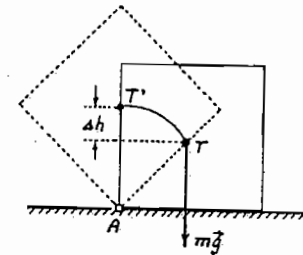
$$\int_0^{\theta} dv = -\frac{u}{v} \int_0^{\theta} \frac{dm}{m}$$

odakle je  $\theta = \frac{u}{v_0} \ln \frac{m_0}{m_k}$ .

$$234. a = \frac{A}{mh} - g = 30 \frac{m}{s^2}$$

$$235. E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} a F t^2 = 1,25 \text{ J.}$$

236. Pri obrtanju kocke oko ivice A 44 ulaže se rad sve dok težište T ne dođe u položaj T' (položaj labilne ravnoteže), posle 44



čega će kocka da pada pod dejstvom momenta sile teže  $mg$ . Uloženi rad jednak je promeni gravitacione potencijalne energije kocke, odnosno

$$A = mg \Delta h = mg \left( \frac{d}{2} - \frac{a}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}-1}{2} m g a = 1 \text{ kJ}$$

237. Ubrzanje aviona je  $a = v^2 / 2s$ , dok je intenzitet inercijalne sile  $ma = mv^2 / 2s$ , a sile trenja  $F_{Tr} = \mu mg$ . Motor aviona mora da savlada dejstvo obe sile, pa je potrebna vučna sila motora

$$F > \mu mg + \frac{mv^2}{2s}$$

a odgovarajuća snaga

$$P = Fv = \left( \mu g + \frac{v^2}{2s} \right) mv = 1,6 \text{ MW}$$

Preporučujemo da ovaj zadatak rešite primenom zakona održanja energije.

238. Automobil poseduje kinetičku energiju  $E_k = mv_0^2/2$ . Posle prestanka dejstva motora ova energija se utroši na savladavanje sile trenja, tj.  $mv_0^2/2 = F_{tr} \cdot s$ , odakle je

$$s = \frac{mv_0^2}{2F_{tr}} = 222,2 \text{ m}$$

239.  $\langle F_0 \rangle = \frac{m_2^2 v_0^2}{2m_1 l} = 2,05 \text{ MN}$  ?

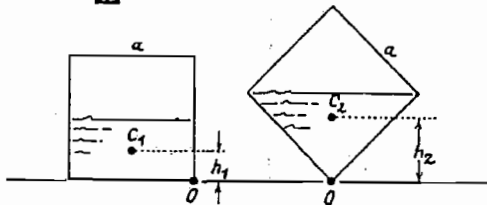
Dokazati da je

$$\left[ \frac{m_2^2 v_0^2}{2m_1 l} \right] = N$$

240. Ako se kocka obrće polako, onda je uloženi rad jednak promeni gravitacione potencijalne energije vode između položaja (a) i (b) kocke. Prema slici 45 je

$$\Delta h = h_2 - h_1 = a \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{a}{4}$$

45



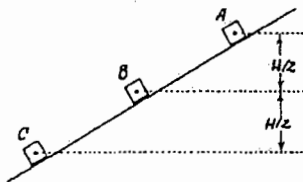
Kako je masa vode  $m = \rho V = \rho \frac{a^3}{2}$ , to je

$$A = mg \Delta h = \left( \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{8} \right) \rho g a^4$$

gde je  $\rho$  — gustina vode.

241. U položaju A 46 je  $E_{kA} = 0$ . U položaju B je  $v_B = \sqrt{gH}$ , pa je kinetička energija tela  $E_{kB} = mv_B^2/2 = mgH/2$ . U položaju C je  $v_C = \sqrt{2gH}$ , pa je  $E_{kC} = mv_C^2/2 = mgH$ .

46



242. Kako je  $P = F_1 v_1 = F_2 v_2$  i  $F_1 = F_{tr1} = \mu_1 mg$ , a  $F_2 = F_{tr2} = \mu_2 mg$ , to je

$$v_2 = v_1 \frac{\mu_1}{\mu_2} = 1,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

243.  $P_k = \frac{mgh}{(1-\eta)t} = 5,44 \text{ kW}$ .

244.  $\eta = 1 - \frac{v^2}{2gh} = 0,65$ .

245.  $P = \frac{Qgh}{\tau_1 \tau_2} \approx 30 \text{ kW}$ .

246. Priraštaj kinetičke energije kompozicije  $\Delta E_k$  jednak je radu  $\Delta F \cdot s$ , gde je  $\Delta F$  — povećanje vučne sile lokomotive, tj.

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \Delta F \cdot s$$

Pošto je srednje ubrzanje kompozicije  $\langle a \rangle = (v_2 - v_1)/t$ , to je pređeni put

$$s = v_1 t + \frac{1}{2} (v_2 - v_1) t^2$$

gde je  $t$  — vreme za koje kompozicija pređe put  $s$ , odakle je  $t = 2s/(v_1 + v_2)$ . Prema, tome, povećanje snage motora lokomotive je  $\Delta P = \Delta F \cdot s/t$ , odnosno imajući u vidu relaciju (1)

$$\Delta P = \frac{m}{4s} (v_2 - v_1)(v_1 + v_2)^2 = 0,43 \text{ MW}$$

247. a) Prema postavci zadatka je

$$a_n = kv^2 = v^2/R$$

pa je  $v = \sqrt{kR}$ .

Tangencijalno ubrzanje je

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \sqrt{kR}$$

a sila

$$F = m \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = m \sqrt{(v^2/R)^2 + kR} = m \sqrt{k^2 r^4 + kR}$$

b) Prema definiciji snage je

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = m(a_n + a_t) \cdot v = ma_n v + mkRt$$

jer je  $\vec{a}_n \perp \vec{v}$ , pa je  $\vec{a}_n \cdot \vec{v} = 0$ .

c)  $\langle P \rangle = \frac{P(0) + P(t)}{2} = \frac{mkR \Delta t}{2}$

248.  $h_1 = \frac{l}{2} \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 = 1 \text{ cm}$ ;

$h_2 = \frac{l}{2} \left( \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 = 4 \text{ cm}$ .

249. a) Rad vetra za vreme  $t$  je

$$A_v = \Delta E_k = \frac{m}{2} [v^2(t) - v^2(0)]$$

pa kako je

$$v = \frac{ds}{dt} = 2At + B$$

dobija se da je

$$A_v = 2mA(At + B)$$

b)  $P(t) = F \cdot v(t) = 2mA(2At + B)$ .

250. Iz uslova  $E_k = mv^2/2 = ks^2$  nalazi se da je

$$v^2 = \frac{2ks^2}{m}$$

dok je prema II Njutnovom zakonu

$$F = ma = m \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

gde je

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{2ks^2}{Rm}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds} = \frac{2ks}{m}$$

pa je

$$F = \frac{2ks}{R} \sqrt{R^2 + s^2}$$

251. Rad uloženi na istezanje ovog sistema opruga za  $\Delta x$  pretvori se u elastičnu potencijalnu energiju ovog sistema, pa je

$$A_{\text{min}} = \frac{k_e(\Delta x)^2}{2}$$

gde je  $k_e$  — ekvivalentni koeficijent krutosti sistema opruga.

Kako je

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

gde su  $\Delta x_1$  i  $\Delta x_2$  — odgovarajuća istezanja pojedinih opruga i

$$\Delta x = \frac{F}{k_e}; \Delta x_1 = \frac{F}{k_1}; \Delta x_2 = \frac{F}{k_2}$$

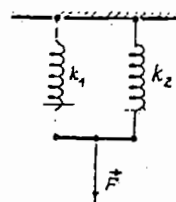
dobija se da je

$$k_e = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

pa je traženi minimalni rad

$$A_{\text{min}} = \frac{k_1 k_2 (\Delta x)^2}{2(k_1 + k_2)}$$

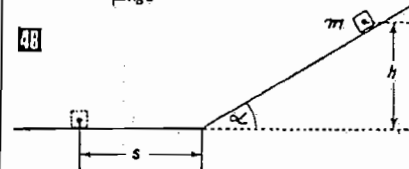
Koliki bi bio ovaj rad da su opruge vezane paralelno 47?



252. Na vrhu strme ravni 48 telo raspolaže energijom  $E_p = mgh$ . U toku kretanja se ova energija troši na savladavanje sile trenja po strmoj ravni, dužine  $s_1 = h/\sin \alpha$ , i horizontalnom delu puta  $s_2 = s - h/\sin \alpha$ . Intenzitet sile trenja na strmoj ravni je  $F_{tr1} = \mu mg \cos \alpha$ , a na horizontalnom delu puta  $F_{tr2} = \mu mg$ , pa je

$$A = F_{tr1} s_1 + F_{tr2} s_2 = \mu mg \cos \alpha \frac{h}{\sin \alpha} + \mu mg \left( s - \frac{h}{\sin \alpha} \right) = \mu mgs$$

48



Prema zakonu održanja energije je  $mgh = \mu mgs$ , odnosno

$$\mu = h/s = 0,24$$

253.  $\alpha = \arccos \left( \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \right) \approx 11^\circ 25'$  ?

254. Rad koji izvrši motor automobila jednak je proizvodu intenziteta vučne sile  $F_v$  i pređenog puta  $s$ , tj.

$$A = F_v s$$

Pošto se automobil kreće stalnom brzinom, znači da je rezultujuća sila koja deluje na njega 49

$$\Sigma F = F_v - T - F_{tr} = 0$$

gde je  $T = mg \sin \alpha$  — intenzitet tangencijalne komponente sile teže  $mg$ , dok je  $F_{tr} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$  — intenzitet sile trenja, pa je

$$F_v = mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

Kako je  $\sin \alpha = h/l$  i  $\cos \alpha = \sqrt{1 - (h/l)^2}$ , dobija se da je

$$F_v = mg \left[ \frac{h}{l} + \mu \sqrt{1 - \left( \frac{h}{l} \right)^2} \right]$$



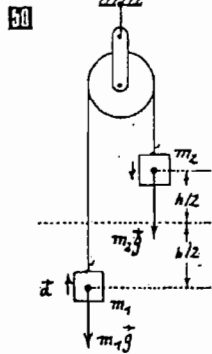
Uzimajući da je  $h^2 \ll l^2$ , izvršeni rad automobilskog motora je

$$A = mgs \left( \frac{h}{l} + \mu \right) = 7 \text{ MJ}$$

dok je snaga motora  $P = A/t = 29 \text{ kW}$ .

255. Na osnovu II Njutnovog zakona je  $(m_1 + m_2)a = m_1g - m_1g \frac{50}{60}$ , pa je ubrzanje sistema

$$a = g \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \quad (1)$$



Telo će da pređe put  $s = h/2$  za vreme  $t = \sqrt{2s/a}$ , gde će imati brzinu

$$v = at = \sqrt{2as} = \sqrt{gh} \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \quad (2)$$

pa je tada kinetička energija sistema

$$E_k = \frac{m_1 v^2}{2} + \frac{m_2 v^2}{2} = \frac{v^2}{2} (m_1 + m_2)$$

odnosno, prema relacijama (1) i (2)

$$E_k = \frac{gh}{2} (m_2 - m_1) \approx 19,6 \text{ J}$$

256. a) Motor automobila vrši rad protiv sile trenja i na povećanju kinetičke energije automobila. Ukupni rad je

$$A = A_{tr} + \Delta E_k = F_{tr} \cdot s + \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2)$$

Intenzitet sile trenja je  $F_{tr} = \mu mg$ , pa je

$$A = \mu mgs + \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2) \approx 1,11 \text{ MJ}$$

b) Srednja snaga koju razvija motor na ovom delu puta je

$$\langle P \rangle = \langle F \rangle \langle v \rangle$$

gde je  $\langle F \rangle$  — srednja sila na tom delu puta,

a  $\langle v \rangle$  — srednja brzina automobila, pa se dobija da je

$$\langle P \rangle = \frac{A}{s} \frac{v_1 + v_2}{2} =$$

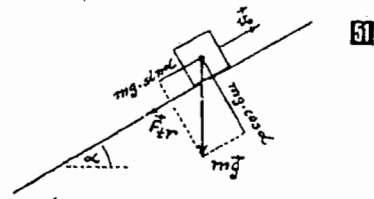
$$= \frac{2\mu mgs + m(v_2^2 - v_1^2)(v_1 + v_2)}{4s} \approx 5,54 \text{ kW}$$

257. a) Prema II Njutnovom zakonu je

$$ma = -mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta$$

pa je ubrzanje tela

$$a = -g(\sin \theta + \mu \cos \theta)$$



a) pređeni put duž strme ravni

$$s = \frac{v_0^2}{2|a|} = \frac{v_0^2}{2g(\sin \theta + \mu \cos \theta)}$$

b) Izvršeni rad na savladivanju sile trenja je

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = -\mu mg \cos \theta \frac{v_0^2}{2g(\sin \theta + \mu \cos \theta)} = -\frac{mv_0^2}{2} \frac{\mu}{\sin \theta + \mu}$$

258. Gravitaciona potencijalna energija tela u odnosu na površinu stola je

$$E_1 = mgH$$

Ako je  $x_0$  — maksimalna deformacija opruge, onda je najmanja gravitaciona potencijalna energija tela  $mg(l_0 - x_0)$ , a najveća elastična potencijalna energija opruge  $kx_0^2/2$ , pa je energija sistema u ovom slučaju

$$E_2 = mg(l_0 - x_0) + \frac{kx_0^2}{2}$$

Iz uslova  $E_1 = E_2$ , koji proizlazi iz zakona održanja energije, nalazi se da je

$$x_0^2 - \frac{2mg}{k} x_0 - \frac{2mg(H - l_0)}{k} = 0$$

odakle je maksimalno sabijanje opruge

$$x_{01} = \frac{mg}{k} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2k(H - l_0)}{mg}} \right)$$

dok rešenje

$$|x_{02}| = \frac{mg}{k} \left| 1 - \sqrt{1 + \frac{2k(H - l_0)}{mg}} \right|$$

odgovara maksimalnom istežanju opruge pri likom njenog oscilovanja posle pada tela na nju.

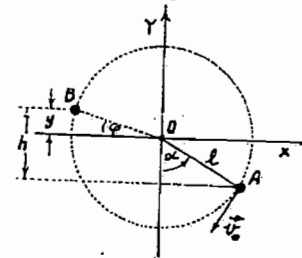
259. Klatno će doći u položaj B, gde je brzina kuglice  $v_B = 0$ . Prema zakonu održanja energije je

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh$$

pa je

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

60



Kako je  $h = l \cos \alpha + y$ , odnosno

$$y = h - l \cos \alpha = \frac{v_0^2}{2g} - l \cos \alpha$$

to je  $\sin \varphi = y/l$ , ili

$$\varphi = \arcsin (y/l) = 24^\circ$$

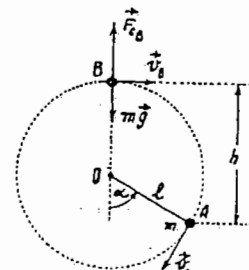
Preporučujemo da izračunate energiju kuglice pri prolasku kroz ravnotežni položaj.

260.  $v_0 = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} = 9,9 \text{ m/s}$ ;

$$E_k = mv_0^2/2 = 1,47 \text{ kJ.}$$

261. Da bi se telo kretalo po kružnoj putanji, potrebno je da je  $F_{cB} > mg$ , gde je  $F_{cB} = mv_B^2/l$ . U graničnom slučaju je  $mv_B^2/l = mg$ , odnosno  $v_B^2 = gl$  (1).

61



Kuglici je saopštena energija  $E_{kA} = mv_0^2/2$  i ona se pretvori u potencijalnu energiju  $mgh$ , a ostatak je kinetička energija tela u tački B, koja iznosi  $E_{kB} = mv_B^2/2$ . Prema zakonu održanja energije je

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh + \frac{mv_B^2}{2} \quad (2)$$

Prema relacijama (1) i (2) dobija se da je

$$v_0^2 = 2gh + gl$$

pa kako je  $h = 3l/2$ , tražena početna brzina je  $v_0 = 2\sqrt{gl} = 6,2 \text{ m/s}$ .

262.  $A = 9,6 \text{ kJ}$ .

263. Najveća sila zatezanja užeta je u trenutku kada se telo nalazi u tački A i iznosi

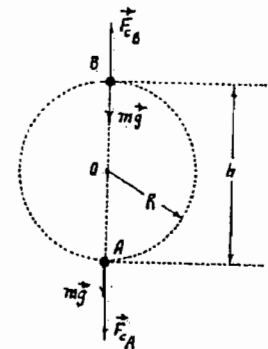
$$F_A = mg + F_{cA} \quad (1)$$

a najmanja u trenutku kada se telo nalazi u tački B i iznosi

$$F_B = mg - F_{cB} \quad (2)$$

Uslov rotacije tela po kružnici je  $F_{cB} > mg$ , odnosno  $mv_B^2/R > mg$  (3), odakle je  $v_B^2 = Rg$  (u graničnom slučaju).

62



Prema relacijama (2) i (3) je  $F_B = 0$ . Na osnovu zakona održanja energije je

$$\frac{mv_B^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + mgh$$

odnosno

$$v_A^2 = v_B^2 + 2gh \text{ ili } v_A^2 = 5Rg$$

pa je prema relaciji (1)

$$F_A = mg + \frac{mv_A^2}{R} = 6mg$$

264. a) Kada stoji na hrapavom zemljištu, čovek saopšti kamenu kinetičku energiju  $E_k = mv_1^2/2$ , a kada je na ledu, saopštiće kine-

tičku energiju i sebi, pa je u tom slučaju

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_1 v_1'^2}{2} \quad (1)$$

gde je  $v_1$  — brzina čoveka,  $v_2$  — brzina bačenog kamena (sa leđa).

Prema zakonu održanja impulsa je  $m_2 v_2' = m_1 v_1$  (2), odakle je brzina kamena

$$v_2' = v_2 \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}} = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

a čoveka

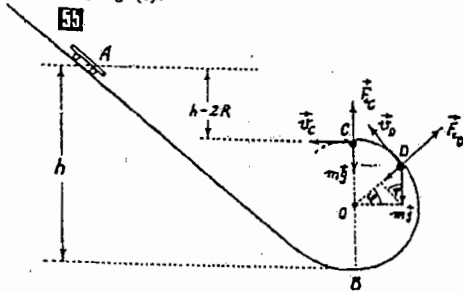
$$v_1 = v_2 \sqrt{\frac{2m_2^2}{m_1(m_1 + m_2)}} = 0,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Brzina bačenog kamena u odnosu na čoveka (kada se on nalazi na leđu) iznosi

$$v = v_2' + v_1 = 10,05 \text{ m/s}$$

c) Razvijena snaga pri bacanju kamena je  $P = Fv$ . Sila  $F$  je u oba slučaja jednaka, dok je  $v > v_1$ , što znači da čovek u drugom slučaju razvija veću snagu.

265. a) Da bi vagonet prešao celu putanju ABC po šinama, treba da bude ispunjen uslov  $\vec{F}_{cc} > mg$  (3), gde je  $F_{cc} = mv_c^2/R$  — intenzitet centrifugalne sile koja deluje na vagonet kada se on nalazi u položaju C. U graničnom slučaju je  $mv_c^2/R = mg$ , tj.  $v_c = \sqrt{Rg}$  (1).



Kako vagonet polazi iz mirovanja, to je na osnovu zakona održanja energije

$$mg(h - 2R) = \frac{mv_c^2}{2}$$

odakle je

$$v_c = \sqrt{2g(h - 2R)} \quad (2)$$

Iz relacija (1) i (2) dobija se da je najmanja visina  $h$  sa koje je potrebno pustiti vagonet  $h > 5R/2$  (3).

b) Sila pritiska vagoneta na podlogu u proizvoljnoj tački D putanje BC je

$$F_D = F_{cD} - N = \frac{mv_D^2}{R} - mg \sin \varphi \quad (4)$$

Visinska razlika tačaka A i D je

$$h_{AD} = h - R(1 + \sin \varphi)$$

pa je prema zakonu održanja energije za tačke A i D

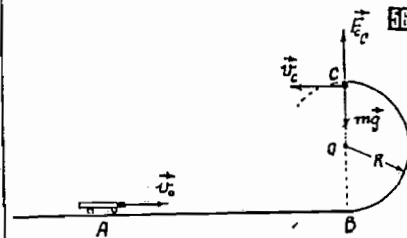
$$mg[h - R(1 + \sin \varphi)] = \frac{mv_D^2}{2}$$

odakle je  $v_D = \sqrt{2g[h - R(1 + \sin \varphi)]}$ , pa je prema relaciji (4)

$$F_D = \frac{2mg}{R} [h - R(1 + \sin \varphi)] - mg \sin \varphi$$

Uvodeći uslov (3) dobija se da je tražena zavisnost

$$F_D(\varphi) > 3mg(1 - \sin \varphi)$$



266. Da bi vagonet prešao celu putanju ABC po šinama, treba da je  $\vec{F}_{cc} > mg$ , odnosno  $\vec{F}_{cc} = mg$  (3), gde je  $F_{cc} = mv_c^2/R$  — intenzitet centrifugalne sile koja deluje na vagonet kada se on nalazi u položaju C. Iz ovog uslova je

$$v_{c \min} = \sqrt{Rg}$$

Prema zakonu održanja energije je

$$(E_{kA})_{\min} = (1 + 0,02) \left( \frac{mv_c^2}{2} + 2mgR \right)$$

odnosno

$$(E_{kA})_{\min} = \frac{5,1}{2} mgR$$

267.  $h = R/5$ , odnosno  $\varphi = \arccos(1 - h/R)$ .

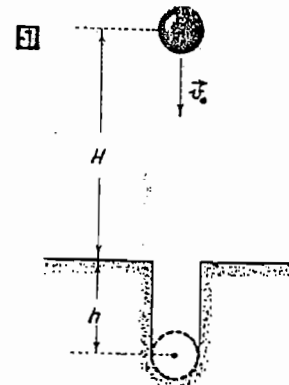
268. Ukupna energija tela pri padu na tle je  $E = mv_0^2/2 + mgH$  (1), dok je rad protiv otporne sile sredine  $A = \langle F_0 \rangle h$ , gde je  $\langle F_0 \rangle$  — intenzitet srednje otporne sile.

Prema zakonu održanja energije je

$$\frac{mv_0^2}{2} + mg(H + h) = \langle F_0 \rangle h$$

odakle se dobija da je

$$\langle F_0 \rangle = \frac{mv_0^2}{2h} + \frac{mg(H + h)}{h} = 86,3 \text{ kN}$$



269. Na osnovu zakona održanja energije je

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{(m + M)v^2}{2} + \Delta E$$

gde je  $v_0$  — brzina tela na kraju strme podloge,  $v$  — brzina daske i tela kada se kreću kao celina i  $\Delta E$  — energija utrošena na savlađivanje sile trenja. Na osnovu zakona održanja impulsa je

$$mv_0 = (m + M)v$$

pa kako je  $v_0 = \sqrt{2gh}$ , dobija se da je

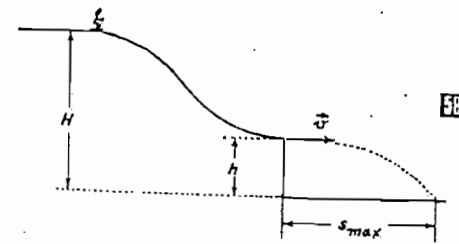
$$\Delta E = \frac{mM}{m + M} gh$$

270. Prema zakonu održanja energije je (3)

$$mgH = mgh + \frac{mv^2}{2}$$

pa je

$$v = \sqrt{2g(H - h)}$$



Kako je vreme padanja skakača na zemlju  $t_p = \sqrt{2h/g}$ , to je dužina skoka

$$s(h) = 2\sqrt{Hh - h^2}$$

Skok će da bude maksimalne dužine za  $ds(h)/dh = 0$ , tj.

$$\frac{ds(h)}{dh} = \frac{H - 2h}{\sqrt{Hh - h^2}} = 0$$

ili  $h = H/2$ .

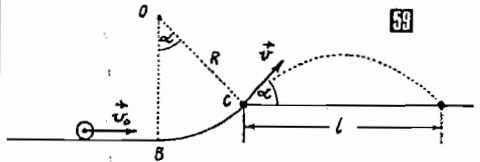
Maksimalna dužina skoka je  $s_{\max} = H$ .

271. Prema zakonu održanja energije za položaj C (3) kuglice je

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + (R - R \cos \alpha)mg$$

pa se dobija da je

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2Rg(1 - \cos \alpha)}$$



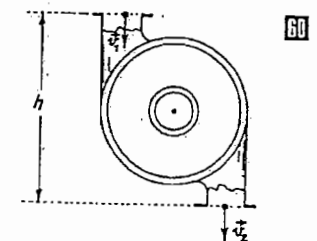
Dalje kretanje kuglice može da se razmatra kao kos hitac pod uglom  $\alpha$  prema horizontu, pa je

$$l = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{[v_0^2 - 2Rg(1 - \cos \alpha)] \sin 2\alpha}{g} = 9 \text{ m}$$

272. Uočimo česticu vode mase  $dm$  na ulazu u hidroturbinu. Ona poseduje energiju u odnosu na nivo izlaznog otvora (3)

$$\frac{dm \cdot v_1^2}{2} + dm \cdot gh$$

Ova energija se delimično pretvori u mehanički rad  $dA$  na putu kroz turbinu, a ostatak je kinetička energija  $dm \cdot v_2^2/2$ .



Prema zakonu održanja energije je

$$\frac{dm \cdot v_1^2}{2} + dm \cdot gh = dA + \frac{dm \cdot v_2^2}{2}$$

odakle je

$$dA = dm \left( \frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} + gh \right)$$

odnosno

$$P = \frac{dA}{dt} = \left( \frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} + gh \right) \frac{dm}{dt}$$

Kako je  $dm/dt = Q'$  — protok vode, to je snaga turbine

$$P = Q' \left( \frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} + gh \right) = 6,7 \text{ kW}$$

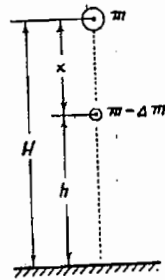
a njena korisna snaga

$$P_k = \eta P = 5,7 \text{ kW}$$

273. Kinetička energija kapljice je

$$E_k = \frac{(m - \Delta m)v^2}{2} = \frac{(m - \Delta m)g^2 t^2}{2}$$

61



Ona će da bude maksimalna kada je

$$\frac{dE_k}{dt} = mg^2 t - \frac{3}{2} k g^2 t^2 = 0$$

odnosno posle vremena

$$t_m = \frac{2m}{3k}$$

Ako je  $h$  visina na kojoj kapljica ima najveću energiju, onda je 61

$$h = H - x = H - \frac{1}{2} g t_m^2 = 280 \text{ m}$$

Preporučujemo da odredite relativnu promenu mase kapljice za vreme  $t_m$ , kao i  $E_{k \max}$ .

$$274. \Delta F = \frac{m}{2s} (v_2^2 - v_1^2) = \frac{3mv_1^2}{2s} = 924 \text{ N.}$$

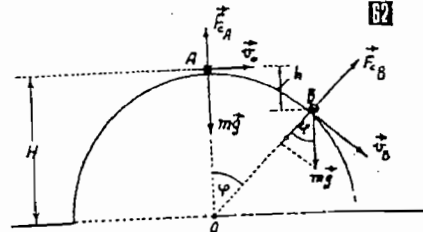
275. a) Da bi se rešio prvi deo zadatka, potrebno je smatrati da se telo već kretalo po kupoli i da u tački A 62 ima brzinu  $v_0$ . Telo će da napusti površinu kupole ako je  $F_{cA} > mg$ , gde je  $F_{cA} = mv_0^2/R$  — centrifugalna sila u tački A. U graničnom slučaju je  $v_{0 \min} = \sqrt{gR}$ .

b) Kako je po postavci zadatka  $v_0 = v_{0 \min}/2$ , telo će se kretati po kupoli do tačke B, gde je  $F_{cB} = N$ , tj.

$$\frac{mv_B^2}{R} = mg \cos \varphi$$

odakle je

$$v_B = \sqrt{gR \cos \varphi}$$



Prema zakonu održanja energije je

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv_B^2}{2}$$

pa se zamenom dobija da je

$$h = H(4 \cos \varphi - 1)/8 \quad \text{i} \quad \varphi = 41^\circ 24'$$

276. a) U trenutku odvajanja od polusfere (položaj tela B 63) je

$$F_c = mg \cos \alpha$$

tj.

$$\frac{mv_B^2}{R} = mg \cos \alpha \quad (1)$$

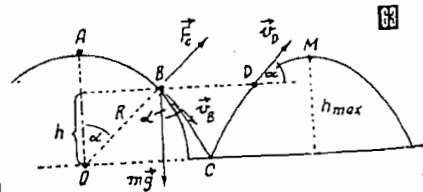
dok je prema zakonu održanja energije

$$mgR = \frac{mv_B^2}{2} + mgh =$$

$$\frac{mv_B^2}{2} + mgR \cos \alpha \quad (2)$$

Na osnovu relacija (1) i (2) dobija se da

$$\text{je } \cos \alpha = \frac{2}{3}; \quad v_B^2 = \frac{2}{3} gR \quad \text{i} \quad h = \frac{2}{3} R.$$

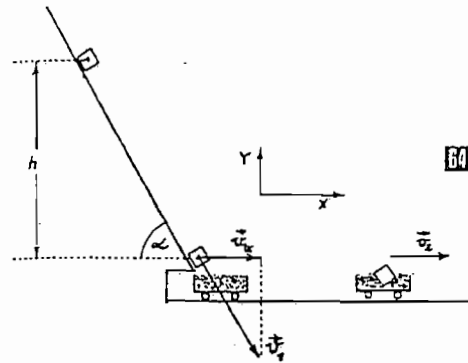


b) Posle elastičnog sudara sa podlogom (u tački C) telo će se popeti na visinu  $h$  i na toj visini imaće brzinu po intenzitetu jednaku onoj koju je imalo pri odvajanju od polus-

fere (dakle,  $v_B = v_D$ ). Dalje se problem rešava kao kos hitac, pa je

$$h_{\max} = h + \frac{v_B^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{23}{27} R$$

Preporučujemo da odredite brzinu tela u najvišoj tački putanje.



277. Prema zakonu održanja energije, brzina tela na kraju sirmne ravni je  $v = \sqrt{2gh}$ . Isto tako je na osnovu zakona održanja impulsa 64

$$m_1 v_{1x} = (m_1 + m_2) v_2$$

gde je  $v_{1x} = \sqrt{2gh} \cos \alpha$ , pa je

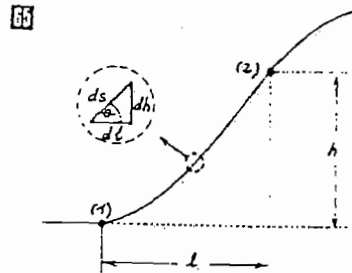
$$v_2 = \sqrt{2gh} \frac{m_1 \cos \alpha}{m_1 + m_2} = l \frac{m}{s}$$

278. Rad na putu  $ds$  65 jednak je radu utrošenom na savladavanje sile trenja  $dA_{tr}$  i savladavanje sile teže  $dA_g$ , tj.

$$dA = dA_g + dA_{tr}$$

$$dA_g = mg ds$$

$$dA_{tr} = F_{tr} ds = \mu mg \cos \theta ds$$



Kako je  $ds = dh/\cos \theta$ , dobija se da je

$$dA_{tr} = \mu mg di$$

pa je ukupni rad na putu (1) (2)

$$A = \int_0^l \mu mg di + \int_0^h mg dh = mg(\mu l + h)$$

279. a) Pošto je

$$v = \frac{ds}{dt} = k \sqrt{s} \quad (1)$$

ubrzanje je

$$a = \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{ds} = \frac{k^2}{2}$$

b) Prema II Njutnovom zakonu je

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = \Sigma F$$

pa je rad svih sila koje deluju na tramvaj

$$A = m \frac{d^2 s}{dt^2} \cdot s(t)$$

gde je na osnovu relacije (1)

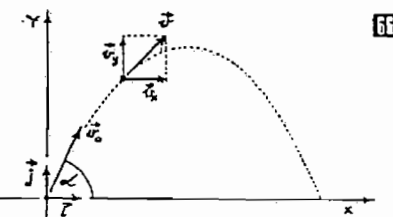
$$\int_0^{s(t)} \frac{ds}{\sqrt{s}} = \int_0^t k dt$$

tj.  $s(t) = k^2 t^2 / 4$ , pa je

$$A = \frac{1}{8} m k^4 t^3$$

Imajući u vidu da je  $[k] = m^{1/2}/s$ , dokazati da je

$$\left[ \frac{1}{8} m k^4 t^3 \right] = J$$



280. Vektor brzine tela određen je relacijom 66

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$

gde su

$$v_x = v_0 \cos \alpha$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt$$

a vektor sile

$$\vec{F} = -mg \vec{j}$$

pa je po definiciji snage

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = -mg\vec{j} \cdot (v_x\vec{i} + v_y\vec{j}) = -mgv_y$$

281. Promena vektora položaja materijalne tačke je

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (D-A)\vec{i} + (F-B)\vec{j} + (G-C)\vec{k}$$

pa je rad koji je izvršila sila  $\vec{F}$

$$A = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = n(D-A) = 25 \text{ J}$$

jer je  $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$ ;  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ ;  $\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$ .

282. Kako je

$$\vec{F} = ma_x\vec{i} + ma_y\vec{j} = At\vec{i} + Bt^2\vec{j}$$

to je

$$a_x = \frac{At}{m} \quad a_y = \frac{Bt^2}{m}$$

pa su odgovarajuće komponente brzine

$$v_x = \int_0^t a_x dt = \frac{At^2}{2m}$$

$$v_y = \int_0^t a_y dt = \frac{Bt^3}{3m}$$

i snaga

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = ma_x v_x + ma_y v_y = \frac{1}{m} \left( \frac{A^2 t^4}{2} + \frac{B^2 t^5}{3} \right)$$

283. Pre sudara, prvo telo raspolagalo je kinetičkom energijom  $E_1 = m_1 v_1^2 / 2$ . Kako se posle sudara tela kreću zajedno istom brzinom  $v$ , njihova kinetička energija je  $E_2 = (m_1 + m_2) v^2 / 2$ , gde je prema zakonu održanja impulsa  $v = m_1 v_1 / (m_1 + m_2)$ . Kako je  $m_2 = 2m_1$ , dobija se da je

$$E_2 = \frac{m_1 v_1^2}{6}$$

a povećanje unutrašnje energije sistema

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{m_1 v_1^2}{3} = 133 \text{ J}$$

284. Posle elastičnog čeonog sudara prve loptice, mase  $m_1$ , i druge loptice, mase  $m_2$ , druga loptica će imati brzinu  $v_2 = v_1 \frac{2m_1}{m_1 + m_2}$ . Posle sudara druge i treće loptice, mase  $m_2$ ,

treća loptica će imati brzinu

$$v_3 = v_1 \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \frac{2m_1}{m_2 + m_3}$$

Najveća vrednost ove brzine je

$$\text{za } \frac{dv_3}{dm_2} = 0, \text{ tj. kada je } m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$$

285. Pri padu sa visine  $H$  čekić ima brzinu  $v_1 = \sqrt{2gH}$  i impuls  $m_1 v_1 = m_1 \sqrt{2gH}$ . Impuls nakovnja sa čekićem posle njihovog sudara je  $(m_1 + m_2) v_2$ . Prema zakonu održanja impulsa je

$$m_1 \sqrt{2gH} = (m_1 + m_2) v_2$$

odakle je početna brzina nakovnja

$$v_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2gH} = 1,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Napomena. Bilo bi pogrešno rešavati ovaj zadatak primenom zakona održanja energije, jer se nepoznat deo energije sistema pretvori pri sudaru u unutrašnju energiju.

286. Prema zakonu održanja impulsa je

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad (1)$$

gde su  $v_1$  i  $v_2$  — brzine prve i druge loptice posle sudara. Prema zakonu održanja energije je

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} \quad (2)$$

pa pošto je  $m_1 = m_2 = m$ , kombinacijom relacija (1) i (2) dobija se da je

$$v_2' = 10 \text{ m/s} \quad \text{i} \quad v_1' = -20 \text{ m/s}$$

287. a) Na osnovu zakona održanja energije i impulsa sistema tela je

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) v_2^2}{2} + E_{def}$$

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2$$

odakle se dobija da je

$$E_{def} = \frac{m_1 v_1^2}{2} \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 14,2 \text{ kJ}$$

b) Energija čekića pre sudara je  $E_a = \frac{m_1 v_1^2}{2}$ , pa je stepen korisnog dejstva

$$\eta = \frac{E_{def}}{E_a} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 0,95$$

288. a) Pri plastičnom sudaru će se tela slepiti i deformisati. Prema zakonu održanja impulsa je  $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$ , odakle je zajednička brzina tela posle sudara

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 1,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Pri elastičnom sudaru, brzine tela posle sudara  $v_1'$  i  $v_2'$  nisu jednake. Primenom zakona održanja energije i impulsa dobija se da je

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} = -0,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 2,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$289. \text{ Za } v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 0 \text{ je } m_1/m_2 = 1/3$$

290. Deljenjem ovih jednačina dobija se  $v_2' = (v_2/v_1)k^2$ . Kako je

$$t = t_1 + 2t_2 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h_2}{g}}$$

to se iz prethodnih relacija dobija da je

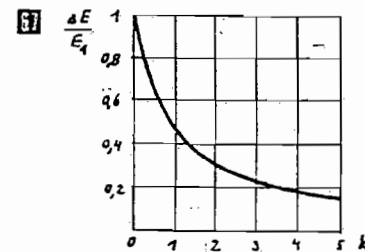
$$k = \frac{1}{2} \left( \frac{t}{\sqrt{\frac{2h_1}{g}}} - 1 \right) = 0,61$$

291. U zadatku 287. je pokazano da se deo energije

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{m_1 v_1^2}{2} \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

pretvori u unutrašnju energiju pri plastičnom sudaru tela, pa je relativni iznos pretvorene energije u unutrašnju energiju

$$\frac{\Delta E}{E_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{1+k} \quad \text{B}$$



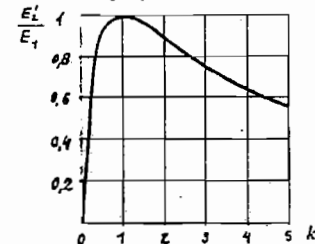
292. Pre sudara prvo telo je posedovalo energiju  $E_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}$ , a drugo  $E_2 = 0$ . Brzina

drugog tela posle sudara je  $v_2' = \frac{2m_1 v_1}{m_1 - m_2}$ , a njegova kinetička energija

$$E_2' = \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

pa je odnos ovih energija  $\frac{E_2'}{E_1} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{4k}{(1+k)^2}$

Za  $k=1$  je  $E_2'/E_1 = 1$ .



293. Odnos energija loptice posle i pre sudara je:

$$\frac{E'}{E} = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2$$

Za  $m_2 = 15m_1$  taj odnos je  $E'/E = (-14/16)^2$ . Kako je posle  $n$  sudara  $E' = E/100$ , to je

$$\frac{1}{100} = \frac{1}{n} \left( -\frac{14}{16} \right)^2$$

odakle je  $n = 76,6 \approx 77$ .

$$294. \Delta t = \sqrt{8h/g} = 1,27 \text{ s}$$

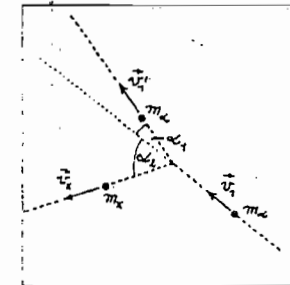
295. a)  $k = \frac{m_a}{m_p} \approx 1$ , pa je  $\frac{E_1'}{E_1} \approx 1$ , što znači

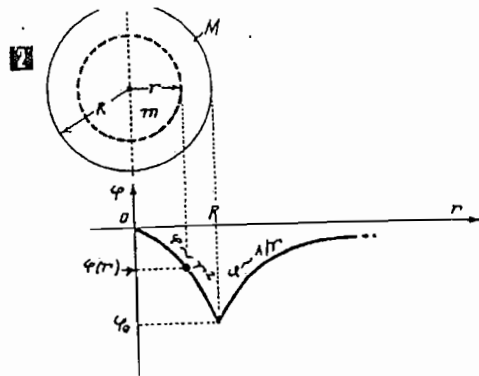
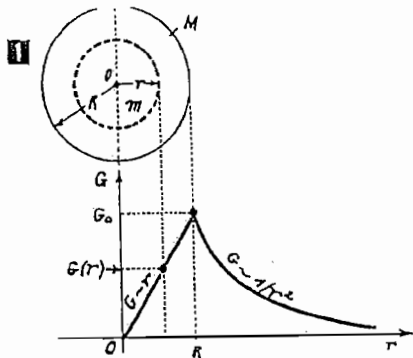
da neutron izgubi skoro svu energiju, pa je proton najpovoljnija čestica za usporevanje neutrona.

$$b) k = \frac{m_a}{m_x} \approx \frac{m_a}{4m_n} = \frac{1}{4}, \text{ pa je } \frac{E_2'}{E_1} = 0,64.$$

296. Primenjujući zakone održanja impulsa i energije može se doći do relacije  $k = \frac{m_x}{m_1} = \frac{\sin(\alpha_1 + 2\alpha_2)}{\sin \alpha_1} = 4$ , pa je nepoznata čestica

atom vodika, pošto je njegova masa 4 puta manja od mase  $\alpha$ -čestice.





5. GRAVITACIONO POLJE

- 297.  $F_g = 1,4 \cdot 10^{-21}$  N;
- 298. a)  $F_g = mg = 19,6$  N;  
b)  $E_p = m\varphi = -134$  MJ.
- 299.  $G = \gamma \frac{m}{r^2} = 0,667$  pN/kg.
- 300.  $\varphi = -\gamma \frac{m}{r} = -10$  pJ/kg.

301. Za  $r < R$  je

$$G(r) = \gamma \frac{m}{r^2} = \frac{4}{3} \pi \rho \gamma r \sim r$$

a za  $r > R$  je

$$G(r) = \frac{4}{3} \pi \rho \gamma R^3 \frac{1}{r^2} \sim \frac{1}{r^2}$$

pri čemu je

$$G(R) = G_0 = \frac{4}{3} \pi \rho \gamma R^2$$

302. Za  $r < R$  je

$$\varphi(r) = -\gamma \frac{m}{r} = -\frac{4}{3} \pi \rho \gamma r^2 \sim r^2$$

dok je za  $r > R$

$$\varphi(r) = -\gamma \frac{M}{r} = -\frac{4}{3} \pi \rho \gamma R^3 \frac{1}{r} \sim \frac{1}{r}$$

pri čemu je

$$\varphi(R) = \varphi_0 = -\frac{4}{3} \pi \rho \gamma R^2$$

303. a)  $G_1 = \gamma \frac{M}{R^2} = \frac{4}{3} \pi \rho \gamma R$

$$G_2 = \gamma \frac{M}{(R+h)^2} = \frac{G_1}{(1+h/R)^2}$$

pa je

$$\frac{G_2}{G_1} = 1 - \frac{2h}{R} = 0,9884$$

b)  $\varphi_1 = -\gamma \frac{M}{R} = -\frac{4}{3} \pi \rho \gamma R^2$

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1}{1+h/R}$$

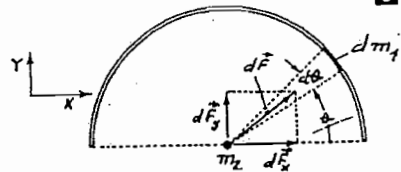
pa je

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = 1 - \frac{h}{R} = 0,9942$$

304. Gravitaciona sila između elementarne mase  $dm_1$  i kuglice mase  $m_2$  je

$$dF = \gamma \frac{m_2 dm_1}{r^2}$$

gde je  $dm_1 = m_1 \frac{d\theta}{\pi}$ .



Kako se x-komponente sile uzajamno poništavaju, dobija se da je

$$dF = \frac{2\gamma}{\pi} \frac{m_1 m_2}{r^2} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta$$

pa je ukupna sila uzajamnog dejstva

$$F = \frac{2\gamma}{\pi} \frac{m_1 m_2}{r^2} = 10,2 \text{ pN}$$

305. Intenzitet gravitacionih sila kojima uzajamno deluju štapa i kuglica može da se izrazi relacijom

$$F = m_1 G$$

gde je G — jačina gravitacionog polja štapa na mestu gde se nalazi kuglica mase  $m_1$ . Gravitaciono polje elementarnog delića štapa, ma-

se  $dm$ , u tački na rastojanju a od kraja štapa je

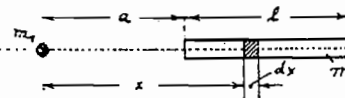
$$dG = \gamma \frac{dm}{x^2}$$

Kako je

$$dm = \frac{m}{l} dx$$

to je

$$dG = \frac{\gamma m dm}{l x^2}$$



Ukupno gravitaciono polje štapa u posmatranoj tački je

$$G = \frac{\gamma m}{l} \int_a^{a+l} \frac{dx}{x^2} = \frac{\gamma m a - (l+a)}{l a(a+l)} = \frac{\gamma m}{a(a+l)}$$

pa je sila uzajamnog dejstva štapa i kuglice

$$F = m_1 G = \gamma \frac{m m_1}{a(a+l)} = 242,5 \text{ pN}$$

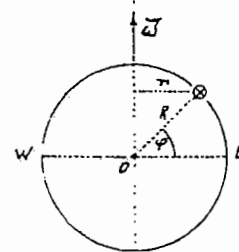
306.  $E = A = \gamma m M \left( \frac{1}{R_Z} - \frac{1}{2R_Z} \right) = \frac{2}{3} \pi \rho \gamma m R_Z^2 = 62,5$  GJ

307.  $A = m \Delta \varphi = m (\varphi_1 - 0) = \gamma \frac{m M}{R_Z} = \frac{4}{3} \pi \rho \gamma m R_Z^2 = 125$  GJ

308. Prema slici je  $v = \omega r$ , a kako je  $r = R \cos \varphi$ , to je

$$v(\varphi) = \omega R \cos \varphi = v_0 \cos \varphi$$

gde je  $v_0$  — linijska brzina tačaka na ekvatoru.



Za  $\varphi = 45^\circ$  je

$$v = \sqrt{2} \pi \frac{R}{T} = 327,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

309. a)  $v = \sqrt{\frac{\gamma m_S}{d}} = 29,8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ ;

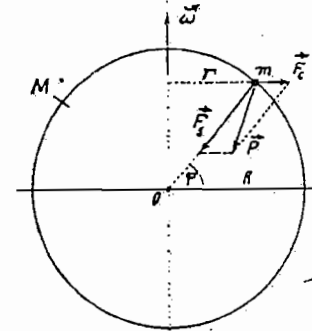
b)  $g_S = \gamma \frac{m_S}{d^2} = 6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

310. a)  $F_r = \gamma \frac{mM}{(R-h)^2} = 9,802$  N;

b)  $P_g = F_g = 9,802$  N.

$$P_c = F_g - F_c = F_g - m(R+h) \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 = 9,768 \text{ N}$$

311. Za posmatrača na površini Zemlje, dakle u odnosu na neinercijalni sistem referencije koji je vezan za Zemlju, na telo koje se nalazi na površini Zemlje deluje gravita-



ciona sila  $\vec{F}_g$  i centrifugalna sila  $\vec{F}_c$ . Rezultanta ovih sila jeste sila teže  $\vec{P}$ . Dakle,

$$\vec{P} = \vec{F}_g + \vec{F}_c$$

Ako je  $m$  — masa posmatranog tela, a  $M$  — masa Zemlje, onda je intenzitet gravitacione sile  $F_g = \gamma m M / R^2$ , a centrifugalne sile  $F_c = m \omega^2 r = m \omega^2 R \cos \varphi$ , gde je  $\omega = 2\pi/T$  — ugaona brzina rotacije Zemlje oko sopstvene ose. Na osnovu kosinusne teoreme je

$$P(\varphi) = \sqrt{F_g^2 + F_c^2 - 2F_g F_c \cos \varphi} = \sqrt{\gamma^2 \frac{m^2 M^2}{R^4} + m^2 \omega^4 R^2 \cos^2 \varphi - 2\gamma \frac{m^2 M}{R} \omega^2 \cos^2 \varphi}$$

Oдавде se može zaključiti da je  $F_c \ll F_g$ , tj. da je razlika između  $F_g$  i  $P$  mala. Naime, imajući u vidu veličine  $\omega, R, \gamma$  i  $M$ , nalazi se da je

$$\frac{F_c}{F_g} = \frac{\omega^2 R^3}{\gamma M} \cos \varphi = \frac{1}{289} \cos \varphi$$

odnosno

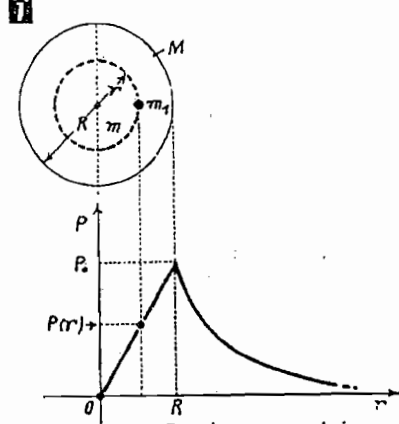
$$P(\varphi) \approx F_g \sqrt{1 - 0,0069 \cos^2 \varphi}$$

što znači da je  $P(0^\circ) \approx 0,9965 F_g$  i  $P(90^\circ) = F_g$ .

312. Pošto je usvojeno da je  $P \approx F_g = m_i G$ , gde je  $G$  — jačina gravitacionog polja na posmatranom rastojanju  $r$  od središta Zemlje, i kako je za  $r < R$  jačina gravitacionog polja  $G = \gamma m_i / r^2$ , to je

$$P(r) = m_i \gamma \frac{m}{r^2} = \frac{4}{3} \pi r \gamma m_1 r \sim r$$

gde je  $m_1$  — masa tela.



Naime, za  $r < R$  uzima se u obzir samo gravitaciono polje dela Zemlje poluprečnika  $r$ , a ne uzima se gravitaciono polje dela Zemlje između sfera poluprečnika  $r$  i  $R$ , jer se uticaj ovog polja na telo, koje se nalazi u sferi poluprečnika  $r$ , međusobno kompenzuje.

Za  $r > R$  je  $G = \gamma M / r^2$ , pa je

$$P(r) = m_i \gamma \frac{M}{r^2} = \frac{4}{3} \pi r \gamma R^3 m_1 \frac{1}{r^2} = \frac{4}{3} \pi \gamma m_1 R^3 \frac{1}{r}$$

pri čemu je

$$P(R) = P_0 = \frac{4}{3} \pi \gamma m_1 R$$

313. Intenzitet sile uzajamnog dejstva dva tačkasta tela je

$$F(r) = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

pa je gravitaciona energija ova dva tela

$$E_p = \int_{+\infty}^{r_0} F(r) dr = \gamma m_1 m_2 \int_{+\infty}^{r_0} \frac{dr}{r^2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_0}$$

314. Sila uzajamnog dejstva štapa i tačkastog tela koji se nalaze na istoj pravoj i na nekom rastojanju  $r$ , prema zadatku 305. je

$$F(r) = \gamma \frac{mM}{r(r+l)}$$

pa je energija uzajamnog dejstva ova dva

tela, tj. njihova gravitaciona energija

$$E_p = \int_{+\infty}^{r_0} \frac{mM}{r(r+l)} dr = \frac{mM}{l} \left[ \int_{+\infty}^{r_0} \frac{dr}{r} - \int_{+\infty}^{r_0} \frac{dr}{r+l} \right] = \\ = \gamma \frac{mM}{l} [\ln |r| - \ln |r+l|]_{+\infty}^{r_0}$$

Kako je

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \ln \frac{r}{r+l} = 1$$

to je

$$E_p = -\gamma \frac{mM}{l} \ln \left( 1 + \frac{l}{r_0} \right)$$

315. Iz uslova  $\gamma \frac{m_z m_s}{d^2} = m_z \omega^2 d$ , gde je  $\omega = 2\pi/T$ , nalazi se da je

$$m_s = \frac{4\pi^2 d^3}{\gamma T^2} \approx 2 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Dokazati da je

$$\left[ \frac{4\pi^2 d^3}{\gamma T^2} \right] = \text{kg}$$

316. Ukupna mehanička energija Zemlje je

$$E = E_p + E_k$$

gde je

$$E_p = -\gamma \frac{M_s M_z}{a}$$

i

$$E_k = \frac{M_z v^2}{2} = \gamma \frac{M_z M_s}{2a}$$

pa se dobija da je

$$E = -\gamma \frac{M_z M_s}{2a} = -2,63 \cdot 10^{31} \text{ J}$$

Znak (—) ukazuje da je priroda ukupne energije Zemlje potencijalna.

317. Potencijalna energija satelita na površini Zemlje je

$$E_{p1} = -\gamma \frac{mM_z}{R_z} = -mgR_z$$

a na putanji oko Zemlje

$$E_{p2} = -\gamma \frac{mM_z}{r} = -mg \frac{R_z^2}{r}$$

pa je priraštaj potencijalne energije, tj. potencijalna energija satelita na putanji

$$\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1} = mgR_z \left( 1 - \frac{R_z}{r} \right)$$

Kako se satelit kreće po kružnoj putanji, važi relacija

$$\frac{mv^2}{r} = \gamma \frac{mM_z}{r^2} = mg \frac{R_z^2}{r^2}$$

pa je

$$E_k = \frac{mgR_z^2}{2r}$$

a traženi odnos je

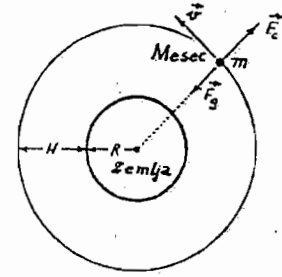
$$\frac{\Delta E_p}{E_k} = 2 \left( \frac{r}{R_z} - 1 \right)$$

318. a) Iz uslova dinamičke ravnoteže centrifugalne sile  $mv^2/(R-H)$  i gravitacione sile  $\gamma mM/(R-H)^2$ , tj. iz uslova

$$\frac{mM}{(R+H)^2} = \frac{mv^2}{R+H}$$

nalazi se da je tražena brzina

$$v = \sqrt{\gamma \frac{M}{R+H}}$$



b) Period kretanja je

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi(R+H)}{v} = 2\pi(R+H) \sqrt{\frac{R+H}{\gamma M}}$$

c) Za  $H=0$  (tačnije 200 km — kolika je visina Zemljine atmosfere) brzina  $v$  je jednaka prvoj kosmičkoj brzini  $v_1$ . Naime,

$$v_1 = \sqrt{\gamma \frac{M}{R}} = \sqrt{\gamma \frac{M}{R^2} \cdot R} = \sqrt{gR} \approx 7,9 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

pošto je  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  i  $R = (6370 + 200) \cdot 10^3 \text{ m}$ . Odgovarajući period kretanja iznosi

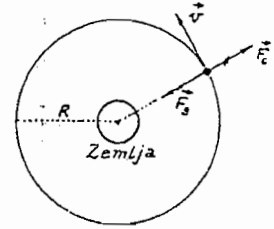
$$T_0 = 2\pi R \sqrt{\frac{1}{\gamma \frac{M}{R}}} = 2\pi R \sqrt{\frac{1}{gR}} =$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 0,5 \cdot 10^3 \text{ s} = 84 \text{ min } 23 \text{ s}$$

319. Pod pretpostavkom da Mesec obilazi oko Zemlje po kružnoj putanji i zanemarujući uticaj drugih nebeskih tela, može se napisati da je

$$\frac{M_M v^2}{R} = \gamma \frac{M_M M_Z}{R^2} \quad (1)$$

gde je  $M_M$  — masa Meseca, a  $M_Z$  — masa Zemlje.



Kako je brzina Meseca

$$v = \omega R = \frac{2\pi R}{T} \quad (2)$$

na osnovu relacija (1) i (2) dobija se da je period obilaska Meseca oko Zemlje

$$T = 2\pi R \sqrt{\frac{R}{\gamma M_Z}}$$

Kako je ubrzanje slobodnog padanja  $g_0 \approx \gamma M_Z / R^2$ , zamenom ovog izraza u prethodnu relaciju dobija se da je

$$T = \frac{2\pi R}{R Z} \sqrt{\frac{R}{g_0}} = 2,3 \cdot 10^7 \text{ s} \approx 27 \text{ dana}$$

$$320. H = R \left[ \sqrt{\frac{3 \gamma \rho T^2}{3\pi}} - 1 \right] = 0,043 R = 275 \text{ km}$$

Dokazati da je

$$\left[ \sqrt{\frac{3 \gamma \rho T^2}{3\pi}} \right] = 1$$

321. Iz uslova

$$\gamma \frac{mM}{(R+nR)^2} = m \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 (R+nR)$$

imajući u vidu da je  $M = 4\pi R^3 \rho / 3$ , gde je  $\rho$  — gustina supstancije od koje je obrazovana Zemlja, nalazi se da je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(1+n)^3}{\frac{4}{3} \pi \rho \gamma}} \quad (1)$$

Kako je  $g_0 = \gamma \frac{M}{R^2} = \frac{4}{3} \pi \rho \gamma R$

slobodnog padanja na površini Zemlje, to je prema relaciji (1)

$$T = 2\pi \sqrt{(1+n) \frac{R}{g}}$$

322. Za sistem Zemlja — Mesec i Saturn — Diona važi

$$M_M \omega_{MRZM} = \gamma \frac{M_M M_Z}{R_{ZM}^2}$$

$$M_D \omega_{DRSD} = \gamma \frac{M_D M_S}{R_{SD}^2}$$

odakle je

$$\frac{M_Z}{M_S} = \frac{T_D^2 R_{ZM}^3}{T_M^2 R_{SD}^3} = 0,01$$

što znači da je masa Saturna oko 100 puta veća

323. a) Kako se satelit kreće po kružnoj putanji, postoji dinamička ravnoteža centrifugalne i gravitacione sile, pa je

$$m r \omega^2 = \gamma \frac{m M_Z}{r^2}$$

ili

$$r = \sqrt[3]{\frac{\gamma M_Z}{\omega^2}}$$

Pošto je u pitanju stacionarni satelit, tj. satelit koji se kreće sinhrono sa Zemljom, važi relacija

$$\omega = \frac{2\pi}{T_Z}$$

gde je  $T_Z$  — period rotacije Zemlje oko svoje ose, pa se dobija da je

$$r = \sqrt[3]{\frac{\gamma M_Z T_Z^2}{4\pi^2}} = 4,2 \cdot 10^3 \text{ m}$$

$$b) v = \omega r = 2,1 \cdot 10^3 \text{ m/s};$$

$$a = a_n = v^2/r = 0,22 \text{ m/s}^2.$$

324. Pošto se planeta kreće po kružnoj putanji, važi relacija

$$\frac{mv^2}{R} = mR^2\omega = \gamma \frac{mM_S}{R^2} \quad (1)$$

tj.

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{\gamma M_S}$$

Kako je prema relaciji (1)  $R = \gamma M_S / v^2$ , dobija se da je

$$T = \frac{2\pi \gamma M_S}{v^3} \approx 225 \text{ dana}$$

Koja je to planeta?

Dokazati da je

$$\left[ \frac{2\pi \gamma M_S}{v^3} \right] = s$$

325. Prema zadatku 319. može se napisati da je

$$\frac{m_s v^2}{R} = \gamma \frac{m_s M_Z}{R^2} \quad (1)$$

gde je  $m_s$  — masa satelita i  $M_Z$  — masa Zemlje.

Brzina satelita na kružnoj putanji oko Zemlje može da se izrazi relacijom

$$v = \omega R = \left( \frac{2\pi}{T_s} + \frac{2\pi}{T_Z} \right) R \quad (2)$$

gde je  $T_s = 11,6 \text{ h} = 4,18 \cdot 10^4 \text{ s}$  — vreme obilaska satelita oko Zemlje i  $T_Z = 24 \text{ h} = 8,64 \cdot 10^4 \text{ s}$  — period rotacije Zemlje oko sopstvene ose.

Iz relacija (1) i (2) dobija se da je

$$4\pi^2 R \left( \frac{1}{T_s} + \frac{1}{T_Z} \right)^2 = \gamma \frac{M_Z}{R^2}$$

ili

$$M_Z = \frac{4\pi^2 R^3}{\gamma} \left( \frac{1}{T_s} + \frac{1}{T_Z} \right)^2 \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

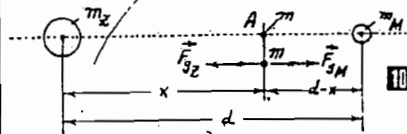
326. a) Na potegu Zemlja — Mesec nalazi se tačka A u kojoj rezultujuće gravitaciono polje Zemlje i Meseca ima jačinu

$$G_R = G_Z - G_M = 0$$

Ako je  $x$  rastojanje te tačke od Zemlje, onda je za kosmički brod, mase  $m$ , u toj tački

$$\gamma \frac{m M_Z}{x^2} = \gamma \frac{m M_M}{(d-x)^2}$$

odakle je  $x \approx d(1 - \sqrt{k})/(1+k)$ , gde je  $k = M_M/M_Z = 1,18 \cdot 10^{-2}$  — odnos masa Meseca i Zemlje, pa je  $x \approx d/1,14$ .



Ako je  $d$  — najmanje rastojanje između Zemlje i Meseca (kada je Mesec u perihelu), onda ono iznosi  $d = 363 \text{ 000 km}$  ili  $57R$ , gde je  $R$  — poluprečnik Zemlje, pa je

$$x = \frac{57}{1,11} R \approx 52R$$

Ako se telo iz položaja A pomeri neznatno prema Mesecu, biće privučeno njegovom gravitacionom silom, pa će pasti na njega. To znači da je za lansiranje kosmičkog broda prema Mesecu potrebno uložiti rad za njegovo

pomeranje sa površine Zemlje u položaj A, pri čemu je ovaj rad

$$A = \gamma m M_Z \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \gamma m M_Z \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{52R} \right) = \frac{51}{52} \gamma \frac{m M_Z}{R}$$

Kako je  $A = \frac{51 \gamma m M_Z}{52 R} = \frac{m v^2}{2}$ , to je potrebna brzina lansiranja kosmičkog broda sa Zemlje

$$v = \sqrt{\frac{102}{52} \gamma \frac{M_Z}{R}} = \sqrt{\frac{102}{52} g R} = 0,99 \sqrt{2gR} \approx 0,99 v_1 = 11,08 \text{ km/s}$$

Ova brzina se naziva najmanja brzina doleta do Meseca.

$$b) A = \frac{51}{52} m g R = 140 \text{ MWh.}$$

327. Prema zakonu održanja energije je

$$E_k + E_p = E_{p_1}$$

gde je  $E_k$  — kinetička energija tela prilikom izbacivanja,  $E_p$  — potencijalna energija tela na površini Zemlje,  $E_{p_1}$  — potencijalna energija tela na maksimalno dostignutoj visini, tj.

$$\frac{m v_0^2}{2} - \gamma \frac{m M_Z}{R_Z} = -\gamma \frac{m M_Z}{R_Z + h}$$

Kako je  $g = \gamma M_Z / R_Z^2$ , ova relacija može da se transformiše na oblik

$$\frac{m v_0^2}{2} - m g R_Z = -m g \frac{R_Z^2}{R_Z + h}$$

odakle je

$$h = \frac{R_Z}{\frac{2g R_Z}{v_0^2} - 1}$$

328. Ukupna energija rakete prilikom starta je

$$E_{uk} = E_k + E_p = \frac{m v_0^2}{2} - \gamma \frac{m M}{R_Z}$$

gde su  $v_0$  — početna brzina rakete,  $m$  — masa rakete,  $M$  — masa Zemlje i  $R_Z$  — poluprečnik Zemlje. U najvišoj tački putanje kinetička energija rakete jednaka je nuli, pa je tada

$$E_{uk} = E_p = -\gamma \frac{m M}{R_Z - r}$$

Na osnovu zakona održanja energije sledi

$$\frac{m v_0^2}{2} - \gamma \frac{m M}{R_Z} = -\gamma \frac{m M}{R_Z - h}$$

Kako je prva kosmička brzina  $v_1 = \sqrt{\gamma \frac{M}{R_Z}}$ , zamenom u prethodnu relaciju dobija se da je

$$\gamma \frac{m M}{2 R_Z} - \gamma \frac{m M}{R_Z} = -\gamma \frac{m M}{R_Z + h}$$

tj.

$$\frac{1}{2 R_Z} - \frac{1}{R_Z} = -\frac{1}{R_Z + h}$$

odakle je  $h = R_Z$ , što znači da je maksimalna visina na koju će dospeti raketa jednaka Zemljinom poluprečniku.

329. a) Telo pri padu na Zemlju ima energiju  $E = \gamma m M \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$ . Kako je  $r_1 = \infty$ , a  $r_2 = R$ , to je  $E = \gamma m M / R$ , gde je  $m$  — masa tela, a  $M$  — masa Zemlje. Ova relacija se može napisati u obliku

$$E = m g R$$

pošto je  $g = \gamma M / R^2$ . Tokom padanja tela ova energija se pretvori u kinetičku energiju, pa je  $m g R = m v^2 / 2$ , odakle je brzina tela pri padu

$$v_1 = \sqrt{2gR} \approx 11,2 \text{ km/s}$$

Dobijena brzina naziva se druga kosmička brzina.

b) Na isti način je

$$E = \gamma m M \left( \frac{1}{R+H} - \frac{1}{\infty} \right) = \gamma \frac{m M}{R+H} = m g' (R+H)$$

Kako je  $m v^2 / 2 = m g' (R+H)$ , to je brzina tela na visini  $H$

$$v' = \sqrt{2g' (R+H)}$$

a imajući u vidu da je

$$g' = g \left( \frac{R}{R+H} \right)^2$$

onda je

$$v' = \sqrt{2} v_1 \sqrt{\frac{R}{R+H}}$$

gde je  $v_1$  — prva kosmička brzina.

330. Kada se telo, mase  $m_1$ , nađe na rastojanju  $r$  od središta Zemlje, tada do Zemlje poluprečnika  $r$  i telo međusobno deluju privlačnim silama intenziteta

$$F = -\gamma \frac{m_1 m}{r^2} = -\frac{4}{3} \pi \gamma m_1 \rho r = -k r$$

gde je  $k = \frac{4}{3} \pi \gamma m_1 \rho$ , što znači da na telo deluje sila koja je srazmerna rastojanju od ravnotežnog položaja tela za koje je  $r=0$  (tada je  $F=0$ ). Ovo je uslov za njegovo

harmonijsko kretanje, od jednog kraja kanala do drugog. Jednačina ovog kretanja je

$$x(t) = x_0 \sin \omega t$$

gde je  $x_0 = R$  — poluprečnik Zemlje, a

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = \sqrt{\frac{4}{3} \pi \rho \gamma} \quad (1)$$

Kako je ubrzanje slobodnog padanja na Zemljinoj površini  $g \approx G = \gamma \frac{M}{R^2} = \frac{4}{3} \pi \rho \gamma R$ , gde je  $R$  — poluprečnik Zemlje, to je prema relaciji (1)

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

tj. period kretanja (vreme između dva uzastopna pojavljivanja tela na jednom kraju kanala) iznosi

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \approx 84 \text{ min}$$

## 6. STATIKA

331. Komponente rezultante sila su

$$\vec{F}_{Rx} = \sum \vec{F}_{xi} \quad \text{i} \quad \vec{F}_{Ry} = \sum \vec{F}_{yi}$$

a njihovi intenziteti

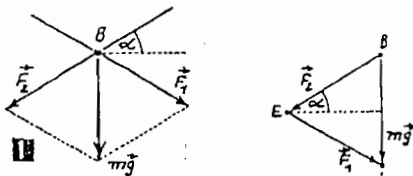
$$F_{Rx} = F_1 \cos \alpha - F_2 \cos \theta = 97,2 \text{ N}$$

$$F_{Ry} = F_1 \sin \theta - F_2 \sin \alpha - F_3 = -238,4 \text{ N}$$

pa je intenzitet rezultante

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = 257,5 \text{ N}$$

332. Intenzitet sila  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  je jednak, dok im je pravac i smer prikazan na vektor-



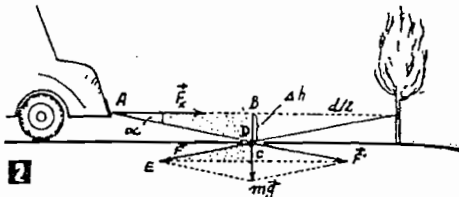
torskom dijagramu, sa koga se vidi da je trougao BLE jednakostranični i da je

$$F_1 = F_2 = \frac{mg}{2 \sin \alpha} = mg = 981 \text{ N}$$

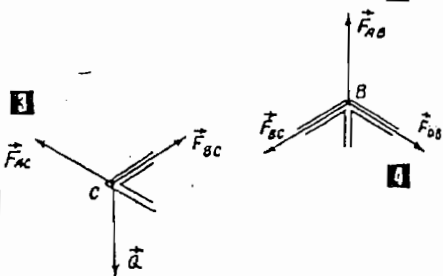
333. Kako je  $\Delta h = 0,25 \text{ m}$ , iz sličnosti trouglova ABD i ECD je

$$F = \frac{mg}{2\Delta h} \sqrt{\frac{d^2}{4} + \Delta h^2} \approx \frac{mgd}{4\Delta h} = 9,4 \text{ kN}$$

Ugao  $\alpha$  je mali, pa je vučna sila  $F_x \approx F$ .

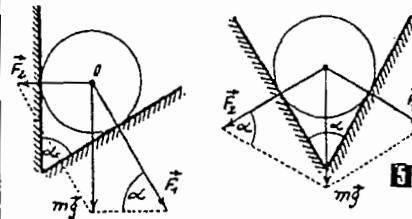


334. Imajući u vidu da otporne sile  $\vec{F}_{AC}$  i  $\vec{F}_{BC}$  štapova AB i BC u zglobu C i težina tereta  $Q = mg$  imaju pravac i smer kao na slici 3, dolazi se do zaključka da je  $F_{AC} = F_{BC} = mg$ , pri čemu je štap BC opterećen na sabijanje. To uslovljava da u zglobu B



otporne sile  $\vec{F}_{BC}$ ,  $\vec{F}_{AB}$ ,  $\vec{F}_{DB}$  štapova BC, AB, DB imaju jednake intenzitete, pa je  $F_{AB} = mg$ . Sa slike se vidi da je štap AB opterećen na istezanje.

335. Na slikama 4 su prikazane sile kojima telo deluje na oslonce u oba slučaja.



Ove sile su normalne na površine ploča pošto je sila trenja zanemarljiva. U slučaju (a) je

$$F_1 = \frac{mg}{\sin \alpha} = 906,2 \text{ N}$$

$$F_2 = mg \cot \alpha = 453,1 \text{ N}$$

a u slučaju (b)

$$F_1 = F_2 = \frac{mg}{2 \sin(\alpha/2)} = 785 \text{ N}$$

336. Kako telo miruje, iz uslova

$$mg \sin \alpha = \mu (F + mg \cos \alpha)$$

nalazi se da je

$$F > mg \left( \frac{\sin \alpha}{\mu} - \cos \alpha \right) = 2,5 \text{ kN}$$

337. Granični ugao je određen relacijom

$$\alpha_{\max} = \arcsin \frac{\mu k + \sqrt{\mu^4 k^2 + (1 + \mu^2)(1 - \mu^2 k^2)}}{1 + \mu^2}$$

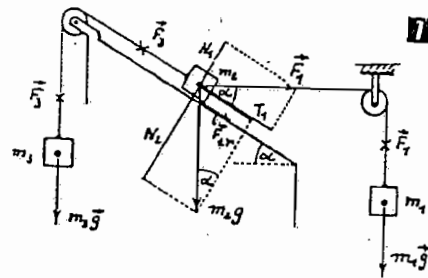
gde je  $k = \frac{m_1}{m_2} = 2$  i  $\mu = 0,5$ , pa je  $\alpha_{\max} = 53^\circ 8'$ .

338. Da bi sistem mirovao, treba da je

$$F_3 - F_{ir} + F_1 \cos \alpha + m_2 g \sin \alpha = 0$$

gde je  $F_{ir} = \mu (N_2 - N_1) = \mu (m_2 g \cos \alpha - F_1 \sin \alpha)$ , pa kako je  $F_1 = m_1 g$  i  $F_2 = m_2 g$ , dobija se da je

$$m_3 = m_1 (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) + m_2 (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$



Ako je masa  $m_3$  veća od ove granične vrednosti, telo mase  $m_2$  će se kretati uz strmu ravan.

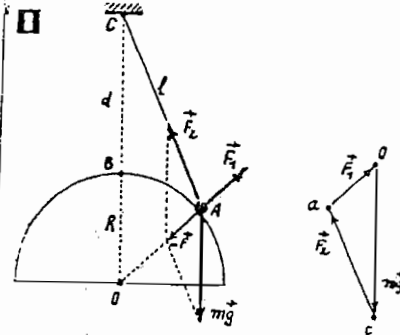
339.  $m_3 \approx 14,7 \text{ kg}$ ;  $\alpha = 56^\circ 15'$ .

340. Na slici 5 je  $\vec{F}_1$  reakcija sferne površine, a  $\vec{F}_2$  reakcija užeta. Zadatak se može rešiti primenom uslova ravnoteže tela i sličnosti trouglova AOC i aoc, na osnovu čega je  $ac/co = AC/CO$ , odnosno

$$\frac{F_1}{mg} = \frac{R}{R+d} \quad (1)$$

Takođe je  $ac/co = AO/CO$  ili

$$\frac{F_2}{mg} = \frac{l}{R+d} \quad (2)$$



Iz relacija (1) i (2) nalazi se da je

$$F_1 = mg \frac{R}{R+d} = 26,2 \text{ N}$$

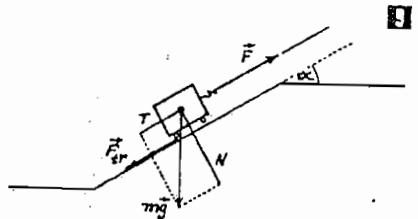
$$F_2 = mg \frac{l}{R+d} = 78,5 \text{ N}$$

341. Da bi se telo kretalo nagore po strmoj ravni, treba da je  $F > T + F_{ir}$  ili u graničnom slučaju

$$F = mg (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

odakle je najveća mehanička prednost ovakvog načina dizanja tereta

$$\mathcal{G}_l = \frac{mg}{F} = \frac{1}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} = 1,7$$



342. Mehanička prednost jednostepene koturade je  $\mathcal{G}_1 = 2$ , a strme ravni  $\mathcal{G}_2 = 1/(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$ , pa je rezultujuća mehanička prednost ovakvog načina dizanja tereta

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \cdot \mathcal{G}_2 = \frac{2}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} = 3,4$$

343. Pri vučenju tela uz strmu ravan potrebno je savladati silu  $F_1 = mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha$ , dok se pri vučenju tela niz strmu ravan potrebno savladati silu  $F_2 = \mu mg \cos \alpha - mg \sin \alpha$ .



Prema uslovu zadatka je

$$mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha = 2(\mu mg \cos \alpha - mg \sin \alpha)$$

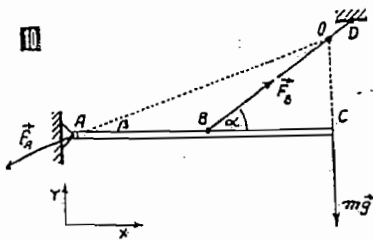
odakle je  $\mu = 3 \operatorname{tg} \alpha$ .

Stepen korisnog dejstva je odnos korisnog rada  $A_1 = mgh$  i ulozenog rada  $A_2 = (mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha) l$ , gde je  $h$  — visina strme ravni,  $l$  — njena dužina, pa je

$$\eta = \frac{A_1}{A_2} = \frac{h}{l \sin \alpha + \mu \cos \alpha}$$

Kako je  $\frac{h}{l} = \sin \alpha$ , a  $\mu = 3 \operatorname{tg} \alpha$ , to je  $\eta = 1/4$ .

344. a) Intenzitet sile zatezanja užeta  $\vec{F}_2$  jednak je intenzitetu otpora oslonca B, tj. intenzitetu sile  $\vec{F}_B$  10, pa je  $F_2 = F_B$ .



Pošto su sile  $\vec{F}_A$ ,  $\vec{F}_B$ ,  $m\vec{g}$  u ravnoteži, njihove napadne linije (prema teoremi o tri sile) seku se u jednoj tački (tačka O).

Na osnovu uslova ravnoteže sile  $\sum \vec{F} = 0$  dobija se da je

$$F_B \cos \alpha - F_A \cos \beta = 0$$

$$F_B \sin \alpha - F_A \sin \beta - mg = 0$$

odakle je

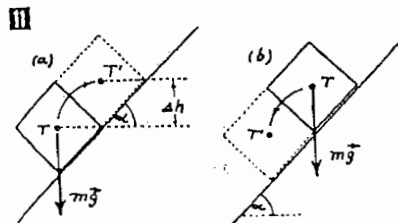
$$F_B = \frac{mg}{\sin \alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

Kako je  $\alpha = 2\beta$ , odnosno  $F_2 = F_B$ , to je

$$F_2 = 3,73 mg = 73,2 \text{ kN}$$

b)  $F_2 = 73,2 \text{ kN}$ .

345. Na slici 11 su prikazana dva položaja kocke i putanje težišta kocke pri njenom prevrtanju. U slučaju (a) na kocku treba delovati momentom sve dok težište kocke T ne dođe



u položaj T'. Pri ovome se težište pomeri nagore za

$$\Delta h_1 = d/2 = a\sqrt{2}/2$$

Uloženi rad pri ovome jednak je promeni potencijalne energije kocke, odnosno

$$A_1 = mg \Delta h_1 = mg \frac{a\sqrt{2}}{2} = 5,55 \text{ kJ}$$

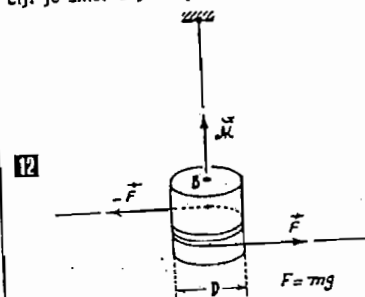
U slučaju (b) za prevrtanje kocke nadole nije potrebno uložiti nikakav rad, pošto se kocka nalazi u položaju labilne ravnoteže.

346. Intenzitet sile teže koja deluje na kvadar je

$$P = mg = \rho Vg = 6pd^3g$$

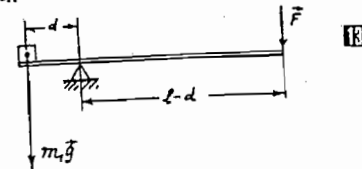
U zavisnosti od položaja kvadra, njegovo težište može da bude na visini  $d/2$ ,  $d$  i  $3d/2$  od osnove na kojoj leži. Potencijalna energija je analogno  $E_{p1} = mgH_1 = 3pgd^4$ ;  $E_{p2} = 6pgd^4$  i  $E_{p3} = 9pgd^4$ . U energijskom smislu, tela su najstabilnija u položaju u kome imaju najmanju energiju u odnosu na isti nivo, a to je u prvom slučaju.

347. Na cilindar, odnosno na žicu, deluje moment sprega, intenziteta  $\mathcal{M} = D \cdot mg = 1,57 \text{ m} \cdot \text{N}$ , čiji je smer dejstva prikazan na slici 12.



348. Inercijalna sila  $F = ma$  stvara moment intenziteta  $\mathcal{M} = R \cdot ma = 183,5 \text{ m} \cdot \text{N}$ , koji moraju da savladaju kočnice automobila. U suprotnom slučaju automobil bi se kretao po platformi.

349. Ako čovek nalegne telom na jedan kraj poluge, on može podići teret mase  $m_1$ , čija se veličina izračunava iz uslova ravnoteže  $\sum \mathcal{M}_A = 0$  za tačku A 13. Na osnovu toga se



dobija da je  $d \cdot m_1 g = (l - d) mg$ , odakle je masa tereta

$$m_1 = m \left( \frac{l}{d} - 1 \right) = 630 \text{ kg}$$

Mehanička prednost ove poluge je

$$\mathcal{G} = \frac{m_1}{m} = 7$$

Preporučujemo da izračunate uloženi rad za dizanje ovog tereta ako poluga opiše ugao  $\theta = 30^\circ$ .

$$350. F_1 = mg, \quad \mathcal{G}_1 = 1;$$

$$F_2 = mg/2, \quad \mathcal{G}_2 = 2;$$

$$F_3 = mg/16, \quad \mathcal{G}_3 = 16.$$

351. Greška merenja je posledica nejednakih krakova. Ako su njihove dužine  $l_1$  i  $l_2$  i ako je vaga u ravnoteži, onda je u prvom slučaju  $l_1 \cdot m_1 g = l_2 \cdot m_2 g$ , a u drugom slučaju  $l_1 \cdot m_1 g = l_2 \cdot m_2 g$ , gde su  $m_1$  i  $m_2$  — mase tegova u prvom i drugom slučaju, a  $m$  — masa merenog tela. Iz ovih jednačina dobija se da je  $m = \sqrt{m_1 m_2} = 3,2 \text{ kg}$ .

352. Na osnovu uslova ravnoteže momenta  $\mathcal{M}_1$  i  $\mathcal{M}_2$  sile  $\vec{F}_{21}$  i  $\vec{F}_{12}$  u odnosu na osu O je 14

$$RF_{21} - rF_{12} = 0$$

tj.

$$Rmg - r(m + M)g = 0$$

odakle se dobija da je

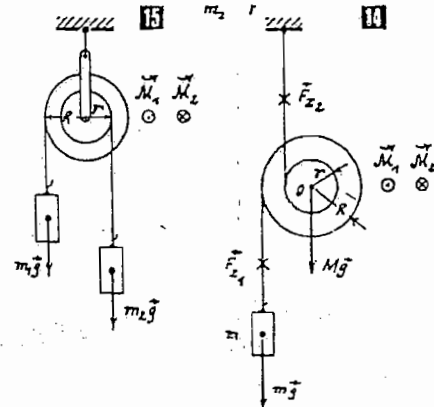
$$m = M \frac{r}{R - r}$$

353. Moment prvog tela je  $\mathcal{M}_1 = \vec{r} \times m_1 \vec{g}$ , a drugog  $\mathcal{M}_2 = \vec{R} \times m_2 \vec{g}$  15. Kako su  $r \perp m_1 \vec{g}$  i  $R \perp m_2 \vec{g}$ , to su intenziteti ovih momenata

$$\mathcal{M}_1 = rm_1 g, \quad \mathcal{M}_2 = Rm_2 g$$

Uslov ravnoteže je  $\sum \mathcal{M}_i = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = 0$ , tj.  $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$  ili  $rm_1 g = Rm_2 g$ , odakle je

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{R}{r}$$



354. Iz uslova ravnoteže štapa je 16

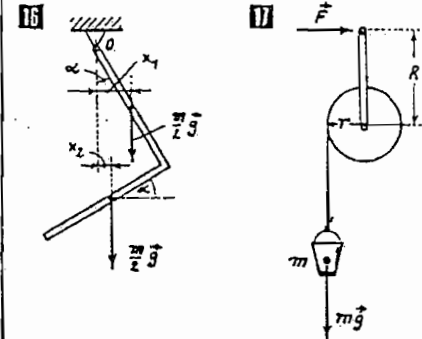
$$x_1 \frac{mg}{2} - x_2 \frac{mg}{2} = 0$$

ili

$$\frac{l}{4} \sin \alpha \cdot \frac{mg}{2} = \left( \frac{l}{4} \cos \alpha - \frac{l}{2} \sin \alpha \right) \frac{mg}{2}$$

odakle je

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3} = 18^\circ 26'$$



355. Potreban uslov je  $\mathcal{M}_F > \mathcal{M}_{mg}$  17, tj.

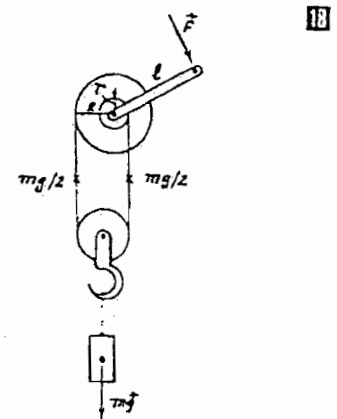
$$R \cdot F > r \cdot mg$$

odakle je

$$F > mg \frac{r}{R} \approx 98 \text{ N}$$

356. Da bi se koturačom dizao teret, pokretački moment, čiji je intenzitet  $\mathcal{M}_1 = l \cdot F$ , mora da bude veći od rezultujućeg otpornog momenta 18, čiji je intenzitet

$$\mathcal{M}_2 = R \cdot \frac{mg}{2} - r \cdot \frac{mg}{2}$$



U graničnom slučaju je  $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2$ , odakle je najmanji intenzitet pokretačke sile

$$F = mg \frac{R-r}{2l} = 250 \text{ N}$$

Preporučujemo da izračunate mehaničku prednost ove koturače, kao i visinu za koju bi se digao teret kada bi se ručica okrenula 10 puta ( $\bar{n}=4$ ,  $H=6,28 \text{ m}$ ).

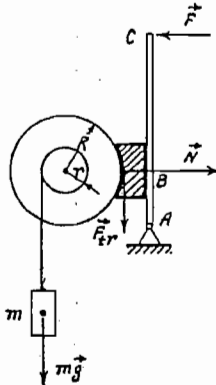
357. Prema uslovu ravnoteže  $\Sigma \mathcal{M}_A = 0$  [19] je

$$\Sigma \mathcal{M}_A = AC \cdot F - AB \cdot N = 0$$

odnosno  $N = F \frac{AC}{AB}$ . Sila trenja je prema tome

$$F_{tr} = \mu N = \mu F \frac{AC}{AB}$$

[19]



Intenzitet otpornog momenta je  $\mathcal{M}_1 = R \cdot F_{tr}$ , a pokretačkog  $\mathcal{M}_2 = r \cdot mg$ . Prema uslovu ravnoteže za tačku O je  $\Sigma \mathcal{M}_O = 0$ , odnosno

$$R \cdot F_{tr} - r \cdot mg = 0$$

ili zamenom

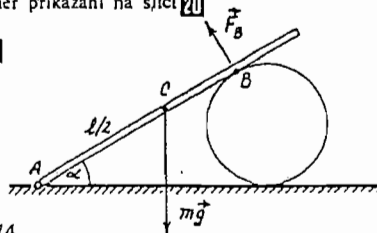
$$R \cdot \mu F \frac{AC}{AB} - r \cdot mg = 0$$

odakle je najmanji intenzitet sile kojom je potrebno delovati na ručicu

$$F_{min} = mg \frac{r}{\mu R} \frac{AB}{AC} = 327 \text{ N}$$

358. Kako je oslonac B gladak, otpor oslonca  $\vec{F}_B$  je normalna sila, čiji su pravac i smer prikazani na slici [20]

[20]



274

Pošto je greda u ravnoteži, prema uslovu ravnoteže je  $\Sigma \mathcal{M}_A = 0$ . Pri tome je

$$AC \cdot mg - AB \cdot F_B = 0$$

odakle se dobija da je

$$F_B = mg \frac{AC}{AB}$$

gde je  $AC = \frac{l}{2} \cos \alpha = \sqrt{3} l / 4$  i  $AB = 3l / 4$ , tj.

$$F_B = \frac{\sqrt{3}}{3} mg = 1,13 \text{ kN}$$

359. Na osnovu uslova ravnoteže  $\Sigma \vec{F}_x = 0$  je [21]

$$F_A - F_{tr} = 0 \quad (1)$$

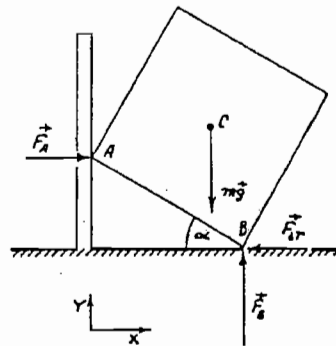
a na osnovu uslova  $\Sigma \vec{F}_y = 0$

$$F_B - mg = 0 \quad (2)$$

dok je na osnovu uslova  $\Sigma \mathcal{M}_B = 0$

$$\mathcal{M}_{FA} - \mathcal{M}_{mg} = 0 \quad (3)$$

[21]



Kako je  $F_{tr} = \mu F_B$ ,  $\mathcal{M}_{FA} = a \cdot \sin \alpha \cdot F_A$  i

$$\mathcal{M}_{mg} = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right) mg, \text{ na osnovu relacija (1), (2) i (3) nalazi se da treba da bude ispunjen uslov}$$

$$1 < \operatorname{tg} \alpha < 1 / (1 + 2\mu)$$

360. Pošto je zid idealno gladak, postoji samo normalna komponenta otpora oslonca A [22], dok reakcija oslonca B ima normalnu i tangencijalnu komponentu. Iz uslova ravnoteže  $\Sigma \vec{F}_{yi} = 0$  dobija se da je  $F_B = mg$  (1), dok je prema uslovu  $\Sigma \vec{F}_{xi} = 0$ , za x-pravac  $F_A - F_{Bx} = 0$ , odnosno  $F_A = F_{Bx}$  (2).

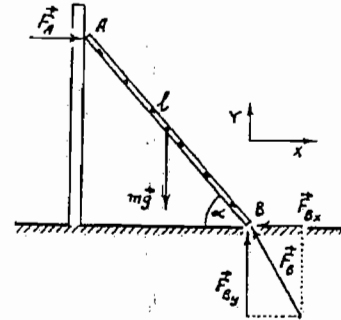
Komponenta sile  $F_{Bx}$  je posledica trenja i iznosi

$$F_{Bx} = \mu N = \mu F_B \quad (3)$$

Prema uslovu ravnoteže za tačku B je  $\Sigma \mathcal{M}_B = 0$ , ili

$$l \sin \alpha \cdot F_A - \frac{l}{2} \cos \alpha \cdot mg = 0$$

odnosno  $F_A = \frac{mg}{2} \operatorname{ctg} \alpha$ .



[22]

Prema relacijama (1), (2) i (3) je  $F_A = \mu mg$ , pa je traženi ugao

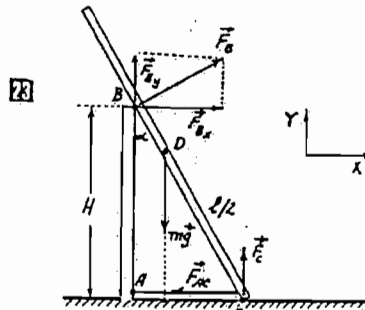
$$\alpha_{min} = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} 2\mu$$

Na pomena: Ukoliko je  $\mu_1$  — koeficijent trenja između lestvica i tla u osloncu A, a  $\mu_2$  — koeficijent trenja između lestvica i zida u osloncu B, rezultat je

$$\alpha_{min} = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{2\mu_1}{1 - \mu_1 \mu_2}$$

Preporučujemo da ovo dokažete.

361. Na slici su prikazani otpori oslonaca B i C, kao i sila zatezanja užeta AC [23].



Prema uslovima ravnoteže

$$\Sigma \vec{F}_{xi} = 0 \text{ i } \Sigma \vec{F}_{yi} = 0$$

dobija se da je

$$\left. \begin{aligned} F_B \cos \alpha - F_{AC} &= 0 \\ F_B \sin \alpha + F_C - mg &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

18\*

Prema uslovu ravnoteže momenta za tačku C je  $\Sigma \mathcal{M}_C = 0$ , ili

$$BC \cdot F_B - CE \cdot mg = 0 \quad (2)$$

Kako je  $BC = AB \cos \alpha = H \cos \alpha$  i  $CE = DC \sin \alpha = \frac{l}{2} \sin \alpha$ , to je prema relaciji (2)

$$F_B = mg \frac{CE}{BC} = mg \frac{l \sin 2\alpha}{4H} \approx 170 \text{ N}$$

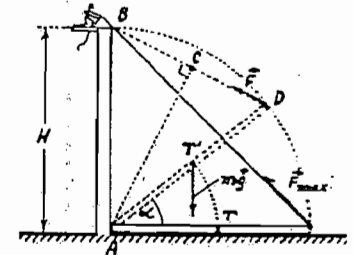
a iz relacije (1) je

$$F_{AC} = F_B \cos \alpha = 147 \text{ N}$$

$$F_C = mg - F_B \sin \alpha = 503 \text{ N}$$

362. Na slici [24] je prikazan proizvoljan položaj grede, određen uglom  $\alpha$ . Da bi radnik

[24]



mogao podizati gredu, momenti njegove vučne sile  $\mathcal{M}_1 = AC \cdot F$  treba da budu veći od momenta sile teže

$$\mathcal{M}_2 = AE \cdot mg = (l/2) \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) mg$$

odnosno  $\mathcal{M}_1 > \mathcal{M}_2$ . Kako je  $AC = AD \cos(\alpha/2)$  (trougao BAD je jednakokrak), to je

$$l \cos(\alpha/2) F > (l/2) \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) mg$$

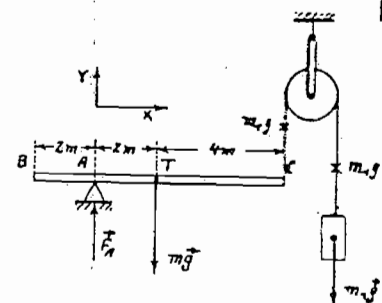
odnosno

$$F > mg \sin(\alpha/2)$$

363. Iz uslova ravnoteže [25]

$$\Sigma \vec{F}_{yi} = 0 \text{ i } \Sigma \mathcal{M}_A = 0$$

[25]



275

dobija se da je

$$F_A - mg - m_1 g = 0$$

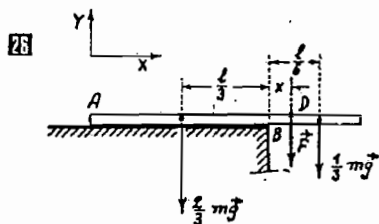
$$AT \cdot mg - AC \cdot m_1 g = 0$$

odakle je

$$m_1 = m \frac{AT}{AC} = 7 \text{ kg} \quad \text{i} \quad F_A = (m - m_1)g = 137,3 \text{ N}$$

364. Intenzitet sile je  $F = mg/16$ , a smer naniže.

365. Intenzitet sile teže koja deluje na deo grede nad prepustom je  $mg/3$ , a ostatka  $2mg/3$ . Težišta ovih delova grede se nalaze u njihovim geometrijskim središtima, pošto je greda homogena.



Čovek koji se nalazi na delu grede BC povećava moment koji teži da obrne gredu oko oslonca B. Na osnovu uslova ravnoteže momenata sile za tačku B  $\sum \mathcal{M}_B = 0$  je

$$\frac{l}{6} \frac{mg}{3} - x \cdot m_1 g - \frac{l}{3} \frac{2mg}{3} = 0$$

odakle je traženo rastojanje

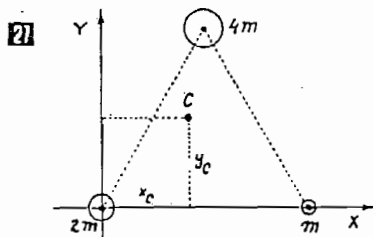
$$x = \frac{5}{16} l = 3,75 \text{ m}$$

$$366. F_A = F \frac{l-b}{l} = 0,2 \text{ MN};$$

$$F_B = F \frac{b}{l} = 0,1 \text{ MN}.$$

$$367. F_A = \frac{F_1}{2} - F_2; \quad F_B = mg + \frac{F_1}{2} + 2F_2.$$

$$368. F_2 = mg \frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha}.$$



276

$$369. F_A = mg \sqrt{1 + \frac{\text{ctg}^2 \alpha}{4}}; \quad F_B = \frac{mg}{2} \text{ctg} \alpha.$$

370. a) Prema definiciji centra mase je  $\Sigma$

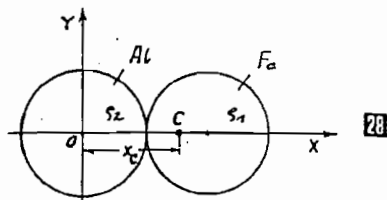
$$x_c = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i} = \frac{2m \cdot 0 + m \cdot a + 4m \cdot \frac{a}{2}}{2m + m + 4m} = \frac{3}{7} a$$

$$y_c = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i} = \frac{2\sqrt{3}}{7} a$$

b) Ako je gravitaciono polje homogeno.

$$371. x_c = 2R \frac{P_2}{P_1 - P_2} \approx 5 \text{ cm} \quad \Sigma$$

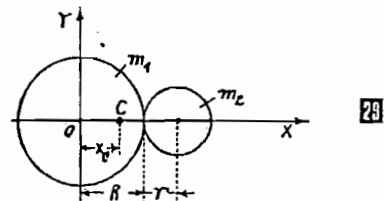
$$y_c = 0$$



Zbog malih dimenzija tela može se smatrati da se ona nalaze u homogenom gravitacionom polju, te se težište sistema poklapa sa njegovim centrom mase.

372. Za usvojeni koordinatni sistem  $\Sigma$  je  $y_c = 0$ , dok je

$$x_c = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i} = \frac{m_2(R+r)}{m_1 + m_2}$$



Mase kuglica su:

$$m_1 = \rho V_1 = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{32}{3} \pi \rho r^3$$

$$m_2 = \rho V_2 = \frac{4}{3} \pi \rho r^3$$

pa je x-koordinata centra mase  $x_c = r/3$ .

373. Koordinate centra mase u odnosu na izabrani koordinatni sistem  $\Sigma$  su za kvadrat OADG:

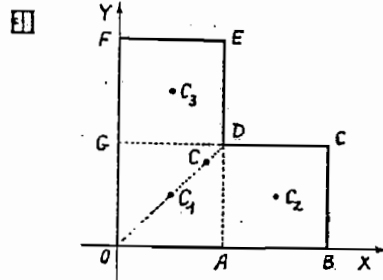
$$x_1 = l/2 \quad \text{i} \quad y_1 = l/2$$

za kvadrat ABCD:

$$x_2 = 3l/2 \quad \text{i} \quad y_2 = l/2$$

za kvadrat GDEF:

$$x_3 = l/2 \quad \text{i} \quad y_3 = 3l/2$$



Kako je ploča homogena, svaki od označenih kvadrata ima masu  $m/3$ . Po definiciji centra mase je

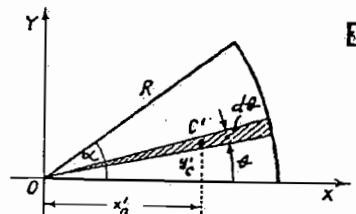
$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i x_i}{\sum_{i=1}^3 m_i} = \frac{5}{6} l; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i y_i}{\sum_{i=1}^3 m_i} = \frac{5}{6} l$$

374. Koordinate centra mase su

$$x_c = \frac{\int x \, dm}{\int dm}; \quad y_c = \frac{\int y \, dm}{\int dm} \quad (1)$$

Ako se uoči elementarni ugao  $d\theta$ , koordinate centra mase ovog elementarnog isječka biće

$$x'_c = \frac{2}{3} R \cos \theta \quad \text{i} \quad y'_c = \frac{2}{3} R \sin \theta$$



Površina kružnog isječka centralnog ugla  $\alpha$  je  $S_2 = \frac{1}{2} \alpha R^2$ , a centralnog ugla  $d\theta$  je  $dS_2 = \frac{1}{2} R^2 d\theta$ , pa je površinska gustina isječka

$$\rho_3 = \frac{m}{S} = \frac{2m}{\alpha R^2}$$

a element mase

$$dm = \rho_3 dS_2 = \frac{m}{\alpha} d\theta$$

Prema relacijama (1) koordinate centra mase kružnog isječka su:

$$x_c = \frac{\int_0^\alpha \frac{2}{3} R \cos \theta \cdot \frac{m}{\alpha} d\theta}{\int_0^\alpha \frac{m}{\alpha} d\theta} = \frac{2R}{3\alpha} \sin \alpha$$

$$y_c = \frac{\int_0^\alpha \frac{2}{3} R \sin \theta \cdot \frac{m}{\alpha} d\theta}{\int_0^\alpha \frac{m}{\alpha} d\theta} = \frac{2R}{3\alpha} (1 - \cos \alpha)$$

375. Koordinate centra mase su:

$$x_c = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}; \quad y_c = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}$$

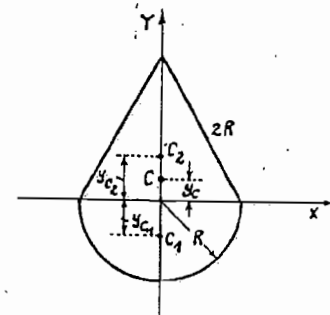
Kako je ploča simetrična u odnosu na Y-osu, to je  $x_c = 0$ .

Ukupna površina ploče je

$$S = S_\Delta + S_\square = \sqrt{3} R^2 + \pi R^2/2$$

pa je njena površinska gustina

$$\rho_3 = \frac{m}{S} = \frac{m}{(\sqrt{3} + \pi/2) R^2}$$



Koordinata y centra mase polukružnog deła ploče je (v. zad 374)  $y_{c1} = \frac{2R}{3\alpha} (1 - \cos \alpha)$ , pa je  $\alpha = -\pi$ , pa se dobija da je  $y_{c1} = -4R/3$ .

277

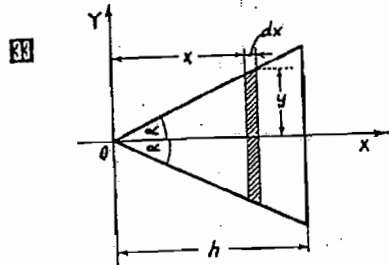
dok je za trougaoni deo ploče  $y_c = h/3 = (\sqrt{3}/3)R$ , pa je

$$y_c = \frac{\rho_r S \Delta y_{c1} + \rho_s S \Delta y_{c2}}{m} = \frac{R}{3(\sqrt{3} + \pi/2)} \approx 0,15R$$

376. Koordinate centra mase su:

$$x_c = \frac{\int x dm}{m}; \quad y_c = \frac{\int y dm}{m} \quad (1)$$

U odnosu na izabrani koordinatni sistem je  $y_c = 0$ .



Površina trougla je  $S = h^2 \tan \alpha$ , a površinska gustina

$$\rho_s = \frac{m}{S} = \frac{m}{h^2 \tan \alpha}$$

Elementarna površina  $dS$  ima masu

$$dm = \rho_s dS = \frac{m}{h^2 \tan \alpha} 2y dx$$

pa kako je  $y = x \tan \alpha$ , dobija se da je

$$dm = \frac{2m}{h^2} x dx$$

ili zamenom u relaciju (1)

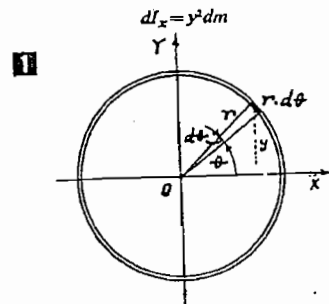
$$x_c = \frac{2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{2}{3} h$$

### 7. DINAMIKA ROTACIONOG KRETANJA

377.  $I = I_1 + I_2 = 3mr^2$ .

378.  $I = \frac{10}{12} ml^2 = 0,625 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

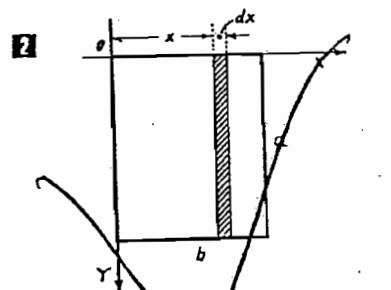
379. Moment inercije elementa prstena mase  $dm$ , u odnosu na X-osu je



gde je  $y = r \cdot \sin \theta$  i  $dm = \frac{m}{2\pi} d\theta$ , pa se dobija da je

$$I_x = \frac{mr^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{mr^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \theta = \frac{1}{2} mr^2 = 0,02 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

380. Ako se osa poklapa sa stranicom b, moment inercije dela ploče dužine a je



rine  $dx$  i mase  $dm$  u odnosu na tu osu je

$$dl_x = \frac{1}{a} a^2 dm$$

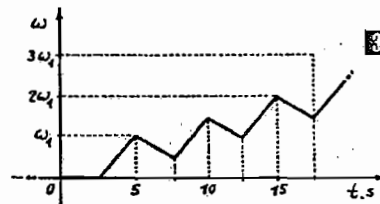
gde je

$$dm = \frac{m}{a \cdot b} a dx = \frac{m}{b} dx$$

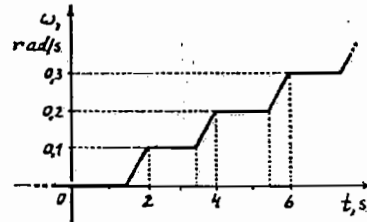
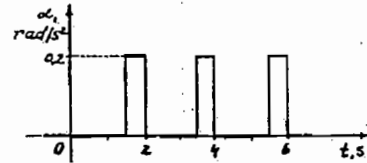
pa je

$$I_x = \frac{1}{3} \cdot \frac{m}{b} \int_0^b dx^2 = \frac{1}{3} ma^2 = 6,67 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

381. a)  $\omega_1 = \frac{2Ml}{\pi r^4} = 1,76 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ; b) 3



382.  $i_M = M \cdot \Delta t = 10 \text{ m} \cdot \text{N} \cdot \text{s}$ ; b) 4

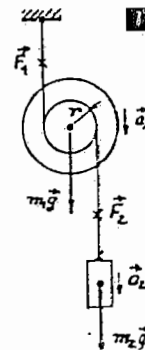
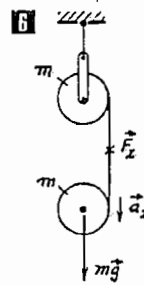
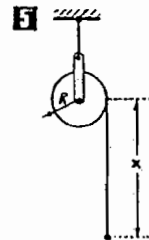


383. a) Prema II Njutnovom zakonu primenjenom na odmotani deo užeta i cilindar je

$$m_x a_x = m_x g - F_z \quad (1)$$

$$I \cdot \alpha_x = R \cdot F_z \quad (2)$$

gde je  $m_x$  — masa odmotanog dela užeta,  $a_x$  — njegovo translaciono ubrzanje,  $\alpha_x$  — ugaono ubrzanje cilindra, pri čemu je  $a_x = \alpha_x R$ ,  $I = \frac{MR^2}{2} + m_{l-x} R^2$  — moment inercije cilindra i neodmotanog dela užeta.



Kako je  $m_x = m \frac{x}{l}$  i  $m_{l-x} = m \frac{l-x}{l}$ , iz relacija (1) dobija se da je

$$\alpha_x = \frac{2mgx}{Rl(M+2m)}$$

b) Na osnovu relacija (1) intenzitet sile zatezanja je

$$F_z = \left( \frac{1}{2} M + m_{l-x} \right) a_x = \frac{2mgx}{Rl(M+2m)} \left( \frac{1}{2} M + m \frac{l-x}{l} \right)$$

Dokazati da je

$$\left[ \frac{2mgx \left( \frac{1}{2} M + m \frac{l-x}{l} \right)}{Rl(M+2m)} \right] = N$$

384. Prema II Njutnovom zakonu za translaciju, za donji cilindar je

$$ma_2 = mg - F_z \quad (1)$$

a pod pretpostavkom da gornji cilindar miruje, onda je prema II Njutnovom zakonu za rotaciju

$$M \alpha_1 = R F_z$$

gde je  $I = MR^2/2$  i  $\alpha_1 = a_1/R$ , pa je ubrzanje donjeg cilindra u tom slučaju

$$a_1 = \frac{2F_z}{m}$$

Kada se i gornji cilindar obrće, centar mase donjeg cilindra kreće se ubrzanjem  $a_2 = 2a_1$ , odakle je

$$a_2 = \frac{4F_z}{m} \quad (2)$$

Iz relacija (1) i (2) sledi da je  $F_z = mg/5$ , pa je sila zatezanja u svakom od užadi  $F_{z1} = F_{z2} = mg/10$ .

385. a) Prema II Njutnovom zakonu za kalem je

$$m_1 a_1 = m_1 g + F_1 - F_2 \quad (1)$$

a za telo

$$m_2 a_2 = m_2 g - F_2 \quad (2)$$



impulsa sistema posle spadanja kuglice, tj.

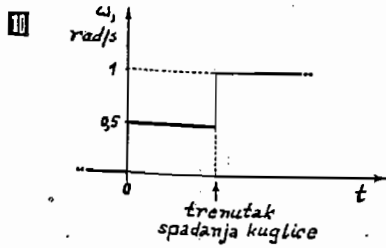
$$\frac{1}{2} m^2 \omega_1 = \frac{1}{4} m^2 \omega_2$$

Oдавде je ugaona brzina štapa posle spadanja kuglice

$$\omega_2 = 2\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$$

što znači da će štap pri spadanju kuglice povećati ugaonu brzinu dva puta **11**.

$$b) \Delta E_k = E_{k_2} - E_{k_1} = \frac{m^2 \omega_1^2}{4} = 0,625 \text{ mJ}$$



401. a) Telo A će početi da klizi onog trenutka kada se izjednači intenzitet centrifugalne sile  $\vec{F}_c$ , koja deluje na njega, i intenzitet sile trenja  $\vec{F}_r$ . Naime, iz uslova

$$m_2 \omega_1^2 = \mu m_2 g$$

nalazi se da je ugaona brzina diska pri kojoj će telo početi da klizi

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\mu g}{r}} = 1,57 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (1)$$

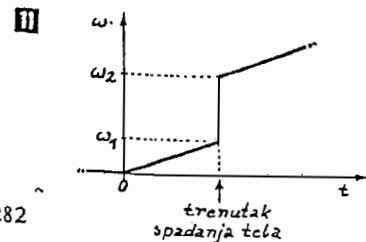
b) Na osnovu zakona održanja momenta impulsa je

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2 \quad (2)$$

gde su  $I_1 = (m_1 r^2/2) + m_1 r^2$  i  $I_2 = m_1 r^2/2$  — momenti inercije sistema pre i posle spadanja tela,  $\omega_1$  i  $\omega_2$  — ugaone brzine sistema pre i posle spadanja tela, pa se na osnovu relacija (1) i (2) nalazi da je

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\mu g}{r} \left(1 + \frac{2m_2}{m_1}\right)} \approx 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \mathbf{11}$$

$$c) \Delta E_k = E_{k_2} - E_{k_1} = \frac{\mu g r m_2}{2} \left(1 + \frac{2m_2}{m_1}\right) \approx 1,5 \text{ J}$$



402. Pošto je centrifugalna sila centralna sila (konzervativna), njen rad ne zavisi od oblika putanje, pa je

$$dA_c = F_c dr = m\omega^2 r dr$$

tj.

$$\int_1^2 dA_c = \int_{r_1}^{r_2} m\omega^2 r dr$$

iii

$$A_{1,2} = \frac{m\omega^2}{2} (r_2^2 - r_1^2) = 6,75 \text{ J}$$

403. a) Primenom II Njutnovog zakona na oba tela dobija se da je

$$m_2 a = m_2 g - F_z$$

$$\mathcal{M}_2 = I a = R F_z$$

gde je  $I = m_1 R^2/2$  i  $\alpha R = a$ , pa je

$$\alpha = \frac{g}{R} \cdot \frac{2m_2}{2m_2 + m_1}$$

tj.

$$\omega = \alpha t = \frac{g t}{R \left(1 + \frac{m_1}{2m_2}\right)}$$

b) Kinetička energija sistema jednaka je zbiru kinetičke energije tela mase  $m_2$  (koje se kreće translatorno) i tela mase  $m_1$  (koje se kreće rotaciono), pa je:

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{m_2 v^2}{2} = \frac{m_2 g^2 t^2}{2 \left(1 + \frac{m_1}{2m_2}\right)}$$

Dokazati da je

$$\left[ \frac{m_2 g^2 t^2}{2 \left(1 + \frac{m_1}{2m_2}\right)} \right] = J$$

404. a) Na osnovu II Njutnovog zakona, za translatorno kretanje ovog sistema može se napisati da je **12**

$$m a = m g - F_z \quad (1)$$

a za njegovo rotaciono kretanje

$$\mathcal{M}_2 = I a \quad (2)$$

gde je  $\mathcal{M}_2 = R F_z$ ,  $I = m R^2/2$ , pri čemu je  $a = \alpha/R$ . Sila zatezanja je

$$F_z = m g/3 \quad (3)$$

a kako postoje dva užeta, u svakom užetu je sila zatezanja  $F_z/2 = m g/6 = 9 \text{ N}$ .

b) Prema relacijama (1), (2) i (3) je

$$\alpha = \frac{2}{3} \cdot \frac{g}{R} = 32,7 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

c) Translatorno ubrzanje cilindra je  $a = 2g/3$ , pa je njegova brzina  $v = at = 2gt/3$  (pošto je krenuo iz mirovanja). Trenutna snaga koju razvija sila teže je

$$P = m g \cdot v = \frac{2}{3} m g^2 t$$

405. a) Prema II Njutnovom zakonu za translatorno kretanje je

$$(m_1 + m_2) a = F \quad (1)$$

gde je  $a$  — ubrzanje celog sistema. Ubrzanje kraja užeta je

$$a_A = a + \alpha R \quad (2)$$

gde je prema II Njutnovom zakonu za rotaciju

$$I \alpha = \frac{m_1 R^2}{2} \alpha = R F$$

pa je ugaono ubrzanje cilindra

$$\alpha = \frac{2F}{m_1 R} \quad (3)$$

b) Prema relacijama (1), (2), (3) je

$$a_A = \frac{F}{m_1 + m_2} + \frac{2F}{m_1} = F \frac{3m_1 + 2m_2}{(m_1 + m_2)m_1}$$

c) Na osnovu činjenice da je sistem krenuo iz mirovanja, tj. da je  $v = at$  i  $\omega = \alpha t$ , kinetička energija sistema je

$$E_k = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} + \frac{I \omega^2}{2} = \frac{3m_1 + 2m_2}{2(m_1 + m_2)m_1} F^2 t^2$$

406. a) Na osnovu II Njutnovog zakona je **13**

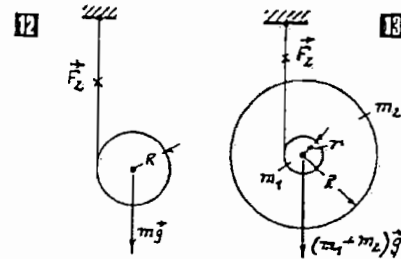
$$(m_1 + m_2) a = (m_1 + m_2) g - F_z$$

$$I \alpha = r F_z$$

gde je  $\alpha = a/r$ ,  $I = \frac{1}{2} (m_1 r^2 + m_2 R^2)$ , pa se dobija da je

$$a = g \frac{2(m_1 + m_2) r^2}{(3m_1 + 2m_2) r^2 + m_2 R^2}$$

b) Ukupna energija sistema jednaka je zbiru energija njegovog translatornog i rotacionog



kretanja, pa je

$$E = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} + \frac{I \omega^2}{2}$$

gde je  $v = at$  i  $\omega = v/r$ , odakle se dobija da je

$$E = \frac{[(5m_1 + 4m_2) r^2 + m_2 R^2] (m_1 + m_2)^2 g^2 r^2 t^2}{[(3m_1 + 2m_2) r^2 + m_2 R^2]^2}$$

Dokazati da je

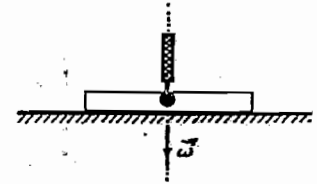
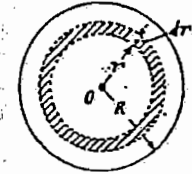
$$\left[ \frac{[(5m_1 + 4m_2) r^2 + m_2 R^2] (m_1 + m_2)^2 g^2 r^2 t^2}{[(3m_1 + 2m_2) r^2 + m_2 R^2]^2} \right] = J$$

407. Kinetička energija diska je

$$E = \frac{I \omega^2}{2} = \frac{1}{4} m R^2 \omega^2$$

i ona se utroši tokom zaustavljanja diska na savlađivanje sile trenja, tj.  $A_{tr} = \int_0^R \theta d\mathcal{M}_r$  gde

je  $d\mathcal{M}_r = r \cdot \mu g dm$  — elementarni moment sile trenja i  $\theta$  — opisani ugaon diska do zaustavljanja.



Kako je **14**

$$dm = \frac{m}{\pi R^2} dS = \frac{2m}{R^2} r dr$$

$$\theta = \omega t_0 - \frac{1}{2} \alpha t_0^2 = \frac{1}{2} \omega t_0$$

gde je  $t_0$  — vreme zaustavljanja diska, dobija se da je

$$E = A = \int_0^R \frac{\mu m g \omega t_0}{R^2} r^2 dr = \frac{1}{3} \mu m g \omega t_0 R$$

odakle je traženo vreme

$$t_0 = \frac{3}{4} \frac{R \omega}{\mu g} = 7,64 \text{ s}$$

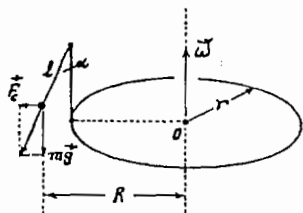
408. Kinetička energija kuglice klatna je

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mR^2\omega^2}{2}$$

gde je  $R = r - l \sin \alpha$  [15]. Iz označenog trougla na slici je  $\sin \alpha = F_c / \sqrt{F_c^2 + m^2g^2}$ , gde je  $F_c = mR\omega^2$  - intenzitet centrifugalne sile koja deluje na kuglicu, pa je

$$\sin \alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2 + \frac{g^2}{R^2\omega^4}}}$$

15



Kako je  $\frac{g^2}{R^2\omega^4} \ll 1$ , to je  $\sin \alpha \approx 1$ , odnosno  $\alpha \approx 90^\circ$ , pa je  $R = r - l$ , tj.

$$E_k = \frac{m((r-l)\omega)^2}{2} = 15,4 \text{ J}$$

409. Prema zakonu održanja energije je

$$\frac{mv_0^2}{2} + \frac{I\omega_0^2}{2} = F_{tr} \cdot s$$

gde je  $I = \frac{2}{5}mr^2$  - moment inercije lopte,  $F_{tr} = \mu mg$  - intenzitet sile trenja,  $s$  - pređeni put lopte do zaustavljanja i  $\omega_0 = v_0/r$  (pošto nema klizanja).

Srednje ubrzanje lopte je  $\langle a \rangle = -v_0/t$ , pa je pređeni put do zaustavljanja  $s = v_0 t / 2$ , na osnovu čega je

$$\mu = \frac{7v_0}{5gt} = 0,036$$

410. a) Energija saopštena, lopti utroši se na savladavanje sile trenja, pa je

$$F_{tr} \cdot s = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{I\omega_0^2}{2} \quad (1)$$

gde je  $F_{tr} = \mu mg$  - sila trenja,  $I = 2mR^2/5$  - moment inercije lopte u odnosu na osu koja prolazi kroz centar mase lopte, pa je koeficijent trenja

$$\mu = \frac{7}{10} \frac{v_0^2}{gs} \quad (2)$$

Lopta se kreće ravnomerno ubrzano, srednji ubrzanjem  $a = -v_0/t$ , pa je početna

brzina lopte  $v_0 = 2st$ , a koeficijent trenja

$$\mu = \frac{14}{5} \frac{s}{gt^2} = 0,28$$

b) Za ovo vreme lopta će da načini

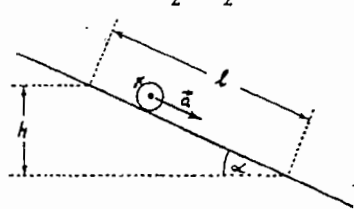
$$N = \frac{s}{2\pi R} = 8 \text{ obrtaja}$$

Preporučujemo da nacrtate zavisnost  $\omega = \omega(t)$ .

411. Prema zakonu održanja energije je [16]

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

16



gde je  $h = l \sin \alpha$  i  $\omega = v/r$ . Isto tako je

$$l = at^2/2; v = at$$

pa se zamenom dobija da je

$$a = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{I}{R^2}}$$

Kako je za loptu  $I = \frac{2}{5}mR^2$ , ubrzanje centra mase je

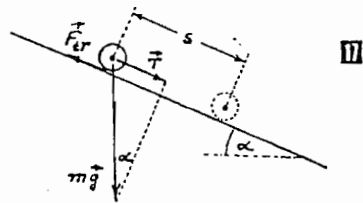
$$a = \frac{5}{7}g \sin \alpha = 3,5 \frac{m}{s^2}$$

412. Intenzitet sile koja vrši kretanje je [17]

$$F = T - F_{tr} = mg \sin \alpha - \frac{mg}{50} = \frac{3}{50}mg \quad (1)$$

pa je prema zakonu održanja energije

$$F \cdot s + \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = mg\Delta h = mgs \sin \alpha \quad (2)$$



gde je  $I = mR^2/2$  - moment inercije valjka,  $\omega = v/R$  - ugaona brzina valjka,  $m$  - masa valjka,  $\Delta h$  - razlika visina početnog i krajnjeg

položaja valjka. Prema relacijama (1) i (2) je

$$\frac{3}{100}mgs + \frac{3}{4}mv^2 = \frac{5}{100}mgs$$

odakle je tražena brzina

$$v = \sqrt{\frac{8gs}{300}} = 2,51 \frac{m}{s}$$

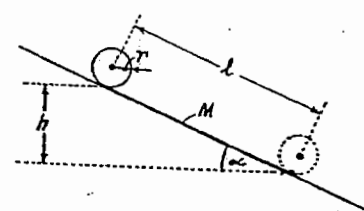
413. Prema zakonu održanja energije je [18]

$$E_p = E_{kr} + E_{ki}$$

gde je  $E_p = mgh + Mg(h/2)$  - potencijalna energija sistema u mirovanju,  $E_{kr} = I\omega^2/2$  i  $E_{ki} = (M+m)v^2/2$ , pa je

$$\left(\frac{m+M}{2}\right)gl \sin \alpha = \frac{(m+M)v^2}{2} + \frac{(m+M)r^2\omega^2}{2}$$

18



a kako je  $\omega = v/r$ , to je

$$v = \sqrt{\frac{(2m+M)gl \sin \alpha}{2(m+M)}}$$

414. Prema zakonu održanja energije, u prvom slučaju je [19]

$$m_1gh = A_{tr} + \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{I\omega_1^2}{2} \quad (1)$$

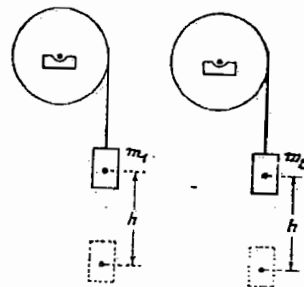
a u drugom

$$m_2gh = A_{tr} + \frac{m_2v_2^2}{2} + \frac{I\omega_2^2}{2} \quad (2)$$

gde je  $I$  - moment inercije zamajca,  $v_1$  i  $v_2$  - brzine tegova posle pređenog puta  $h$ ,  $\omega_1$  i  $\omega_2$  - odgovarajuće ugaone brzine zamajca,  $A_{tr}$  - rad sile trenja. Kako je  $\omega_1 = v_1/r$  i  $\omega_2 = v_2/r$ , iz relacija (1) i (2) dobija se da je

$$gh(m_1 - m_2) = \frac{1}{2}(m_1v_1^2 - m_2v_2^2) + \frac{I}{2r^2}(v_1^2 + v_2^2)$$

19



Kako se tegovi kreću ravnomerno ubrzano, to je

$$h = at^2/2 \text{ i } v = at \text{ ili } v_1 = 2h/t_1 \text{ i } v_2 = 2h/t_2$$

pa je konačno

$$l = \frac{r^2}{2h(t_1^2 - t_2^2)} [t_1^2 t_2^2 (m_1 - m_2)g - 2h(m_1 t_2^2 - m_2 t_1^2)] = 1,1 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

415. a) Potencijalna energija tela  $m_2gH$  u toku kretanja se pretvara u kinetičku energiju rotacije valjka i translatorsno kretanja tela. Prema zakonu održanja energije je

$$m_2gH = \frac{m_2v^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

gde je  $I = m_1R^2/2$  - moment inercije valjka i  $\omega = v/R$  - ugaona brzina valjka u trenutku pada tela na zemlju, tj.

$$\omega = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{m_2gH}{m_1 + 2m_2}} \approx 6,2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

b) Brzina tela pri padu je  $v = R\omega = 3,1 \text{ m/s}$ .

c) Srednja brzina tela je  $\langle v \rangle = (v_0 + v)/2 = v/2$ , pa je vreme padanja

$$t = \frac{H}{\langle v \rangle} = \frac{2H}{v} = 1,29 \text{ s}$$

d) Kinetička energija tela pri padu je  $E = 314 \text{ J}$ .

e) Srednje ubrzanje tela je  $\langle a \rangle = (v - v_0)/t = v/t = 2 \text{ m/s}^2$ .

416. Pri padu na zemlju greda poseduje kinetičku energiju

$$\frac{I\omega^2}{2} = \frac{I\omega_0^2}{2} + mg \frac{l}{2} \quad (1)$$

gde je  $I = ml^2/3$  - moment inercije grede u odnosu na osu obrtanja,  $\omega_0 = v_0/l$  - početna ugaona brzina grede,  $\omega$  - ugaona brzina grede pri padu na zemlju. Na osnovu relacije (1), brzina vrha grede u trenutku udara o zemlju je

$$v = \sqrt{v_0^2 + 3gl} \quad (2)$$

Ugaona brzina i ugaoni otklon grede posle vremena  $t$  su:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \theta &= \omega_0 t + \alpha t^2/2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Vrh grede opiše ugao  $\theta = (\pi/2)$  rad pa je vreme padanja grede prema relacijama (2) i (3)

$$t = \frac{\pi}{\omega_0 + \sqrt{\omega_0^2 + 3g/l}}$$

417. Kada je sistem doveden do rotacije ugaonom brzinom  $\omega$ , tada je uspostavljena

dinamička ravnoteža između centrifugalne i elastične sile, pa je

$$k(l-l_0) = m\omega^2$$

gde je  $l$  — neko rastojanje tela od ose obrtanja. Iz prethodne jednačine nalazi se da je

$$l = \frac{kl_0}{k - m\omega^2}$$

Ukupni priraštaj energije sistema  $\Delta E$  jednak je izvršenom radu nad sistemom, tj.

$$\Delta E = \Delta E_p + \Delta E_k = A$$

gde su:

$$\Delta E_p = \frac{k(\Delta l)^2}{2} = \frac{1}{2} k(l-l_0)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} kl_0^2 \left( \frac{m\omega^2}{k} \right)^2$$

i

$$\Delta E_k = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

a kako je  $v_0 = 0$ , dobija se da je

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m^2\omega^2}{2} = \frac{1}{2} kl_0^2 \frac{m\omega^2}{\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right)^2}$$

pa je traženi rad

$$A = \frac{m^2\omega^2}{2} \frac{1 + \frac{m\omega^2}{k}}{\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right)^2}$$

Dokazati da je

$$\left[ \frac{m^2\omega^2}{2} \right] = J; \quad \left[ \frac{1 + \frac{m\omega^2}{k}}{\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right)^2} \right] = 1$$

418. Pri kretanju štapa nadole njegova potencijalna energija se pretvara u kinetičku, pa je

$$m_1 g \frac{l}{2} = \frac{I_1 \omega_1^2}{2} \quad (1)$$

gde je  $\omega_1$  — ugaona brzina štapa neposredno pre udara o telo,  $I_1 = m_1 l^2/3$  — moment inercije štapa u odnosu na osu O. Moment impulsa štapa neposredno pre udara je  $I\omega_1$ , a štapa sa telom neposredno posle udara  $(I_1 + I_2)\omega_2$ , gde je  $\omega_2$  — ugaona brzina štapa i tela neposredno posle udara, a  $I_2 = m_2 l^2$  — moment inercije tela u odnosu na osu O. Prema

zakonu održanja impulsa je

$$(I_1 + I_2)\omega_2 = I_1\omega_1 \quad (2)$$

Na osnovu relacija (1) i (2) je

$$\omega_2 = \frac{m_1 g}{(I_1 + I_2)\omega_1}$$

pa telo pri sudaru stekne energiju

$$E_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_2 \omega_2^2 l^2}{2}$$

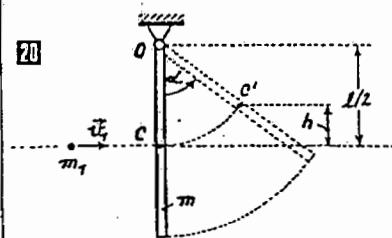
Kako se energija  $E_2$  utroši na savladavanje sile trenja  $F_{tr}$  (čiji je intenzitet  $\mu m_2 g$ ) na putu  $s$ , to je

$$\mu m_2 g s = \frac{m_2 \omega_2^2 l^2}{2}$$

pa je predeni put tela

$$s = \frac{3l}{2\mu} \left( \frac{m_1}{m_1 + 3m_2} \right)^2$$

419. Impuls metka pre udara u gredu iznosi  $m_1 v_1$ , a posle udara  $m_1 v_2$ . Moment impulsa ovog sistema tela u odnosu na osu O pre udara metka je  $m_1 v_1 (l/2)$ , a neposredno posle



prolaska metka je  $I\omega_0 + m_1 v_2 (l/2)$ , pa je prema zakonu održanja momenta impulsa

$$m_1 v_1 (l/2) = I\omega_0 + m_1 v_2 (l/2)$$

gde je  $I\omega_0$  — moment impulsa grede neposredno posle prolaska metka, a  $\omega_0$  — odgovarajuća ugaona brzina. Iz prethodnih relacija je

$$\omega_0 = \frac{m_1 l}{2I} (v_1 - v_2)$$

pa se pri ovome štapa preda kinetička energija

$$E_k = \frac{I\omega_0^2}{2} = \frac{m_1^2 l^2}{8I} (v_1 - v_2)^2 = \frac{3}{8} \frac{m_1^2}{m} (v_1 - v_2)^2$$

Ova energija se utroši na promenu potencijalne energije štapa, pa je prema zakonu održanja energije  $E_k = E_p = mgh$ , odakle je visina do koje se pomeri centar mase štapa

$$h = \frac{3}{8g} \left( \frac{m_1}{m} \right)^2 (v_1 - v_2)^2 \quad (1)$$

Kako je  $h = \frac{l}{2} (1 - \cos \alpha)$  (2), to je prema relacijama (1) i (2)

$$\alpha = \arccos \left[ 1 - \frac{6}{8gl} \left( \frac{m_1}{m} \right)^2 (v_1 - v_2)^2 \right] \approx 38^\circ$$

420. Moment impulsa metka u odnosu na osu O pre sudara je  $L_1 = m_1 v (l/2)$ , dok je moment impulsa štapa se metkom, neposredno posle sudara, u odnosu na istu osu  $L_2 = (I_1 + I_2)\omega_1$ , gde je  $I_1 = m_1 l^2/4$  — moment inercije metka, a  $I_2 = m_2 l^2/3$  — moment inercije štapa u odnosu na istu osu. Prema zakonu održanja momenta impulsa je

$$(I_1 + I_2)\omega_1 = m_1 v \frac{l}{2}$$

odakle je ugaona brzina štapa u početku kretanja

$$\omega_1 = \frac{v}{l} \frac{6m_1}{4m_1 + 3m_2}$$

Energija sistema u početku kretanja je

$$E_1 = \frac{(I_1 + I_2)\omega_1^2}{2} = \frac{m_1 v^2}{2} \frac{3m_2}{4m_1 + 3m_2}$$

Ova kinetička energija sistema se u toku njegovog kretanja pretvori u gravitacionu potencijalnu energiju  $E_p = (m_1 + m_2)gh/2$ , koja je prema zakonu održanja energije jednaka energiji  $E_1$ , pa je

$$\frac{m_1 v^2}{2} \frac{3m_2}{4m_1 + 3m_2} = (m_1 + m_2)g \frac{l}{2}$$

odakle je tražena brzina

$$v = \frac{1}{\sqrt{3} m_2} \sqrt{(m_1 + m_2)(4m_1 + 3m_2)gl}$$

Kako je  $m_1 \gg m_2$ , dobija se da je

$$v \approx 2 \frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{gl}{3}} = 341 \frac{m}{s}$$

421. Prema zakonu održanja energije je

$$mgh = mg \left( \frac{h}{2} + x \right) + \frac{mv^2}{2}$$

Telo će da se odvoji od šleba 21 kada je

$$\frac{mv^2}{h/2} = mg \sin \theta$$

pa je  $x = v^2/g$  i konačno  $v = \sqrt{gh/3}$ .

Po odvajanju od šleba telo se kreće po putanji kosog hica, pa su komponente njegove brzine

$$v_x = v \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$v_y = v \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) - gt$$

U najvišoj tački putanje  $M$  je  $v_y = 0$ , pa je tražena brzina u toj tački

$$v_M = v \sin \theta = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{gh}{3}}$$

422. Prema zakonu održanja energije je 22

$$mg(R+r) = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + mgh \quad (1)$$

gde je  $h$  — visina od tla na kojoj će kugla da se odvoji od polusfere,  $I = 2mr^2/5$  — moment inercije kugle.

Pošto je

$$h = R \cos \alpha + r \sin \beta \quad \text{i} \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

dobija se da je

$$h = (R+r) \cos \alpha$$

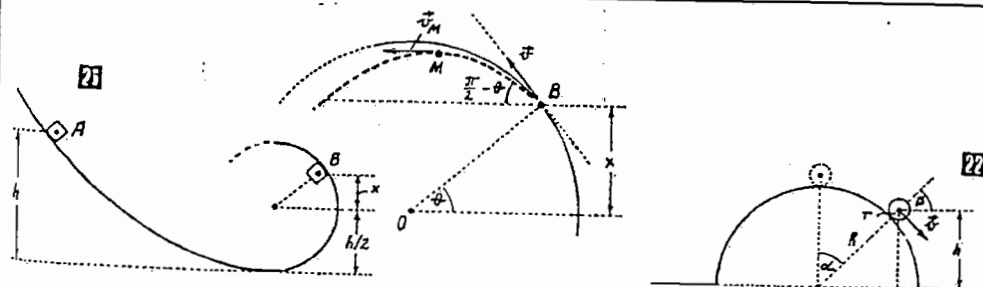
pa relacija (1) dobija oblik

$$g(R+r) = \frac{7}{10} v^2 + g(R+r) \cos \alpha$$

odakle je

$$v^2 = \frac{10}{7} g(R+r)(1 - \cos \alpha) \quad (2)$$

U trenutku odvajanja kugle od polusfere normalna komponenta sile teže  $mg \cos \alpha$  jednaka je intenzitetu centrifugalne sile  $mv^2/(R+r)$  koja deluje na kuglu, tj.





$$mg \cos \alpha = \frac{mv^2}{R+r} \quad (3)$$

pa je na osnovu relacija (1), (2) i (3)

$$\omega = \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{10}{17}} g \frac{R+r}{r^2}$$

### 8. ELASTIČNOST

423.  $\sigma = F/S = 2 \text{ MPa}$ .

424.  $\sigma = \frac{F+Q}{S} = \frac{F+\rho gSl}{S} = 4,78 \text{ MPa}$ .

425.  $\Delta l = \frac{Fl}{SE_y} = \frac{4Fl}{\pi D^2 E_y} \approx 1 \text{ mm}$ .

426. Visina oslonca će se smanjiti za  $\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3$ , gde je:

$$\Delta h_1 = \frac{Fh}{S_1 E_y}; \Delta h_2 = \frac{Fh}{S_2 E_y}; \Delta h_3 = \frac{Fh}{S_3 E_y}$$

Kako je  $S_1 = 2S$  i  $S_3 = 4S$ , to je

$$\Delta h = \frac{7}{4} \frac{Fh}{S_1 E_y} = 1,12 \text{ mm}$$

427. Kako je  $\mu = \frac{\Delta r/r}{\Delta l/l}$  a  $\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{SE_y}$  a  $\frac{\sigma}{E_y}$ , to

je relativna poprečna deformacija

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\mu \sigma}{E_y} = 0,012$$

428. Prema Hukovom zakonu, relativno istezanje je

$$\delta = \frac{\Delta l}{l} = \frac{mg}{SE_y} = 0,98 \cdot 10^{-3}$$

Poasonov koeficijent je  $\mu = \frac{\Delta r/r}{\Delta l/l} = \frac{\Delta r/r}{\delta}$ , pa je

relativna promena poluprečnika žice  $\frac{\Delta r}{r} = \mu \delta$ .

Površina poprečnog preseka žice posle njenog izduženja je

$$S = \pi(r-\Delta r)^2 = \pi r^2 \left(1 - \frac{\Delta r}{r}\right)^2 = S(1-\mu\delta)^2 \approx$$

$$\approx S(1-2\mu\delta) = 0,993 \text{ mm}^2$$

429. Ako sila intenziteta  $F_1$  zateže žicu AB, a sila intenziteta  $F_2$  žicu CD, onda se iz uslova ravnoteže  $\sum \vec{F}_{yi} = 0$  i  $\sum \mathcal{M}_E = 0$  dobija da je

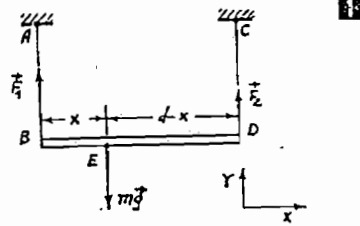
$$F_1 + F_2 = mg$$

$$F_1 x - F_2 (d-x) = 0$$

odakle je  $F_1 = mg \left(1 - \frac{x}{d}\right)$  i  $F_2 = \eta g \frac{x}{d}$  (1).

Žica AB će se izdužiti za  $\Delta l_1 = \frac{F_1 l_1}{SE_{y1}}$ , a žica CD za  $\Delta l_2 = \frac{F_2 l_2}{SE_{y2}}$ . Da bi štap ostao horizon-

talan, potrebno je da je  $\Delta l_1 = \Delta l_2$  odnosno  $\frac{F_1}{E_{y1}} = \frac{F_2}{E_{y2}}$  (2).



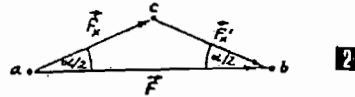
Iz relacija (1) i (2) je

$$x = d \frac{E_{y2}}{E_{y1} + E_{y2}} = 20 \text{ cm}$$

430. Na slici 2 je  $F_x$  intenzitet sile zatezanja dela užeta BC i DB. Iz trougla sila abc

je  $F_x = \frac{F}{2 \cos(\alpha/2)}$ , pa je relativno istezanje ovog dela užeta

$$\delta_1 = \frac{F}{2SE_y \cos(\alpha/2)}$$



Relativno istezanje dela užeta AB je

$$\delta_2 = \frac{F}{SE_y}$$

Odnos ovih istezanja je  $\delta_1/\delta_2 = (1/2) \cos(\alpha/2)$ ,

pri čemu je  $\delta_1/\delta_2 < 1$  za  $\alpha < 120^\circ$ .

431.  $E_y = \frac{Fl}{S\Delta l} = 111 \text{ GPa}$ .

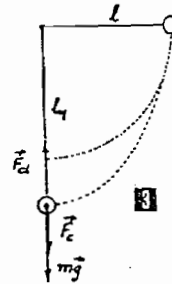
432. Na osnovu zakona održanja energije je

$$mg l_1 = \frac{k(\Delta l)^2}{2} + \frac{mv^2}{2} \quad (1)$$

gde je  $\Delta l = l_1 - l$ . Kako je

$$k(l_1 - l) = mg + \frac{mv^2}{l_1} \quad (2)$$

iz relacija (1) i (2) dobija



se da je

$$v = \sqrt{\frac{gl_1(l_1-l)}{2l_1-l}} = 1,29 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

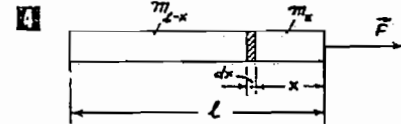
433. Prema II Njutnovom zakonu je

$$ma = F$$

$$m_x a = F - F_x$$

$$m_{l-x} a = F_x$$

gde je  $a$  — ubrzanje štapa,  $m_x = m \frac{x}{l}$  i  $m_{l-x} = m \frac{l-x}{l}$  — mase delova štapa dužine  $x$  i  $l-x$ ,



odakle je intenzitet sile naprezanja štapa u njegovom poprečnom preseku na rastojanju  $x$  od napadne tačke sile  $\vec{F}$

$$F_x = F \frac{l-x}{l}$$

Deo štapa dužine  $dx$ , pod dejstvom sile  $F_x$ , izdužiće se za  $d(\Delta l)$ , pa je prema Hukovom zakonu

$$\frac{d(\Delta l)}{dx} = \frac{1}{E_y} \frac{F_x}{S}$$

tj.

$$\Delta l = \frac{F}{SE_y} \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx = \frac{Fl}{2SE_y}$$

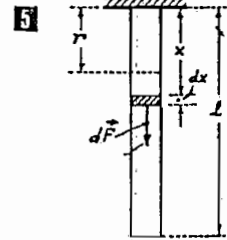
ili

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{2SE_y} = 7,25 \cdot 10^{-3}$$

434. a) Intenzitet elementarne sile koja vrši istezanje štapa je

$$dF = dm \cdot g = mg \frac{dx}{l} \quad (1)$$

pa je intenzitet sile istezanja u poprečnom



preseku, na udaljenosti  $r$  od gornjeg kraja štapa,

$$F(r) = \frac{mg}{l} \int_r^l x dx = mg \left(1 - \frac{r}{l}\right)$$

b) Prema Hukovom zakonu je

$$\frac{dF}{S} = E_y \frac{d(\Delta l)}{x}$$

odakle je prema jednačini (1)

$$d(\Delta l) = \frac{mg}{S E_y} x dx$$

tj.

$$\Delta l = \frac{mg}{S E_y} \int_0^l x dx = \frac{\rho g l^2}{2 E_y} = 3,53 \mu\text{m}$$

c) Elastična potencijalna energija elementarne dužine štapa  $dx$  usled istezanja je

$$dE_p = \frac{1}{2} \frac{F_x^2}{E_y S} dx$$

gde je  $F_x = \frac{mg}{l} (l-x)$ , pa se dobija

$$dE_p = \frac{m^2 g^2}{2 E_y S l^2} (l-x)^2 dx$$

tj.

$$E_p = \frac{m^2 g^2}{2 E_y S l^2} \int_0^l (l-x)^2 dx = \frac{(\rho g l)^2 V}{6 E_y} = 13,33 \mu\text{J}$$

435. a) Intenzitet elementarne sile istezanja u štapu, kao posledica dejstva centrifugalne sile, je

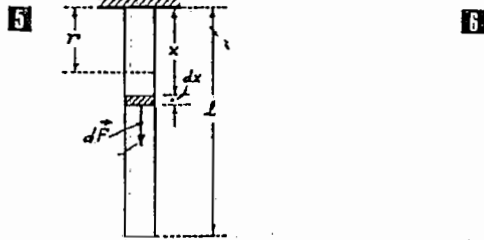
$$dF = x \omega^2 dm$$

ili

$$dF = x \omega^2 m \frac{dx}{l}$$

Intenzitet sile istezanja u zavisnosti od rastojanja  $r$  od ose rotacije je

$$F(r) = \frac{m \omega^2}{l} \int_r^l x dx = \frac{m \omega^2 l}{2} \left(1 - \frac{r^2}{l^2}\right)$$





450. Ako se pri opterećenju žice ne prede granica proporcionalnosti, onda je  $F=k\Delta l$ , tj.  $k=mg/\Delta l$ , pa je elastična potencijalna energija žice

$$E_p = \frac{k(\Delta l)^2}{2} = \frac{mg \cdot \Delta l}{2} = 74 \text{ mJ}$$

451.  $E_p = \frac{1}{2} E_y \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 V =$   
$$= \frac{1}{2} E_y \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 m = 322 \text{ J.}$$

452. a) Pod dejstvom sile intenziteta  $F$  prvi štap će se izdužiti za  $\Delta l_1 = \frac{Fl}{SE_{y1}}$ , a drugi za  $\Delta l_2 = \frac{Fl}{SE_{y2}}$ . Ukupno izduženje je

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{Fl}{S} \left(\frac{1}{E_{y1}} + \frac{1}{E_{y2}}\right) = \frac{Fl}{SE_{y_r}}$$

Odavde je ekvivalentni Jungov modul elastičnosti

$$E_{y_r} = \frac{E_{y1}E_{y2}}{E_{y1} + E_{y2}}$$

b) Elastična potencijalna energija štapa je

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{Sl}{E_{y_r}} \left(\frac{F}{S}\right)^2$$

453. Promena gravitacione potencijalne energije tega je

$$E_p = mg(l + \Delta l)$$

gde je  $\Delta l$  — traženo izduženje štapa.

Na osnovu zakona održanja energije je

$$mg(l + \Delta l) = \frac{k(\Delta l)^2}{2} = \frac{S}{2el} (\Delta l)^2$$

tj.

$$(\Delta l)^2 - \frac{2mgel}{S} \Delta l - \frac{2mge l^2}{S} = 0$$

Rešenja ove kvadratne jednačine su

$$\Delta l = \frac{mge}{S} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2S}{mge}}\right)$$

Pošto  $\Delta l$  u ovom slučaju ne može da bude negativno, to je

$$\Delta l = \frac{mge}{S} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2S}{mge}}\right) = 7,9 \text{ mm}$$

### 9. MEHANIČKE OSCILACIJE

454.  $x = (0,15 \text{ m}) \sin \left[ \left( 8\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} t + \frac{2\pi}{3} \right) \right]$

455. 1.

456. Kako je  $\frac{T}{2} = \frac{CD}{v} = 0,1 \text{ s}$ , to je odgovarajuća jednačina kretanja

$$x = x_0 \sin \left( 2\pi \frac{t}{T} + \varphi_0 \right) = (0,1 \text{ m}) \sin (20\pi t - \pi)$$

457. Iz uslova  $x = x_0$ , tj.  $\sin(\omega t + \varphi_0) = 1$ , nalazi se da je  $t = \frac{1}{300} \text{ s}$ .

458. 2.

459.  $x = x_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}$ , gde je  $T = 30 \text{ s}$ . Za  $x = x_0/2$  je  $\sin 2\pi \frac{t}{T} = 0,5$ , pa je  $2\pi \frac{t}{T} = \frac{\pi}{6}$ , odakle je  $t = 2,5 \text{ s}$ .

460. a)  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 12,1 \text{ s}$ ;

b)  $v = \frac{dx}{dt} = x_0 \omega \cos(\omega t + \varphi_0)$ , pa je

$$v_{\max} = x_0 \omega = 2,1 \text{ m/s}$$

c)  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -x_0 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$ , pa je

$$a_{\max} = -x_0 \omega^2 = 1,07 \text{ m/s}^2$$

461.  $F(t) = ma(t) = m \frac{d^2x}{dt^2} =$   
$$= -m x_0 \omega^2 \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

odakle se nalazi da je amplituda sile

$$F_0 = m x_0 \omega^2 = 2 \text{ mN}$$

462. Konstanta opruge je  $k = \frac{F}{x} = 500 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ , pa je period oscilovanja

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0,9 \text{ s}$$

a) frekvencija  $\nu = 1/T = 1,1 \text{ Hz}$ .

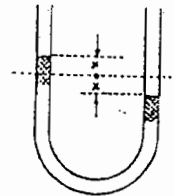
Preporučujemo da napišete jednačinu ovog kretanja ako je telo započelo da se kreće iz položaja najveće gravitacione potencijalne energije.

463. Kako je  $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k}}$ , a

$$T_2 = 3T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{k}}$$

to je  $m_2 = 8m_1 = 4 \text{ kg}$ .

464. U ravnotežnom stanju, nivo žive u oba kraka U-cevi je isti. Ako se pod dejstvom povišenog pritiska u jednoj strani cevi snizi nivo žive za  $x$ , onda je ukupna visinska razlika nivoa u krakovima cevi  $2x$ .



3

Intenzitet sile koja teži da živu vrati u ravnotežni položaj je

$$F = \Delta m \cdot g = 2xS\rho g = kx$$

gde je  $k = 2S\rho g$ , pa izraz za period oscilovanja  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$  dobija oblik

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2S\rho g}} \approx 1,46 \text{ s}$$

465. a) Period oscilovanja ovog sistema je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1)$$

dok je prema Hukovom zakonu  $\frac{F}{S} = E_y \frac{\Delta l}{l}$ , odakle je

$$F = \frac{SE_y}{l} \Delta l = k \Delta l \quad (2)$$

gde je  $k = SE_y/l$ , pa je prema relaciji (1)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{SE_y}}$$

b) Amplituda oscilovanja je prema relaciji (2)

$$x_0 = \Delta l = \frac{mgl}{SE_y}$$

pa se jednačina kretanja može napisati u obliku

$$x = x_0 \sin 2\pi \frac{t}{T} = \frac{mgl}{SE_y} \sin \left( \sqrt{\frac{SE_y}{ml}} t \right)$$

466. a) Brzina tela na početku druge strme ravnine je  $v_0 = \sqrt{2gh}$ , a njegovo usporenje tokom daljeg kretanja  $a = g \sin \beta$ , pa je vreme  $t$ ,

kretanja tela do najviše tačke određeno relacijom  $v_0 - g \sin \beta \cdot t = 0$ , odakle je  $t_1 = v_0 (g \sin \beta)$ . Isto vreme je potrebno telu da se vrati na početak strme ravnine, pa je ukupno vreme kretanja tela po njoj tokom jedne oscilacije

$$T_1 = 2t_1 = \frac{2v_0}{g \sin \beta}$$

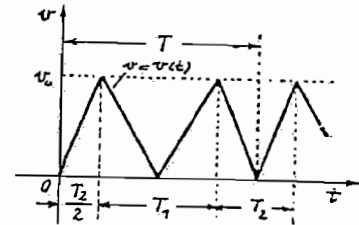
Analogno ovome, ukupno vreme kretanja tela po prvoj strmoj ravnini je

$$T_2 = \frac{2v_0}{g \sin \alpha}$$

pa je period kretanja tela

$$T = T_1 + T_2 = \frac{2v_0}{g} \left( \frac{1}{\sin \beta} + \frac{1}{\sin \alpha} \right) =$$
$$= 2 \sqrt{\frac{2h}{g}} \left( \frac{1}{\sin \beta} + \frac{1}{\sin \alpha} \right)$$

b) 1.



467. Period aksijalnih oscilacija ovog sistema

je  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ , gde je  $m$  — masa obešćenog tela, a  $k = \frac{F}{\Delta l}$  — jedinična sila žice ili njena koeficijent krutosti.

Prema Hukovom zakonu je  $\frac{F}{S} = E_y \frac{\Delta l}{l}$ ,

odakle je  $k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{E_y S}{l}$ , pa je

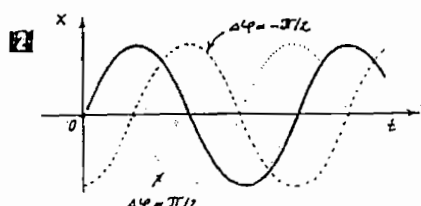
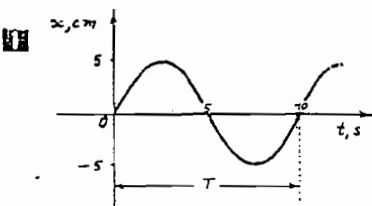
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{E_y S}}$$

Kako je  $S = \frac{\pi d^2}{4}$ , to je

$$T = \frac{4}{d} \sqrt{\frac{\pi ml}{E_y}} \approx 44,8 \text{ ms}$$

468. a) Iz uslova  $3mg = m_2g - m_2a$ , gde je  $a_0 = x_1 \omega^2$  — amplituda ubrzanja, nalazi se da je

$$x_0 = \frac{2g}{\omega^2} = \frac{2g}{(2\pi\nu)^2} = 12,4 \text{ cm}$$



b) Kada je  $ma_0 > mg$ , tj.  $a_0 > g$ , nalazi se da je

$$x_{0,2} > \frac{g}{\omega^2} = \frac{x_{0,1}}{2} = 6,2 \text{ cm}$$

469. Jednačina kretanja daske sa telom je

$$x = x_0 \sin \omega t$$

pa je ubrzanje ovog sistema

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = -x_0 \omega^2 \sin \omega t$$

odakle je amplituda ubrzanja  $a_0 = x_0 \omega^2$ .

Da bi telo počelo da se kreće po dasci, intenzitet sile trenja  $\mu mg$  treba da bude manji, u graničnom slučaju jednak najvećem intenzitetu inercijalne sile  $ma_0$  koja deluje na telo, tj.

$$\mu mg < mx_0 \omega^2$$

odakle je

$$\mu < \frac{x_0 \omega^2}{g} = \frac{4\pi^2 v^2 x_0}{g} \approx 0,32$$

470. a) Ako telo A ne bi oscilovalo, ukupna sila kojom tela deluju na podlogu u mirovanju bila bi

$$F_0 = (m_1 + m_2)g$$

Jednačina kretanja tela A je  $x = x_0 \sin \omega t$ , pa je sila koja deluje na telo A određena relacijom

$$F = m_1 a = m_1 \frac{d^2 x}{dt^2} = -m_1 x_0 \omega^2 \sin \omega t$$

Ukupna sila je

$$F_{uk} = (m_1 + m_2)g \pm m_1 x_0 \omega^2 \sin \omega t$$

odakle je

$$F_{\max} = (m_1 + m_2)g + m_1 x_0 \omega^2 = 39 \text{ N}$$

$$F_{\min} = (m_1 + m_2)g - m_1 x_0 \omega^2 = 21 \text{ N}$$

b) Telo B će se odvojiti od podloge kada je  $F_{\min} < 0$ , tj. kada je

$$(m_1 + m_2)g < m_1 x_0 \omega^2$$

odnosno

$$x_0 > \frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 \omega^2} = 6,7 \text{ cm}$$

471. U početnom trenutku kretanja sistema (neposredno posle sudara tela i metka) energija sistema je

$$E_1 = E_t + E_o + E_m$$

gde je  $E_t$  — energija tela,  $E_o$  — energija opruge i  $E_m$  — energija metka.

Pošto je u početnom trenutku  $E_o = 0$ , to je

$$E_1 = \frac{(m+M)v_1^2}{2}$$

gde je  $v_1$  — brzina tela i metka neposredno posle sudara. Kako je sudar plastičan, prema

zakonu održanja impulsa je  $mv_0 = (m+M)v_1$ , odakle je  $v_1 = v_0 \frac{m}{m+M}$ , pa je

$$E_1 = \frac{m^2 v_0^2}{2(m+M)}$$

U trenutku kada je otklon tela sa metkom najveći, energija sistema je

$$E_2 = \frac{kx_0^2}{2}$$

gde je  $x$  — amplituda oscilovanja sistema.

Prema zakonu održanja energije je  $E_1 = E_2$ , tj.

$$\frac{kx_0^2}{2} = \frac{m^2 v_0^2}{2(m+M)}$$

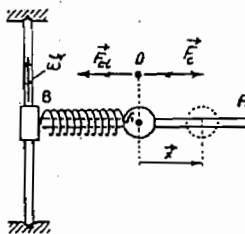
odakle se nalazi da je

$$x_0 = \frac{mv_0}{\sqrt{k(m+M)}}$$

Period oscilovanja sistema je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m+M}{k}}$$

472. Kada se uspostavi dinamička ravnoteža između elastične sile opruge  $\vec{F}_{el}$  i centrifugalne sile  $\vec{F}_c$ , kuglica miruje u položaju 0 u odnosu na osu štapa [6].



Kratkotrajnom promenom ugaone brzine izazove se oscilatorno kretanje kuglice, tokom koga se uspostavi dinamička ravnoteža inercijalne sile  $m\vec{a}$ , elastične sile opruge  $\vec{F}_{el}$  i centrifugalne sile  $\vec{F}_c$ , pa je

$$m\vec{a} + \vec{F}_{el} - \vec{F}_c = 0$$

tj.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx - m\omega^2 x = 0$$

odakle je

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \Omega^2 x = 0$$

gde je  $\Omega^2 = \frac{k}{m} - \omega^2$ . Iz prethodne relacije se

nalazi da je period oscilovanja kuglice

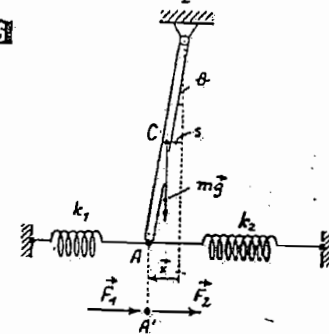
$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{(k/m) - \omega^2}}$$

473. Ako se štاپ izvede iz ravnotežnog položaja za  $\vec{x}$ , intenzitet rezultujućeg momenta sila  $\vec{F}_1 = -k_1 \vec{x}$ ,  $\vec{F}_2 = -k_2 \vec{x}$  i  $m\vec{g}$ , koji teži da vrati štاپ u ravnotežni položaj je [6]

$$\mathcal{M}_0 = 2kx \cdot l \cos \theta + mg \cdot s$$

gde je  $x = l \operatorname{tg} \theta$  i  $s = \frac{l}{2} \operatorname{tg} \theta$ .

[6]



Kako su u pitanju male oscilacije oko ravnotežnog položaja, to je  $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$  i  $\cos \theta \approx 1$ , odnosno

$$\mathcal{M}_0 = 2kl^2 \theta + mg \frac{l}{2} \theta$$

Prema II Njutnovom zakonu je  $I\ddot{\alpha} + \mathcal{M}_0 = 0$ , tj.

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \mathcal{M}_0 = 0$$

gde je  $I = ml^2/3$ , pa se dobija da je

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{12kl + 3mg}{2ml} \theta = 0$$

odakle je

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2ml}{12kl + 3mg}} = 0,94 \text{ s}$$

474. a) Ako je x udaljenost centra mase prstena od ravnotežnog položaja, onda je iz uslova dinamičke ravnoteže

$$m\vec{a} + 2kx = 0$$

tj.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2k}{m} x = 0$$

period oscilovanja prstena

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}} = 0,63 \text{ s}$$

b) Iz analognog uslova je  $m\ddot{x} - m\omega^2 x + 2kx = 0$ , tj.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \left( \frac{2k}{m} - \omega^2 \right) x = 0$$

odakle je period oscilovanja

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega} = 0,73 \text{ s}$$

c) Prsten neće oscilovati ako je  $m\omega^2 x > kx$ , tj. ako je

$$\omega > \sqrt{\frac{2k}{m}} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Naime, prsten neće oscilovati ako je ugaona brzina rotacije rama veća ili je jednaka sopstvenoj kružnoj frekvenciji oscilatora  $\omega_0 = \sqrt{2k/m}$ .

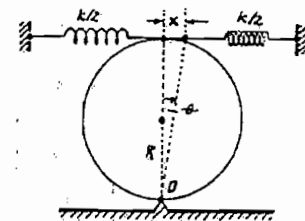
475. Ako je sistem izveden iz ravnotežnog položaja za neko malo rastojanje  $x$ , na disk će početi da deluje moment elastičnih sila opruga, koji teži da ga vrati u ravnotežni položaj. Intenzitet ovog momenta je

$$\mathcal{M}_0 = kx \cdot 2R$$

gde je  $x = 2R \operatorname{tg} \theta$ .

Kako je za male amplitude oscilovanja  $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$ , dobija se da je

$$\mathcal{M}_0 = 4kR^2 \theta$$



Prema II Njutnovom zakonu za rotaciju je

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \mathcal{M}_0 = 0$$

gde je  $I = \frac{1}{2} mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2$  — moment inercije diska za osu oscilovanja, pa je

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{8k}{3m} \theta = 0$$

odakle je period oscilovanja diska

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3m}{8k}} \approx 0,89 \text{ s}$$

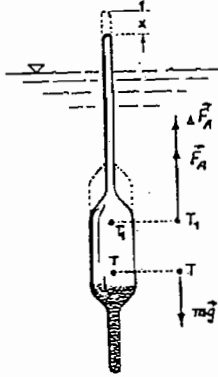
476. U ravnotežnom stanju areometra Arhimedova sila, koja deluje na njega, uravnotežena je sa silom teže. Kada se areometar izvede iz ravnotežnog položaja, potiskivanjem nadole za  $x$  [I], zapremina potopljenog dela areometra povećava se za

$$\Delta V = Sx = \pi r^2 x$$

a Arhimedova sila za

$$\Delta F_A = \rho g \Delta V = \rho g \pi r^2 x = kx$$

[I]



gde je  $k = \rho g \pi r^2$ . Ova sila vraća areometar u ravnotežni položaj, pa kako je pri tome uspostavljena dinamička ravnoteža sa inercijalnom silom, to je

$$ma + kx = 0$$

odnosno

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\pi r^2 \rho g}{m} x = 0$$

ili

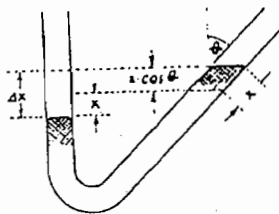
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

odakle je  $\omega^2 = \pi r^2 \rho g / m$ , tj.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\pi r^2 \rho g}} = 2,51 \text{ s}$$

477. Ako se u vertikalnom kraku U-cevi, pod uticajem povišenog pritiska, nivo žive snizi za  $x$ , nivo žive u kosom kraku će se povisiti za  $x \cdot \cos \theta$  [II], pa je razlika nivoa žive u kra-

[II]



kovima

$$\Delta x = x + x \cos \theta = x(1 + \cos \theta)$$

Intenzitet sile koja izaziva harmonijsko kretanje žive u cevi je  $F = \Delta \rho g S = \rho \Delta V g$ , tj.

$$F = \rho S \Delta x g = \rho g S x (1 + \cos \theta)$$

pa je prema II Njutnovom zakonu  $ma + F = 0$ , tj.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \rho g S x (1 + \cos \theta) = 0$$

ili

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\rho g S}{m} (1 + \cos \theta) x = 0$$

odakle je

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho g S (1 + \cos \theta)}} \approx 0,92 \text{ s}$$

478. Nakon izvođenja klipa iz ravnotežnog položaja [III] nastaje razlika pritiska u komorama, što dovodi do oscilovanja klipa oko ravnotežnog položaja. Sila koja vraća klip u ravnotežni položaj je

$$F = (p_2 - p_1)S = [p_0 - \Delta p - (p_0 + \Delta p)]S = -2\Delta p S$$

$$p_1 = p_0 + \Delta p \quad p_2 = p_0 - \Delta p$$

[III]



Imajući u vidu da je promena stanja gasa adijabatska, može se napisati da je

$$p_1 V_1^\kappa = p_0 V_0^\kappa$$

odakle se dobija

$$\frac{p_0 + \Delta p}{p_0} = \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{-\kappa} = \left(\frac{V_0 - xS}{V_0}\right)^{-\kappa} = \left(1 - \frac{xS}{V_0}\right)^{-\kappa}$$

Pošto je  $xS/V_0 \ll 1$ , to je

$$\left(1 - \frac{xS}{V_0}\right)^{-\kappa} = 1 + \frac{\kappa xS}{V_0}$$

pa je

$$1 + \frac{\Delta p}{p_0} = 1 + \frac{\kappa xS}{V_0}$$

ili

$$\Delta p = p_0 \frac{\kappa x}{l}$$

Sila pritiska je tada

$$F = -\frac{2\kappa x}{l} p_0 S$$

pa je prema II Njutnovom zakonu

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2\kappa p_0 S}{l} x = 0$$

tj.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

odakle je period oscilovanja klipa

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{2\kappa p_0 S}}$$

Ustanoviti relaciju za period oscilovanja klipa ako se pretpostavi da su procesi u gasu izotermiski.

479. Kada je sistem u ravnoteži, sila teže  $mg$  koja deluje na telo uravnotežava se sa elastičnom silom opruge  $\vec{F} = -k\vec{x}$ , tj.

$$mg + kx = 0 \quad (1)$$

Ako se telo, mase  $m$ , izvede iz ravnoteže, npr. povlačenjem nadole, tada je prema II Njutnovom zakonu u trenutku kada je ubrzanje tela  $a$  i intenzitet sile zatezanja užeta  $F_x$ ,

$$ma = mg - F_x \quad (2)$$

a za disk

$$I\alpha = \mathcal{K} = RF_x$$

Kako je  $\alpha = a/R$  (ako uže ne klizi po disku), dobija se da je

$$F_x = \frac{Ia}{R^2} = \frac{I}{R^2} \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (3)$$

Zamenom relacija (1) i (3) u relaciju (2), dobija se jednačina

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx + \frac{I}{R^2} \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

tj.

$$\left(m + \frac{I}{R^2}\right) \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

odakle je

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{I}{R^2}}}$$

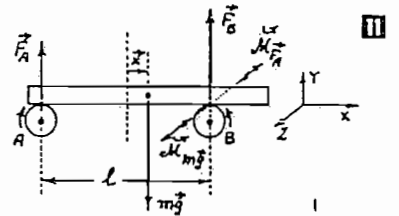
480. a) Iz uslova ravnoteže sila  $\vec{F}_A$ ,  $\vec{F}_B$  i  $mg$  [III] nalazi se da je

$$F_A + F_B - mg = 0 \quad (1)$$

a iz uslova ravnoteže njihovih momenata

$\mathcal{K}_{F_A}$ ,  $\mathcal{K}_{F_B}$ ,  $\mathcal{K}_{mg}$ , npr. za oslonac B, dobija se da je  $\mathcal{K}_{mg} - \mathcal{K}_{F_A} = 0$ , tj.

$$\left(\frac{l}{2} - x\right) mg - l F_A = 0 \quad (2)$$



Iz jednačina (1) i (2) nalazi se da je

$$F_A = \frac{mg}{l} \left(\frac{l}{2} - x\right) \quad \text{i} \quad F_B = \frac{mg}{l} (l - x)$$

pa su intenziteti sile trenja između grede i cilindara u osloncima A i B

$$F_{trA} = \mu F_A = \frac{\mu mg}{l} \left(\frac{l}{2} - x\right)$$

$$F_{trB} = \mu F_B = \frac{\mu mg}{l} (l - x)$$

Intenzitet sile koja vraća gredu u ravnotežni položaj je

$$F = F_{trB} - F_{trA} = \frac{2\mu mg}{l} x = kx$$

gde je  $k = 2\mu mg/l$ , pa je prema II Njutnovom zakonu

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2\mu g}{l} x = 0$$

odakle je period oscilacija sistema

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2\mu g}}$$

$$b) \mu = \frac{2\pi^2 l}{g T^2} = 0,302$$

481. Intenzitet rezultujućeg momenta sila koji teži da vrati sistem u ravnotežni položaj je  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2$  [IV], tj.

$$\mathcal{K} = m_1 g r_1 - m_2 g r_2 =$$

$$= m_1 g l \sin \theta - m_2 g x \sin \theta$$

Kako su u pitanju male oscilacije oko ravnotežnog položaja, to je  $\sin \theta \approx \theta$ , pa je

$$\mathcal{K} = (m_1 g l - m_2 g x) \theta$$

Prema II Njutnovom zakonu za rotaciju je

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + \mathcal{M}_c = 0$$

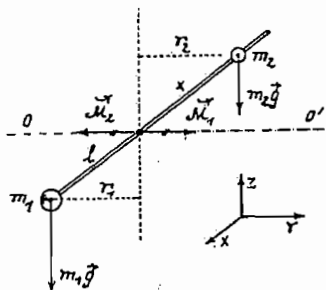
gde je  $I = m_1 l^2 + m_2 x^2$  — moment inercije sistema u odnosu na osu rotacije, pa je

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{m_1 g l - m_2 g x}{m_1 l^2 + m_2 x^2} \theta = 0$$

odakle je

$$\omega(x) = \sqrt{\frac{m_1 g l - m_2 g x}{m_1 l^2 + m_2 x^2}}$$

**12**



482. a)  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mgs}}$ , gde je  $s=0$ , pa je

$T_0 = \infty$ . Isto je i za osu A.

b)  $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{mgs}}$ , gde je  $I_1 = I_0 + ms_1^2$ . Ka-

ko je  $s_1 = r$ , to je  $I_1 = I_0 + mr^2 = \frac{mr^2}{2} + mr^2 = \frac{3mr^2}{2}$ , pa je

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{3r}{2g}} \approx 2,5 \text{ s}$$

c)  $T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_2}{mgs_2}}$ , gde je  $I_2 = I_A + ms_2^2$ . Ka-

ko je  $s = r$ , to je  $I_2 = I_A + mr^2 = \frac{mr^2}{4} + mr^2 = \frac{5mr^2}{4}$ , pa je

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{5r}{4g}} \approx 2,2 \text{ s}$$

483. a) Period oscilovanja sistema oko ose

$O_1$  je  $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{mgs_1}}$ , gde je  $s = \frac{3R}{4}$ , a

$$I_1 = I_0 + ms_1^2 = \frac{mR^2}{2} + m\left(\frac{3R}{4}\right)^2 = \frac{17mR^2}{16}$$

pa je

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{17R}{12g}} \approx 1,17 \text{ s}$$

Isto tako je

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_2}{mgs_2}} = 2\pi \sqrt{\frac{3R}{2g}} \approx 1,2 \text{ s}$$

$$T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{I_3}{mgs_3}} = 2\pi \sqrt{\frac{5R}{6g}} \approx 0,9 \text{ s}$$

b) Period oscilovanja diska ne zavisi od njegove mase.

c) Svi periodi oscilovanja su veći za  $\sqrt{2}$  puta.

484.  $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgx_c}} = 2\pi \sqrt{\frac{102R}{63g}}$ .

485. Period oscilovanja sistema je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgx_c}}$$

gde je  $I = \sum_{i=1}^3 (I_0 + md_i)$  — moment inercije sistema za osu  $O$ ,  $m = \sum_{i=1}^3 m_i$  — masa sistema i

$x_c = \frac{\sum_{i=1}^3 md_i}{\sum_{i=1}^3 m_i}$  — rastojanje centra mase sistema od ose rotacije, pa je

$x_c = \frac{\sum_{i=1}^3 md_i}{\sum_{i=1}^3 m_i}$  — rastojanje centra mase sistema od ose rotacije, pa je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^3 (I_0 + md_i)}{g \sum_{i=1}^3 (md_i)}} \quad (1)$$

Mase pojedinih diskova su  $m_1 = m_0$ ,  $m_2 = m_0/4$ ,  $m_3 = m_0/9$ , dok su njihovi momenti inercije za ose koje prolaze kroz njihove centre mase  $I_{01} = m_0 R^2/2$ ,  $I_{02} = I_{01}/16$ ,  $I_{03} = I_{01}/27$ . Rastojanja centara mase diskova od ose  $O$  su  $d_1 = R$ ,  $d_2 = 5R/2$  i  $d_3 = 10R/3$ , pa se zamenom u relaciju (1) nalazi da je

$$T = 2\pi \sqrt{3,42 \frac{R}{g}}$$

486. Period oscilovanja fizičkog klatna određen je relacijom

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}}$$

gde je  $I$  — moment inercije štapa za osu rotacije  $OO'$ ,  $m$  — masa štapa,  $g$  — ubrzanje

slobodnog padanja i  $a$  — najmanje rastojanje ose rotacije  $OO'$  od centra mase štapa. Moment inercije štapa u odnosu na osu rotacije  $OO'$  je

$$I = I_0 + ma^2 = \frac{1}{12} ml^2 + ma^2 = \frac{m}{12} (l^2 + 12a^2)$$

pa je period oscilovanja

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{m}{12} (l^2 + 12a^2)}{mga}} = 2\pi \sqrt{\frac{l^2 + 12a^2}{12ga}}$$

Prvi izvod perioda oscilovanja po  $a$  je

$$\begin{aligned} \frac{dT}{da} &= \frac{d}{da} \left( \frac{l^2 + 12a^2}{12ga} \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{l^2 + 12a^2}{12ga} \right)^{-1/2} \left( \frac{24a}{12ga^2} \right) \end{aligned}$$

Kako je  $a \neq 0$ , iz relacije  $12a^2 - l^2 = 0$  dobija se da je

$$a = \frac{l}{2\sqrt{3}} \approx 0,35 \text{ m}$$

U fizičkom smislu, ovaj period oscilovanja ne može da ima maksimalnu vrednost, pa rešenje  $a \approx 0,35 \text{ m}$ , za koje je prvi izvod jednak nuli, predstavlja onu udaljenost ose rotacije od centra mase štapa za koju je period oscilovanja minimalan.

487.  $\frac{\Delta T}{T} = \frac{T_0 - T_t}{T_t}$ , gde je  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$  i

$$T_t = T_0 \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right]$$

pa je

$$\frac{|\Delta T|}{T_t} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \dots}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \dots} \approx 1,3 \cdot 10^{-3}$$

488. a)  $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ ;

b)  $T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g+a}}$ ;

c)  $T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g-a}}$ ;

d)  $T_{\infty} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g-g}} = \infty$ . Ovo je slu-

čaj bestežinskog stanja pa klatno tada ne osciluje, tj. klatno zadrži onaj položaj u kome se nađe.

c)  $T_{3b} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{|g-a|}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g-2g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = T_1$ .

Dakle, klatno će imati isti period oscilovanja kao kada se lift ne bi kretao, samo će ono oscilovati oko gornjeg vertikalnog položaja, jer je  $ma > mg$ .

489. a)  $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ .

b) Ovakvo klatno je fizičko, pa je period oscilovanja

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{mgs}}$$

gde je  $I = I_0 + m(l+R)^2 = \frac{2}{5} mR^2 + m(l+R)^2$ , a  $s = l+R$ , pa je zamenom

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{2R^2 + 5(l+R)^2}{5g(l+R)}}$$

c) Ako je  $R = l/20$ , onda je

$$T_2' \approx 2\pi \sqrt{\frac{441,4}{420} \frac{l}{g}} = T_1 \sqrt{\frac{441,4}{420}}$$

pa je relativna greška

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{T_2' - T_1}{T_1} = 1 - \sqrt{\frac{420}{441,4}} = 0,0245$$

490. Period oscilovanja klatna časovnika pre izduženja je  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}}$ , a posle izduženja

$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ . Dizanjem na kvadrat ovih jednačina i njihovim oduzimanjem dobija se da je

$$T^2 - T_0^2 = \frac{4\pi^2}{g} (l - l_0) = \frac{4\pi^2}{g} \frac{l_0}{100} = \frac{T_0^2}{100}$$

odnosno  $\frac{T^2 - T_0^2}{T_0^2} = \frac{1}{100}$  (1). Odavde se dobija da je  $T^2 - T_0^2 = (T_0 + T)(T_0 - T) \approx 2T_0 \times (T_0 - T)$  (2), pošto je  $T \approx T_0$ .

Prema relacijama (1) i (2) je  $\frac{2T_0(T_0 - T)}{T_0^2} =$

$$-\frac{1}{100}, \text{ odnosno } \frac{\Delta T}{T_0} = -\frac{1}{200} = -0,005, \text{ ili}$$

$-0,5\%$ . Greška časovnika tokom 24 časa je prema tome  $-432 \text{ s}$ .

491.  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{mgs}}$ , gde je  $l = l_1 + l_2 = \frac{m_1 l^2}{3} + m_2 l^2$ , a  $m = m_1 + m_2$ , dok je rastojanje centra mase sistema do tačke vešanja

$$s = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 \frac{l}{2} + m_2 l}{m_1 + m_2} = \frac{l(m_1 + 2m_2)}{2(m_1 + m_2)}$$

pa je  $T = 2\pi \sqrt{\frac{2l(m_1 + 3m_2)}{3g(m_1 + 2m_2)}} = 1,88 \text{ s}$

492.  $T = 2\pi \sqrt{\frac{73R}{18g}}$

493. a)  $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 0,78 \text{ s}$ ;

b)  $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g - \frac{F}{m}}} = 0,86 \text{ s}$ ;

c)  $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g^2 + \left(\frac{F}{m}\right)^2}} = 0,77 \text{ s}$ .

494. Period oscilovanja matematičkog klatna sa kuglicom male mase je  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ , a sa kuglicom znatne mase je  $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l + \Delta l}{g}}$ ,

gde je  $\Delta l$  — izduženje žice pod dejstvom težine kuglice, čiji intenzitet u ovom slučaju iznosi  $mg$ . Relativno povećanje perioda oscilovanja je

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{T_1 - T}{T} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{l + \Delta l}{g}} - 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}}{2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}} = \sqrt{1 + \frac{\Delta l}{l}} - 1$$

Prema Hukovom zakonu je  $\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{SE_y} = \frac{mg}{SE_y}$ , pa je

$$\frac{\Delta T}{T} = \sqrt{1 + \frac{mg}{SE_y}} - 1$$

odakle je masa kuglice

$$m = \frac{SE_y}{g} \left[ \left( 1 + \frac{\Delta T}{T} \right)^2 - 1 \right]$$

Kako je  $\frac{\Delta T}{T} = 10^{-4} \ll 1$ , može da se zanemari

veličina drugog reda  $\left( \frac{\Delta T}{T} \right)^2$  u prethodnoj relaciji, pa je tada

$$m \approx \frac{2SE_y}{g} \cdot \frac{\Delta T}{T} = 41 \text{ g}$$

495. Ako je period oscilovanja tačnog časovnika  $T_1$ , onda on tokom 24 časa načini

$$N = \frac{24 \cdot 3600 \text{ s}}{T_1} \text{ oscilacija}$$

Ako je  $T_2$  period oscilovanja časovnika na visini  $h$ , onda je greška časovnika tokom 24 časa

$$\Delta t = N(T_2 - T_1) = 24 \cdot 3600 \text{ s} \cdot \frac{T_2 - T_1}{T_1} \quad (1)$$

Kako je  $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_1}}$ , a  $T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_2}}$ , to

je  $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{g_1}{g_2}}$ . Isto tako je  $\frac{g_1}{g_2} = \left( \frac{R}{R+h} \right)^2$ , gde

je  $R$  — poluprečnik Zemlje, pa je  $\frac{T_2}{T_1} = \frac{R}{R+h}$ ,

odnosno  $T_2 - T_1 = T_1 \frac{h}{R}$ . Prema relaciji (1) je

$$\Delta t = 24 \cdot 3600 \text{ s} \cdot \frac{h}{R} = -0,0108 \text{ s}$$

496. Sa slike 14 vidi se da je

$$E_p = mgh = mgl(1 - \cos \theta) = mgl \sin^2 \frac{\theta}{2} \approx 2mgl \frac{\theta^2}{4}$$

pa je

$$E_p(\theta) = \frac{mg l}{2} \theta^2 = k \theta^2$$

497. Period oscilovanja ploče kao fizičkog klatna je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgs}}$$

gde je  $I$  — moment inercije ploče u odnosu na osu oscilovanja 15, a  $s$  — rastojanje centra mase ploče od ose oscilovanja.

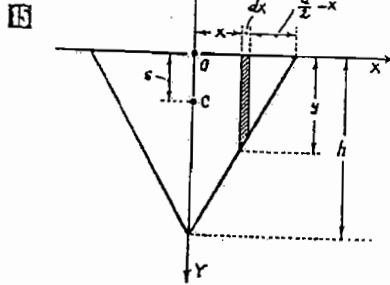
Moment inercije označenog dela ploče širine  $dx$  i visine  $y$  je

$$dl = \frac{1}{3} y^2 dm \quad (1)$$

gde je

$$y = \left( \frac{a}{2} - x \right) \operatorname{tg} \alpha \quad (2)$$

$$dm = \rho_s ds = \rho_s y dx \quad (3)$$



Površinska gustina ploče  $\rho_s$  je odnos mase ploče i njene površine, tj.

$$\rho_s = \frac{m}{S} = \frac{m \operatorname{tg} \alpha}{h^2} \quad (4)$$

Zamenom relacija (2), (3) (4) u relaciju (1) dobija se da je

$$I = \frac{2m \operatorname{tg}^3 \alpha}{3h^2} \int_0^{h/\operatorname{tg} \alpha} \left( \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha} - x \right)^3 dx = \frac{1}{6} mh^2$$

pa je period oscilovanja ploče, s obzirom da je  $s = h/3$ ,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{2g}} = 0,71 \text{ s}$$

498. a) Kod prigušenih oscilacija amplituda oscilovanja smanjuje se po zakonu  $x(t) = x_0 e^{-\alpha t}$ , pa je prema postavci zadatka

$$\frac{x_0}{x_0 e^{-\alpha t}} = n \quad \text{tj.} \quad \alpha = \frac{\ln n}{t} = 0,1 \frac{1}{\text{s}}$$

b)  $\Delta t = \frac{\ln e}{\alpha} = 10 \text{ s}$ .

499. Logaritamski dekrement je

$$\Lambda = \ln \frac{x_0}{x_0 e^{-\alpha t}} = \alpha T \quad (1)$$

gde je  $x_0$  — amplituda  $t$ -te oscilacije (može

da bude i prve), a  $x_{0, i+1}$  — amplituda  $i+1$  oscilacije.

Amplituda u početku oscilovanja iznosi  $x_0$ , a posle vremena  $t = 10 \text{ min}$  ona iznosi  $x_0(t) = x_0 e^{-\alpha t}$ . U datom slučaju je

$$\frac{x_0}{x_0(t)} = 2 = \frac{x_0}{x_0 e^{-\alpha t}} = e^{\alpha t}$$

odakle je

$$\alpha = \frac{\ln 2}{t}$$

pa je prema relaciji (1)

$$\Lambda = \frac{\ln 2}{t} T$$

Kako je za matematičko klatno  $T = 2\pi \sqrt{l/g}$ , to je

$$\Lambda = \frac{\ln 2}{t} 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2,3 \cdot 10^{-3}$$

500. Za  $t=0$ , amplituda oscilovanja je  $x_0$ , a za  $t=t_x$ , amplituda oscilovanja je  $x_0(t) = x_0 e^{-\alpha t_x}$ , pa je

$$\frac{x_0}{x_0(t)} = 4 = e^{\alpha t_x}$$

odakle je

$$t_x = \frac{\ln 4}{\alpha} \quad (1)$$

Logaritamski dekrement prigušenja je  $\Lambda = \alpha T$ , pa se zamenom u relaciju (1) dobija da je

$$t_x = \frac{T \cdot \ln 4}{\Lambda}$$

Traženi broj oscilacija je

$$n = \frac{t_x}{T} = \frac{\ln 4}{\Lambda} = 462$$

501. Kako je

$$Q = \frac{1}{2\Lambda}$$

gde je  $\Lambda = \alpha T$ , to je koeficijent prigušenja oscilacija

$$\alpha = \frac{\omega}{4\pi Q}$$

S obzirom na to što je

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

nalazi se da je sopstvena kružna frekvencija oscilatora

$$\omega_0 = \omega \sqrt{1 + \frac{1}{(4\pi Q)^2}} = 200,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$





523.  $k = \frac{1}{E_\nu} = \frac{1}{\rho c^2} = 0,696 \frac{1}{\text{GPa}}$ .

524.  $\frac{c_p}{c_s} = \frac{\sqrt{E_y/\rho}}{\sqrt{E_x/\rho}} = \sqrt{\frac{E_y}{E_x}}$ . Kako je

$E_y = 2E_x(1+\mu)$ , to je  $\frac{c_p}{c_s} = \sqrt{2(1+\mu)} \approx 1,6$

pošto je  $\mu \approx 0,35$ .

525.  $F = pS = \rho c v l^2 = v l^2 \sqrt{\rho E_y}$ .

526. Period zvučnog talasa je  $T=1/\nu$ . Brzina ploče u odnosu na vrh igle je  $v=R\omega$ . Ploča se za vreme  $T$  pomeri ispod igle za

$l = vT = R\omega/\nu$

U prvom slučaju je  $l_1 = 8,2 \text{ mm}$ , a u drugom  $l_2 = 82 \text{ }\mu\text{m}$ . Dužine na magnetofonskoj traci su  $l_1' = 0,16 \text{ mm}$  i  $l_2' = 16 \text{ }\mu\text{m}$ .

527.  $c = \sqrt{\frac{E_y}{\rho}}$  i  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_0(1+\gamma t)} = \frac{\rho_0}{1+\gamma t}$

pa je  $c = \sqrt{\frac{E_y}{\rho_0} (1+\gamma t)} = c_0 \sqrt{1+\gamma t}$ , a pošto

je  $\gamma t \ll 1$ , to je

$c(t) \approx c_0 \left(1 + \frac{1}{2} \gamma t\right)$

528. Brzina prostiranja zvučnih talasa kroz vazduh je

$c = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}}$

dok je temperatura vazduha na visini  $h$

$T = T_0 + \frac{dT}{dh} h = T_0 + ah$

pa je

$c = \sqrt{\frac{\kappa R(T_0 + ah)}{M}}$

Kako je  $c = dh/dt$ , dobija se da je vreme prostiranja zvuka do visine  $h_k$

$t = \int_0^{h_k} \sqrt{\frac{1}{\kappa R}} \frac{dh}{\sqrt{T_0 + ah}}$

ili

$t = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{M}{\kappa R}} (\sqrt{T_0 + ah_k} - \sqrt{T_0}) \approx 31,4 \text{ s}$

Kolika bi se greška učinila da nije uzeta u obzir promena temperature vazduha su promenom visine?

529. Kako je  $I_1 = I_0 e^{-\mu r_1}$  i  $I_2 = I_0 e^{-\mu r_2}$ ,

dobija se da je

$I_2 = I_1 e^{\mu(r_1 - r_2)} = 0,196 \text{ }\mu\text{W/m}^2$

530. a) Na osnovu relacije  $I = I_0 e^{-\mu l}$  nalazi se da je jačina izvora zvuka

$I_0 = I e^{\mu l} = 11,25 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

b) Kako je za granicu bola  $I_0 \approx 10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ , to je

$I_0 = I_0 e^{-\mu x}$

gde je  $x$ —rastojanje posmatrane tačke od izvora zvuka u kojoj zvučni talasi imaju jačinu  $I_0$ . Na osnovu prethodne relacije je

$\ln \frac{I_0}{I_0} = -\mu x$

odnosno

$x = \frac{1}{\mu} \ln \frac{I_0}{I_0} \approx 294 \text{ m}$

531. Jačina talasa je  $I = \frac{W}{ST} = \frac{1}{2} \rho c \omega^2 x_0^2$ , gde je  $S = 4\pi R^2$ , odakle je

$W = 4\pi^2 R^2 \rho c x_0^2 \omega = 4\pi^2 R^2 x_0^2 \omega \sqrt{\rho E_y}$

532. Pošto je jačina zvučnog talasa  $I = 2\pi^2 \nu^2 \rho c^3 x_0^2$ , gde je  $\nu$ —frekvencija talasa,  $\rho^0$ —gustina sredine (vazduha) na standardnim uslovima,  $c^0$ —brzina prostiranja talasa na standardnim uslovima i  $x_0$ —amplituda oscilovanja čestica sredine, a  $I = \frac{P}{4\pi r^2}$ , onda je

$x_0 = \sqrt{\frac{P}{8\pi^2 \nu^2 \rho^0 c^3}} = 3,07 \text{ }\mu\text{m}$

533. Amplituda oscilovanja čestica sredine na rastojanju  $r_1$  od tačkastog izvora talasa je

$a_{01} = \frac{a_0 e^{-\mu r_1}}{r_1}$

a na rastojanju  $r_2$

$a_{02} = \frac{a_0 e^{-\mu r_2}}{r_2}$

gde je  $a_0$ —amplituda oscilovanja čestica sredine na jediničnom rastojanju od izvora talasa (treba imati u vidu da je  $[a_0] = \text{m}$ ).

Kako su jačine talasa  $I_1 \sim a_{01}^2$  i  $I_2 \sim a_{02}^2$ , to je

$\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 e^{-2\mu(r_2 - r_1)}$  (1)

Prema uslovu zadatka je  $10 \log \frac{I_1}{I_2} = 9,45 \text{ dB}$ .

odakle je  $\frac{I_1}{I_2} = 9$ , pa je prema relaciji (1) traženi

koefficient slabljenja

$\mu = \frac{1}{2(r_2 - r_1)} \ln \left(\frac{3r_1}{r_2}\right)^2 = 0,0041 \frac{1}{\text{m}}$

534. a) Jednačina kretanja čestica sredine, pod dejstvom tačkastog izvora talasa, na rastojanju  $r_1$  od izvora talasa, ima oblik

$a_1 = \frac{a_0 e^{-\mu r_1}}{r_1} \sin \omega(t - r_1)$  (1)

gde je  $t_1 = r_1/c$ —vreme za koje se oscilacije prenese od izvora talasa do čestica sredine koje su na rastojanju  $r_1$ . Analogno je na rastojanju  $r_2$

$a_2 = \frac{a_0 e^{-\mu r_2}}{r_2} \sin \omega(t - r_2)$  (2)

Prema uslovu zadatka i jednačinama (1) i (2) je

$\frac{a_{01}}{a_{02}} = 3 = \frac{r_2}{r_1} e^{\mu(r_2 - r_1)}$

odakle je

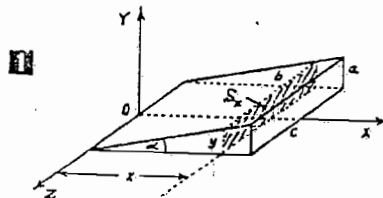
$\mu = \frac{1}{r_2 - r_1} \ln \frac{3r_1}{r_2} = 0,08 \frac{1}{\text{m}}$

b)  $L = 10 \log \frac{I_1}{I_2}$ . Kako je  $I_1 \sim a_{01}^2$  i  $I_2 \sim a_{02}^2$ ,

to je  $L = 20 \log \frac{a_{01}}{a_{02}} = 9,54 \text{ dB}$

535. Na telo deluje sila pritiska udarnog talasa čija horizontalna komponenta  $F_x$  ima intenzitet u trenutku kada je deformacija prešla put  $x$  (računat od trenutka kada je deformacija prošla normalnu ravan ZOY)

$F_x = \Delta p S_x = \Delta p cy = \Delta p cx \cdot \text{tg } \alpha$



gde je  $x = vt$  i  $\text{tg } \alpha = a/b$ . Prema II Njutnovom zakonu je

$a(t) = \frac{F_x}{m} = \frac{\Delta p c a v}{b m} t$

U trenutku kada je  $x = b = vt$ , dostignuto ubrzanje tela je

$a_{\text{max}} = \frac{\Delta p c a}{m}$

pa je odgovarajuće srednje ubrzanje (imajući

u vidu linearnu zavisnost  $a(t)$  od vremena)

$\langle a \rangle = \frac{a_{\text{max}}}{2} = \frac{\Delta p b c a}{2 m}$

a dostignuta brzina

$v_{\text{max}} = \frac{\Delta p c a}{2 m v}$

536. Od 17 cm do 17 m, pa je  $\frac{\lambda_{\text{max}}}{\lambda_{\text{min}}} = 1000$ .

537.  $\Psi = \Psi_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = \Psi_0 \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - \frac{\pi}{2}\right)$

538. Na rastojanju  $x_1$  od izvora talasa jednačina kretanja čestica sredine (pod dejstvom izvora talasa) ima oblik

$a_1 = a_0 e^{-\mu x_1} \cos \omega(t - t_1)$  (1)

gde je  $t_1 = x_1/c$ —vreme za koje se oscilacije prenese od izvora talasa do čestica sredine koje su na rastojanju  $x_1$ .

Analogno je na rastojanju  $x_2$ , pa je

$a_2 = a_0 e^{-\mu x_2} \cos \omega(t - t_2)$  (2)

Prema uslovu zadatka i jednačinama (1) i (2) je

$\delta = \frac{a_{01} - a_{02}}{a_{01}} = 1 - e^{-\mu \Delta x}$

gde je  $\Delta x = x_2 - x_1$ , tj.

$\Delta x = -\frac{1}{\mu} \ln(1 - \delta)$

Odgovarajuća razlika faza je

$\Delta \varphi = k \Delta x = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} =$

$= -\frac{2\pi}{\mu \lambda} \ln(1 - \delta) \approx \frac{2\pi \delta}{\mu \lambda} = 0,13 \text{ rad}$

539.  $n = \frac{c^0 \sqrt{T_1/T_0}}{\sqrt{E_y/\rho}} = 0,078$

540.  $\alpha_p = \arcsin n = 4^\circ 28'$ .

541.  $\nu_0 = 896 \text{ Hz}$ ,  $\nu_1 = 2\nu_0 = 1792 \text{ Hz}$  i  $\nu_2 = 3\nu_0 = 2688 \text{ Hz}$ .

542. a)  $W_k = 0$ ,  $W_p = 2W$ ;

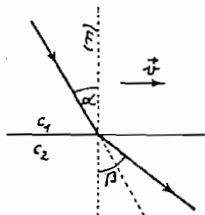
b)  $W_k = 2W$ ,  $W_p = 0$ .

543. Ne prostire se pravolinijski, jer se brzina prostiranja zvuka povećava sa porastom dubine.

544. Ako su pravac i smer strujanja vazduha kao na slici 2, onda je

$$x = \text{arc sin} \left( \frac{c_2}{c_1 + v \sin \alpha} \right)$$

2



545. 4.

546. Kako je  $d = \lambda/2$ , talasna duzina zvuka je  $\lambda = 2d$ , a frekvencija

$$v = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2d} = 3,86 \text{ kHz}$$

547. Ako je  $n$  broj figura, a  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  - talasne duzine zvučnog talasa u štapu i cevi (vazduhu), onda je  $l_2 = n \frac{\lambda_2}{2}$  (1). Za Kuntovu

cev važi odnos  $\frac{c_2}{c_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  (2). Kako je  $\lambda_1 = 2l_1$ , prema relacijama (1) i (2) potrebna duzina vazdušnog stuba je  $l_2 = n l_1 \frac{c_2}{c_1} = 0,31 \text{ m}$ .

548. Da bi se zvučni talasi poništili na izlasku iz Kvinkove cevi, potrebno je da se njihove faze razlikuju za  $\Delta \varphi = (2k+1)\pi$ , odnosno da im je razlika pređenih puteva  $\Delta s = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$ , pa je potrebno pomeriti krak cevi za

$$\Delta l = \frac{\Delta s}{2} = (2k+1) \frac{\lambda}{4}$$

gde je  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Najmanje potreban pomeranje kraka cevi je  $\Delta l_{\min} = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4v} = 7,5 \text{ cm}$ . Pošto je apsolutna greška merenja ove duzine  $\Delta l = 0,1 \text{ cm}$ , relativna greška merenja talasne duzine iznosi

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} \cdot 100 = \frac{\Delta l}{l} \cdot 100 = 1,3\%$$

549.  $\frac{l_1 - l_0}{l_0} = 1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_0}} = 0,052$ , što znači da je duzinu vazdušnog stuba potrebno povećati za  $5,2\%$ .

550. a)  $l = n \frac{\lambda}{2} = \frac{n\pi c}{\omega}$ , gde je  $n = 1, 2, 3, \dots$

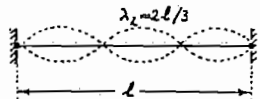
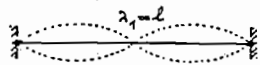
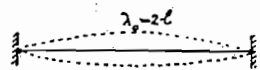
b)  $\lambda_k = v_k / \omega$ .

551.  $v_0 = \frac{c}{2d} = \frac{1}{2d} \sqrt{\frac{\rho \times}{\rho}} = 8,25 \text{ Hz}$ .

552. 50 m, 150 m, 450 m, itd.

553. a) Prema slici 3 je

$$\lambda_k = \frac{2l}{2k+1}$$



3

gde je  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ , pa talasna duzina stojećeg talasa koja odgovara npr. osnovnoj oscilaciji žice iznosi  $\lambda_0 = 2 \text{ m}$ , prvoj harmonijskoj oscilaciji  $\lambda_1 = 1 \text{ m}$ , itd.

b)  $v_0 = \frac{c}{\lambda_k} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = 157,6 \text{ Hz}$ .

554.  $F = \rho S (2lv_0)^2 = \rho \frac{\pi d^2}{4} (2lv_0)^2 = 7,4 \text{ N}$ .

555. Imajući u vidu dijagrame mogućih stojećih talasa u štapu 4, može se napisati da je talasna duzina zvučnog talasa u štapu pri njegovoj rezonanciji

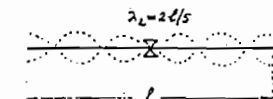
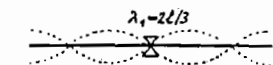
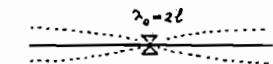
$$\lambda_k = \frac{2l}{2k+1}$$

gde je  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ , pa su odgovarajuće rezonantne frekvencije štapa

$$v_k = \frac{v}{\lambda_k} = \frac{2k+1}{2l} \sqrt{\frac{E_Y}{\rho}}$$

Uj. za:

- $k = 0$  je  $v_0 = 2,55 \text{ kHz}$  (osnovni harmonik)
- $= 1$   $v_1 = 7,64 \text{ kHz}$  (1. harmonik)
- $= 2$   $v_2 = 12,73 \text{ kHz}$  (2. harmonik)
- $= 3$   $v_3 = 17,82 \text{ kHz}$  (3. harmonik)
- $= 4$   $v_4 = 22,91 \text{ kHz}$  (4. harmonik)



4

556. Osnovna frekvencija oscilovanja štapa je  $v = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{E_Y}{\rho}}$ . Kako je  $l = l_0(1 + \alpha t)$ , a  $\rho =$

$$\frac{m}{V} = \frac{m}{V_0(1 + \gamma t)} = \frac{m}{S l_0(1 + \gamma t)}$$
, to je

$$v = \frac{1}{2l_0(1 + \alpha t)} \sqrt{\frac{E_Y S l_0}{m} (1 + \gamma t)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_Y S}{m l_0} \frac{1 + 3\alpha t}{1 + 2\alpha t}} \quad (1)$$

Zanemarujući malu veličinu drugog reda  $\alpha^2 t^2$ , dobija se iz relacije (1)

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_Y S}{m l_0} \frac{1 + 3\alpha t}{1 + 2\alpha t}} \quad (2)$$

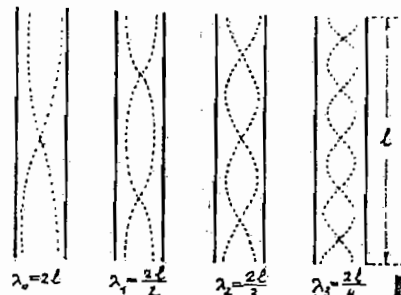
Prema jednačini (2) za temperature  $t_1$  i  $t_2$  je

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{(1 + 3\alpha t_1)(1 + 2\alpha t_2)}{(1 + 2\alpha t_1)(1 + 3\alpha t_2)}} \quad (3)$$

Zanemarujući male veličine drugog reda i uvodeći u relaciju (3) da je  $t_2 = 2t_1$ , dobija se da je

$$\frac{v_1}{v_2} \approx \sqrt{\frac{1 + 7\alpha t_1}{1 + 8\alpha t_1}} = 0,9996$$

557.  $v = \frac{kc}{2l}$ . Za  $k = 2$  je  $v_2 = \frac{c}{l} = 2050 \text{ Hz}$ .



558. a) Prema slici 5 je talasna duzina zvučnog talasa u cevi pri rezonanciji vazdušnog stuba u njoj

$$\lambda_k = \frac{2l}{k+1}$$

gde je  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ , pa je frekvencija  $k$ -tog harmonika

$$v_k = \frac{k+1}{2l} \sqrt{\frac{\gamma R T^0}{M}}$$

Za  $k = 3$  je  $v_3 = 662 \text{ Hz}$ .

b)  $\Delta v = \frac{k+1}{2l} \sqrt{\frac{\gamma R}{M}} (\sqrt{T_1} - \sqrt{T_0}) = 32 \text{ Hz}$

20\*

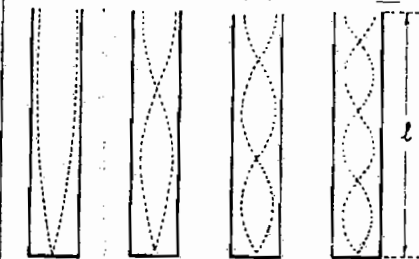
559. Prema slici 6 je talasna duzina zvučnog talasa u cevi pri rezonanciji vazdušnog stuba u njoj

$$\lambda_k = \frac{4l}{2k+1}$$

gde je  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ , pa je frekvencija  $k$ -te sopstvene oscilacije

$$v_k = \frac{2k+1}{4l} \sqrt{\frac{\gamma p^0}{\rho}}$$

6



$\lambda_0 = 4l$ ,  $\lambda_1 = \frac{4l}{3}$ ,  $\lambda_2 = \frac{4l}{5}$ ,  $\lambda_3 = \frac{4l}{7}$

- Za  $k = 0$  je  $v_0 = 82,9 \text{ Hz}$   
 $= 1$   $v_1 = 248,7 \text{ Hz}$   
 $= 2$   $v_2 = 414,5 \text{ Hz}$   
 $= 3$   $v_3 = 580,4 \text{ Hz}$   
 $= 4$   $v_4 = 746,1 \text{ Hz}$   
 $= 5$   $v_5 = 911,9 \text{ Hz}$   
 $= 6$   $v_6 = 1077,7 \text{ Hz}$

pa je  $k = 5$ , a ukupno ih ima šest.

560. a)  $10 \log \frac{I_2}{I_1} = 1$ , pa je  $\frac{I_2}{I_1} = 1,26$ .

b)  $L_{\min} = 10 \log \frac{I_{\min}}{I_{\min}} = 0 \text{ Ph}$ ;

$L_{\max} = 10 \log \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = 130 \text{ Ph}$ .

561.  $L = 10 \log \frac{I_x}{I_{x+\lambda}} = 10 \log e^{\mu \lambda} = 4,34 \log \mu \lambda$ .

## 11. MEHANIKA FLUIDA

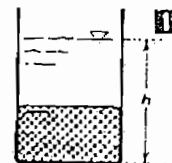
562.  $p_1 = p + \rho g \Delta h = 3,73 \text{ bar}$ .

563. Hidrostatički pritisak iznosi  $p = \rho g h = 5,15 \text{ MPa}$ , pa je ukupni pritisak  $p_A = p_a + p = 5,25 \text{ MPa}$ .

564. Pritisak na dno suda je 11

$$p_2 = \rho_1 g \frac{h}{2} + \rho_2 g \frac{h}{2} =$$

$$= \frac{g h}{2} (\rho_1 + \rho_2) = 21,5 \text{ kPa}$$



Pritisak vode na živu je  $p_1 = \rho_1 g \frac{h}{2} = 1,47 \text{ kPa}$ .

565. Pritisak na dno suda je  $p = p_1 + \rho g h = \frac{F}{S} + \rho g h = 0,65 \text{ MPa}$ . Prema Hukovom zakonu za zapreminsku deformaciju je  $\Delta V = \frac{VF}{SE_V}$ , gde je  $\Delta V = \Delta h S$ , a  $V = h S$ , pa je smanjenje visine vodenog stuba

$$\Delta h = \frac{Fh}{SE_V} = 0,6 \text{ mm}$$

566.  $F = pS = \rho g HS = 13,7 \text{ kN}$ .

567. Voda neće isticati ako je  $p_a > \rho g h$ , odnosno  $h > \frac{p_a}{\rho g} \approx 10,3 \text{ m}$ . Kako su dimenzije uobičajenih sudova manje od dobijenog rezultata, voda neće isticati.

Preporučujemo da izračunate visinu  $h$  za slučaj kada se sud puni živom.

568. Prilikom postavljanja tela na slobodnu površinu tečnosti, sila pritiska na dno suda se povećava za  $mg$ . Ako je povišenje pritiska na dno suda  $\Delta p = \rho g \Delta h$ , a sila pritiska  $\Delta F = \Delta p S$ , onda je

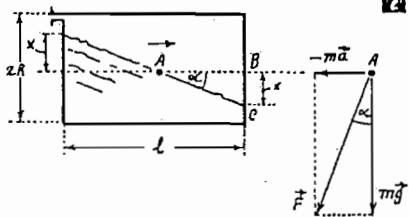
$$mg = \Delta p S = \rho g \Delta h S$$

pa je

$$\Delta h = \frac{m}{\rho S}$$

569.  $h = 0,94 \text{ cm}$ .

570. Rezultujuća sila  $\vec{F} = m\vec{g} + (-m\vec{a})$  mora da bude normalna na slobodnu površinu tečnosti, jer kod tečnosti nema tangencijalnih sila. Iz trougla ABC je  $\tan \alpha = 2x/l$ , dok je iz vektorskog trougla ACD isto tako  $\tan \alpha = a/g$ , pa je  $2x/l = a/g$ .



Za granični slučaj, kada voda počne da isticati kroz otvor na vrhu, biće  $x=R$ , pa je tada minimalno ubrzanje cisterne

$$a_{\min} = \frac{2gR}{l} = 3,27 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

571.  $p_x = 53,5 \text{ kPa}$ .

572. a)  $F = pS = \rho g (H+h) \pi D^2/4$ ;

b)  $\langle p \rangle S = [\rho g (H+2h)] \pi Dh$ .

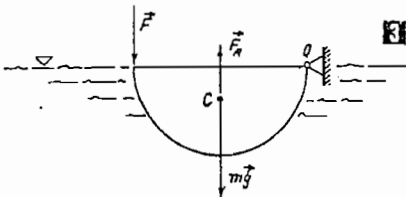
573.  $p_x = \rho g H + \rho_{\text{Hg}} g h = 53,4 \text{ kPa}$ .

574.  $h = 6,6 \text{ m}$ .

575.  $M > m + \frac{\pi \rho D^2}{4} \left( h - \frac{H}{2} \right)$ .

576. Iz uslova  $\sum \mathcal{M}_O = 0$ , tj. uslova ravnoteže momenta sile  $\vec{F}$ , Arhimedove sile  $\vec{F}_A$  i sile teže  $m\vec{g}$  za tačku O nalazi se da je

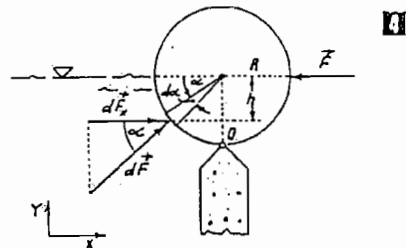
$$2RF + Rmg - RF_A = 0$$



gde je  $m = \rho V = \frac{4}{6} \rho \pi R^3$  i  $F_A = \rho_0 g V = \frac{4}{6} \rho_0 \pi g R^3$ , pa je traženi intenzitet sile

$$F = \frac{1}{3} \pi g R^3 (\rho_0 - \rho)$$

577. Iz uslova ravnoteže  $\sum \mathcal{M}_O = 0$ , tj. uslova



ravnoteže momenta sile  $\vec{F}$  i rezultujuće sile pritiska vode na cilindar, za tačku O nalazi se da je

$$RF = \int_0^{\pi/2} d\mathcal{M} \quad (1)$$

Kako je  $dF = p dS = \rho g l R dx$ , nalazi se da je

$$d\mathcal{M} = (R-h) dF_x = (R-h) dF \cos \alpha$$

gde je  $h = R \sin \alpha$ , pa je

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2} \rho g l R^3 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin \alpha) \sin 2\alpha d\alpha = \frac{1}{6} \rho g l R^3$$

tj. na osnovu relacije (1) je

$$F = \frac{1}{6} \rho g l R^2$$

578.  $F_{\max} = \frac{\rho g l h^2}{3} + \frac{mg}{2} = 10055 \text{ N}$ .

579. Na osnovu barometarske formule

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}$$

nalazi se da je

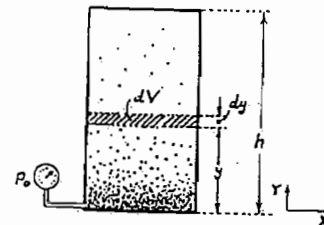
$$\ln \frac{p_0}{p} = \frac{Mgh}{RT}$$

odakle je

$$h = \frac{RT}{Mg} \ln \frac{p_0}{p} = 2045 \text{ m}$$

580. Masa gasa u elementarnoj zapremini suda  $dV$  je

$$dm = \rho(y) dV = \rho(y) S dy$$



gde je prema barometarskoj formuli

$$\rho(y) = \frac{M}{RT} p_0 e^{-\frac{Mgy}{RT}}$$

pa je ukupna masa gasa u sudu

$$m = \int_V \rho dV = \frac{M p_0 S}{RT} \int_0^h e^{-\frac{Mgy}{RT}} dy$$

tj.

$$m = \frac{p_0 S}{g} \left( 1 - e^{-\frac{Mgh}{RT}} \right)$$

581. Po definiciji centra mase je

$$y_c = \frac{\int_0^h y dm}{\int_0^h dm} \quad (1)$$

gde je  $dm = \rho(y) dV = \rho(y) S dy$ , dok je prema barometarskoj formuli

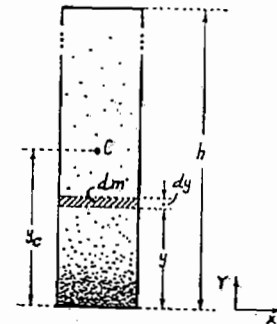
$$\rho(y) = \frac{M}{RT} p_0 e^{-\frac{Mgy}{RT}}$$

gde je  $p_0$  - pritisak na visini  $y=0$ , pa je

$$dm = \frac{SM}{RT} p_0 e^{-\frac{Mgy}{RT}} dy \quad (2)$$

Prema relacijama (1) i (2) je

$$y_c = \frac{\int_0^h y e^{-\frac{Mgy}{RT}} dy}{\int_0^h e^{-\frac{Mgy}{RT}} dy}$$



Pošto  $h \rightarrow \infty$ , a imajući u vidu činjenicu da je  $\int_0^\infty x e^{-x} dx = 1$ , dobija se da je

$$y_c = \frac{RT}{Mg}$$

582. Promena atmosferskog pritiska na visinskoj razlici  $dh$  je

$$dp = -\rho g dh \quad (1)$$

Za količinu gasa, mase  $m$ , na površini Zemlje i na nekoj visini  $h$  je  $p_0 V_0 = pV$ , odakle je

$$\frac{p}{p_0} = \frac{V_0}{V}$$

pa se na osnovu opšteg zakona idealnih gasova

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{pV}{T}$$

dobija da je

$$p = p_0 \frac{p T_0}{p_0 T} \quad (2)$$

Iz relacije  $p_0 V_0 = \frac{m}{M} RT_0$ , nalazi se da je

$$p_0 = p_c \frac{RT_0}{M} \quad (3)$$

Po definiciji zadatka je  $T_0/T = 1/(1-\beta h)$  (4), pa se zamenom relacija (2), (3) i (4) u relaciju (1) dobija da je

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT_0} \frac{dh}{1-\beta h}$$

tj.

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \frac{Mg}{RT_0 \beta} \int_0^h \frac{d(1-\beta h)}{1-\beta h}$$

odakle je

$$\ln \frac{p}{p_0} = \frac{Mg}{RT_0} \ln(1-\beta h)$$

ili

$$p(h) = p_0(1-\beta h)^{\frac{Mg}{RT_0 \beta}}$$

Ova barometarska formula važi za slučaj kada se temperatura vazduha menja sa promenom visine, što je u fizičkom smislu realan slučaj, ali ona važi samo za male visine  $h$ .

$$583. \rho = \rho_0 \frac{p T_0}{p_0 T} = \frac{\rho_0 M}{RT_0} (1-\beta h)^{\frac{Mg}{RT_0 \beta} - 1}$$

584. Da bi se bure potopilo u vodu, treba da je  $\rho_0 V < (m_1 + m_2)g$ , gde je  $\rho_0$ —gustina vode, a  $m_1$ —masa peska. Prema tome, masa peska mora da bude  $m_2 > \rho_0 V - m_1$ , a njegova zapremina

$$V_2 > V_1 \frac{\rho_0}{\rho_2} - \frac{m_1}{\rho_2} = 0,12 \text{ m}^3$$

$$585. \rho = 800 \text{ kg/m}^3.$$

586. Do 200 ljudi.

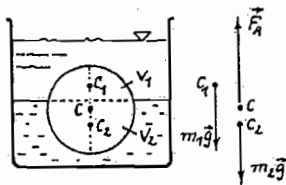
587. Ako su  $V_1$  i  $V_2$ —zapremine delova kugle koji su potopljeni u gornjoj i donjoj tečnosti, onda je ukupna zapremina kugle

$$V = V_1 + V_2 \quad (1)$$

Intenzitet sile teže koja deluje na gornji deo kugle je  $m_1 g = \rho_1 V_1 g$ , a na donji  $m_2 g = \rho_2 V_2 g$ , dok je intenzitet Arhimedove sile koja deluje na kuglu  $\rho_0 g V_1 + \rho_2 g V_2$ . Kako su ove sile u ravnoteži, to je

$$\rho_1 V_1 g + \rho_2 V_2 g = \rho_1 g V_1 + \rho_2 g V_2 \quad (2)$$

7



Na osnovu relacija (1) i (2) nalazi se da je

$$V_1 = V \frac{\rho_2 - \rho}{\rho_2 - \rho_1} \quad \text{i} \quad V_2 = V \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}$$

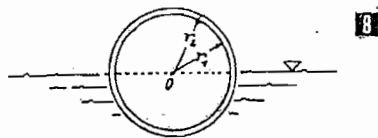
$$588. 6,25\%$$

589. Prema zad. 587. je

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\rho_2 - \rho}{\rho - \rho_1} = 3$$

590. a) Zapremina metalnog dela lopte je

$$V = \frac{4}{3} \pi (r_2^3 - r_1^3) \quad 8. \quad \text{Kako sila teže koja de-$$



luje na loptu i Arhimedova sila moraju da budu u ravnoteži, to je

$$\rho_1 g V = \rho g V_1 / 2 \quad (1)$$

gde je  $V_1 = \frac{4}{3} \pi r_1^3$ —zapremina lopte. Na osnovu relacije (1) je

$$\rho_1 = \frac{\rho}{2} \frac{1}{1 - (r_1/r_2)^3} = 1476 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

b) Pri lebdenju lopte je  $\rho_1 g V = \rho_2 g V_1$ , odakle je

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{V}{V_1} = \frac{\rho}{2} = 400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

591. Ako su  $V_1$  i  $V_2$  zapremine žive i stakla u sastavu termometra, a  $\rho_1$  i  $\rho_2$ —njihove gustine, onda je težina termometra u vazduhu

$$Q_1 = \rho_1 g V_1 + \rho_2 g V_2 \quad (1)$$

a u vodi

$$Q_2 = Q_1 - \rho_0 g (V_1 + V_2)$$

uj.

$$\Delta Q = Q_1 - Q_2 = \rho_0 g (V_1 + V_2) \quad (2)$$

gde je  $\rho_0$ —gustina vode. Na osnovu relacija (1) i (2) nalazi se da je zapremina žive

$$V_1 = \frac{\rho_0 Q_1 - \rho_2 \Delta Q}{\rho_0 g (\rho_1 - \rho_2)}$$

a njena masa

$$m_1 = \rho_1 V_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2} \frac{\rho_0 Q_1 - \rho_2 \Delta Q}{\rho_0 g} = 53,3 \text{ g}$$

592. Na osnovu uslova ravnoteže sile teže i Arhimedove sile koje deluju na cev nalazi se da je  $\rho_1 g V_1 = \rho_2 g V_2$ , odakle je

$$\rho_1 l \left[ \frac{\pi d^2}{4} - \frac{\pi (d - 2\Delta d)^2}{4} \right] = \rho_2 l \frac{\pi d^2}{4}$$

gde je  $d$ —spoljašnji prečnik cevi,  $\Delta d$ —njena debljina,  $l$ —dužina. Iz prethodne jednačine nalazi se da je

$$d = 2\Delta d \frac{1 \pm \sqrt{1 - (\rho_2/\rho_1)^2}}{\rho_2/\rho_1} \approx 2\Delta d \frac{\rho_1}{\rho_2} = 12,2 \text{ mm}$$

593. Ubrzanje loptice tokom kretanja nagore je

$$a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{\rho g V}{m} - g$$

pa je brzina loptice tokom isplivanja

$$v = \sqrt{2h \left( \frac{\rho g V}{m} - g \right)}$$

a visina koju će loptica dostići

$$h_0 = \frac{v^2}{2g} = h \left( \frac{\rho V}{m} - 1 \right) = h \left( \frac{4\pi \rho R^3}{3m} - 1 \right)$$

594. Usled dejstva sile teže  $mg$  kocka će se potopiti za  $y$ , pri čemu nije potrebno delovati spoljašnjom silom, niti ulagati bilo kakav rad. Pri ovome se uspostavi ravnoteža

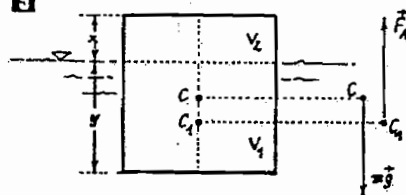
sile teže  $mg$  i Arhimedove sile  $F_{A1}$ , pa je  $mg = F_{A1}$ , gde je  $F_{A1} = \rho_0 g V_1 = \rho_0 g a^2 y$ . Dakle,

$$mg = \rho_0 g a^2 y$$

odakle je dubina spontanog potapanja

$$y = \frac{mg}{\rho_0 g a^2} = \frac{m}{\rho_0 a^2}$$

8

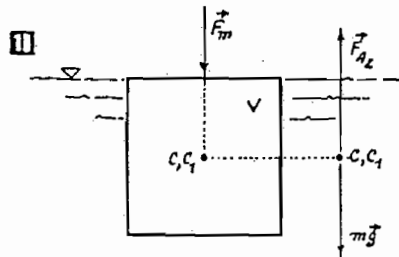


S obzirom da je masa kocke  $m = \rho a^3$ , zamenom u prethodnoj relaciji nalazi se da je

$$y = a \frac{\rho}{\rho_0} = 0,8a$$

Ostali deo kocke, visine  $x = a - y = a - 0,8a = 0,2a$ , mora se potopiti dejstvom vertikalne

sile  $\vec{F}$ , čiji se intenzitet povećava linearno sa



dubinom potapanja  $h$ . Intenzitet sile  $\vec{F}_m$  pri potpunom potapanju kocke iznosi 11

$$F_m = \rho_0 g V_2$$

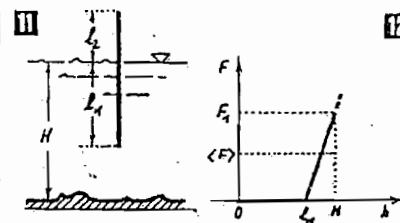
gde je  $V_2 = a^2 x$ —zapremina naknadno potopljenog dela kocke, pa je

$$F_m = \rho_0 g a^2 x$$

Rad ove sile je

$$A = \langle F \rangle \cdot x = \frac{F_m}{2} \cdot x = \frac{\rho_0 g a^2 x^2}{2} \approx 0,31 \text{ J}$$

595. Štap će se spontano potopiti do dužine  $l_1$ , pri čemu se uspostavi ravnoteža



Arhimedove sile, intenziteta  $\rho_0 g l_1 S$ , i sile teže, intenziteta  $\rho g l_1 S$ , koja deluje na štap, pa je

$$\rho_0 g l_1 S = \rho g l_1 S \quad (1)$$

gde je  $\rho_0$ —gustina vode, a  $S$ —površina poprečnog preseka štapa. Na osnovu relacije (1) je

$$l_1 = l \frac{\rho}{\rho_0} \quad (2)$$

Prema tome, za potapanje štapa do dubine  $l_1$  nije potrebno uložiti rad spoljašnje sile, već to čini gravitaciona sila.

U trenutku kada se štapom dodirne dno jezera, potrebno je silom  $\vec{F}_1$  savladati Arhimedovu silu intenziteta

$$F_A = \rho_0 g S (H - l_1) \quad (3)$$

Kako intenzitet ove sile u toku potapanja štapa linearno raste sa dubinom, to je izvršeni rad pri ovom potapanju štapa

$$A = \langle F \rangle (H - l_1) = \frac{F_1}{2} (H - l_1) \quad (4)$$

Kako je  $F_A = F_1$ , to je prema relacijama (1), (2) i (3)

$$A = \frac{\rho_0 g S}{2} \left( H - l \frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \quad (5)$$

Gustina drveta je  $\rho = m/S l$ , odakle je  $S = m/\rho l$ , pa je prema relaciji (5) potreban rad

$$A = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{m g}{2 l} \left( H - l \frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \approx 5,2 \text{ J}$$

596. Visina stuba tečnosti u kapilari, posle uspostavljanja stacionarnog stanja, je

$$h = \frac{2\alpha}{\rho g r}$$

pa je rad sile površinskog napona

$$A = Fh = 2\pi r a h = \frac{4\pi \alpha^2}{\rho g}$$

Povećanje potencijalne energije tečnosti u kapilari je

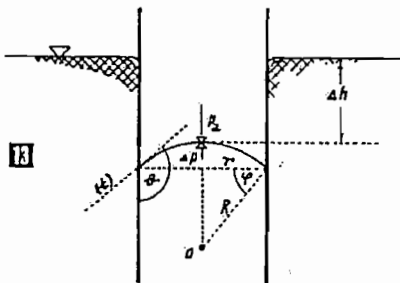
$$\Delta E_p = mg \frac{h}{2} = \rho V g \frac{h}{2} = \frac{2\pi \alpha^2}{\rho g}$$

pa je količina toplote koja se oslobodi pri ovom procesu

$$Q = A - \Delta E_p = \frac{2\pi \alpha^2}{\rho g}$$

597. Oblik meniskusa u kapilarnoj cevi prikazan je na slici 13, odakle se vidi da je

$$r = R \cos \varphi = R \cos(\pi - \theta) = -R \cos \theta \quad (1)$$



Laplasov pritisak je

$$\Delta p = \frac{2\alpha}{r} \cos \theta$$

pa je visinska razlika nivoa tečnosti

$$h = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{4\alpha \cos \theta}{\rho g d}$$

odakle je  $\cos \theta = -\frac{\rho g d h}{4\alpha}$  (2). Prema relacijama (1) i (2) nalazi se da je poluprečnik meniskusa

$$R = \frac{r}{\cos \theta} = \frac{2}{\rho g \Delta h} = 3,2 \text{ mm}$$

i ugao kvašenja  $\theta = 158^\circ$ .

$$598. p = p_0 - \Delta p = p_0 - \frac{2\alpha}{r} = 977 \text{ mbar.}$$

599. Između ploča će se obrazovati stub tečnosti, visine  $h$ , čija je težina  $Q = \rho g a h d$  uravnotežena silom površinskog napona, intenziteta  $F = 2\alpha(a+d)$ , gde je  $d$ —razmak između

ploča,  $a$ —njihova širina. Kako je  $Q = F$  i  $a \gg d$ , to je

$$h = \frac{2\alpha}{\rho g d} = 4,96 \text{ mm}$$

600. Ako je izvan mehura pritisak  $p_0$  a u njemu  $p$ , onda je prema Laplasovoj jednačini  $p - p_0 = 2\alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{4\alpha}{R}$ , pošto je  $R_1 = R_2 = R$ . Množilac 2 na desnoj strani jednačine postoji usled toga što se površinski napon javlja na spoljašnjoj i unutrašnjoj površini mehura. Pritisak u mehuru je

$$p = p_0 + \frac{4\alpha}{R} = 1001,2 \text{ mbar}$$

601. Pritisak u mehuru jednak je zbiru spoljašnjeg pritiska  $p_0$ , hidrostatičkog pritiska  $p_1 = \rho g h$  i Laplasovog pritiska  $p_2 = 2\alpha/r$ . Prema tome je

$$p = p_0 + \rho g h + \frac{2\alpha}{r} = 117,6 \text{ kPa}$$

$$602. m = \rho \Delta V = \rho S \Delta h = \rho \frac{\pi d^2}{4} \frac{4\alpha}{\rho g d} = \frac{\pi d \alpha}{g} \approx 23 \text{ mg.}$$

603. Ako rešetka nije pokvašena, visina vodenog stuba nad njom biće  $h = \frac{4\alpha}{\rho g d} = 2,8 \text{ cm}$ .

Šta će se desiti ako se temperatura vode povisi?

$$604. d < \frac{4\alpha}{\rho g l} = 0,50 \text{ mm.}$$

605. Intenzitet sile teže koja deluje na prsten je  $P = mg = \rho V g = \pi \rho g h (R_2^2 - R_1^2)$ , dok je intenzitet sile površinskog napona  $F = 2\pi \alpha (R_1 + R_2)$ . Potreban intenzitet sile za izvlačenje prstena je

$$F_1 > mg + F = \pi (R_1 + R_2) [\rho g h (R_2 - R_1) + 2\alpha] = 60 \text{ mN}$$

606. Kapljica će se odvojiti ukoliko je pritisak stuba tečnosti u kapilari  $p_1 = \rho g h$  veći (u graničnom slučaju jednak) od Laplasovog pritiska  $p_2 = \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ , gde su  $R_1$  i  $R_2$ —poluprečnici krivina slobodne površine kapljice u dvama uzajamno normalnim ravnima.

Kako je donja površina kapljice polusfera, to je  $R_1 = R_2 = R$ , pa je  $p_2 = 2\alpha/R = 4\alpha/d$ . Prema uslovu zadatka je  $p_1 > p_2$ , pa je tražena visina ulja u kapilari

$$h > \frac{4\alpha}{\rho g d} = 1,65 \text{ cm}$$

607. Pritisak težine loptice  $p_1 = \frac{mg}{\pi r^2} = \frac{4}{3} \rho g r$  treba da bude manji od Laplasovog pritiska

$p_2 = \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ , gde je u ovom slučaju  $R_1 = R_2 = r$ , pa je  $p_2 = 2\alpha/r$ . Prema uslovu zadatka je

$$\frac{2\alpha}{r} > \frac{4}{3} \rho g r$$

odakle je najveći prečnik lopte

$$d = 2r = \sqrt{\frac{6\alpha}{\rho g}} = 3 \text{ mm}$$

608. a) Da bi se cilindar održao na površini ulja, mora da je  $p_1 > p_2$  (1), gde je  $p_1$ —pritisak izazvan zakrivljenjem površine ulja, a  $p_2$ —pritisak težine cilindra. Kako je

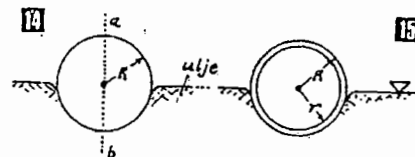
$$p_1 = \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

gde je za ravan  $a-b$  (14) (koja je normalna na ravan crteža) poluprečnik krivine površine ulja  $R_1 = \infty$ , a za ravan koja je na nju normalna  $R_2 = R$ , pa je  $p_1 = \alpha/R$ . Pritisak težine cilindra je

$$p_2 = \frac{\pi \rho g R}{2}$$

pa je prema relaciji (1) poluprečnik punog cilindra

$$R > \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi \rho g}} = 1,1 \text{ mm}$$



b) U ovom slučaju je pritisak  $p_1$  isti, dok je pritisak težine cilindra  $p_2 = \frac{mg}{2lR}$ , gde je  $m = \rho V = \rho \pi l (R^2 - r^2)$  (16), pa je zamenom

$$p_2 = \frac{\rho g \pi l (R^2 - r^2)}{2R}, \text{ tj. } \frac{\alpha}{R} > \frac{\rho g \pi}{2R} (R^2 - r^2)$$

odakle je spoljašnji poluprečnik cilindra

$$R < \sqrt{r^2 + \frac{2\alpha}{\rho g \pi}} \approx 10,1 \text{ mm}$$

c)  $r > 19,7 \text{ mm}$ , pa je najmanja debljina  $d = R - r = 0,3 \text{ mm}$ .

609. Kako je  $p = p_0 + \rho g h + \frac{2\alpha}{r}$ , gustina vazduha na dubini  $h$  je

$$p = p_0 \frac{\rho}{\rho_0} = p_0 \left( 1 + \frac{\rho g h + 2\alpha}{p_0} \right)$$

gde je  $\rho_0$ —gustina vazduha na standardnim uslovima. Prema relaciji (1) traženi odnos je  $\rho/\rho_0 = 3,39$ .

610.  $\alpha = \frac{mg}{\pi d N}$ , gde je  $m$ —masa istekle tečnosti,  $N$ —broj kapljica i  $d$ —prečnik kapljice.

611. Između ploča ostane sloj debljine  $d = \frac{m}{\rho S}$  (1). Razlika spoljašnjeg i unutrašnjeg pritiska u ulju je

$$\Delta p = \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

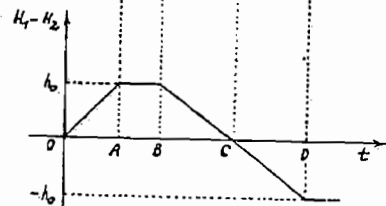
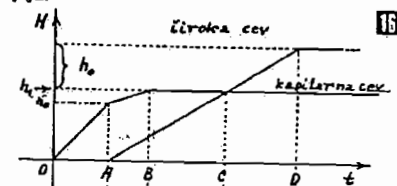
gde su  $R_1 = \infty$  i  $R_2 = d/2$ —poluprečnici krivina spoljašnje površine ulja u dvema uzajamno normalnim ravnima, pa je prema tome

$$\Delta p = \frac{2\alpha}{d} = \frac{2\rho S \alpha}{m}$$

Potreban intenzitet sile za rastavljanje ploča je

$$F = mg + \Delta p S = mg + \frac{2\rho S^2 \alpha}{m} = 2,57 \text{ MN}$$

612. U početku punjenja šire cevi nivo vode u kapilari raste ravnomerno do trenutka A (17), kada je visina vodenog stuba u široj cevi  $H_2 = 0$ . U tom trenutku, visina vodenog stuba u kapilari je  $h_0 = 2\alpha/\rho g r$ . Posle trenutka A nivoi vode u obe cevi rastu ravnomerno, pri tom razlika nivoa  $H_1 - H_2 = h_0$  ostaje stalna. U trenutku B visina vodenog stuba u kapilari dostiže vrednost  $h_1$  (visina kapilare), pa se ona ne menja u toku daljeg punjenja šire cevi. Nivo vode u široj cevi dalje raste do trenutka D, kada razlika nivoa tečnosti u cevima dostiže vrednost  $H_1 - H_2 = -h_0$ , pa voda počinje da ističe kroz gornji otvor kapilare. Posle trenutka D oba nivoa se ne menjaju.



U intervalu BC površina vode u kapilarnoj cevi je udubljena. U trenutku C ona postaje ravna, dok je u intervalu CD ispušćena. Najveća visina vodenog stuba u široj cevi je  $h_1 + h_0$ , dok je najveća visinska razlika nivoa  $h_0$ .

613. Prema rešenju zadatka 610, masa jedne kapijice je  $m_1 = 2\pi r \alpha / g$ . Kako je kapijica sfernog oblika, to je  $m_1 = \rho V = \rho \pi d^3 / 6$ . Iz navedenih relacija dobija se da je prečnik kapijice

$$d = \sqrt[3]{\frac{12 r \alpha}{\rho g}} = 0,44 \text{ cm}$$

614. Kada je težina kapijice  $Q = m_1 g$  veća (u graničnom slučaju jednaka) od intenziteta sile površinskog napona  $F = 2\pi r \alpha$ , nastaje odvajanje kapijice. Prema tome je  $m_1 g = 2\pi r \alpha$ , odakle je najmanja masa jedne kapijice  $m_1 = 2\pi r \alpha / g = 15,3 \text{ mg}$ , pa je broj kapijica  $N = m / m_1 = 1307$ .

615. Pritisak tečnosti na dno suda je  $p_1 = \rho g h$ , a Laplasov pritisak  $p_2 = F / S$ , tj.

$$p_2 = \frac{2\pi r \alpha}{\pi r^2} = \frac{2\alpha}{r}$$

Prema uslovu ravnoteže pritiska je

$$\rho g h_1 + \frac{2\alpha}{r_1} = \rho g h_2 + \frac{2\alpha}{r_2}$$

odakle je razlika u visinama živinih stubova u krakovima

$$\Delta h = h_1 - h_2 = \frac{2\alpha}{\rho g} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = -0,37 \text{ cm}$$

616. Kod Toričelijevoj barometra je uravnotežen spoljašnji pritisak  $p_0$  sa hidrostatičkim pritiskom  $p_1 = \rho g h$  i Laplasovim pritiskom  $p_2 = 2\alpha / r$ , pa je

$$p_0 = \rho g h + \frac{2\alpha}{r} = \rho g H$$

Kako bi tačna vrednost za  $H$  bila na standardnim uslovima  $H = 0,76 \text{ m}$ , to je apsolutna greška merenja

$$\Delta H = H - h = \frac{2\alpha}{\rho g r}$$

a relativna greška

$$\delta p = \frac{H - h}{H} = \frac{2\alpha}{\rho g r H}$$

Za prvi barometar je  $\delta p = 0,2\%$ , a za drugi  $\delta p = 0,05\%$ . Kako je  $H > h$ , izmereni pritisak manji je od stvarnog.

617. Koeficijent površinskog napona je  $\alpha = \Delta A / \Delta S$ , odakle je izvršeni rad - oslobodena energija  $\Delta A = \alpha \Delta S$ , gde je  $\Delta S$  - promena slobodne površine tečnosti.

Površine kapijica pre spajanja su  $S_1 = 4\pi R_1^2$  i  $S_2 = 16\pi R_2^2$ , a površina kapijice posle spajanja  $S_3 = 4\pi R_3^2$ , pa je promena slobodne površine tečnosti

$$S = S_1 + S_2 - S_3 = 20\pi R_1^2 - 4\pi R_3^2$$

Kako je zapremina tečnosti ostala ista, to je,

$$\frac{4}{3}\pi R_1^3 + \frac{4}{3}\pi R_2^3 = \frac{4}{3}\pi R_3^3$$

odakle je  $R_3 = \sqrt[3]{9 R_1}$ , dok je promena slobodne površine tečnosti  $\Delta S = 4(5 - 3\sqrt[3]{9})\pi R_1^2$ , pa je oslobodena količina toplotne

$$Q = \alpha \Delta S = 4(5 - 3\sqrt[3]{9})\alpha \pi R_1^2 = 6,3 \mu\text{J}$$

$$618. A = 4(\sqrt[3]{2} - 1)\alpha \pi R_1^2$$

$$619. E = \alpha \Delta S = 4\pi \alpha (\sqrt[3]{N} - 1) \left( \frac{3m_0}{4\pi\rho} \right)^{2/3} = 0,10 \text{ MJ}$$

620. Ako se zanemari trenje u tečnosti i o zidove suda, potrebna brzina vode pri izlasku iz pumpe je prema Toričelijevoj teoremi  $v = \sqrt{2gh}$ . Kako je  $v = R\omega$ , to je

$$\omega = \frac{\sqrt{2gh}}{R} = 93,4 \text{ rad/s}$$

ili 892 ob/min.

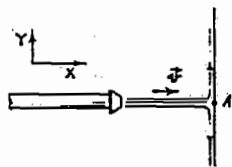
$$621. a) P_1 = \frac{E_k}{t} = \frac{mv^2}{2t} = \frac{\rho V v^2}{2t} = \frac{\rho Q v^2}{2} = 10 \text{ kW};$$

$$b) P_2 = P_1 / 4 = 2,5 \text{ kW}$$

$$622. \eta = \eta_1 \cdot \eta_2 = 1 - \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^2 = 0,990;$$

$$\eta_1 = \eta_2 = \sqrt{\eta} \approx 0,995.$$

623. Nailazeći na zid, mlaz vode u tački A menja pravac kretanja za ugao  $(\pi/2)$  rad.



Ako za vreme  $\Delta t$  iz cevi istekne količina vode čija je masa  $m$ , onda je impuls mlaza vode pre nailaska na zid  $p_{x1} = mv$ , dok je posle skretanja njegov impuls u istom pravcu  $p_{x2} = 0$ , pa je promena impulsa

$$\Delta p_x = p_{x2} - p_{x1} = -mv$$

Ova promena impulsa mlaza vode jednaka je impulsu sile  $F \cdot \Delta t$  kojom mlaz deluje na zid, tj.  $F \cdot \Delta t = mv$ , pa je intenzitet odgovarajuće sile

$$F = \frac{m}{\Delta t} v = \rho Q' v = \rho S v^2 = 50 \text{ N}$$

$$624. a) v = \sqrt{2gh} = 3,13 \text{ m/s};$$

$$b) v = \sqrt{2(g+a)h} = 3,84 \text{ m/s};$$

$$c) v = \sqrt{2(g-a)h} = 2,21 \text{ m/s}.$$

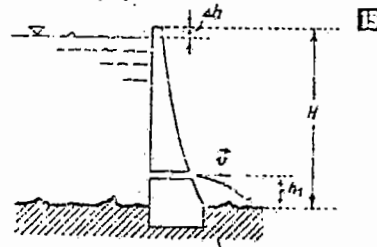
Kolike bi bile ove brzine da je  $a = g$ ?

625. a) Protok vode je  $Q = S_k v$ , dok je masa vode koja istekne kroz otvor u posmatranom vremenskom intervalu

$$m = S_k v \rho t$$

Kako je  $v = \sqrt{2gh}$ ,  $S_k = (\pi/4)S$  i  $h = H - (h_1 + \Delta h)$ , to je

$$m = S \rho t \left( \frac{\pi}{4} \right)^2 \sqrt{2g[H - (h_1 + \Delta h)]} = 180 \text{ t}$$



b) Potreban intenzitet sile je

$$F > pS = \rho g h \pi r^2 = \rho g \pi r^2 (H - (h_1 + \Delta h)) = 48 \text{ kN}$$

626. Iz jednačine

$$\rho H g h = \frac{\rho v^2}{2} + \rho g H$$

nalazi se da je

$$h = \frac{v^2}{2g} \left( \frac{v^2}{2g} + H \right) = 12,2 \text{ cm}$$

$$627. a) v_2 = v_1 \sqrt{2gh} \frac{r_2}{r_1};$$

$$b) Q = S_1 v_1 = 2\pi r_1 d \sqrt{2gh}$$

628. Ako je  $v_0$  brzina isticanja tečnosti iz otvora L-cevi, a  $p_0$  - spoljašnji (atmosfera) pritisak, onda je prema Bernulijevoj jednačini

$$p_0 + \frac{\rho v^2}{2} = \frac{\rho v_0^2}{2} + \rho g h_0 + p_0$$

tj.  $v_0^2 = v^2 - 2gh_0$ , pri čemu je  $v_0 = \sqrt{2gh}$ , pa je na osnovu prethodnih relacija

$$h = \frac{v^2}{2g} - h_0 = 0,98 \text{ m}$$

629. Ako su  $v_1$  i  $v_2$  brzine proticanja vode na poprečnim presečima mlaza na kojima su njihove površine  $S_1$  i  $S_2$ , onda je prema Bernulijevoj jednačini

$$\frac{\rho v_1^2}{2} = \rho g h + \frac{\rho v_2^2}{2} \quad (1)$$

dok je prema jednačini kontinuiteta  $S_1 v_1 = S_2 v_2 = Q$ , pa je prema relaciji (1)

$$\frac{Q^2}{S_1^3} = 2gh + \frac{Q^2}{S_2^3}$$

odakle je

$$S_2 = S_1 \frac{Q}{\sqrt{Q^2 - 2gh S_1^3}}$$

630. Prema zad. 623, intenzitet sile reakcije je

$$F_r = \rho v^2 S$$

Brzine isticanja vode na prvom i drugom otvoru su

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} \text{ i } v_2 = \sqrt{2gh_2}$$

pa je rezultujuća sila reakcije u pravcu X-ose

$$F_r = \rho S (v_2^2 - v_1^2) = 2\rho S g (h_2 - h_1) = 2\rho S g \Delta h \approx 1 \text{ N}$$

$$631. h = \frac{\rho}{\rho H g} \frac{8Q^3}{\pi^2 g} \left( \frac{1}{d_2^4} - \frac{1}{d_1^4} \right) = 81 \text{ cm}$$

$$632. v = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = \sqrt{\frac{2RT}{M} \left( 1 - \frac{p_1}{p_2} \right)} = 359 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

pošto je molarna gasna konstanta  $R = 8,31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$ , a molarna masa vazduha  $M = 0,029 \text{ kg/mol}$ .

633. Prema jednačini kontinuiteta je

$$Sv = S_0 v_0 \quad (1)$$

dok je rad sile  $A$  jednak promeni kinetičke energije količine tečnosti koja istekne iz cilindra za vreme  $t$ , tj.

$$A = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv^2}{2}$$

gde je  $m = Qt = \rho S_0 v_0 t$  - masa istekle tečnosti za vreme  $t$ , pa je

$$A = \frac{1}{2} \rho S_0 v_0 t (v_0^2 - v^2)$$

ili prema relaciji (1)

$$A = \frac{1}{2} \rho v_0^3 S_0^3 t \left( \frac{1}{S} - \frac{1}{S_0} \right)$$

a kako je  $v_0 = V / S_0 t$ , to je

$$A = \frac{\rho V^3}{2t} \left( \frac{1}{S} - \frac{1}{S_0} \right)$$

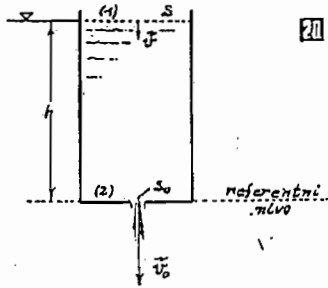
634. a) Bernulijeva jednačina za preseke (1) i (2) strujne cevi, u odnosu na naznačeni referentni nivo [1], ima oblik

$$\frac{\rho v_0^2}{2} = \rho g h + \frac{\rho v^2}{2}$$

a kako je  $Sv = S_0 v_0$ , dobija se da je brzina

pomeranja nivoa vode u sudu

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{S}{S_0}\right)^2 - 1}}$$



Kako je  $v = dh/dt$ , dobija se da je

$$\frac{dh}{dt} = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{S}{S_0}\right)^2 - 1}}$$

odakle je

$$t = \sqrt{\frac{S}{S_0}} \int_0^h \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{S}{S_0}} \int_0^h \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{S}{S_0}} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

a kako je  $S \gg S_0$ , to je

$$t = \frac{S}{S_0} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

b) Ako se nivo vode u sudu održava stalnim, i brzina isticanja je stalna i onda je

$$v = \frac{h}{t_0} = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{S}{S_0}\right)^2 - 1}}$$

gde je  $t_0$  vreme za koje se jedan zamišljeni nivo vode sa visine  $h$  spusti na nivo otvora. Na osnovu prethodne relacije se dobija da je

$$t_0 = \frac{S}{S_0} \sqrt{\frac{h}{2g}}$$

pa je  $t/t_0 = 2$ . To znači da će u slučaju održavanja stalnog nivoa tečnosti u sudu ista količina vode isticati dva puta brže.

635. a) Brzina isticanja tečnosti kroz otvor je

$$v = \sqrt{2g(H-y)}$$

a domet mlaza

$$x = vt = \sqrt{2g(H-y)} \sqrt{\frac{2y}{g}} = 2\sqrt{(H-y)y}$$

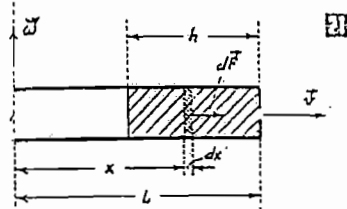
Maksimalan domet je za  $\frac{dx}{dy} = 0$ , tj.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{H-2y}{\sqrt{(H-y)y}} = 0$$

pa je  $x_{\max}$  za  $y = H/2$ .

b)  $x_{\max} = H$ .

636. Na elementarni deo vodenog stuba u cevi, „visine“  $dx$  i mase  $dm = \rho dV = \rho S dx$ .



deluje centrifugalna sila  $d\vec{F}$  intenziteta

$$dF = \frac{v^2 dm}{x} = \rho S \omega^2 x dx$$

pa je ukupna sila kojom vodeni stub deluje na dno cevi

$$F = \rho S \omega^2 \int_{L-h}^L x dx = \frac{\rho S \omega^2 h^2}{2} \left( \frac{2L}{h} - 1 \right)$$

čemu odgovara pritisak.

$$p = \frac{F}{S} = \frac{\rho \omega^2 h^2}{2} \left( \frac{2L}{h} - 1 \right)$$

Prema Bernulijevoj jednačini je  $p = \frac{\rho v^2}{2}$ ,

odakle je brzina isticanja vode kroz otvor na cevi

$$v = \sqrt{\frac{2p}{\rho}} = \omega h \sqrt{\frac{2L}{h} - 1}$$

637. Prema zadatku 636. je

$$v = \sqrt{2gH + (L\omega)^2}$$

638. Stanje vazduha u cevi menja se pri stalnoj temperaturi. Na taj način je pre početka rotacije  $p_1 = p_2$ ;  $V_1 = H_1 S$ , a u toku rotacije  $V_2 = H_2 S/2$ , pa je

$$p_1 H_1 S = p_2 \frac{H_2}{2} S$$

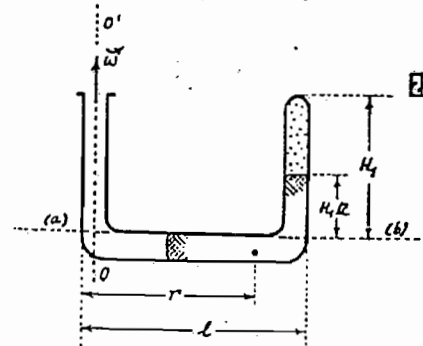
odakle se dobija da je  $p_2 = 2p_1 = 2p_a$ .

Pritisak na dnu zatvorenog kraka, tj. na nivou a-b je

$$p = p_2 + \rho g \frac{H_1}{2} = 2p_a + \rho g \frac{H_1}{2}$$

pa na ovom nivou deluje sila pritiska čiji je intenzitet

$$F = pS = \left( 2p_a + \rho g \frac{H_1}{2} \right) S$$



Ova sila je u dinamičkoj ravnoteži sa centrifugalnom silom, koja deluje na zaostali deo žive u horizontalnom delu U-cevi. Intenzitet ove sile je

$$F_c = mr\omega^2$$

pa je  $mr\omega^2 = \left( 2p_a + \rho g \frac{H_1}{2} \right) S$ , odakle je

$$\omega^2 = \frac{S}{mr} \left( 2p_a + \rho g \frac{H_1}{2} \right)$$

Kako je

$$m = \rho V = \rho S \left( l - \frac{H_1}{2} \right) \text{ i } r = \frac{l}{2} + \frac{H_1}{4}$$

to je

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4p_a + \rho g H_1}{\rho \left( 4l^2 - H_1^2 \right)}} = 11,7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

gde je  $\rho = 13\,600 \text{ kg/m}^3$  i  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

$$639. \text{ a) } P = \frac{mv^2}{2t} = \frac{Q'v^2}{2} = \frac{\rho S v^3}{2}$$

$$= \frac{\rho \pi D^2 (2gh)^{3/2}}{8} \approx 2 \text{ MW}$$

$$\text{b) } v_2 = v_1(1 - \eta^2) = \sqrt{2gh}(1 - \eta^2) = 14,4 \text{ m/s}$$

640. Prema II Njutnovom zakonu, sila reakcije mlaza tečnosti koji isticlje iz cevi je

$$F_r = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt}$$

Kako je brzina isticanja mlaza stalna, to

je  $\frac{dv}{dt} = 0$ , dok je  $\frac{dm}{dt} = \rho S v$  — maseni protok

(istok) tečnosti kroz cev, pa je

$$F_r = \rho S v^2$$

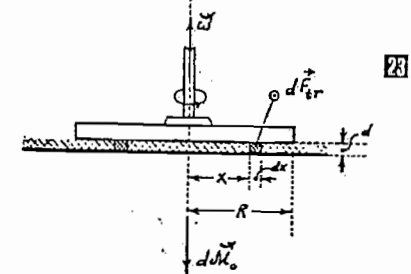
Intenzitet momenta sile u odnosu na tačku O je

$$M_O = l \cdot F_r$$

tj.

$$M_O = l \rho S v^2 = l \rho \frac{S^2 v^2}{S} = l \rho \frac{Q^2}{\pi r^2} = 3,8 \text{ m} \cdot \text{N}$$

641. Pošto disk rotira ravnomerno, moment sprega spoljašnjih sila  $M$  uravnotežen je momentom sprega sile trenja  $M_0$ , pa je  $M = M_0$ .



Intenzitet elementarnog momenta sprega sile trenja je

$$dM_0 = x dF_r \quad (1)$$

gde je  $dF_r = \eta dS \frac{\Delta v}{d} = \eta 2\pi x dx \frac{x\omega}{d}$ , tj.

$$dF_r = \frac{2\pi\eta\omega}{d} x^2 dx$$

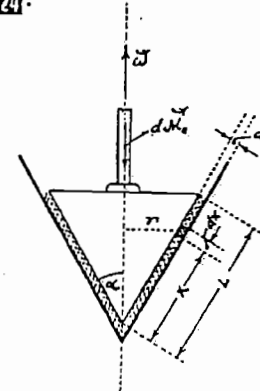
pa je prema relaciji (1)

$$dM_0 = \frac{2\pi\eta\omega}{d} x^3 dx$$

odnosno

$$M_0 = M_0 = \frac{2\pi\eta\omega}{d} \int_0^R x^3 dx = \frac{\pi\eta\omega R^4}{2d}$$

642. Pošto osovina rotira ravnomerno, to znači da je uspostavljena ravnoteža svih momenata koji deluju na nju: momenta sprega  $M$  spoljašnjih sila i momenta sprega  $M_0$  sile trenja.



Intenzitet elementarnog momenta sprega a kako je  $dm = \rho dV = \rho \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot l$ , to je

$$dM_{\omega} = r dF_{tr}, \text{ gde je}$$

$$dF_{tr} = \eta dS \frac{dv}{d} = \eta 2\pi r dx \frac{v\omega}{d}$$

Kako je  $r = x \sin \alpha$ , to je

$$dF_{tr} = \frac{2\pi\eta\omega \sin \alpha}{d} x^2 dx$$

tj.

$$dM_{\omega} = \frac{2\pi\eta\omega \sin^2 \alpha}{d} x^3 dx$$

pa je intenzitet momenta sprega spoljašnjih sila

$$M_{\omega} = M_{\omega_0} = \frac{2\pi\eta\omega \sin^2 \alpha}{d} \int_0^L x^3 dx = \frac{\pi\eta\omega L^4 \sin^2 \alpha}{2d}$$

643. a)  $v_m = \frac{\Delta p R^2}{4\eta l}$ , gde je razlika pritisaka na krajevima cevi  $\Delta p = \rho g H$ , pa je

$$v_m = \frac{\rho g H R^2}{4\eta l} \approx 2,2 \frac{m}{s}$$

$$b) Q = \frac{\Delta p \pi R^4}{8\eta l} = \frac{\rho g H \pi R^4}{8\eta l} = \frac{\pi R^2 v_m}{2} = 0,345 \frac{dm^3}{s}$$

odnosno  $Q' = \rho Q = 0,312 \text{ kg/s}$ .

$$644. Q = \frac{dV}{dt} = \frac{\pi R^4}{8\eta l} (\rho_1 - \rho_2) \approx 0,6 \frac{m^3}{s}$$

$$645. a) v = \frac{F d}{\eta S} = \frac{F(R-r)}{2\eta\pi r l} = 2,93 \frac{m}{s}$$

$$b) t = \frac{L}{v} = 0,68 \text{ s.}$$

$$646. \eta = \frac{\pi \rho^2 d^4 g h}{128 l \frac{\Delta m}{\Delta t}} \approx 1 \text{ mPa} \cdot \text{s.}$$

647. a) Protok tečnosti kroz elementarnu poprečnu površinu  $dS$  je

$$dQ = v dS$$

a kako je  $dS = 2\pi r dr$  [25], to je

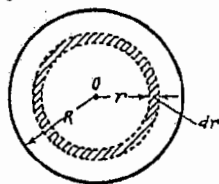
$$Q = 2v_0 \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr = \frac{1}{2} \pi v_0 R^2 \quad (1)$$

b) Kinetička energija jednog sloja tečnosti, mase  $dm$ , čija je brzina  $v$ , je

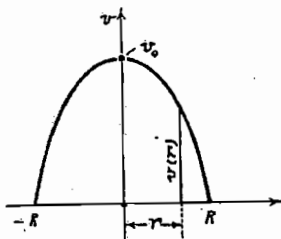
$$dE_k = \frac{1}{2} v^2 dm$$

a kako je  $dm = \rho dV = \rho \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot l$ , to je

$$E_k = \frac{\pi \rho l v_0^2}{R^4} \int_0^R (R^4 - 2R^2 r^2 + r^4) r dr = \frac{1}{6} \pi \rho l v_0^2 R^2$$



[25]



c) Prema Njutnovom zakonu unutrašnjeg trenja je  $F_{tr} = -\eta S \frac{dv}{dr}$ , tj.

$$F_{tr} = -2\pi R l \eta \frac{d}{dr} \left[ v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \right]$$

ili

$$F_{tr} = 4\pi R l \eta v_0 \frac{r}{R^2}$$

Sila trenja koja deluje na zid cevi dobija se zamenom za  $r=R$ , pa je

$$F_{tr} = 4\pi \eta v_0$$

d) Prema Poazjevom zakonu je

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8 l \eta}$$

a kako je prema relaciji (1)  $Q = \frac{1}{2} \pi v_0 R^2$ , dobija se da je

$$\Delta p = \frac{4v_0 \eta}{R^2}$$

648. Pošto je ubrzanje kapljice  $\rho=0$ , to znači da su u ravnoteži sve sile koje na nju deluju: sila teže i otporna (Stoksova) sila, čiji su intenziteti  $mg$  i  $6\pi\eta r v$ , pa je

$$mg = 6\pi\eta r v$$

Kako je masa kapljice  $m = \rho V = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$ ,

ma prethodnoj relaciji njen je poluprečnik

$$r = 3 \sqrt{\frac{\eta v}{2\rho g}} = 55,4 \mu\text{m}$$

odnosno prečnik  $d = 0,11 \text{ mm}$ .

649. Pošto se loptica kreće ravnomerno, to su u ravnoteži sve sile koje na nju deluju: sila teže, Stoksova i Arhimedova sila, čiji su intenziteti:  $mg$ ,  $6\pi\eta r v$ ,  $\rho_0 g V$ , pa je

$$\rho_0 g V + 6\pi\eta r v = \rho g V$$

gde je  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$  — zapremina loptice, a  $\rho$  — gustina vode, pa je na osnovu prethodne relacije poluprečnik loptice

$$r = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2\eta v}{g(\rho - \rho_0)}} = 0,12 \text{ cm}$$

650. a) Kuglica se kreće stalnom brzinom nadole, što znači da je uravnotežena sila teže sa Stoksovom i Arhimedovom silom, pa je

$$\rho g V = 6\pi\eta r v + \rho_0 g V$$

Zapremina kuglice je  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ , gde je  $r = d/2$ , pa su prema prethodnoj relaciji brzine padanja prve i druge kuglice

$$v_1 = \frac{2}{9} \frac{r_1^2 g}{\eta} (\rho - \rho_0), \quad v_2 = \frac{2}{9} \frac{r_2^2 g}{\eta} (\rho - \rho_0)$$

Može se napisati da je  $v_1 = A r_1^2$  i  $v_2 = A r_2^2$ , gde je  $A = \frac{2g}{9\eta} (\rho - \rho_0)$ , pa je vreme padanja

$$\text{prve kuglice } t_1 = \frac{h}{v_1} = \frac{h}{A r_1^2} \text{ i druge } t_2 = \frac{h}{v_2} = \frac{h}{A r_2^2}$$

Kako je  $r_1 < r_2$ , to je  $t_1 > t_2$ , što znači da će veća (druga) kuglica pasti prva na dno suda.

b) Posle vremena  $\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{h}{A} \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) = \frac{4h}{A} \left( \frac{1}{d_1^2} - \frac{1}{d_2^2} \right) = 80,8 \text{ s}$  će pasti prva (manja) kuglica.

## TOPLOTA

### 1. TERMIČKO ŠIRENJE, KALORIMetriJA

$$651. \alpha = \frac{\Delta l}{l \Delta t} = 23,5 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}$$

652. Prsten je potrebno zagrejati za  $\Delta t > \frac{\Delta d}{\alpha d} = 84^\circ\text{C}$ , odnosno na temperaturu  $t > t_0 + \Delta t = 104^\circ\text{C}$ .

653. Kako je  $l_1 = l_0 (1 + \alpha t_1)$  (1) i  $l_2 = l_0 (1 + \alpha t_2)$  (2), to je prema relacijama (1) i (2)

temperaturski koeficijent linearnog širenja

$$\alpha = \frac{l_2 - l_1}{l_1 \Delta t - (l_2 - l_1) t_1} = \frac{\Delta l}{l_1 \Delta t - \Delta l t_1} \approx \frac{\Delta l}{l_1 \Delta t} = 36,5 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}$$

654. Na temperaturi  $t$  dužine štapova su jednake, pa je  $l_{01} (1 + \alpha_1 t) = l_{02} (1 + \alpha_2 t)$ , odakle je

$$\frac{l_{01}}{l_{02}} = \frac{1 + \alpha_2 t}{1 + \alpha_1 t} \quad (1)$$

Kako je  $\frac{l_{01}}{l_{02}} = 1,001$ , iz relacije (1) tražena temperatura je  $t = 111^\circ\text{C}$ .

655. Dužina kraćeg štapa posle zagrevanja je  $l_1' = l_1 (1 + \alpha \Delta t)$  (1), a dužeg posle rashladivanja  $l_2' = l_2 (1 - \alpha \Delta t)$  (2). Prema uslovu zadatka je  $l_1' = l_2'$ , pa je prema relacijama (1) i (2)

$$\Delta t = \frac{l_1 - l_2}{\alpha (l_1 + l_2)} = 21,7^\circ\text{C}$$

Temperatura kraćeg štapa je prema tome  $t_1 = t + \Delta t = 41,7^\circ\text{C}$ , a dužeg  $t_2 = t - \Delta t = -1,7^\circ\text{C}$ .

656. Stvarna dužina štapa na temperaturi  $t_2$  je

$$l_2 = l_0 (1 + \alpha t_2) = l_1 \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2}$$

a prema približnoj relaciji

$$l_2' = l_1 + \Delta l = l_1 (1 + \alpha \Delta t)$$

Relativna greška je

$$\frac{l_2' - l_2}{l_2} = \frac{l_1 \Delta t \alpha^2}{1 + \alpha t_2} \approx 9,2 \cdot 10^{-8}$$

657. Neka na temperaturi  $t_0$  časovnik radi tačno. Tada je broj oscilacija klatna za vreme od 24 časa

$$N = \frac{t^{(24)}}{2\pi \sqrt{l_0/g}}$$

gde je  $l_0$  — dužina klatna na temperaturi  $t_0$ . Pri promeni temperature od  $t_0$  do  $t_1$ , kao i od temperature  $t_1$  do  $t_2$ , dužina klatna se menja po zakonu

$$l_0 = l_1 (1 + \alpha t_0)$$

$$l_0 = l_2 (1 + \alpha t_2)$$

Promena perioda oscilovanja klatna prilikom promene temperature od  $t_0$  do  $t_1$  je

$$\Delta T_1 = T_0 - T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} (\sqrt{l_0} - \sqrt{l_1})$$

a prilikom promene temperature od  $t_0$  od  $t_2$

$$\Delta T_2 = T_2 - T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} (\sqrt{l_2} - \sqrt{l_0})$$



Časovnik tokom vremena  $t^{(2)}$  pokazuje na temperaturi  $t_1$  duže vreme

$$\Delta t_1 = N \cdot \Delta T_1 = t^{(2)} (1 - \sqrt{t_1/t_0}) =$$

$$= t^{(2)} \left( 1 - \sqrt{\frac{1}{1 + \alpha t_0}} \right) \quad (1)$$

dok je, analogno, vreme zakašnjenja

$$\Delta t_2 = t^{(2)} \left( \sqrt{\frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_0}} - 1 \right) \quad (2)$$

Iz relacija (1) i (2) nalazi se da je

$$\alpha = \frac{1}{t_2} \left[ \frac{(\Delta t_2 + t^{(2)})^2}{t^{(2)} - \Delta t_1} - 1 \right] \approx 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$$

$$658. \frac{\Delta l}{l} = \alpha \Delta t = 33 \cdot 10^{-6}$$

Preporučujemo da izračunate izduženje merača dužine 1 m prilikom povišenja njegove temperature od  $t_1$  do  $t_2$ .

$$659. S_2 = S_0 (1 + \beta t_2) = \frac{S_1}{1 + \beta t_1} [1 + \beta (t_1 + \Delta t)] = S_1 \left( 1 + \frac{\beta \Delta t}{1 + \beta t_1} \right) \approx S_1 (1 + \beta \Delta t)$$

Kako je  $S_1 = 2 \text{ m}^2$ ,  $\beta = 2\alpha = 33,4 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ , a  $\Delta t = 60^\circ\text{C}$ , to je  $S_2 = 2,004 \text{ m}^2$ .

660. Relativna greška merenja je

$$\delta = \frac{d' - d}{d} = \frac{\sqrt{\frac{4S'}{\pi}} - \sqrt{\frac{4S}{\pi}}}{\sqrt{\frac{4S}{\pi}}} =$$

$$= \sqrt{1 + \beta \Delta t} - 1 \approx \frac{1}{2} \beta \Delta t$$

pošto je  $\beta \Delta t \ll 1$ .

Kako je  $\beta = 2\alpha = 47,6 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ , to je  $\delta = 0,2\%$ . Kolika je promena zapremine cilindra pri obradi?

$$661. \Delta S = \pi d^2 [(1 + 3\alpha \Delta t)^{2/3} - 1] = 1,48 \text{ cm}^2$$

$$662. t_2 > t_1 + \frac{(d-D)(1 + \alpha t_1)}{\alpha D} \approx t_1 + \frac{d-D}{\alpha D} = 157^\circ\text{C}$$

663. Ako je  $R$  srednji poluprečnik krivine, onda je

$$AB = l_1 = \theta \left( R + \frac{d}{2} \right); \quad CB = l_2 = \theta \left( R - \frac{d}{2} \right) \quad (1)$$

Isto tako je

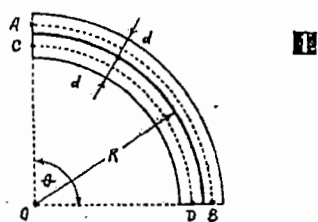
$$l_1 = l_0 (1 + \alpha_1 \Delta t) \quad (2)$$

$$l_2 = l_0 (1 + \alpha_2 \Delta t)$$

gde je  $l_0$ —početna dužina traka, a  $\Delta t = t_2 - t_1$ ,

pa je razlika dužina traka prema relacijama (1) i (2)

$$\Delta l = \theta d = l_0 (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta t \quad (3)$$



Kako je prema relacijama (1) i (2)

$$\theta = \frac{l_1}{R + \frac{d}{2}} = \frac{l_2}{R - \frac{d}{2}}$$

onda je, imajući u vidu relaciju (3),

$$R = d \frac{2 + (\alpha_1 + \alpha_2) \Delta t}{2(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta t} \approx \frac{d}{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta t} = 3,3 \text{ mm}$$

664. Ako je  $V_0$  zapremina rezervoara na temperaturi  $0^\circ\text{C}$ , onda je ona na temperaturama  $t_1$  i  $t_2$

$$V_1 = V_0 (1 + 3\alpha t_1); \quad V_2 = V_0 (1 + 3\alpha t_2)$$

gde je  $\alpha$ —temperaturski koeficijent linearnog širenja metala od koga je načinjen rezervoar.

Mase ulivenih količina nafte u rezervoar su  $m_1 = \rho_1 V_1$  i  $m_2 = \rho_2 V_2$ , tj.

$$m_1 = \rho_1 V_0 \frac{1 + 3\alpha t_1}{1 + \gamma t_1}$$

$$m_2 = \rho_2 V_0 \frac{1 + 3\alpha t_2}{1 + \gamma t_2}$$

odakle je

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{(1 + 3\alpha t_1)(1 + \gamma t_2)}{(1 + 3\alpha t_2)(1 + \gamma t_1)}$$

tj.

$$\alpha = \frac{(m_1 - m_2) + \gamma (m_2 t_1 - m_1 t_2)}{3(m_2 t_1 - m_1 t_2)} = 5,5 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$$

665. Pri zagrevanju za  $\Delta t = t_2 - t_1$  sud će povećati zapreminu za  $\Delta V_s$ , a kiselina za  $\Delta V_k$ . Relativna promena zapremine je  $\Delta V = \Delta V_k - \Delta V_s$ , odnosno

$$\Delta V = V_{0k} (1 + \gamma t_2) - V_{0s} (1 + 3\alpha t_2) \quad (1)$$

Iz uslova zadatka je  $V_{0k} = V_{0s}$ , pa je prema relaciji (1)

$$\Delta V = V_{0k} t_2 (\gamma - 3\alpha) = 214,3 \text{ cm}^3$$

666.  $V_1 = V_0 (1 + \alpha t_1)$  i  $V_2 = V_0 (1 + \alpha t_2)$ , pa je

$$\Delta V = V_2 - V_1 = V_0 \gamma \Delta t = V_1 \frac{\gamma \Delta t}{1 + \gamma t_1}$$

Kako je  $\gamma t_1 \ll 1$ , to je  $\Delta V \approx V_1 \gamma \Delta t$ , gde je  $V_1 = 50 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$ ,  $\gamma = 3\alpha = 71,4 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ , pa je  $\Delta V \approx 214 \text{ cm}^3$ .

Preporučujemo da izračunate promenu površine suda usled povišenja njegove temperature za  $\Delta t$ , pod pretpostavkom da je sud sfernog oblika.

$$667. a) \Delta V = V \Delta t (\gamma - 3\alpha) = 134,5 \text{ L};$$

$$b) \gamma_n = \gamma - 3\alpha = 8,97 \cdot 10^{-4} \text{ 1/}^\circ\text{C}$$

$$668. \Delta V = S \Delta l = \frac{\pi d^2}{4} \Delta l = V_0 \Delta t (\gamma_2 - \gamma_1)$$

odakle je  $\Delta l = 0,43 \text{ cm}$ .

669. Pošto je zapremina gasa  $V = \text{const}$ , promena njegovog pritiska je  $p_2 - p_0 = \rho g \Delta h$ , tj.  $\rho g \Delta h = p_2 \gamma \Delta t$ , odakle je sniženje temperature gasa

$$\Delta t = \frac{\rho g \Delta h}{p_0 \gamma} \approx 3,6^\circ\text{C}$$

pa je merena temperatura gasa  $t_1 = t - \Delta t = 16,4^\circ\text{C}$ .

670. Ako je na temperaturi  $t_1$  zapremina posmatrane količine žive  $V_1$ , onda ona na temperaturi  $t_2$  iznosi  $V_2 = 1,005 V_1$ , pri čemu je  $V_2 = V_1 (1 - \gamma \Delta t)$ , gde je  $t = t_2 - t_1$ , pa je

$$1,005 V_1 = V_1 (1 + \gamma \Delta t)$$

odakle je  $\Delta t = 0,005 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Potrebna količina toplote je

$$Q = mc \Delta t$$

$$\text{gde je } m = \rho V_1 = \frac{\rho_0 V_1}{1 + \gamma t_1}$$

$$Q = 0,005 \frac{\rho_0 V_1}{1 + \gamma t_1} \approx 0,005 \frac{\rho_0 V_1}{\gamma} = 3,8 \text{ J}$$

671. Kako je  $\rho_1 = \rho_0 (1 + 3\alpha t_1)$ , to je  $\rho_0 = \rho_1 \times (1 - 3\alpha t_1)$ , pa je

$$\rho_2 = \frac{\rho_0}{1 - 3\alpha t_2} = \rho_1 \frac{1 + 3\alpha t_1}{1 - 3\alpha t_2} = 19 352 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

672. Ako je  $\rho_0$  gustina glicerina na  $0^\circ\text{C}$ , onda je njegova gustina na temperaturama  $t_1$  i  $t_2$  data izrazima  $\rho_1 = \frac{\rho_0}{1 + \gamma t_1}$  i  $\rho_2 = \frac{\rho_0}{1 + \gamma t_2}$ . Relativna promena gustine je

$$\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} = 1 - \frac{1 + \gamma t_2}{1 + \gamma t_1} = 0,0198$$

ili  $1,98\%$ .

$$673. a) t_2 = t_1 - \Delta t = t_1 + \frac{\Delta l}{\alpha l} = 60^\circ\text{C};$$

$$b) F_1 = \alpha SE_k \Delta t = 128 \text{ kN}$$

674. Sila zatezanja na temperaturi  $t_2$  je  $F = F_1 - F_2$  (1), gde je  $F_1 = 100 \text{ N}$ , a  $F_2 = \frac{\pi d^2}{4} \Delta t = \alpha SE_k \Delta t = 81 \text{ N}$ , pa prema relaciji (1) sledi  $F = 181 \text{ N}$ .

$$675. F_e = \alpha SE_k \Delta t = 30 \text{ kN}; \quad F_{Cu} = 30,6 \text{ kN}; \quad F_{Al} = 24,5 \text{ kN}$$

$$676. a) \sigma_k > \frac{mg - F_p}{S} = \frac{\rho_1 g V - \rho_2 g V}{S} = gh(\rho_1 - \rho_2)$$

odakle se dobija da je najveća dubina

$$h < \frac{\sigma_k}{g(\rho_1 - \rho_2)} \approx 7,3 \text{ km}$$

$$b) \Delta h \approx \alpha \Delta t = 145 \text{ cm}, \text{ ili } \frac{\Delta h}{h} = 100 = 0,02\%$$

$$677. a) \sigma_1 = E_y \frac{\Delta l_1}{l_1} = 0,5 \text{ GPa}, \text{ gde je } \Delta l_1 = l_1 - d = 0,05 \text{ cm}$$

b, c) Povećanje naprezanja štapa usled zagrevanja je

$$\Delta \sigma = \alpha E_y (t_2 - t_1) = 0,07 \text{ GPa}$$

pa ukupno naprežanje štapa na temperaturi  $t_2$  iznosi  $\sigma_2 = \sigma_1 + \Delta \sigma = 0,57 \text{ GPa}$ . Usled ovoga se u štupu javlja sila aksijalnog naprežanja  $F = \sigma_2 S = 0,57 \text{ MN}$  koja je normalna na čuone površine štapa i metalne ploče. Intenzitet sile trenja na jednoj dodirnoj površini je  $F_{tr} = \mu F = 0,25 \text{ MN}$ , pa je masa tereta

$$m < F_{tr}/g \approx 51 \text{ t}$$

d) Štap će ispasti (na temperaturi  $t_2$ ) kada je njegova dužina jednaka rastojanju  $d$  ili  $l_2 = d$  (1). Kako je  $l_2 = l_1 (1 - \alpha \Delta t)$ , to je prema relaciji (1) štap potrebno ohladiti za

$$\Delta t = \frac{l_1 - d}{\alpha l_1} = 217,4^\circ\text{C}$$

ili na temperaturu  $t_2 = t_1 - \Delta t = -207,4^\circ\text{C}$ .

678. Frekvencija osnovnog tona zategnute žice je  $v = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$  (1), a posle zagrevanja

$$v' = \frac{1}{2l'} \sqrt{\frac{F'}{\mu}} = \frac{1}{2l(1 + \alpha \Delta t)} \sqrt{\frac{F - \alpha SE_y \Delta t}{\mu}} \quad (2)$$

Kako je prema uslovu  $v/v' = 2$ , to je prema relacijama (1) i (2)

$$\frac{4}{1 + 2\alpha \Delta t + \alpha^2 \Delta t^2} = \frac{F}{F - \alpha SE_y \Delta t} \quad (3)$$

a ako se zanemari infinitezimala drugog reda  $\alpha^2 \Delta t^2$ , onda se iz relacije (3) dobija da je

$$t = \frac{3F}{2Fx + \alpha n d^2 E_y} \approx 101^\circ\text{C}$$

679. Period udara čekića je  $T = 1 \text{ s}$ , pa on za  $\tau = 10 \text{ min}$  učini  $N = 600$  udara, pri čemu izvrši rad  $A = Nmgh = 30 \text{ kJ}$ . Od ovoga se pretvori u unutrašnju energiju polovina rada, pa je  $Q = A/2 = 15 \text{ kJ}$ .

Predmetu će se povisiti temperatura za

$$\Delta t = Q/mc = 0,38^\circ\text{C}$$

680.  $Q = mc\Delta t = 3,85 \text{ kJ}$ .

681. Ako se zanemare termički gubici, dobija se da je  $m_1 c_1 (t_2 - t_1) = m_2 c_2 (t_2 - t_1)$ , odakle je srednja temperatura smeše

$$t_s = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2} = 35,5^\circ\text{C}$$

682.  $c = 940 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ .

683. Snaga motora  $P = 14,7 \text{ kW}$  troši se 60% na koristan rad, dok su 40% gubici, od kojih se polovina pretvara u unutrašnju energiju vode u hladnjaku. Naime,

$$Q = 0,2P\tau$$

gde je  $\tau$  — vreme rada motora. Kako se ovom količinom toplote zagreva količina vode mase  $m$ , to je  $0,2P\tau = mc\Delta t$ , pa je vreme zagrevanja

$$\tau = \frac{mc\Delta t}{0,2P} \approx 850 \text{ s}$$

684.  $Q_1 = (c_1 m + c_2 m_1)(t_0 - t_2)$ ;  $Q_2 = C(t_2 - t_1)$ . Iz uslova  $Q_1 = Q_2$  dobija se da je

$$(c_1 m + c_2 m_1)(t_0 - t_2) = C(t_2 - t_1) \quad (1)$$

a na isti način

$$[c_1 m + c_2 (m_1 + m_2)](t_0 - t_2') = C(t_2' - t_1') \quad (2)$$

Iz relacija (1) i (2) nalazi se da je  $c_1 = 724 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$  i  $c_2 = 2553 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ .

685.  $c_1 = \frac{m_2 c_2 (t_2' - t_2)}{m_1 (t_1 - t_2')} = 1080 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ .

686.  $\Delta t = \frac{(2 - \sqrt{2})6\alpha}{pcr} = 60 \mu\text{K}$ .

687.  $Q_1 = m_1 c (t_x - t_2)$ ;  $Q_2 = c_p m_2 (t_2 - t_1)$ .

Iz uslova  $Q_1 = Q_2$  nalazi se da je

$$t_x = t_2 + \frac{c_p m_2}{cm_1} (t_2 - t_1) = 1350^\circ\text{C}$$

688.  $t_s = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2 + m_3 c_3 t_3}{m_1 c_1 + m_2 c_2 + m_3 c_3} = 11,4^\circ\text{C}$ .

689. Potrebno je dovesti količinu toplote  $Q = mc(100^\circ\text{C} - t_1) + m q_1 = 1,30 \text{ MJ}$

gde je  $q_1 = 2,26 \text{ MJ/kg}$  — specifična toplota isparavanja vode na temperaturi  $100^\circ\text{C}$  i pritisku 1013 mbar.

690. a) Ako je  $\tau_1$  vreme za koje će voda proključati, onda za to vreme grejač treba da oslobodi količinu toplote za: topljenje leda  $Q_1 = m_1 q_1$  i zagrevanje vode do ključanja  $Q_2 = (m_1 + m_2)c(t_k - 0^\circ\text{C})$ . Kako nema ter-

mičkih gubitaka, to je

$$P\tau_1 = Q_1 + Q_2 = m_1 q_1 + (m_1 + m_2)c(t_k - 0^\circ\text{C})$$

odakle je traženo vreme

$$\tau_1 = \frac{m_1 q_1 + (m_1 + m_2)c(t_k - 0^\circ\text{C})}{P} \approx 20 \text{ min}$$

b) Za isparavanje vode grejač oslobodi dodatnu količinu toplote  $Q_3 = (m_2 - m_1)q_1$ , pa je za ovaj proces potrebno vreme

$$\tau_2 = \frac{(m_2 - m_1)q_1}{P} \approx 98 \text{ min}$$

691. Pod uslovom da nema termičkih gubitaka je

$$mc(t_s - t_1) + m_1 c_1 (t_s - t_1) = m_2 c_2 (t_k - t_2) + m_2 q_1$$

Kako je  $t_s = t_1 + \Delta t$ , to je povišenje temperature vode

$$\Delta t = \frac{m_2 q_1 + m_2 c_2 (t_k - t_2)}{mc + m_1 c_1 + m_2 c_1} = 13,7^\circ\text{C}$$

692. Pod pretpostavkom da se celokupna količina toplote, koju može odati kalorimetrijski sud sa vodom, utroši na topljenje količine leda, mase  $m$ , dobija se da je  $m_1 c_1 (t_1 - t_2) + C(t_1 - t_2) = m q_1$ , odakle je

$$m = \frac{(m_1 c_1 + C)(t_1 - t_2)}{q_1} = 212,5 \text{ g}$$

To znači da u sudu ostane neistopljena količina leda, mase

$$m_2 - m = 287,5 \text{ g}$$

693. a)  $t_s = \frac{(m c_2 + m_1 c_1) t_1 + m_2 c_2 t_2}{m_2 c_2 + m c_2 + m_1 c_1} \approx 1,1^\circ\text{C}$ ;

b)  $m_x = \frac{m_2 c_2 t_2' + (m c_2 + m_1 c_1) t_1}{q_2} \approx 7,3 \text{ g}$ .

694. Ledu je potrebno dovesti količinu toplote  $Q = mc(t_1 - t_2) + m q_1 = 17,2 \text{ MJ}$ . Ovu količinu toplote treba da poseduje količina vodene pare, mase  $m_1$ , pri čemu je  $Q = m_1 q_k - + m_1 c(t_k - t_1)$ , gde je  $t_k = 100^\circ\text{C}$ . Masa potrebne količine vodene pare je

$$m_1 = \frac{Q}{q_k - c_1(t_k - t_1)} \approx 7 \text{ kg}$$

695. Ako je  $t_s$  krajnja temperatura u kalorimetrijskom sudu,  $q_1 = 2,26 \text{ MJ/kg}$  — specifična toplota isparavanja vode;  $c_2 = 4186 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$  — njena specifična toplotna kapacitivnost a  $c_1 = 350 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$  — specifična toplotna kapacitivnost bakra, onda je

$$m_1 c_1 (t_1 - t_s) = (m_2 - m_1) c_2 (t_s - t_2) + + m_1' c_2 (t_k - t_2) + m_2' q_1$$

odakle je  $t_s \approx 16^\circ\text{C}$ .

696. Ugaj pri sagorevanju oslobodi količinu toplote

$$Q = (C_1 + C_2 + m_1 c_1)(t_2 - t_1) = 0,24 \text{ MJ}$$

pa je specifična toplota sagorevanja uglja

$$q_2 = Q/m = 12 \text{ MJ/kg}$$

697.  $m = \frac{\eta m_1 q_2}{c(t_1 - t_0) + q_1} = 519 \text{ kg}$ .

698. Ako je  $Q_1 = mc\Delta t$  — količina toplote koja zagreje vodu do ključanja,  $Q_2 = m q_1$  — količina toplote koja ispari istu količinu vode,  $\tau_1$  — vreme za koje voda proključa,  $\tau_2$  — vreme za koje voda ispari, dobija se da je

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{1}{5,4}$$

pa je

$$Q_1 = mc\Delta t = \frac{Q_2}{5,4} = \frac{m q_1}{5,4}$$

odakle je specifična toplota isparavanja vode  $q_1 = 5,4c\Delta t = 2,26 \text{ MJ/kg}$ .

699. Pri obrazovanju leda, mase  $m_1$ , oslobodi se količina toplote  $Q = m_1 q_1$  (1). Ovu količinu toplote primi voda, pa je takođe  $Q = mc(t_2 - t_1)$  (2), gde je  $m = 2 \text{ kg}$  — masa vode, a  $t_2 = 0^\circ\text{C}$  — temperatura odvršćavanja leda. Iz relacija (1) i (2) dobija se da je masa nastajog leda

$$m_2 = \frac{mc(t_2 - t_1)}{q_1} = 0,15 \text{ kg}$$

gde je  $q_1 = 330 \text{ kJ/kg}$  — specifična toplota topljenja leda i  $c = 4186 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$  — specifična toplotna kapacitivnost vode.

700. Za zagrevanje leda do temperature topljenja potrebno je dovesti količinu toplote  $Q_1 = m c_1 t_1 = 20 \text{ kJ}$ , a za topljenje istog leda količinu toplote  $Q_2 = m q_1 = 335 \text{ kJ}$ . Kako je temperatura ključanja vode u funkciji pritiska određena izrazom

$$t_k = 100^\circ\text{C} + 0,0375 \frac{^\circ\text{C}}{\text{Pa}} (p - p_0)$$

to je u ovom slučaju  $t_k = 101,5^\circ\text{C}$ , pa je vodi potrebno dovesti količinu toplote  $Q_3 = m c_3 t_k$  da bi proključala, a da bi isparila  $Q_4 = m q_4$ .

Ukupna količina toplote je prema tome

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 3,04 \text{ MJ}$$

701.  $\delta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_2} = \frac{c' - c}{c} = 0,01$ .

702. Specifična toplotna kapacitivnost supstancije od koje je načinjena lopta je  $c = \frac{Q}{m\Delta t} = 448 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ . Prema Dilong-Plivovom zakonu je  $cM = 25 \text{ J/(mol}\cdot\text{K)}$ , odakle je molarna masa supstancije  $M = 0,556 \text{ kg/mol}$ , što odgovara gvožđu.

703. Snaga grejača je

$$P = \frac{1}{\eta\tau} [(m_1 c_1 + m_2 c_2)(t_k - t_1) + 0,15 m_2 q_1] \approx 740 \text{ W}$$

gde su  $c_1 = 380 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ ,  $c_2 = 4186 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$  — specifične toplotne kapacitivnosti bakra i vode, a  $q_1 = 2,26 \text{ MJ/kg}$  — specifična toplota isparavanja vode.

704. Rad motora automobila na putu  $s$  je  $A = F \cdot s$ , gde je  $F$  — intenzitet vučne sile motora. Kako je on jednak intenzitetu sile trenja (jer se automobil kreće ravnomerno), to je

$$F = F_{tr} = \mu mg$$

Ako pri ovome sagori količina benzina, mase  $m$ , lo je utrošena energija

$$E = m q_s = \rho V q_s$$

a korisna energija

$$E_k = \eta E = \eta \rho V q_s$$

Na osnovu zakona održanja energije je  $A = E_k$ , pa je

$$s = \frac{\eta \rho V q_s}{\mu m g} \approx 630 \text{ km}$$

705. Korisna snaga centrale je  $P_k = 150 \text{ MW}$ , a uložena  $P_{ul} = \frac{Q}{t} = \frac{m q_s}{t}$ , gde je  $m$  — masa one količine uglja koja sagori za vreme  $t$ . Kako je

$$P_k = \eta P_{ul} = \eta \frac{m q_s}{t}$$

to je masa potrebne količine uglja

$$m = \frac{P_k t}{\eta q_s} \approx 7,3 \cdot 10^5 \text{ t}$$

706. Na osnovu zakona održanja energije je

$$k \frac{m}{2} (v_0^2 - v^2) = m c (t_1 - t_2) + m_1 q_1$$

odakle je

$$\frac{m_1}{m} = k \frac{(v_0^2 - v^2) - 2c(t_1 - t_2)}{2q_1}$$

gde su  $m$  i  $m_1$  — masa cele kugle i masa njenog istopljenog dela i  $t_1$  — temperatura topljenja olova.

707. Zapremina istopljenog leda je

$$V_1 = \pi R^2 h + \frac{2}{3} \pi R^3$$

pa je potrebna količina toplote za njegovo topljenje

$$Q_1 = m_1 q_1 = \rho_1 V_1 q_1 = \rho_1 \left( \pi R^2 h + \frac{2}{3} \pi R^3 \right) q_1$$

Kugla u ovom procesu oda količinu toplote

$$Q_1 = m_1 c (t_k - t_f) = \rho_2 V_2 c t_k = \rho_2 \frac{4}{3} \pi R^3 c t_k$$

Kako je  $Q_1 = Q_2$ , nalazi se da je

$$h = \frac{2R}{3} \cdot \frac{2\rho_2 c t_k - \rho_1 q_1}{\rho_1 q_1} = 1,9 \text{ cm}$$

Kolika bi bila dubina  $h$  da je kugla od olova [ $c = 140 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ ]?

708. Prema zakonu održanja impulsa je

$$m\vec{v}_{01} + m\vec{v}_{02} = 2m\vec{v}$$

gde je  $v_{01} = v_{02} = v_0$ , tj.  $\vec{v}_{01} + \vec{v}_{02} = 2\vec{v}$ , pa je

$$2v = \sqrt{v_0^2 + v_0^2}$$

odnosno

$$v = v_0 / \sqrt{2}$$

Kinetička energija obe kugle pre sudara je

$$E_1 = mv_0^2$$

$$\text{a posle sudara } E_2 = \frac{2mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}$$

Prema zakonu održanja energije je

$$Q = E_1 - E_2$$

tj.

$$2mc\Delta t = \frac{mv_0^2}{2}$$

odakle je povišenje temperature kugli usled sudara

$$\Delta t = \frac{v_0^2}{4c}$$

gde je  $c$  — specifična toplotna kapacitivnost olova.

709. Brzina tela posle sudara je

$$v = v_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

Kinetička energija kugle pre sudara je

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2}$$

a kugle i mete posle sudara

$$E' = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} = \frac{m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)}$$

pa je izgubljena energija

$$\Delta E = E - E' = \frac{m_1 m_2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)}$$

Ova energija se utroši na povećanje unutrašnje energije kugle i mete, pa je takođe

$$\Delta E = m_1 c_1 \Delta t_1 + m_2 c_2 \Delta t_2$$

odnosno (ako je  $t_2 < t_1$ )

$$m_1 c_1 (t_1 - t_2) + m_2 c_2 (t_2 - t_1) = \frac{m_1 m_2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)}$$

odakle je

$$t_2 = \frac{\frac{m_1 m_2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)} + m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_1}{m_1 c_1 + m_2 c_2} = 11,31 \text{ }^\circ\text{C}$$

## 2. MOLEKULSKO-KINETIČKA TEORIJA. TERMODINAMIKA

$$710. N = nN_A = \frac{m}{M} N_A = 2,14 \cdot 10^{22} \text{ molekula.}$$

$$711. m = nM = 0,096 \text{ kg.}$$

$$712. \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 483,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

713. a) Kako je  $p = n_0 kT$ , temperatura gasa je  $T = p/(n_0 k) \approx 889 \text{ K}$ .

$$\text{b) } \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 329 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c) Kako je  $RT = \frac{pV}{n}$ , to se prema relaciji

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \text{ dobija da je}$$

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3pV}{nM}}$$

odnosno

$$\frac{\sqrt{\langle v_1^2 \rangle}}{\sqrt{\langle v_2^2 \rangle}} = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} = 2$$

tj.  $p_1/p_2 = 4$ .

$$714. \text{ Iz jednačine stanja gasa je } T^0 = \frac{p^0 M}{\rho K} \text{ (1).}$$

Kako je

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

to je prema relaciji (1)

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3p^0}{\rho}} = \sqrt{\frac{3p^0}{\rho_0 f \nu}}$$

gde je  $\rho_0 = 1,293 \text{ kg/m}^3$  — gustina suvog vazduha na standardnim uslovima. Zamenom se dobija  $\sqrt{\langle v^2 \rangle} = 471 \text{ m/s}$ .

Iz relacije (1) molarna masa gasa je  $M = 0,032 \text{ kg/mol}$ , što odgovara kiseoniku.

715. Temperatura gasa posle adijabatskog sabijanja je  $T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}$ , pa je srednja

kvadratna brzina molekula

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3RT_2}{M}} = \sqrt{\frac{3RT_1}{M} \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1/2}} = 735 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$716. \langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n_0} = 0,21 \text{ } \mu\text{m.}$$

$$717. \langle \lambda_2 \rangle = \langle \lambda_1 \rangle \frac{p_1}{p_2} = 10 \langle \lambda_1 \rangle = 2 \text{ } \mu\text{m.}$$

$$718. \langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n_0}. \text{ Kako je } p = n_0 kT, \text{ tj.}$$

$$n_0 = \frac{p}{kT}, \text{ to je } \langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p} = 0,11 \text{ } \mu\text{m.}$$

719. Do sudara molekula neće doći ako je  $D > \langle \lambda \rangle$ , odnosno u graničnom slučaju

$$D = \langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p}$$

odakle je

$$T_{\min} = \frac{\sqrt{2} \pi p d^2 D}{k} = 452 \text{ K}$$

$$720. \langle Z \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle \lambda \rangle} = \frac{\sqrt{2} \pi N \langle v \rangle d^2}{V} \approx 1,1 \cdot 10^9 \frac{1}{\text{s}}$$

721. Traženo vreme je

$$\langle t \rangle = \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle v \rangle}$$

gde je  $\langle \lambda \rangle = 1/\sqrt{2} \pi d^2 n_0$  — srednja dužina slobodnog puta molekula, a  $\langle v \rangle = \sqrt{8RT/\pi M}$  — srednja aritmetička brzina molekula. Kako

je koncentracija molekula  $n_0 = \frac{p}{kT} = \frac{pN_A}{RT}$ , to je

$$\langle t \rangle = \frac{1}{4p d^2 N_A} \sqrt{\frac{MRT}{\pi}} \approx 71 \text{ ns}$$

722. Molekuli se neće međusobno sudarati ako je srednja dužina njihovog slobodnog puta  $\langle \lambda \rangle > D$ , tj.

$$\frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n_0} > D$$

odakle je koncentracija molekula pri tome

$$n_0 < \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 D}$$

a broj molekula  $N < n_0 V$ , gde je  $V = \pi D^3/6$ ,

pa je maksimalan broj molekula u sudu

$$N = \frac{\sqrt{2}}{12} \left(\frac{D}{d}\right)^3$$

$$723. \frac{\sqrt{\langle v^2 \rangle}}{v_w} = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1,225.$$

$$724. \text{ Procenat molekula azota } \frac{\Delta N}{N} \cdot 100\% \text{ koji imaju brzinu u intervalu } \Delta v = v_2 - v_1 \text{ može se odrediti na osnovu Maksvelove raspodele brzina}$$

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \xi^2 e^{-\xi^2} \Delta \xi \quad (1)$$

gde je  $\xi = \frac{v}{v_w} = \frac{v_1}{v_w} \cdot (2)$  — odnos uočene brzine  $v = v_1$  i najverovatnije brzine  $v_w$ . Iz relacije (2) zamenom se dobija da je  $\xi = 0,356$ , dok je  $\Delta \xi = \frac{\Delta v}{v_w} = \frac{v_2 - v_1}{v_w} = 0,0237$ , pa je prema

relaciji (1)  $\frac{\Delta N}{N} \cdot 100\% = 0,6\%$ .

725. Na osnovu relacija za najverovatniju i srednju kvadratnu brzinu

$$v_w = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \text{ i } \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

dobija se da je

$$\Delta v = \sqrt{\langle v^2 \rangle} - v_w = \sqrt{\frac{3RT}{M}} - \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

pa je  $(\Delta v)^2 = \frac{RT}{M} (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$ , ili

$$T = \frac{(\Delta v)^2 M}{R(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = 339 \text{ K}$$

726. Prema uslovu zadatka je  $\xi = \frac{v_1}{v_w} = 0,3$ ,

a  $\frac{\Delta N}{N} = 0,005$ . Na osnovu Maksvelove raspodele brzina je onda

$$\Delta \xi = \frac{\Delta N}{N} \frac{\sqrt{\pi}}{4\xi^2 e^{-\xi^2}} = 0,0268. \text{ Kako je } \Delta \xi = \frac{\Delta v}{v_w}, \text{ najverovatnija brzina je } v_w = \frac{\Delta v}{\Delta \xi} = 560 \text{ m/s. Najmanja brzina molekula u intervalu } \Delta v \text{ je } v_1 = \xi v_w = 168 \text{ m/s, a najveća } v_2 = v_1 + \Delta v = 183 \text{ m/s. Temperatura azota je}$$

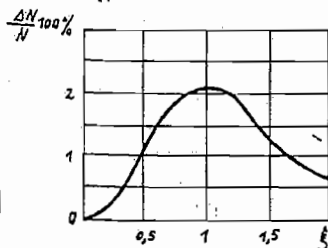
$$T = \frac{M v_w^2}{2R} = 528 \text{ K}$$

727. Maksvelova raspodela brzina može se napisati u obliku  $\frac{\Delta N}{N} = C \xi^2 e^{-\xi^2}$  (1), gde je

$$C = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \Delta \xi = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Delta v}{v_w} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{40} = 0,056$$

pa relacija (1) za ovaj slučaj dobija oblik

$$\frac{\Delta N}{N} 100\% = 5,6 \xi^2 e^{-\xi^2}$$



728.  $D = \frac{\Delta m}{S \Delta r \frac{\Delta p}{\Delta x}} = 0,92 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$

729. Koeficijent difuzije idealnog gasa određen je relacijom

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle$$

gde je  $\langle v \rangle$  — srednja aritmetička brzina molekula gasa, a  $\langle \lambda \rangle$  — njihova srednja dužina slobodnog puta.

Pre izotermnog širenja koeficijent difuzije je

$$D_1 = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n_1}$$

a posle širenja

$$D_2 = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n_2}$$

pa je njihov odnos

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (1)$$

Iz relacije  $pV = \frac{N}{N_A} RT$  dobija se da su koncentracije gasa

$$n_1 = \frac{N}{V_1} = \frac{p_1 N_A}{RT}; \quad n_2 = \frac{N}{V_2} = \frac{p_2 N_A}{RT} \quad (2)$$

a kako se proces odvija izotermno, to je

$$p_1 V_1 = p_2 V_2, \quad \text{tj.} \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1} = a \quad (3)$$

pa je na osnovu relacija (1), (2) i (3)

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{a}$$

730. Dinamička viskoznost gasa je

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \quad (1)$$

gde je  $\rho = \frac{pM}{RT}$  — njegova gustina,  $\langle v \rangle$  — srednja aritmetička brzina molekula  $\langle \lambda \rangle$  — srednja dužina slobodnog puta molekula. Prema relaciji (1) efektivni prečnik molekula je

$$d = \sqrt{\frac{2k}{3\pi\eta} \sqrt{\frac{MT}{\pi R}}} \approx 0,3 \text{ nm}$$

731. Imajući u vidu da je  $\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle \lambda \rangle$ , dobija se

$$\eta = \frac{kM \langle v \rangle}{3 \sqrt{2} \pi R d^2} = 20 \mu\text{Pa} \cdot \text{s}$$

732.  $\langle \lambda \rangle = \frac{3\eta}{\rho \langle v \rangle} = \frac{3\eta RT^3}{p^3 M \langle v \rangle} = 87 \text{ nm}$ .

733. Koeficijent viskoznosti idealnog gasa definisan je relacijom

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle \lambda \rangle$$

gde je  $\rho$  — gustina gasa,  $\langle v \rangle$  — srednja aritmetička brzina,  $\langle \lambda \rangle$  — srednja dužina slobodnog puta, pa je

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \sqrt{\frac{8RT^3}{\pi M}} \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}$$

Kako je helijum na standardnim uslovima, iz relacije  $pV = \frac{m}{M} RT$  dobija se da je gustina i količina helijuma

$$\rho = \frac{p^3 M}{RT^3}; \quad n = \frac{p^3 N_A}{RT^3}$$

pa je

$$d = \sqrt{\frac{4RT^3 M}{9\pi^3 N_A^2 \eta^2}} \approx 0,18 \text{ nm}$$

734.  $p = n_0 k T = \frac{N}{V} k T = 204 \text{ kPa}$ .

735. Prema Gej-Lisakovom zakonu, zapremina gasa posle zagrevanja je  $V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1} = 254 \text{ cm}^3$ . Kako je  $V_2 - V_1 = \Delta h S$ , pomeranje klipa iznosi  $\Delta h = \frac{V_2 - V_1}{S} = 10,7 \text{ cm}$ .

$$736. V_2 = V_1 \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} = V_1 \frac{p^0 T_2}{p_2 T_1} = 9,25 \text{ L}$$

Kolika bi trebalo da bude temperatura  $t_2$  da bi zapremina balona ostala nepromenjena?

737. Stanje vazduha u cevi se menja pod uslovima stalnog pritiska, pa je

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

odakle je zapremina vazduha u cevi posle rashlađivanja  $V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1}$ .

Zapremina žive koja uđe u cev je

$$\Delta V = V_1 - V_2 = V_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)$$

a odgovarajuća masa žive

$$m = \rho \Delta V = \rho V_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = 4,53 \text{ g}$$

738.  $V = 151 \text{ L}$ .

739.  $T_2 = T_1 \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1}$ . Kako je  $p_2 = \frac{p_1}{3}$ , a  $V_2 = 2V_1$ , to je  $T_2 = \frac{2}{3} T_1$  ili  $\frac{\Delta T}{T} = 33,3\%$ .

$$740. \frac{\Delta N}{N} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 9\%$$

741. Ako su parametri stanja vazduha u mehuri u površinskom sloju  $p_1, V_1, T_1$ , a oni na dubini  $h$  su  $p_2, V_2, T_2$  i ako se pretpostavi da je temperatura vode konstantna bez obzira na dubinu, tj.  $T_1 = T_2$ , onda se dobija da je

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad (1)$$

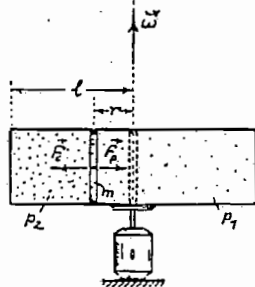
pri čemu je  $p_1 = p_a, p_2 = p_a + \rho g h$ , dok je

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi r^3; \quad V_2 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{r}{2}\right)^3 = \frac{V_1}{8}$$

Prema relaciji (1) je  $p_a V_1 = (p_a + \rho g h) V_2 / 8$ , odnosno

$$h = \frac{7p_a}{\rho g} = 71,7 \text{ m}$$

742. Pregrada se pomeri iz svog centralnog položaja pod dejstvom centrifugalne sile.



Novi ravnotežni položaj pregrada zauzima kad se uspostavi dinamička ravnoteža između sile pritiska na pregradu  $\vec{F}_p$  i centrifugalne sile  $\vec{F}_c$  koja deluje na nju, tj. kada je

$$(p_2 - p_1) S = m r \omega^2 \quad (1)$$

gde je  $S$  — površina poprečnog preseka cilindra.

Ako se pretpostavi da se pomeranje pregrade vrši izotermno, onda je

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 = p_0 V_0$$

tj.

$$p_1 (l-r) = p_2 (l+r) = p_0 l$$

pa se dobija da je

$$p_1 = p_0 \frac{l}{l-r} \quad \text{i} \quad p_2 = p_0 \frac{l}{l+r}$$

tj.

$$\Delta p = p_2 - p_1 = p_0 \frac{2lr}{l^2 - r^2}$$

Na osnovu ovih relacija i relacije (1) nalazi se da je ugaona brzina cilindra

$$\omega = \sqrt{\frac{2p_0 l S}{m(l^2 - r^2)}} = \sqrt{\frac{p_0 V}{m(l^2 - r^2)}} = 400 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

743. Pošto se proces u sudu odvija u uslovima stalne temperature, može se napisati da je

$$p_a h S = p_1 (h-x) S \quad (1)$$

pri čemu treba da je

$$p_1 > \rho g (h-x) + \frac{\rho \omega^2 x}{2} = 2\rho g (h-x) \quad (2)$$

pošto je  $v = \sqrt{2g(h-x)}$ .

Iz jednačina (1) i (2) nalazi se da je

$$x > h - \sqrt{\frac{p_a h}{2\rho g}}$$

Pri kojim visinama  $h$  će se opisana pojava dešavati?

$$744. p_{\min} = \frac{nRT}{V} = \frac{mRT}{MV} = 1,13 \text{ MPa}$$

$$745. m = \frac{pVM}{RT} = 128 \text{ g}$$

$$746. m = 56,7 \text{ kg}$$

$$747. m \approx 1,4 \text{ kg}$$

$$748. N = \frac{pVN_A}{RT} = 1,21 \cdot 10^{22} \text{ molekula}$$

$$749. V = \frac{mRT}{pM} = 0,018 \text{ m}^3$$

$$750. p = p_1 + p_2 = n_1 \frac{RT}{V} + n_2 \frac{RT}{V}. \text{ Kako je } n_1 = \frac{m_1}{M_1} \text{ i } n_2 = \frac{m_2}{M_2}, \text{ to je}$$

$$p = \frac{RT}{V} \left( \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) \approx 50 \text{ kPa}$$

$$751. p_1 = p_2 = \frac{RT_1}{T_2} = 1,77 \text{ MPa, pa je } p_2 < p_{\max}, \text{ što znači da će boca izdržati povišen pritisak. Zapremina boce je}$$

$$V = \frac{mRT_1}{p_1 M} \approx 2,75 \text{ L}$$

$$752. \text{ Ako su } V_1 \text{ i } V_2 \text{ zapremine sudova, onda je za stanje gasa pre otvaranja slavine}$$

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M} RT; \quad p_2 V_2 = \frac{m}{M} RT$$

a posle otvaranja slavine

$$p(V_1 + V_2) = \frac{2m}{M} RT$$

Na osnovu prethodnih relacija proizlazi da je

$$p = \frac{2p_1 p_2}{p_1 + p_2} = 0,27 \text{ MPa}$$

$$753. \text{ Iz jednačine stanja gasa nalazi se da je}$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p^0 M}{RT}$$

pa je promena gustine

$$\Delta \rho = \rho_1 - \rho_2 = \frac{p^0 M}{R} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \approx 0,16 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$754. \text{ Stvarna masa tela je } m = m_1 + m_2 \text{ (1), gde je } m_1 \text{ — izmerena masa, a } m_2 = pVM/(RT) = p m_1 M / (pRT) \text{ (2) — masa istisnute količine vazduha.}$$

Prema relacijama (1) i (2) greška merjenja iznosi

$$\Delta m = m - m_1 = m_2 = \frac{p^0 m_1 M}{pRT^0} = 0,34 \text{ kg}$$

$$755. \Delta m = m_1 - m_2 = \frac{MV}{R} \left( \frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} \right) \approx 384 \text{ g.}$$

$$756. \rho = \frac{p^0 M}{RT^0} = 1,78 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

757. Ako je  $p$  pritisak u oba dela cilindra pri prestanku kretanja klipa, onda je

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p V_1'}{T_1 + \Delta T}$$

$$\frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p V_2'}{T_2 - \Delta T}$$

pri čemu je

$$V_1 + V_2 = V_1' + V_2'$$

Na osnovu prethodnih relacija nalazi se da je

$$p = p_1 \frac{V_1}{V_1'} \left( 1 + \frac{\Delta T}{T_1} \right) =$$

$$\frac{p_1 V_1 T_2 (T_1 + \Delta T) + p_2 V_2 T_1 (T_2 - \Delta T)}{T_1 T_2 (V_1 + V_2)}$$

758. Klipovi će se kretati dok se ne izjednače pritisci u svim delovima cilindra. Ako je novonastali pritisak  $p$ , onda je

$$p_1 V_1 / T_1 = p V_1' / T_1'; \quad p_2 V_2 / T_2 = p V_2' / T_2';$$

$$p_1 V_1' / T_1 = p V_1 / T_1; \quad p_2 V_2' / T_2 = p V_2 / T_2;$$

pri čemu je

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = V_1' + V_2' + V_3' + V_4'$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina nalazi se da je  $p = k \frac{T_1}{T_2}$  i da je

$$V_1' = p_1 V_1 / k; \quad V_2' = p_2 V_2 / k;$$

$$V_3' = p_3 V_3 / k; \quad V_4' = p_4 V_4 / k.$$

gde je

$$k = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2 + p_3 V_3 + p_4 V_4}{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}$$

759. Parametri stanja vazduha u cevi pre zagrevanja su

$$p_1 = (p_a - \rho g h_1)$$

$$V_1 = (l_1 - h_1) S$$

$$T_1 = 273 \text{ K}$$

a posle zagrevanja

$$p_2 = p_a - \rho g h_2 = p_a - \rho g (l - l_1)$$

$$V_2 = l S$$

$$T_2 = T_1 + \Delta T$$

Imajući u vidu ove parametre stanja, na osnovu Klapejronove jednačine  $p_1 V_1 / T_1 = p_2 V_2 / T_2$  nalazi se da je

$$\Delta T = T_1 \left[ \frac{l}{l_1 - h_1} \frac{p_a + \rho g (l - l_1)}{p_a - \rho g h_1} - 1 \right] \approx 350 \text{ K}$$

760. Ako su  $p_1, V_1, T_1$  i  $p_2, V_2, T_2$  parametri stanja vazduha u zatvorenom kraku U-cevi pre i posle dolivanja žive u otvoreni krak cevi, onda je

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad (1)$$

pošto je  $T_1 = T_2$ . Kako je

$$p_1 = p_a + \rho g h_0, \quad V_1 = l_0 S$$

odnosno

$$p_2 = p_a + \rho g (h_0 + \Delta h) \text{ i } V_2 = l S = (l_0 - \Delta l) S$$

onda je prema relaciji (1)

$$(p_a + \rho g h_0) S l_0 = [p_a + \rho g (h_0 + \Delta h)] S (l_0 - \Delta l) S$$

tj.

$$\Delta l = l_0 \left[ 1 - \frac{p_a + \rho g h_0}{p_a + \rho g (h_0 + \Delta h)} \right] \approx 13 \text{ mm}$$

761. Ako je početni pritisak u rezervoaru  $p_1$ , a masa vazduha u njemu  $m$ , onda je

$$p_1 V = \frac{m}{M} RT_1 \quad (1)$$

Posle „punjenja“ rezervoara pritisak u njemu je  $p_2 = p_1 + \Delta p$ , a masa vazduha  $m_2 = m_1 + \Delta m$ , pa je

$$(p_1 + \Delta p) V = \frac{m_1 + \Delta m}{M} RT_2 \quad (2)$$

Na osnovu relacija (1) i (2), masa ubačenog vazduha je

$$\Delta m = \frac{MV \Delta p}{RT_2} \quad (3)$$

Masa vazduha  $m_0$  zahvaćena jednim ciklusom kompresora nalazi se iz jednačine  $p_a V_0 = \frac{m_0}{M} RT_1$ , odakle je

$$m_0 = \frac{MV p_a}{RT_1} \quad (4)$$

pa je broj potrebnih ciklusa, prema relacijama (3) i (4)

$$N = \frac{\Delta m}{m_0} = \frac{\Delta p}{p_a} \frac{V T_1}{V_0 T_2} \approx 2 \cdot 10^3$$

a potrebno vreme „punjenja“

$$\tau = N \tau_1 = 200 \text{ s} = 3 \text{ min } 20 \text{ s}$$

762. Za svaki gas se može napisati da je

$$p_1 V = n_1 RT$$

$$p_2 V = n_2 RT$$

$$p_3 V = n_3 RT$$

gde su  $n_1 = m_1 / M_1, n_2 = m_2 / M_2, n_3 = m_3 / M_3$  — količine pojedinih gasova u smeši. Kako je  $p = p_1 + p_2 + p_3$ , to je

$$pV = (n_1 + n_2 + n_3) RT$$

a gustina smeše

$$\rho = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{V} = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{n_1 + n_2 + n_3} \frac{p}{RT}$$

ili u opštem slučaju smeše  $N$  vrsta gasova

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^N m_i}{\sum_{i=1}^N n_i} \frac{p}{RT}$$

a ekvivalentna molarna masa

$$M_e = \sum_{i=1}^N m_i / \sum_{i=1}^N n_i$$

763. Prema Paozjevom zakonu, maseni protok gasa je

$$Q' = \frac{\pi p r^4 (p_2 - p_1)}{8 \eta l}$$

Kako je reč o idealnom gasu, to je  $pV = \frac{m}{M} RT$ , odnosno

$$\rho = \frac{pM}{RT} = \frac{(p_1 + p_2)M}{2RT}$$

pa je

$$Q' = \frac{\pi^4 M (p_2^2 - p_1^2)}{16 \eta RT l}$$

764. Pošto je rezervoar u ravnoteži, to znači da je zbir sile teže koja deluje na sud sa neonom i Arhimedove sile jednak nuli. Imajući u vidu njihove smerove i intenzitete, može se napisati da je

$$m_1 g + m_2 g = \rho g V. \quad (1)$$

gde su  $m_1$  i  $m_2$  — masa suda i masa neona u njemu,  $g$  — ubrzanje slobodnog padanja,  $\rho$  — gustina vode u jezeru i  $V$  zapremina suda. Za neon u sudu je

$$(p_a + \rho g h) V = \frac{m}{M} RT \quad (2)$$

Na osnovu relacija (1) i (2) nalazi se da je

$$m_2 = m_1 \frac{M(p_a + \rho g h)}{\rho RT - M(p_a + \rho g h)} \approx 0,7 \text{ g}$$

$$765. a) M = \frac{R}{\Delta c} \approx 0,032 \frac{\text{kg}}{\text{mol}};$$

$$b) c_V = \frac{j}{2} \frac{R}{M} = \frac{5}{2} \Delta c = 650 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}};$$

$$c) c_P = \frac{j+2}{2} \frac{R}{M} = \frac{7}{2} \Delta c = 910 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.$$

$$766. j = \frac{2C_{mV}}{C_{mP} - C_{mV}} = 6.$$

767. Iz osnovne jednačine stanja

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

gustina gasa na standardnim uslovima je

$$\rho = \frac{p^0 M}{RT^0}, \text{ odakle je}$$

$$\frac{R}{M} = \frac{p^0}{\rho T^0}$$

Kako je

$$c_p = \frac{j+2}{2} \frac{R}{M} \quad i \quad c_V = \frac{j}{2} \frac{R}{M}$$

dobija se da je

$$c_p = \frac{j+2}{2} \frac{p^0}{\rho T^0} \quad i \quad c_V = \frac{j}{2} \frac{p^0}{\rho T^0}$$

gde je  $j$  — broj stepeni slobode molekula datog gasa.

768. Iz jednačine stanja gasa je  $\rho = \frac{p^0 M}{RT^0}$  (1)

Kako je  $c_p - c_V = \frac{R}{M}$  (2), to je prema relaciji (1)

$$\rho = \frac{p^0}{(c_p - c_V) T^0} = 11,6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Preporučujemo da odredite koji je ovo gas, s obzirom na to da je moguće odrediti njegovu molarnu masu iz jednačine (2).

769. a)  $T_2 = T_1 \frac{p_2}{p_1} = 1500 \text{ K}$  ili  $t_2 = 1227^\circ \text{C}$ ;

b)  $Q = mc_V \Delta t = 12,4 \text{ kJ}$ .

770. a) Zagrejani azot predaće ledu količinu toplote

$$Q = m_i c_p (t_2 - t_1) \approx 7,8 \text{ kJ}$$

pa je masa istopljene količine leda  $m = Q/q_t = 24,25 \text{ g}$ , gde je  $q_t$  — specifična toplota topljenja leda.

b) Krajnja zapremina gasa u cilindru je

$$V = \frac{(m_2 + m_1) RT}{pM} = 41,3 \text{ L}$$

771.  $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{mc_p(t_2 - t_1)}{mc_V(t_2 - t_1)}$  (1). Prema jednačini stanja gasa je

$$p \Delta V = nR(T_2 - T_1)$$

odnosno

$$m(t_2 - t_1) = \frac{p \Delta VM}{R} \quad i \quad \Delta p V = nR(T_2 - T_1)$$

ili

$$m(t_2 - t_1) = \frac{\Delta p VM}{R}$$

Prema relaciji (1) je

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{p \Delta VC_{mp}}{\Delta p VC_{mv}} = \frac{x}{2} = 0,83$$

pošto je  $\frac{\Delta V}{V} = 1$ , a  $\frac{\Delta p}{p} = 2$ .

772. Temperatura gasa posle zagrevanja je

$$T_2 = T_1 \frac{p_2}{p_1} = T_1 \frac{nRT_1 + \Delta p}{nRT_1} = T_1 + \frac{M \Delta p V}{mR} \approx 375 \text{ K}$$

pa je potrebna količina toplote

$$Q = mc_V(t_2 - t_1) = \frac{m}{M} C_{mV}(T_2 - T_1) = 2,25 \text{ kJ}$$

773. Ako su  $m_1$  i  $m_2$  — mase kiseonika i azota u smeši, a  $c_{V1} = 653 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ ,  $c_{V2} = 745 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$  — njihove specifične toplotne kapacitivnosti pri stalnoj zapremini, onda je  $Q = Q_1 + Q_2 = (m_1 c_{V1} + m_2 c_{V2}) \Delta t$ , odakle je povećanje temperature smeše

$$\Delta t = \frac{Q}{m_1 c_{V1} + m_2 c_{V2}}$$

Kako je  $p^0 V = \frac{m_1}{M_1} RT^0$ ;  $p^0 V = \frac{m_2}{M_2} RT^0$  a

$V^0 = \frac{RT^0}{p^0}$ , nalazi se da je prema relaciji (1)

$$\Delta t = \frac{V^0}{V} \frac{Q}{M_1 c_{V1} + M_2 c_{V2}} = 33,8^\circ \text{C}$$

pošto je  $V^0 = 0,0224 \text{ m}^3/\text{mol}$ ,  $M_1 = 0,032 \text{ kg/mol}$  i  $M_2 = 0,028 \text{ kg/mol}$ .

774.  $Q = Q_1 + Q_2 = mc_p(t_2 - t_1) + mc_V(t_2 - t_1) =$

$$= \frac{c_p M p_1}{R} (V_2 - V_1) + \frac{c_V M p_2}{R} (p_2 - p_1).$$

Kako je  $V_2 = 3V_1$  i  $p_2 = 2p_1$ , to je

$$Q = \frac{p_1 V_1 M}{R} (2c_p + 3c_V) = mT_1 (2c_p + 3c_V) \approx 650 \text{ J}$$

775. Utrošena električna energija je

$$E = Q = mc_V(t_2 - t_1) \quad (1)$$

Kako je  $\Delta p V = nR(T_2 - T_1)$  ili

$$m(t_2 - t_1) = \frac{\Delta p VM}{R}$$

to je prema relaciji (1)

$$E = \frac{c_V M \Delta p V}{R} = \frac{C_{mV} \Delta p V}{R} = 0,2 \text{ kWh}$$

776. Na osnovu jednačine stanja gasa nalazi se da za jedan čas sagori količina metana čija je masa  $m = \frac{pVM}{RT}$ , pa je količina toplote koja se pri tome oslobodi

$$Q_1 = q_s m = q_s \frac{pVM}{RT}$$

Količina toplote koju primi protekla količina vode za jedan čas je

$$Q_2 = mc \Delta t = \frac{\pi d^2}{4} \rho \tau v c (t_2 - t_1)$$

gde je  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  — gustina vode, dok je  $c = 4186 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$  — specifična toplotna kapacitivnost vode i  $\tau = 3600 \text{ s}$ .

Stepen korisnog dejstva je  $\eta = Q_2/Q_1$ , pa je tražena temperatura

$$t_2 = t_1 + \frac{4 q_s p V M}{\pi d^2 \rho c \tau R} \approx 92^\circ \text{C}$$

777.  $U = \frac{j}{2} nRT^0$ . Kako je  $p^0 V = nRT^0$ , to je

$$U = \frac{j}{2} p^0 V = 250 \text{ J}$$

778.  $\Delta U = \frac{j}{2} Nk(T_2 - T_1) = 5175 \text{ J}$ .

779.  $A = p_1(V_2 - V_1) = p_1 V_2 \frac{m}{M} RT_1 = 1,07 \text{ kJ}$ .

Preporučujemo da izračunate temperaturu gasa posle širenja.

780.  $A = p \Delta V = p V_1 \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = 0,73 \text{ J}$ .

781. Pri izobarskoj promeni stanja izvršeni rad je

$$A = p \Delta V = \frac{m}{M} R \Delta T$$

odakle je  $\Delta T = \frac{MA}{mR}$ , pa je dovedena količina toplote

$$Q = mc_p \Delta T = \frac{m}{M} C_{mp} \Delta T$$

gde je  $C_{mp} = (j+2)R/2 = 7R/2$ , pa se zame-nom dobija da je

$$Q = \frac{7}{2} A = 7 \text{ MJ}$$

782. Utrošena energija na širenje gasa jednaka je radu koji gas izvrši pri tome, tj.

$$A = p \Delta V = \frac{m}{M} R \Delta T$$

dok je dovedena količina toplote gasu

$$Q = mc_p \Delta T = m \frac{j+2}{2} \frac{R}{M} \Delta T$$

pa je

$$A = \frac{2}{j+2} Q$$

Prema I principu termodinamike je

$$Q = -\Delta U + A$$

pa se dobija da je

$$\Delta U = Q - A = \frac{j}{j+2} Q$$

Za  $O$  je  $j=3$ , pa je  $\Delta U = (3/5)Q = 2,4 \text{ MJ}$

$O_2$  —  $5$  —  $(5/7)Q = 2,9 \text{ MJ}$

$O_3$  —  $6$  —  $(6/8)Q = 3,0 \text{ MJ}$

783. a, b)  $\frac{\sqrt{\langle v_2^2 \rangle}}{\sqrt{\langle v_1^2 \rangle}} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$ , tj.  $T_2 = 4T_1$ , pa je

$$Q = mc_V \Delta T = 3mc_V T_1 \approx 6,28 \text{ kJ}$$

c)  $\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} = 4$ .

784. Srednja kvadratna brzina određena je relacijom

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

pa je prema postavci zadatka

$$\frac{\sqrt{3RT_2/M}}{\sqrt{3RT_1/M}} = n$$

ili

$$T_2 = n^2 T_1$$

Tražena količina toplote je, s obzirom da je reč o izohorskom procesu,

$$Q = mc_V \Delta T = mc_V (T_2 - T_1) = m \frac{j}{2} \frac{R}{M} T_1 (n^2 - 1) = 6 \text{ kJ}$$

785. a)  $Q = mc_p \Delta t = m \frac{j+2}{2} \frac{R}{M} \Delta t = 2,93 \text{ kJ}$ ;

b)  $\Delta U = mc_V \Delta t = m \frac{j}{2} \frac{R}{M} \Delta t = 2,1 \text{ kJ}$ ;

c)  $A = Q - \Delta U = 0,83 \text{ kJ}$ .

786.  $A = 6 \text{ kJ}$ .

787. Kako se promena stanja gasa vrši u uslovima stalne temperature, to je rad spoljašnjih sila nad vazduhom u cilindru

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Pošto je  $p_1 V_1 = \frac{m}{M} RT$  i  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_a + \rho g h_2}{p_a + \rho g h_1}$ ,

to je

$$A = (p_a + \rho g h_1) V_1 \ln \frac{p_a + \rho g h_2}{p_a + \rho g h_1} = 910 \text{ J}$$

788. Prema I principu termodinamike je

$$A = Q - \Delta U = mc_p \Delta T - \frac{j}{2} n R \Delta T. \text{ Kako je } c_p = \frac{j+2R}{2M}, \text{ to je}$$

$$A = \frac{m}{M} R \Delta T = 1818 \text{ J}$$

Isto tako, prema jednačini stanja gasa do-  
bija se da je

$$A = p \Delta V = \frac{m}{M} R \Delta T = 1818 \text{ J}$$

789. a)  $A = p \Delta V = p(2V_1 - V_1) = pV_1 = 0,2 \text{ kJ};$

b)  $Q = mc_p \Delta T$ , gde je  $m = p M V_1 / (RT_1)$ ,  $c_p = \frac{j+2R}{2M}$ ,  $\Delta T = T_2 - T_1 = T_1 (V_2/V_1) - T_1 = T_1$ ,

pa je

$$Q = \frac{j+2}{2} p V_1 = \frac{7}{2} A = 0,7 \text{ kJ}$$

c)  $\Delta U = Q - A = \frac{j}{2} p V_1 = 0,5 \text{ kJ.}$

790.  $U = mc_p \Delta T = \frac{j}{2} n R \Delta T \approx 5 \text{ kJ.}$

791. a, b) Na osnovu I principa termo-  
dinamike  $Q = \Delta U + A$ , pošto je  $\Delta U = 0$ , nalazi se da je

$$Q = A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = 168 \text{ J}$$

792. Za izobarsku ekspanziju je  $V_1/V_1 = = T_2/T_1$ , gde je  $V_2 = 3V_1$ , pa je  $T_2 = 3T_1 = = 819 \text{ K}$ . Gas se zagreje za  $\Delta T = T_2 - T_1 = 546 \text{ K}$ , pa mu je potrebno dovesti količinu toplote

$$Q = mc_p \Delta T = n M c_p \Delta T \approx 30 \text{ kJ}$$

793. Kako je reč o izohorskoj promeni sta-  
nja, to je  $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$ , tj.  $T_2 = T_1 \frac{p_2}{p_1} = 2T_1$  i  $T_1 = T^\circ$ , pa je potrebna količina toplote

$$Q = mc_p \Delta T = p V c_p (T_2 - T_1) = p V c_p T^\circ \approx 1,3 \text{ kJ}$$

794.  $A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = 2,25 \text{ kJ.}$

795.  $A = \frac{nRT}{x-1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{x-1} \right] \approx 4 \text{ kJ.}$

796.  $A = nRT \ln \frac{p_1}{p_2} = 10,9 \text{ kJ}$ . Zapremina ga-  
sa se povećava  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_1}{p_2} = 5$  puta.

797. a)  $A = nRT \ln \frac{p_2}{p_1} = p_1 V_1 \ln \frac{p_2}{p_1} = 136 \text{ J};$

b)  $Q = A = 136 \text{ J.}$

798.  $V_2 = V_1 \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{1/x} = 1,64 \text{ L.}$

799.  $\frac{p_1}{p_2} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^x = 2^{1,32} = 2,5.$

Preporučujemo da izračunate za koliko će  
se sniziti temperatura gasa.

800.  $p_2 = p_1 (V_1/V_2)^x$ , gde je  $p_1 = p^0$ , a  $V_1/V_2 = = 20$ , pa je  $p_2 = 14,6 \text{ MPa}$  i  $T_2 = T^0 (V_1/V_2)^{x-1} = = 2120 \text{ K.}$

801. Za adijabatsku promenu stanja gasa

je  $\frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{x-1}$  (1) i  $\frac{p_1}{p_2} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^x$  (2), pa je iz

relacija (1) i (2)

$$\frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{x-1}{x}}$$

gde je  $p_2 = p_1/3$ , pa je  $T_1/T_2 = 1,36$  odnosno  
 $T_2 \approx 200 \text{ K}$  ili  $t_2 = -73^\circ \text{C}$ .

802.  $\frac{V_2}{V_1} = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{x}} = \left( \frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{1,4}} = 1,44$ . Procenat

ispuštenog gasa je  $\delta = \frac{V_2 - V_1}{V_2} = 30,6\%$ .

803. Posle sabijanja gasa je  $\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^x$ , gde je

$p_2 = 3p_1$  (1), pa je  $\frac{V_1}{V_2} = 3^{1/x}$  (2). Posle širenja ga-

sa je  $\frac{p_2}{p_2} = \left( \frac{V_2}{V_3} \right)^x$ , gde je  $V_3 = 3V_1$  (3), pa je

$$\frac{p_2}{p_3} = 3^{x+1} \quad (4)$$

Iz relacija (1) i (4) je  $\frac{p_1}{p_3} = 3^{x+1} = 4,2$ , a pre-

ma relaciji (3) je  $\frac{V_1}{V_3} = \frac{1}{3}$ .

804. a) Kiseonik se ohladi do temperature  $T_2$ ,  
koja se može odrediti iz relacije  $T_1/T_2 = = (V_2/V_1)^{x-1}$ , odakle je  $T_2 = 240 \text{ K}$  ili  $t_2 = = -33^\circ \text{C}$ .

Gas je potrebno zagrejati za  $\Delta t = t_1 - t_2 = = 38^\circ \text{C}$ , odnosno dovesti mu količinu toplote

$$Q = mc_p \Delta t = 24,8 \text{ kJ}$$

b)  $p_2 = p_1 \frac{T_1}{T_2} = 315 \text{ kPa.}$

805. Posle adijabatskog sabijanja je  $\frac{T_1}{T_2} = = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\frac{x-1}{x}}$ . Kako je prema rešenju zadatka 803,

$$\frac{V_1}{V_2} = 3^{\frac{1}{x}}, \text{ to je } \frac{T_2}{T_1} = 3^{\frac{x-1}{x}} \quad (1).$$

Posle adijabat-  
skog širenja je  $\frac{T_2}{T_3} = \left( \frac{V_3}{V_2} \right)^{\frac{x-1}{x}}$ . Za  $V_3 = 3V_2$  je

$$\frac{T_2}{T_3} = 3^{\frac{x-1}{x}} \quad (2).$$

Iz relacija (1) i (2) je  $T_3 = = T_1 \cdot 3^{1-x} \approx 2T_1 = 600 \text{ K}$ . Gasu je potrebno do-  
vesti količinu toplote

$$Q = mc_p (T_1 - T_3) = -mc_p T_1 \approx -20 \text{ kJ}$$

Znak (-) ukazuje da gasu treba odvesti  
količinu toplote od 20 kJ jer je krajnja tem-  
peratura viša od početne.

806.  $\Delta A = \frac{nRT_1}{x-1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{x-1} \right] - nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} =$   
 $= 4768 \text{ J}$

807. Za adijabatsku promenu stanja gasa je

$$A = \frac{nRT}{x-1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{x-1} \right] \quad (1) \text{ i } \frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{x-1} \quad (2)$$

Iz relacija (1) i (2) sniženje temperature  
kiseonika je

$$\Delta t = T_2 - T_1 = \frac{(x-1)A}{nR} = 16^\circ \text{C}$$

808.  $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{\Delta T}{T_1} = 0,25.$

809.  $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{m c \Delta t}{Q} = 0,202.$

810.  $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\Delta Q}{Q_1} = \frac{A}{Q_1}$ . Kako je takođe  
 $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ , to je

$$Q_1 = \frac{A}{1 - \frac{T_2}{T_1}} = 3,53 \text{ kJ}$$

811.  $Q = \frac{A}{\eta} = \frac{nRT_1}{T_1 - T_2} \left( T_1 \ln \frac{V_1}{V_2} - T_2 \ln \frac{V_2}{V_1} \right) \approx$   
 $\approx 1,4 \text{ kJ.}$

812. Stepen korisnog dejstva u prvom slu-  
čaju je

$$\eta_1 = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max} + \Delta T}$$

a u drugom slučaju

$$\eta_2 = 1 - \frac{T_{\min} - \Delta T}{T_{\max}}$$

pa je

$$\eta_1 - \eta_2 = \frac{T_{\min} - \Delta T}{T_{\max}} - \frac{T_{\min}}{T_{\max} + \Delta T} < 0$$

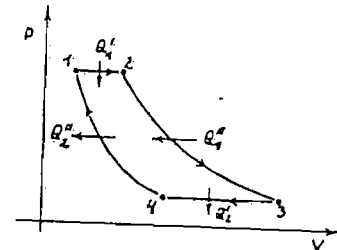
što znači da je povoljniji drugi slučaj.

813. Stepen korisnog dejstva je

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad (1)$$

gde je

$$Q_1 = Q_1' + Q_1'' \text{ i } Q_2 = Q_2' + Q_2''$$



- 1 - ( $p_1 = p_{\max}, V_1, T_1$ )
- 2 - ( $p_2 = p_1, V_2, T_2 = T_{\max}$ )
- 3 - ( $p_3 = p_{\min}, V_3, T_3 = T_2$ )
- 4 - ( $p_4 = p_3, V_4, T_4 = T_{\min}$ )

Za izobarske procese je

$$Q_1' = n C_{m,p} (T_2 - T_1) = n C_{m,p} T_2 \left( \frac{\tau - 1}{\tau} \right) \quad (2)$$

$$Q_2' = n C_{m,p} (T_3 - T_4) = n C_{m,p} T_3 \left( \frac{\tau - 1}{\tau} \right) \quad (3)$$

a za izotermne

$$Q_1'' = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \text{ i } Q_2'' = nRT_2 \ln \frac{V_1}{V_2}$$

Veze između odgovarajućih parametara sta-  
nja su

$$p_1 V_1 = p_2 V_2, \text{ tj. } V_2/V_1 = p_1/p_2 = a$$

$$p_2 V_2 = p_3 V_3, \text{ tj. } V_3/V_2 = p_2/p_3 = a$$

pa je

$$Q_1'' = nRT_1 \ln a \quad (4)$$

$$Q_2'' = nRT_2 \ln a \quad (5)$$

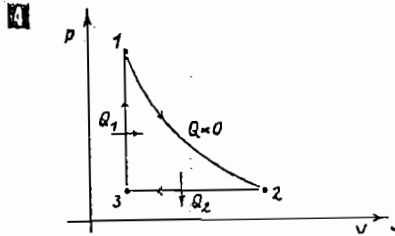
Prema relacijama (1), (2), (3), (4) i (5) do-  
bija se da je

$$\eta = \frac{(\tau - 1) \ln a}{\tau \ln a + \frac{x(\tau - 1)}{x - 1}}$$

gde je  $x = c_p/c_v$ .

814. Stepen korisnog dejstva je **4**

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{nC_{mp}\Delta T}{nC_{mv}\Delta T'} = 1 - \frac{nC_{mp}(T_2 - T_3)}{nC_{mv}(T_1 - T_3)} \quad (1)$$



- 1 - ( $p_1, V_1, T_1 = T_{max}$ )
- 2 - ( $p_2, V_2, T_2$ )
- 3 - ( $p_3 = p_2, V_3 = V_1, T_3 = T_{min}$ )

Veza između parametara stanja 1 i 2 određena je relacijom  $T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1}$  (2), a između stanja 1 i 3

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_3}{T_3}, \text{ tj. } \frac{p_1}{p_3} = \frac{T_1}{T_3} \quad (3)$$

pa se prema relacijama (1), (2) i (3) dobija da je

$$\eta = 1 - \frac{1-\kappa}{T_1(\tau^\kappa - 1)} = 1 - \frac{1}{\tau - 1} \left( \frac{1}{\tau^\kappa} - 1 \right)$$

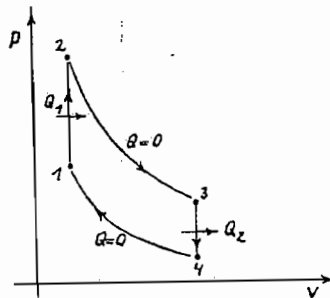
815. Stepen korisnog dejstva je

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

gde je **5**

$$Q_1 = nC_{mv}(T_2 - T_1) \\ Q_2 = nC_{mv}(T_3 - T_2)$$

**6**



- 1 - ( $p_1, V_1 = V_{min}, T_1$ )
- 2 - ( $p_2, V_2 = V_1, T_2$ )
- 3 - ( $p_3, V_3 = V_{max}, T_3$ )
- 4 - ( $p_4, V_4 = V_3, T_4$ )

pa se zamenom dobija da je

$$\eta = 1 - \frac{T_3 - T_4}{T_2 - T_1} \quad (1)$$

Za stanja 1 i 4, kao i stanja 2 i 3 važe relacije

$$\frac{T_1}{T_4} = \left( \frac{V_1}{V_4} \right)^{\kappa-1} = a^{\kappa-1} \quad (2)$$

$$\frac{T_2}{T_3} = \left( \frac{V_2}{V_3} \right)^{\kappa-1} = a^{\kappa-1} \quad (3)$$

Na osnovu relacija (1) (2) i (3) dobija se da je stepen korisnog dejstva toplotne mašine čiji se rad zasniva na ovom kružnom ciklusu

$$\eta = 1 - \frac{T_3 - T_4}{a^{\kappa-1}(T_2 - T_1)} = 1 - a^{1-\kappa}$$

816. a) Stepen korisnog dejstva je

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

gde su **6**

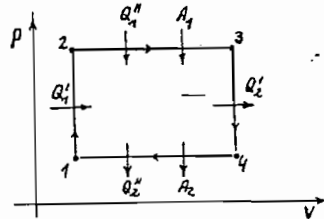
$$Q_1 = Q'_1 + Q''_1 = nC_{mv}(T_2 - T_1) + nC_{mp}(T_3 - T_2) = nC_{mv}T_1(\tau - 1) + nC_{mp}T_2(\tau - 1)$$

$$Q_2 = Q'_2 + Q''_2 = nC_{mv}(T_3 - T_2) + nC_{mp}(T_4 - T_3) = nC_{mv}T_2(\tau - 1) + nC_{mp}T_3(\tau - 1)$$

pa je

$$\eta = 1 - \frac{(nC_{mv}T_2 + nC_{mp}T_3)(\tau - 1)}{(nC_{mv}T_1 + nC_{mp}T_2)(\tau - 1)} = 1 - \frac{T_2(C_{mv}\tau + C_{mp})}{T_1(C_{mv}\tau + C_{mp})} = 1 - \frac{\tau + \kappa}{1 + \tau\kappa}$$

gde je  $\kappa = C_{mp}/C_{mv}$ .



- 1 - ( $p_1, V_1, T_1$ )
- 2 - ( $p_2, V_2, T_2 = \tau T_1$ )
- 3 - ( $p_3, V_3, T_3 = \tau T_2$ )
- 4 - ( $p_4, V_4, T_4 = \tau T_3$ )

b) promena entropije u prvom slučaju je

$$\Delta S_{1,2,3} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T} + \int_{T_2}^{T_3} \frac{dQ}{T}$$

odnosno

$$\Delta S_{1,2,3} = nC_{mv} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + nC_{mp} \int_{T_2}^{T_3} \frac{dT}{T} = nC_{mv} \ln \frac{T_2}{T_1} + nC_{mp} \ln \frac{T_3}{T_2} = n(C_{mv} + C_{mp}) \ln \tau$$

a u drugom

$$S_{1,2,3,4} = nC_{mp} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + nC_{mv} \int_{T_2}^{T_3} \frac{dT}{T} = nC_{mp} \ln \frac{T_2}{T_1} + nC_{mv} \ln \frac{T_3}{T_2} = n(C_{mp} + C_{mv}) \ln \tau$$

što znači da je

$$\Delta S_{1,2,3} = \Delta S_{1,2,3,4}$$

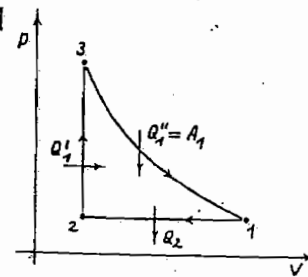
817. a) Tražene količine toplote su **7**

$$Q'_1 = nC_{mv}\Delta T = nC_{mv}(T_{max} - T_{min})$$

$$Q''_1 = nRT_{max} \ln \frac{V_1}{V_3} = nRT_{max} \ln \frac{T_{max}}{T_{min}}$$

$$Q_2 = nC_{mp}\Delta T = nC_{mp}(T_{max} - T_{min})$$

**7**



- 1 - ( $p_1, V_1, T_1 = T_{max}$ )
- 2 - ( $p_2 = p_1, V_2, T_2 = T_{min}$ )
- 3 - ( $p_3, V_3 = V_2, T_3 = T_{max}$ )

Količine toplote  $Q'_1$  i  $Q''_2$  dovode se mašini tokom svakog ciklusa, dok se količina toplote  $Q_2$  odvodi.

b) Stepen korisnog dejstva je

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q'_1 + Q''_1} = 1 - \frac{nC_{mp}(T_{max} - T_{min})}{nRT_{max} \ln \frac{T_{max}}{T_{min}} + nC_{mv}(T_{max} - T_{min})}$$

odakle se dobija da je

$$\eta = 1 - \frac{\kappa}{\kappa - 1} (\tau - 1) = 1 - \frac{\tau - 1}{\tau \ln \tau + \frac{\tau - 1}{\kappa - 1}}$$

gde je  $\kappa = C_{mp}/C_{mv}$ .

818. Količina toplote koja se dovodi gasu za vreme izobarske ekspanzije je **8**

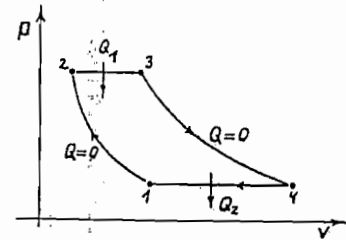
$$Q_1 = nC_{mp}(T_3 - T_2)$$

a koja se oslobodi (odvede) prilikom izobarske kompresije je

$$Q_2 = nC_{mp}(T_4 - T_1)$$

pa je stepen korisnog dejstva mašine

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \quad (1)$$



- 1 - ( $p_1 = p_{min}, V_1, T_1$ )
- 2 - ( $p_2 = p_{max}, V_2, T_2$ )
- 3 - ( $p_3 = p_2, V_3, T_3$ )
- 4 - ( $p_4 = p_1, V_4, T_4$ )

Stanja gasa 1 i 2, kao i 3 i 4 povezana su relacijama

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad (2)$$

$$\frac{T_3}{T_4} = \left( \frac{p_3}{p_4} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad (3)$$

pa je na osnovu relacija (1), (2) i (3)

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{a^{\kappa} (T_3 - T_2)} = 1 - a^{-(\kappa-1)/\kappa}$$

gde je  $\kappa = C_{mp}/C_{mv}$ .

819. Stepen korisnog dejstva je

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad (1)$$

gde je **8**

$$Q_1 = nC_{mp}\Delta T = nC_{mp}(T_3 - T_1) \\ Q_2 = nC_{mv}\Delta T' = nC_{mv}(T_2 - T_1)$$



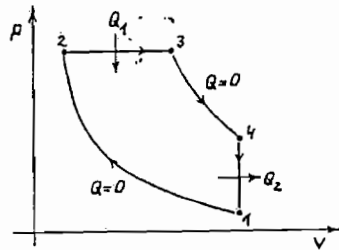
Veza između pojedinih parametara stanja 1 i 2, kao i 2 i 3 je

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \quad \text{tj.} \quad \frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_1}$$

pa je

$$Q_1 = n C_{mp} T_1 a^{x-1} (b-1) \quad (2)$$

9



- 1 -  $(p_1, V_1, T_1)$
- 2 -  $(p_2, V_2 = V_1/a, T_2)$
- 3 -  $(p_3, V_3 = bV_2, T_3)$
- 4 -  $(p_4, V_4 = V_1, T_4)$

Pošto je  $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_4 V_4^{\gamma-1}$ , tj.

$$T_4 = T_1 \left(\frac{b}{a}\right)^{\gamma-1} = T_1 b^x$$

dobija se da je  $Q_2 = n C_{mp} T_1 (b^x - 1)$  (3)

Na osnovu relacija (1), (2) i (3) nalazi se da je

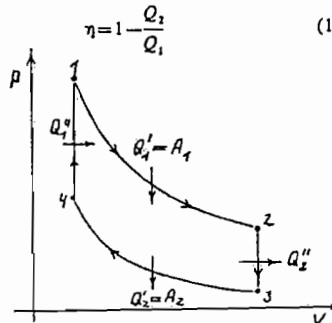
$$\eta = 1 - \frac{n C_{mp} T_1 (b^x - 1)}{n C_{mp} T_1 a^{x-1} (b-1)} = 1 - \frac{b^x - 1}{x a^{x-1} (b-1)}$$

gde je  $x = C_{mp}/C_{mv}$ .

820. a) Stepen korisnog dejstva je

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad (1)$$

10



- 1 -  $(p_1, V_1 = V_{\min}, T_1 = T_{\max})$
- 2 -  $(p_2, V_2 = V_{\max}, T_2 = T_1)$
- 3 -  $(p_3, V_3 = V_2, T_3 = T_{\min})$
- 4 -  $(p_4, V_4 = V_1, T_4 = T_1)$

gde je 11

$$Q_1 = Q_1' + Q_1'' \quad \text{i} \quad Q_2 = Q_2' + Q_2''$$

tj.

$$Q_1' = n R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = n R T_{\max} \ln a \quad (2)$$

$$Q_1'' = n R T_3 \ln \frac{V_3}{V_4} = n R T_{\min} \ln a \quad (3)$$

$$Q_2' = n C_{mv} (T_1 - T_4) = n C_{mv} (T_{\max} - T_{\min}) \quad (4)$$

$$Q_2'' = n C_{mv} (T_2 - T_3) = n C_{mv} (T_{\max} - T_{\min}) \quad (5)$$

Prema relacijama (1), (2), (3), (4) i (5) nalazi se da je

$$\eta = 1 - \frac{n R T_{\min} \ln a - n C_{mv} (T_{\max} - T_{\min})}{n R T_{\max} \ln a + n C_{mv} (T_{\max} - T_{\min})} = \frac{(T_{\max} - T_{\min}) \ln a}{T_{\max} \ln a + \frac{1}{x-1} (T_{\max} - T_{\min})} = \frac{(\tau-1) \ln a}{\tau \ln a + \frac{1}{x-1} (\tau-1)}$$

gde je  $x = C_{mp}/C_{mv}$ .

$$\text{b) } \eta = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 1 - \frac{1}{\tau}$$

821. a) Stepen korisnog dejstva je

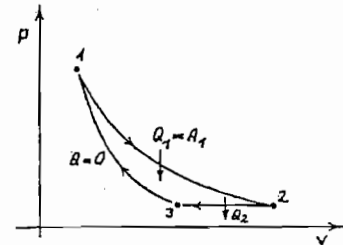
$$\eta_1 = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad (1)$$

gde je 11

$$Q_1 = n R T_{\max} \ln \frac{p_1}{p_2} \quad (2)$$

$$Q_2 = n C_{mp} \Delta T = n C_{mp} (T_{\max} - T_{\min})$$

11



- 1 -  $(p_1, V_1, T_1 = T_{\max})$
- 2 -  $(p_2, V_2, T_2 = T_1)$
- 3 -  $(p_3, V_3, T_3 = T_{\min})$

Veza parametara stanja 1 i 2 je

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{x-1}{x}} \quad \text{tj.} \quad \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{T_{\max}}{T_{\min}}\right)^{\frac{x}{x-1}}$$

pa je

$$Q_1 = n R T_{\max} \frac{x}{x-1} \ln \tau \quad (3)$$

gde je  $x = C_{mp}/C_{mv}$ .

Na osnovu relacija (1), (2) i (3) dobija se da je

$$\eta_1 = 1 - \frac{\frac{R x}{x-1} T_{\min} (\tau-1)}{\frac{R x}{x-1} T_{\max} \ln \tau} = 1 - \frac{\tau-1}{\tau \ln \tau}$$

b) Kada se izotermni proces odvija na minimalnoj temperaturi ciklusa, tada se odgovarajući kružni ciklus može prikazati dijagramom na slici 12. U ovom slučaju je stepen korisnog dejstva

$$\eta_2 = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

gde je

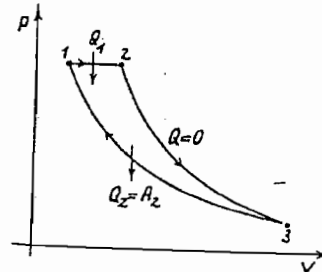
$$Q_1 = n C_{mp} (T_2 - T_1) = n C_{mp} T_{\min} (\tau-1)$$

$$Q_2 = n R T_{\min} \ln \frac{p_1}{p_2} = n R T_{\min} \frac{x}{x-1} \ln \tau$$

pa je

$$\eta_2 = 1 - \frac{n R T_{\min} \frac{x}{x-1} \ln \tau}{n R T_{\min} \frac{x}{x-1} (\tau-1)} = 1 - \frac{\ln \tau}{\tau-1}$$

12



- 1 -  $(p_1, V_1, T_1 = T_{\min})$
- 2 -  $(p_2, V_2, T_2 = T_{\max})$
- 3 -  $(p_3, V_3, T_3 = T_{\min})$

822. Stepen korisnog dejstva je

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad (1)$$

gde je 13

$$Q_1 = n R T_{\max} \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (2)$$

$$Q_2 = n C_{mv} (T_{\max} - T_{\min})$$

Veza parametara stanja 1 i 3 je

$$T_{\max} V_1^{\gamma-1} = T_{\min} V_3^{\gamma-1}$$

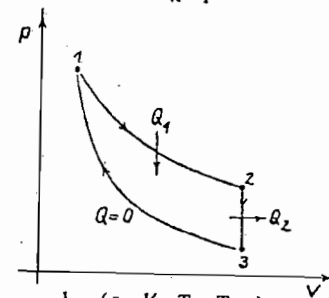
odnosno

$$\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_{\max}}{T_{\min}}$$

pa je

$$Q_1 = n R T_{\max} \frac{1}{x-1} \ln \tau \quad (3)$$

13



- 1 -  $(p_1, V_1, T_1 = T_{\max})$
- 2 -  $(p_2, V_2, T_2 = T_1)$
- 3 -  $(p_3, V_3 = V_2, T_3 = T_{\min})$

Na osnovu relacija (1), (2) i (3) dobija se da je

$$\eta = 1 - \frac{n C_{mv} T_{\max} \left(1 - \frac{1}{\tau}\right)}{n R T_{\max} \frac{1}{x-1} \ln \tau} = 1 - \frac{\tau-1}{\tau \ln \tau}$$

823. Stepen korisnog dejstva u ovom slučaju je

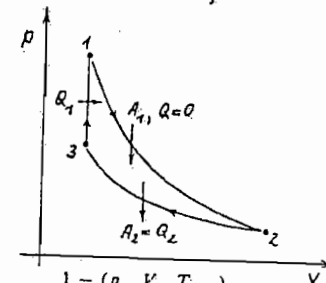
$$\eta = 1 - \frac{A_2}{A_1} \quad (1)$$

gde je 14

$$A_1 = n C_{mv} \Delta T = n C_{mv} (T_{\max} - T_{\min}) \quad (2)$$

$$A_2 = n R T_{\min} \ln \frac{V_2}{V_3} \quad (3)$$

14



- 1 -  $(p_1, V_1, T_{\max})$
- 2 -  $(p_2, V_2, T_{\min})$
- 3 -  $(p_3, V_3 = V_2, T_{\min})$

Kako je  $T_{\max} V_1^{\gamma-1} = T_{\min} V_3^{\gamma-1}$ , tj.

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_1} = \left(\frac{T_{\max}}{T_{\min}}\right)^{\frac{1}{\gamma-x}} \quad (4)$$

na osnovu relacija (1), (2), (3), (4) dobija se da je

$$\tau = 1 - \frac{nRT_{\min} \frac{1}{\tau-1} \ln \tau}{n C_{mV} T_{\min} (\tau-1)} = 1 - \frac{\ln \tau}{\tau-1}$$

824. Stepen korisnog dejstva je

$$\tau = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{Q_2' + Q_2''}{Q_2}$$

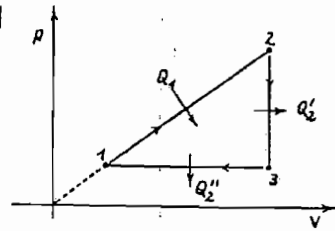
gde je 15

$$Q_1 = n C_{mV} (T_1 - T_2) + p \Delta V \quad (1)$$

$$Q_2 = n C_{mV} (T_1 - T_2) \quad (2)$$

$$Q_2'' = n C_{mP} (T_1 - T_2) \quad (3)$$

16



- 1 — ( $p_1, V_1, T_1 = T_{\min}$ )
- 2 — ( $p_2, V_2, T_2 = T_{\max}$ )
- 3 — ( $p_3, V_3, T_3$ )

Kako za stanje gasa između tačaka 1 i 2 postoji linearna zavisnost pritiska od zapremine, tj.  $p = kV$ , gde je  $k$  — konstanta proporcionalnosti, parametri stanja gasa koji odgovaraju tačkama 1, 2, 3, ciklusa povezani su relacijama

$$p_1 = kV_1; \quad p_2 = kV_2 \quad (4)$$

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}; \quad \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad (5)$$

Iz relacija (4) i (5), eliminisanjem konstante  $k$ , dobija se da je

$$T_1 = \sqrt{T_1 T_2} = \sqrt{T_{\max} T_{\min}}$$

Rad koji se vrši prilikom prelaska gasa iz stanja 1 u stanje 2 je

$$A = p \Delta V = \frac{p_1 + p_2}{2} (V_2 - V_1) \quad (6)$$

pa je prema relacijama (1), (5) i (6)

$$Q_1 = n C_{mV} (T_2 - T_1) - \frac{1}{2} (C_{mP} - C_{mV}) (T_2 - T_1) = \frac{1}{2} n (C_{mP} - C_{mV}) (T_2 - T_1)$$

pa je na osnovu ovih relacija stepen koris-

nog dejstva

$$\eta = 1 - 2 \frac{n C_{mV} (T_{\max} - \sqrt{T_{\max} T_{\min}})}{n (C_{mP} + C_{mV}) (T_{\max} - T_{\min})} + 2 \frac{n C_{mP} (\sqrt{T_{\max} T_{\min}} - T_{\min})}{n (C_{mP} + C_{mV}) (T_{\max} - T_{\min})} = 1 - 2 \frac{\tau - \sqrt{\tau} + x(\sqrt{\tau} - 1)}{(x+1)(\tau-1)}$$

825. Kako je pri adijabatskom procesu  $\Delta Q = 0$ , to je i  $\Delta S$  u prvom delu ovog procesa jednako nuli. Za izobarsko sabijanje helijuma važi relacija

$$dQ = \frac{m}{M} C_{mP} dT = n C_{mP} dT$$

pa je promena entropije

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{n C_{mP} dT}{T} = n C_{mP} \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Odnos temperatura  $T_2/T_1$  određen je relacijom

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}, \quad \text{tj.} \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1} = a$$

pa je promena entropije

$$\Delta S = -n C_{mP} \ln a$$

826. a) Iz I principa termodinamike

$$dQ = dU + dA$$

dobija se da je  $dA = dQ - dU$ , gde su

$$dQ = n C_{mV} dT = n \frac{\alpha}{T} dT$$

$$dU = n C_{mV} dT = \frac{j}{2} n R dT$$

pa je ukupni rad gasa

$$A = n \alpha \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} - \frac{j}{2} n R \int_{T_1}^{T_2} dT = n \alpha \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{j}{2} n R (T_2 - T_1)$$

b) Promena entropije je

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{n \alpha dT}{T} = n \alpha \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)$$

827. Dovedena količina toplote gasu prilikom izotermne ekspanzije od zapremine  $V_1$  do zapremine  $V_2$  je

$$Q = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

a kako je promena entropije za izotermni proces

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = nR \ln \frac{V_2}{V_1} = nR \ln a$$

gde je  $a = V_2/V_1$ , dobija se da je

$$a = e^{\Delta S/nR}$$

828. Ukupna promena entropije jednaka je zbiru pojedinih promena

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4$$

gde je

$$\Delta S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = mc_1 \ln \frac{T_1}{T_1}, \quad \Delta S_2 = \frac{mq_1}{T_1}$$

$$\Delta S_3 = mc_2 \ln \frac{T_2}{T_2} \quad \text{i} \quad \Delta S_4 = \frac{mq_1}{T_3}$$

pa se zamenom dobija da je

$$\Delta S = m \left( c_1 \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{q_1}{T_1} + c_2 \ln \frac{T_3}{T_2} + \frac{q_1}{T_3} \right) = 8,8 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

$$829) \Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{p dV}{T} = \frac{mR}{M} \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$= \frac{mR}{M} \ln \frac{p_1}{p_2} \approx 57,5 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

830. Promena entropije kristala je

$$\Delta S = \int_0^T \frac{dQ}{T} = \int_0^T \frac{n C_m dT}{T} = nk \int_0^T T^2 dT = \frac{nk}{3} T^3$$

831. Iz relacija  $T_k = \frac{8a}{27bR}$  i  $p_k = \frac{a}{27b^2}$  do-

bija se da je  $a = \frac{27 T_k^2 R^2}{64 p_k} = 0,136 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^4}{\text{mol}^2}$  i  $b =$

$$= \frac{T_k R}{8 p_k} = 31,7 \frac{\mu\text{m}^3}{\text{mol}}$$

832. Iz Van der Valsove jednačine

$$\left( p + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) = nRT$$

izražena temperatura je

$$T = \frac{1}{nR} \left( p + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) = 492 \text{ K}$$

$$833. T_k = \frac{8a}{27b^2 R} = 304 \text{ K};$$

$$p_k = \frac{a}{27b^2} = 7,38 \text{ MPa}$$

834. Temperatura azota kao idealnog gasa, prema jednačini stanja, iznosi  $T = \frac{pV}{nR} = 1229 \text{ K}$ .

Temperatura azota kao realnog gasa, prema Van der Valsovoj jednačini, jeste  $T' = \frac{1}{nR} \left( p + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) = 1246 \text{ K}$ . Učinjena gre-

ška pri ovome iznosi  $\delta = \frac{T - T'}{T} = 1,4\%$ .

835. Uvođenjem odnosa  $\tau = T/T_k$ ,  $\pi = p/p_k$ ,  $\varphi = V/V_k$ , Van der Valsova jednačina se može napisati u obliku

$$\left( \pi + \frac{3}{\varphi^2} \right) (\varphi - nb) = 8\tau$$

Kako je  $\pi = 2$  i  $\varphi = 1/2$ , iz prethodne jednačine se nalazi da je  $\tau = 0,875$ , pa je  $T = \tau T_k = 266 \text{ K}$ .

836. Relativna vlažnost je  $\delta = \frac{\rho}{\rho_m} 100\%$ ,

gde je  $\rho_m = 30,3 \text{ g/m}^3$  — maksimalna gustina vodene pare na datoj temperaturi (dobijena iz tablica na kraju knjige), a  $\rho = 22,7 \text{ g/m}^3$  — gustina vodene pare u datom trenutku. Zamenom se dobija da je  $\delta = 75\%$ .

837. Iz  $\delta = \frac{\rho}{\rho_m} 100\%$  dobija se da je gustina

wodene pare  $\rho = \frac{\delta}{100} \rho_m$ , gde je  $\delta = 70\%$ . — relativna vlažnost vazduha, a  $\rho_m = 17,3 \text{ g/m}^3$  — maksimalna gustina vodene pare u vazduhu na temperaturi  $20^\circ \text{C}$  (prema tablicama), pa je gustina vodene pare prema datim uslovima  $\rho = 12,1 \text{ g/m}^3$ . Da bi para postala zasićena ( $\delta = 100\%$ ), mora da bude  $\rho = \rho_m = 17,3 \text{ g/m}^3$ , što znači da je potrebno da ispari količina vode mase

$$\Delta m = \Delta \rho V = (\rho_m - \rho) V = 187 \text{ g}$$

### 3. PRENOŠENJE UNUTRAŠNJE ENERGIJE

838. Količina toplote koja se prenese kroz štap je

$$Q = \frac{\lambda \pi S (t_2 - t_1)}{l} = 23 \text{ kJ}$$

pa je masa istopljenog leđa  $m = Q q_i = 69 \text{ g}$ .

$$839. \tau = \frac{mgd}{\lambda \Delta T} = 16 \cdot 10^3 \text{ s} = 4 \text{ h } 27 \text{ min}$$

$$840. Q = \frac{\tau S d}{\frac{d_1}{\lambda_1} + 2 \frac{d_2}{\lambda_2}} = 3,35 \text{ MJ}$$

$$841. d = 5,4 \text{ cm}$$

842. Toplotni fluks kroz zidove (u stacionarnom stanju) odgovara snazi koju razvija električna grejalica, tj.

$$\Phi = P = \frac{\lambda S \Delta t}{d}$$

pa je razlika temperatura

$$\Delta t = \frac{Pd}{\lambda S} \approx 20 \text{ K}$$

a odgovarajuća temperatura spoljašnje površine zida  $t_2 = t_1 - \Delta t = 0^\circ \text{C}$ .

$$843. Q = \frac{2\pi\lambda r_1(t_1 - t_2)}{\ln(r_2/r_1)} = 0,88 \text{ GJ}$$

$$844. m' = 13,9 \text{ g/s}$$

845. Prema uslovu zadatka je

$$\frac{\Phi}{l} = \frac{2\pi\lambda(t_1 - t_2)}{\ln(r_2/r_1)} < 210 \frac{\text{W}}{\text{m}}$$

odakle je  $\ln(r_2/r_1) > 2\pi\lambda\Delta t / (210 \text{ W/m}) = 0,107$ , odnosno  $r_2/r_1 > 1,12$  ili  $r_2 > 1,12r_1 = 2,24 \text{ cm}$ . Potrebna debljina sloja plute je  $d = r_2 - r_1 = 0,24 \text{ cm}$ .

$$846. Q = \frac{4\pi\lambda r_1(t_2 - t_1)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} = 54,4 \text{ MJ}$$

847. Na osnovu relacija

$$\lambda = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle \Lambda \rangle c_V$$

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle \Lambda \rangle$$

nalazi se da je

$$\eta = \frac{\lambda}{c_V} = \frac{2\lambda M}{JR} = 50 \mu\text{Pa}\cdot\text{s}$$

848. Za argon je  $\lambda = \frac{1}{3} \rho_1 \langle v_1 \rangle \langle \Lambda_1 \rangle c_{V1}$ , gde je

$$\rho_1 = \frac{pM_1}{RT}, \langle v_1 \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_1}}, \langle \Lambda_1 \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d_1^2 p}$$

$$c_{V1} = \frac{j}{2} \frac{R}{M_1}, \text{ dok je analogno za helijum}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{3} \rho_2 \langle v_2 \rangle \langle \Lambda_2 \rangle c_{V2}$$

gde je

$$\rho_2 = \frac{pM_2}{RT}, \langle v_2 \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_2}}, \langle \Lambda_2 \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d_2^2 p}$$

$$c_{V2} = \frac{j}{2} \frac{R}{M_2}$$

pa je

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{a} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}$$

odakle je

$$\frac{d_1}{d_2} = \sqrt{a \sqrt{\frac{M_1}{M_2}}} \approx 1,66$$

849. Toplotni fluks je određen relacijom

$$\Phi = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

gde je  $\lambda = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \Lambda \rangle \rho c_V$ , tj.

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \langle \Lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}, \rho = \frac{pM}{RT} = \frac{nkM}{R}$$

(pošto je  $p = nkT$ ) i  $c_V = \frac{j}{2} \frac{R}{M}$  pa se dobija da je

$$\int_0^l \Phi dx = -\frac{j}{3} \frac{k}{\pi d^2} \sqrt{\frac{R}{\pi M}} \int_{T_1}^{T_2} T^{1/2} dT$$

tj.

$$\Phi = \frac{2j}{9} \frac{k}{\pi d^2} \sqrt{\frac{R}{\pi M}} (T_1^{3/2} - T_2^{3/2}) \approx 2 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

850. a) Toplotni fluks kroz izolatorske ploče je jednak, pa je  $\Phi_1 = \Phi_2$ , tj.

$$\lambda_1 S \frac{T_1 - T_x}{l_1} = \lambda_2 S \frac{T_x - T_2}{l_2}$$

odakle je temperatura dotirne površine izolatorskih ploča

$$T_x = \frac{\lambda_1 l_2 T_1 + \lambda_2 l_1 T_2}{\lambda_1 l_2 + \lambda_2 l_1} \quad (1)$$

b) Kako za ovaj sistem važi  $\Phi = \Phi_1 = \Phi_2$ , tj.

$$\lambda_2 S \frac{T_1 - T_2}{l} = \lambda_1 S \frac{T_1 - T_x}{l_1} = \lambda_2 S \frac{T_x - T_2}{l_2} \quad (2)$$

iz relacija (1) i (2) nalazi se da je

$$\lambda_c = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (l_1 + l_2)}{\lambda_1 l_2 + \lambda_2 l_1}$$

851. a) Gustina toplotnog fluksa kroz cilindar je

$$q = -\lambda S \frac{dT}{dx}$$

pa je

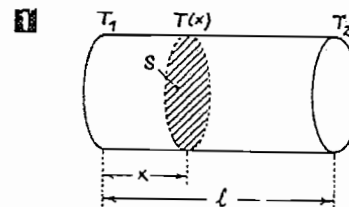
$$\int_0^l q dx = -k \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} \quad (1)$$

tj.

$$q = \frac{k}{l} \ln \frac{T_1}{T_2} \quad (2)$$

b) Za neko rastojanje  $x < l$  od osnove cilindra više temperature ( $T_1$ ), relacija (1) može se napisati u obliku

$$\int_0^x q dx = -k \int_{T_1}^{T(x)} \frac{dT}{T}$$



pa je prema relaciji (2)

$$x \frac{k}{l} \ln \frac{T_1}{T_2} = k \ln \frac{T_1}{T(x)}$$

odakle je

$$T(x) = T_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{x/l}$$

852. Toplotni fluks kroz poprečni presek štapa je

$$\Phi = -\lambda S \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

Za  $\Delta x = l$  i  $\Delta T = t_2 - t_1$  dobija se da je

$$\Phi = \lambda S \frac{t_1 - t_2}{l}$$

a količina toplote koja se prenese kroz štap u toku vremena  $\tau$  je

$$Q_1 = \Phi \tau = \lambda S \frac{t_1 - t_2}{l} \tau$$

dok je količina toplote potrebna za topljenje količine leda, mase  $m$ ,

$$Q_2 = m q_t$$

Kako je  $Q_1 = Q_2$ , iz ovog uslova nalazi se da je

$$m = \frac{\lambda S (t_1 - t_2) \tau}{l q_t} \approx 4,8 \text{ g}$$

gde je  $q_t = 0,33 \text{ MJ/kg}$  — specifična toplota topljenja leda.

853. Gustina toplotnog fluksa data je relacijom

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

pa je u ovom slučaju

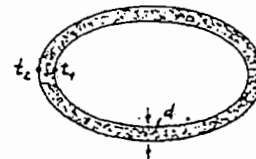
$$q = -\lambda_0 (1 + kT) \frac{dT}{dx}$$

ili

$$\int_0^d dx = -\int_{t_1}^{t_2} \lambda_0 (1 + kT) dT$$

odakle se dobija da je

$$q = \frac{\lambda_0}{d} \left( t_1 - t_2 + \frac{k t_1^2}{2} - \frac{k t_2^2}{2} \right) = 896,4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$



854. Toplotni fluks kroz azbestnu ploču je

$$\Phi = -\lambda S \frac{dT}{dx} = -\lambda \pi r^2 \frac{t_1 - t_2}{d}$$

što odgovara količini toplote koju primi voda u kalorimetru tokom jediničnog vremena, pa je

$\Phi = m' c (\theta_2 - \theta_1)$  gde je  $c$  — specifična toplotna

kapacitivnost vode, odakle se dobija da je

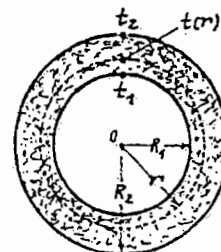
$$\lambda = \frac{m' c d (\theta_2 - \theta_1)}{\pi r^2 (t_1 - t_2)} = 0,43 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}$$

855. Toplotni fluks kroz cilindričnu cev poluprečnika  $R_1$  i  $R_2$ , tj. debljine  $R_2 - R_1$ , je

$$\Phi = \frac{2\pi l \Delta T}{\ln(R_2/R_1)} = \frac{2\pi l \lambda (t_1 - t_2)}{\ln(R_2/R_1)} \quad (1)$$

a kroz cilindričnu površinu poluprečnika  $r$  (pri čemu je  $R_1 < r < R_2$ )

$$\Phi = -\lambda S \frac{dT}{dr} = -\lambda \cdot 2\pi r l \frac{dT}{dr}$$



pa je  $\frac{\Phi}{2\pi l} \frac{dr}{r} = -\lambda dT$ , ili

$$\frac{\Phi}{2\pi l} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = -\lambda \int_{t_1}^{t_2} dT$$

Integraljenjem se dobija da je

$$t(r) = t_1 - \frac{\Phi}{2\pi\lambda} \ln \frac{r}{R_1} \quad (2)$$

pa se na osnovu relacija (1) i (2) nalazi da je tražena raspodela temperatura

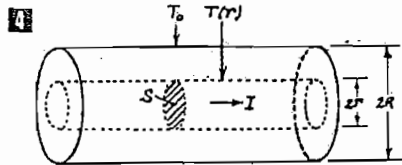
$$t(r) = t_1 - (t_1 - t_2) \frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)}$$

856. Kroz deo provodnika, poluprečnika  $r$ , toplotni fluks je

$$\Phi = -\lambda S \frac{dT}{dx} = -\lambda 2\pi r l \frac{dT}{dr}$$

dok je odgovarajuća snaga koju razvija električna struja u ovom delu provodnika

$$\Phi' = R'I'^2 = \rho \frac{l}{\pi r^2} \left( I \frac{\pi r^2}{\pi R^2} \right)^2 = \rho \frac{I^2}{\pi R^4} r^2$$



Kako je  $\Phi = \Phi'$ , to je

$$\rho \frac{I^2}{\pi R^4} r = -\lambda 2\pi \frac{dT}{dr}$$

ili

$$\frac{\rho I^2}{\lambda 2\pi^2 R^4} r dr = -dT$$

odakle je

$$\frac{\rho I^2}{4\pi^2 \lambda R^4} r^2 = -T + C$$

gde je  $C$  — konstanta integraljenja. Ona se određuje iz uslova da za  $r = R$  je  $T = T_0$ , pa se za raspodelu temperatura u provodniku u funkciji poluprečnika dobija izraz

$$T(r) = T_0 + \frac{\rho I^2}{\lambda 4\pi^2 R^4} (R^2 - r^2)$$

## ELEKTRICITET

### 1. ELEKTRIČNO POLJE

857. a)  $F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} = 9 \text{ kN}$ ;

b)  $F_2 = F_1/\epsilon_r \approx 9 \text{ kN}$ , jer je za vazduh  $\epsilon_r = 1,00059 \approx 1$ ;

c)  $F_3 = F_1/\epsilon_r = 9 \text{ kN}/81 = 0,11 \text{ kN}$ .

858.  $F = 17 \text{ kN}$ .

859. Naelektrisanje kapljica je  $q_1 = q_2 = e$ , a njihova masa  $m_1 = m_2 = \rho V = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$ . Prema uslovu zadatka je

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{d^2} = \gamma \frac{m^2}{d^2}$$

gde je  $d$  — rastojanje između kapljica, odnosno

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{d^2} = \gamma \frac{16\pi^2 \rho^2 r^6}{9d^2}$$

odakle je

$$r = \sqrt[6]{\frac{9e^2}{64\epsilon_0 \gamma \pi^2 \rho^2}} = 81,6 \mu\text{m}$$

860. Kulonove sile moraju da budu odbojne pošto su gravitacione sile uvek privlačne. To znači da naelektrisanja moraju biti suprotnih znakova. Iz uslova

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} = \gamma \frac{m^2}{r^2}$$

nalazi se da je potrebno naelektrisanje tela

$$q = \pm m \sqrt{4\pi\epsilon_0 \gamma} = 0,86 \text{ pC}$$

861. Iz uslova dinamičke ravnoteže centrifugalne i Kulonove sile

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze \cdot e}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

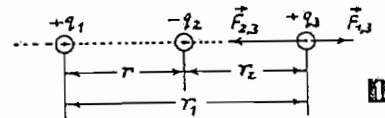
za vodonik ( $Z=1$ ) dobija se da je

$$v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m r}} = 1,6 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

862.  $F = 0,7 \text{ N}$ .

863. Intenzitet Kulonove sile između naelektrisanja  $q_1$  i  $q_2$  je

$$F_{1,2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_1^2} = 90 \mu\text{N}$$



a) između  $q_1$  i  $q_3$

$$F_{2,3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{r_2^2} = -180 \mu\text{N}$$

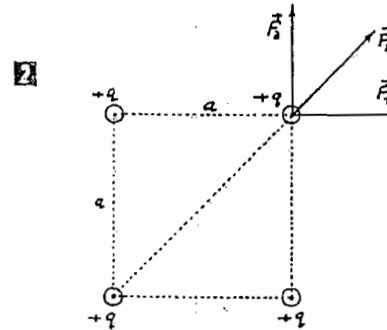
pa je intenzitet rezultujuće sile

$$F = F_{1,3} + F_{2,3} = -90 \mu\text{N}$$

864. Kako je  $F_1 = F_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2} = 90 \mu\text{N}$ ,

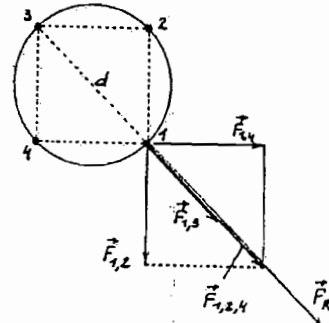
a  $F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2a^2} = 45 \mu\text{N}$ , to je intenzitet rezultujuće sile

$$F = F_2 + \sqrt{F_1^2 + F_3^2} = F_2 + \sqrt{2} F_1 = 172 \mu\text{N}$$



865. Treće telo može da bude naelektrisan pozitivnom ili negativnom količinom elektriciteta i postavljeno između prva dva tela, na rastojanju  $x = 2a/3$  od prvog tela (sa naelektrisanjem  $q_1$ ).

866. a) Kuglice će, nakon uspostavljanja stacionarnog stanja, zauzeti položaj koji odgovara temenima najvećeg kvadrata koji se može upisati u ovaj disk. Kako je prečnik diska  $d$ , stranice ovog kvadrata su  $a = d/\sqrt{2}$ .



b)  $\vec{F}_{R1} = \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \vec{F}_{1,4}$ , pri čemu je

$$F_{1,2} = F_{1,4} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(d/\sqrt{2})^2}$$

$$F_{1,3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{d^2}$$

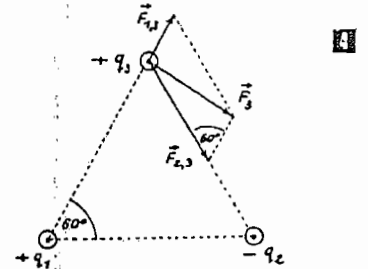
pa je intenzitet rezultujuće sile koja deluje na naelektrisanje  $q_1$  (kao i na ostala naelektri-

sanja)

$$F_{R1} = F_{1,2,4} + F_{1,3} = 2F_{1,2} - F_{1,3} = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{d^2}$$

867. Kulonova sila između naelektrisanja  $q_1$  i  $q_2$  je  $F_{1,2} = 45 \mu\text{N}$ , a između  $q_2$  i  $q_3$  je  $F_{2,3} = 270 \mu\text{N}$ , pa je prema vektorskom trouglu rezultujuća sila koja deluje na naelektrisanje  $q_1$

$$F_1 = \sqrt{F_{1,2}^2 + F_{2,3}^2} - 2F_{1,2}F_{2,3} \cos 60^\circ = 247,5 \mu\text{N}$$



U kom pravcu i smeru bi se kretalo naelektrisanje  $q_1$  kada bi postalo slobodno?

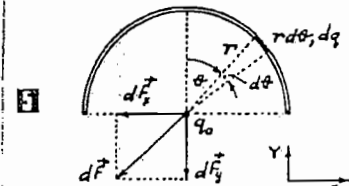
868. Element provodnika, dužine  $dx = r d\theta$ , naelektrisan je količinom elektriciteta

$$dq = \frac{q}{\pi r} dx = \frac{q}{\pi} d\theta$$

pa je Kulonova sila između ovog elementa provodnika i naelektrisanja  $q_0$

$$dF = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} d\theta \cdot q_0$$

Sa slike vidi se da se  $d\vec{F}_x$  komponente sile  $d\vec{F}$  međusobno poništavaju jer se javljaju

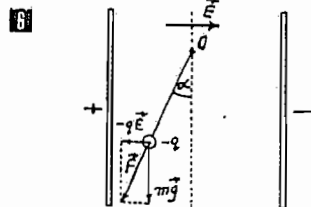


u parovima (međusobno suprotnog smera), pa je rezultujuća električna sila uzajamnog dejstva provodnika i naelektrisanja  $q_0$

$$F = \int dF_y = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{\pi r^2} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{qq_0}{2\pi^2 \epsilon_0 r^2}$$

869. Sa slike 6 se vidi da je intenzitet rezultujuće sile

$$F = ma = \sqrt{(mg)^2 + (qE)^2}$$



pa je rezultujuće ubrzanje

$$a = \frac{F}{m} = \frac{\sqrt{(mg)^2 + (qE)^2}}{m} = \sqrt{g^2 + \left(\frac{qE}{m}\right)^2}$$

a period oscilovanja

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{a}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + \left(\frac{qE}{m}\right)^2}}}$$

870. a) Period oscilovanja klatna bez prisustva električnog polja je

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1)$$

a u električnom polju

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g+a}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + \frac{F}{m}}} \quad (2)$$

Iz relacija (1) i (2) intenzitet električne sile je

$$F_e = qE = \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2} mg = 3mg \quad (3)$$

pošto je  $T_1 = 2T_2$ . Iz relacije (3) nalazi se da je jačina električnog polja  $E = 3mg/q = 900 \text{ V/cm}$ .

b) Ako se smer električnog polja promeni, period oscilovanja klatna postaje

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\frac{F}{m} - g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{3g - g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}} = \frac{T_1}{\sqrt{2}} = 0,42 \text{ s}$$

Napomena. Kako je  $F_e > mg$ , klatno u slučaju (2) osciluje oko gornjeg vertikalnog položaja.

871. Potencijal kulonovskog polja naelektrisanja  $q$  na rastojanju  $r$  je

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

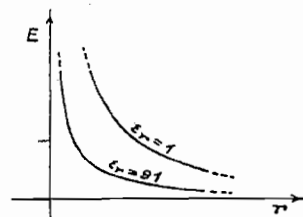
pa je razlika potencijala (napon)

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} = -3600 \text{ V}$$

Koliko je najmanje, a koliko najveće rastojanje ovih tačaka posmatranog kulonovskog polja?

872. a)  $E = 0,36 \text{ TV/m}$ ; b) 71.

71



873. Električni potencijal u ovoj tački iznosi

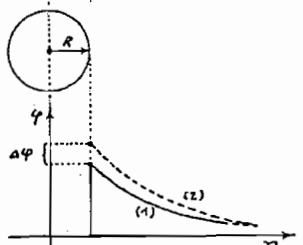
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{q}{R+d} = 3000 \text{ V}$$

Šta će se desiti sa potencijalom lopte ako se ulje razredi vodom?

$$874. \Delta\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 RZ} \Delta q = 1404 \text{ V.}$$

$$875. \text{ a) } \Delta\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q}{R} = 1080 \text{ V; b) } 8.$$

8



Da li će potencijal lopte ostati isti ako se lopta deformiše?

876. Kako je  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$ , odnosno  $q = 4\pi\epsilon_0 r\varphi$ , površinska gustina elektriciteta je

$$\sigma = \frac{q}{S} = \frac{4\pi\epsilon_0 r\varphi}{4\pi r^2} = \epsilon_0 \frac{\varphi}{r} = 2,21 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$$

877. a)  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$  i  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}$ , pa je  $\varphi/R = E$ ;

b)  $\varphi = ER = 25 \text{ MV}$ .

878. Električna potencijalna energija jedne lopte je

$$E_{ep} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r}$$

a njena gravitaciona potencijalna energija

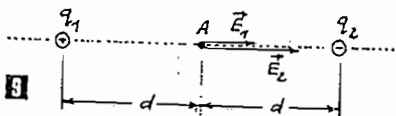
$$E_{gp} = \gamma \frac{m^2}{r}$$

pa je prema uslovu zadatka

$$q = 10 \text{ m} \sqrt{4\pi\epsilon_0 \gamma} = 17,2 \text{ nC}$$

879. a)  $\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ , pri čemu je

$$E_A = E_1 + E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{d^2} = 27 \frac{\text{kN}}{\text{C}}$$



9

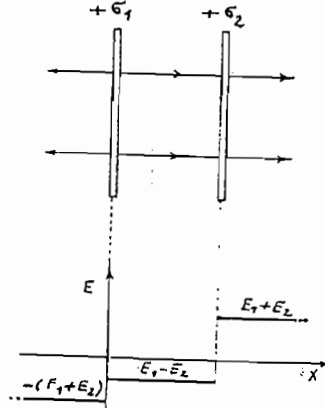
$$\text{b) } \varphi_A = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_0} \frac{q_1 - q_2}{d} = -900 \text{ V;}$$

$$\text{c) } E_p = q\varphi_A = -0,9 \mu\text{J.}$$

d) U pravcu i smeru vektora  $\vec{E}_A$ , pod dejstvom električne sile  $\vec{F}_e = q\vec{E}_A$ . Energija naelektrisanja  $q_1$  bi se pri tome smanjivala (što proizilazi i iz opšteg stava, po kome se prirodni procesi odvijaju u smeru degradacije energije).

880. a)  $E_1 = \sigma_1/2\epsilon$  i  $E_2 = \sigma_2/2\epsilon$ . Prema prin-

10



cipu superpozicije je  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ , pa je

$$E = E_1 - E_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon}$$

$$\text{b) } E = \pm \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon}; \quad \text{c) } 10.$$

Preporučujemo da razmotrite slučaj kada su ploče naelektrisanе raznorodnim količinama elektriciteta.

881. a)  $D_1 = D_2 = U/(d_1 + d_2)$ .

b) Iz relacija

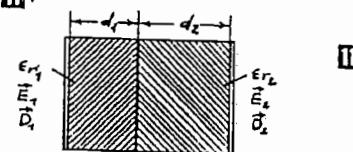
$$E_1 d_1 + E_2 d_2 = U$$

$$D_1 = D_2, \text{ tj. } \epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$$

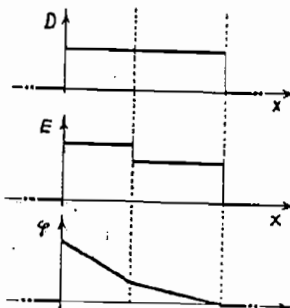
nalazi se da je

$$E_1 = \frac{U}{d_1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} d_2}; \quad E_2 = \frac{U}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} d_1 + d_2}$$

c) 11.

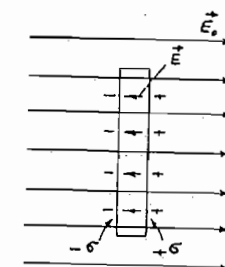


11



882. Leva strana metalne ploče 12 naelektrisiše se količinom elektriciteta  $-q$ , a desna

12



strana količinom elektriciteta  $+q$ , tj. površinskom gustinom elektriciteta  $-\sigma$  i  $+\sigma$ . Usled toga se u ploči obrazuje homogeno električno polje jačine

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

čije linije sile su suprotnog smera od prethodnog.

Kako je rezultujuća jačina polja u provodniku  $E_0 - E = 0$  (jer je reč o metalnoj ploči), to je

$$E_0 - \frac{\sigma}{\epsilon_0} = 0$$

tj.  $E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 S}$ , odakle je traženo naelektrisanje

$$q = \epsilon_0 S E_0$$

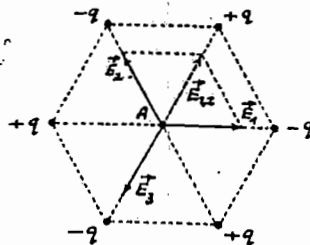
883. a) Jačina rezultujućeg električnog polja u tački A iznosi **18**

$$\vec{E}_A = \vec{E}_1 - \vec{E}_2 - \vec{E}_3 = \vec{E}_{1,1} + \vec{E}_2 = 0$$

a električni potencijal

$$\varphi_A = 3\varphi_+ - 3\varphi_- = 0$$

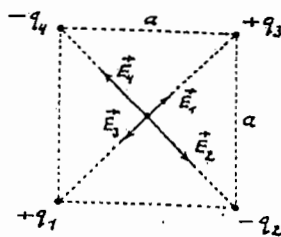
**18**



b) Naelektrisanje  $-q$  (ili  $-q$ ) postavljeno u tačku A bilo bi u stanju labilne ravnoteže. Ako bi čak i neznatno bilo izvedeno iz položaja A, sile koje na njega deluju ne bi bile u ravnoteži, pa bi se ono kretalo u pravcu i smeru rezultujuće sile. Pri tome bi smerovi kretanja naelektrisanja  $-q_1$  i  $-q_2$  bili suprotni.

884. a) Rastojanje između preseka dijagonala i temena je  $r = \frac{d}{2} = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$  **19**, pa je po-

**19**



tencijal električnog polja u toj tački

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4 = 2(\varphi_1 - \varphi_2) = 852 \text{ V}$$

b)  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = 0$ , jer je

$$\vec{E}_1 = -\vec{E}_3 \text{ i } \vec{E}_2 = -\vec{E}_4$$

$$885. \text{ a) } E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{R}{r}\right)^2 = 11,3 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

$$\text{b) } E = \frac{R}{\varphi r^2} = 30 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$886. E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2}; E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r^2}, \text{ pa je}$$

rezultujuća jačina električnog polja

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos\beta$$

gde je **15**

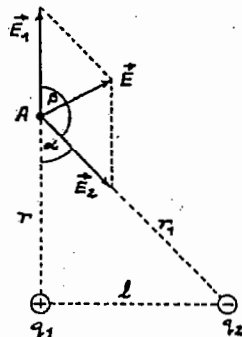
$$\cos\beta = -\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{r}{r_1} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + l^2}}$$

pa je, imajući u vidu da je  $q_1 = q_2 = q$ ,

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{1}{r^4} + \frac{1}{(r^2 + l^2)^2} - \frac{2}{r(r^2 + l^2)^{3/2}}}$$

Koliki je električni potencijal u tački A?



**15**

$$887. \text{ a) } E_A = E_+ + E_- = \frac{2}{\pi\epsilon_0} \frac{q}{l^2};$$

$$\text{b) } \varphi_A = \varphi_+ + \varphi_- = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{l/2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{l/2} = 0.$$

Na isti način je  $\varphi_B = \varphi_C = 0$ , što znači da se ove tačke nalaze na ekvipotencijalnoj površini čiji je potencijal jednak nuli. Grafički prikazati ostale ekvipotencijalne površine.

888. Električni potencijal površine lopte je  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$ , pa je u ovom slučaju

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{N e}{r}, \text{ tj. } N = \frac{4\pi\epsilon_0 r \varphi}{e}$$

a ukupna masa elektrona

$$m = m_e N = \frac{4\pi\epsilon_0 r \varphi m_e}{e} = 38 \cdot 10^{-22} \text{ kg}$$

889.  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q}{r}$ , gde je  $\Delta q = Ne$ , pa je broj elektrona koji su dospeli na loptu

$$N = \frac{4\pi\epsilon_0 \Delta\varphi r}{e} = 41,7 \cdot 10^9$$

$$890. \text{ a) } E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 S} = 0,11 \frac{\text{MV}}{\text{m}}$$

b) Kako je  $E = U/d$ , to je  $d = U/E = 1,36 \text{ mm}$ .

891. a) Površinska gustina elektriciteta na metalnoj ploči je  $\sigma = q/S = 20 \text{ nC/m}^2$ , a jačina električnog polja

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 (1 + \chi_e)} = 452,5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

b) Kako je  $E = (\sigma - \sigma_p)/\epsilon_0 = \sigma/\epsilon$ , dobija se da je površinska gustina elektriciteta nastala polarizacijom stakla

$$\sigma_p = \sigma \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) = \sigma \left(\frac{\chi_e}{1 + \chi_e}\right) = 16 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$$

Intenzitet vektora polarizacije je  $P = \sigma_p$ .

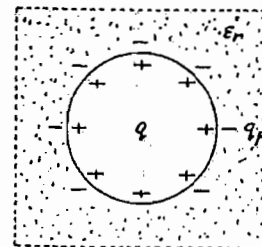
892. Jačina električnog polja naelektrisanje sfere u vazduhu je

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

a u dielektriku

$$E_1' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{q}{r^2}$$

**16**



Razlika ovih polja je  $E_p = E_1 - E_1' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)$ . Očigledno je da je  $E_p$  posledica naelektrisanja  $q_p$  nastalog polarizacijom dielektrika **17**. Polje ovog naelektrisanja je suprotnog smera od osnovnog polja, pa i naelektrisanje  $q_p$  ima suprotan znak od naelektrisanja  $q$ . Veličina naelektrisanja data je izrazom  $q_p = q \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)$ .

Površinska gustina ovog naelektrisanja je

$$\sigma_p = \frac{q_p}{S} = \frac{q_p}{4\pi R^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) = \sigma \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)$$

gde je  $\sigma$  površinska gustina osnovnog naelektrisanja.

$$893. E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2}, \text{ gde je}$$

$$q = CU = 4\pi\epsilon_0 \frac{rR}{R-r} U$$

pa je

$$E = \frac{rRU}{(R-r)x^2} = 44,4 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

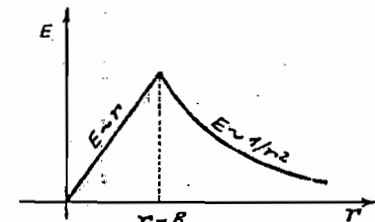
894. a) Za jačinu električnog polja u tačkama na rastojanju  $r$ , od središta sfere merodavno je samo naelektrisanje obuhvaćeno sferom poluprečnika  $r$ , tj. naelektrisanje

$$q_1 = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

pa je odgovarajuća jačina polja

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

što znači da je  $E_1 \sim r$ .



**17**

b) Za jačinu električnog polja u tačkama izvan sfere merodavno je ukupno naelektrisanje sfere

$$q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

pa je odgovarajuća jačina električnog polja na rastojanju  $r$ , od središta sfere

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

što znači da je  $E_2 \sim 1/r^2$ .

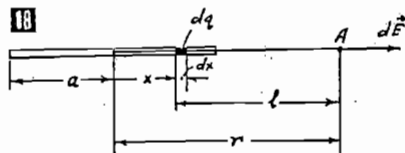
c) **18**.

895. a) Element provodnika, dužine  $dx$ , naelektrisan je količinom elektriciteta

$$dq = \frac{q}{2a} dx$$

pa je elementarna jačina polja u tački A **18**

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{l^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dx}{(r-x)^2}$$

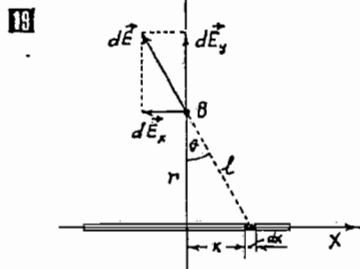


a) ukupna jačina polja

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2a} \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{(r-x)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 - a^2}$$

b) Kako je  $dq = \frac{q}{2a} dx$ , elementarna jačina polja u tački B je **19**

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2a} \frac{dx}{l^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2a} \frac{dx}{r^2 + x^2}$$



Pošto se  $dE_x$  komponente međusobno kompenzuju zbog simetričnosti provodnika, za izračunavanje rezultujuće jačine električnog polja merodavna je  $dE_y$  komponenta, čiji je intenzitet

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2a} \frac{dx \cos\theta}{r^2 + x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2a} \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}} \frac{dx}{r^2 + x^2}$$

pa je rezultujuća jačina polja

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r\sqrt{r^2 + a^2}}$$

896. Kada se mehurić sapunice nalazi u mirovanju, uspostavljena je ravnoteža između gravitacione i Kulonove sile, pa je

$$qE = mg = \left(m - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0\right) g$$

ili

$$U = \frac{gd}{q} \left(m - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0\right) \approx 83 \text{ kV}$$

897. Električna sila koja deluje na nit je  $F = qE$ , gde je  $q = l\tau$  i  $E = \sigma/2\epsilon_0$ , pa se dobija da je

$$F = \frac{\sigma l}{2\epsilon_0} = 0,34 \text{ N}$$

898. Pod dejstvom centrifugalne sile, slobodni elektroni u disku se pomeraju ka njegovoj periferiji, usled čega ona postaje negativno naelektrisana. Zbog toga se u disku uspostavlja električno polje, pa na elektrone počne da deluje i električna sila. Pri ovome dolazi do uspostavljanja ravnoteže između ove dve sile, pa je za jedan elektron  $m\omega^2 = eE$ , odakle je jačina električnog polja

$$E = \frac{mR\omega^2}{e}$$

Jačina ovog polja je najmanja ( $E_{\min} = 0$ ) u središtu diska, jer je za njega  $r = 0$ , a najveća je na njegovoj periferiji

$$E_{\max} = \frac{mR\omega^2}{e}$$

pa je srednja jačina polja

$$\langle E \rangle = \frac{E_{\min} + E_{\max}}{2} = \frac{mR\omega^2}{2e}$$

Razlika potencijala  $U$  između središta diska i tačke na njegovom obodu jednaka je radu koji treba uložiti da bi se jedinična količina elektriciteta prenela između ovih tačaka. Kako je takođe  $\langle E \rangle = U/R$ , pri čemu se nehomogeno električno polje u disku svodi na homogeno, to je

$$U = \langle E \rangle R = \frac{mR^2\omega^2}{2e}$$

899. Granična površina (gornja i donja) snopa elektrona može da se smatra kao naelektrisana ravan, čija je površinska gustina elektriciteta

$$\sigma = \frac{q}{S} = \frac{eVn}{S} = \frac{edSn}{S} = edn$$

Jačina električnog polja ovih površina je

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{edn}{2\epsilon_0}$$

pa u normalnom pravcu (u odnosu na pravac

kretanja elektrona) na elektrone deluje električna sila  $F_e = eE$  i saopštava im ubrzanje

$$a = \frac{eE}{m}$$

Da bi se debljina snopa povećala 2 puta, krajnji elektroni treba da pređu put od  $d/2$  u normalnom pravcu. Oni će to učiniti za vreme  $t = l/v$ , gde je  $l$  - rastojanje od otvora cevi, na kome će debljina snopa da bude dva puta veća. Prema tome je **20**

$$\frac{d}{2} = \frac{1}{2} at^2 = \frac{eE}{2m} \left(\frac{l}{v}\right)^2$$

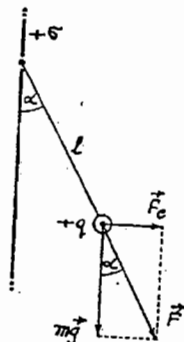
odakle je

$$l = v \sqrt{\frac{2em}{ne^2}} \approx 2,5 \text{ cm}$$

900. Kuglica treba da bude naelektrisana pozitivnom količinom elektriciteta, čija se veličina  $q$  nalazi iz uslova

$$\tan\alpha = \frac{F_e}{mg} = \frac{qE}{mg}$$

**20**

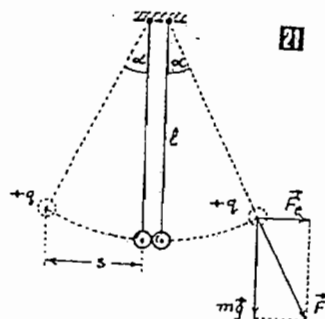


Kako je  $E = \sigma/2\epsilon_0$ , to je

$$q = \frac{2\epsilon_0 mg \cdot \tan\alpha}{\sigma} = 0,3 \text{ mC}$$

901. Naelektrisanja kuglica su  $q_1 = q_2 = q/2$ , a njihov razmak **21**

$$d = 2(s+r) = 2(l \sin\alpha + r)$$



gde je  $r$  - poluprečnik kuglice.

Kako je  $r \ll l \sin\alpha$ , to je

$$d \approx 2l \sin\alpha$$

(1)

Sa slike se vidi da je

$$\tan\alpha = \frac{F_e}{mg} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{d^2}}{mg}$$

pa je prema relaciji (1)

$$m = \frac{1}{64\pi\epsilon_0 g} \frac{q^2}{l^2 \sin^2\alpha} = 4 \text{ mg}$$

902. Pošto je amplituda oscilovanja klatna mala, može se smatrati da se ono kreće u homogenom električnom polju Zemlje, koja se može smatrati kao beskonačna ravan čije polje ima jačinu  $E = \sigma/2\epsilon_0$ . Na kuglicu klatna deluje privlačna sila  $F = qE = \sigma q/2\epsilon_0$ , koja smanjuje period oscilovanja klatna od  $T_1 = 2\pi\sqrt{l/g}$  na  $T_2 = \sqrt{l/(g+a)}$  (1), gde je  $a = F/m = \sigma q/2m\epsilon_0$  (2). Prema uslovu zadatka je  $T_2 = T_1/2$  (3). Iz relacija (1) i (3) nalazi se da je  $a = 3g$  (4), a iz relacija (2) i (4) da je potrebno naelektrisanje

$$q = \frac{6\epsilon_0 mg}{\sigma} = 1,33 \mu\text{C}$$

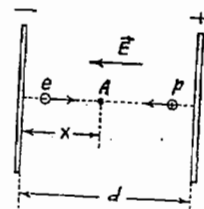
903. a)  $F = eE = e \frac{\Delta\phi}{d} = 3,2 \text{ fN}$ ;

b) Kako je  $a = \frac{F}{m} = 3,6 \cdot 10^{14} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , to je

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a}} \approx 1,7 \mu\text{s}$$

904. Intenziteti električnih sila koje deluju na proton i elektron su jednaki i iznose  $F_e = F_p = eE$ , dok je njihovo ubrzanje

$$a_e = eE/m_e \quad \text{i} \quad a_p = eE/m_p$$



Ako je tačka A mesto susreta **22**, onda je

$$x = \frac{1}{2} a_e t^2 = \frac{1}{2} \frac{eE}{m_e} t^2$$

(1)

odnosno

$$d-x = \frac{1}{2} \frac{eE}{m_p} t^2$$

(2)

Na osnovu relacija (1) i (2) je

$$x = \frac{d}{1 + \frac{m_0}{m_p}}$$

905. a)  $m = qU/gd \approx 10^{-7}$  kg;

b)  $N = q/e = 6 \cdot 10^4$ .

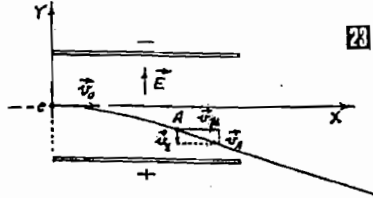
906. U slučaju kada ne postoji električno polje, sila teže  $mg$  uravnoteži se silom trenja  $6\eta\pi r v$ , pa je  $mg = 6\eta\pi r v$  (1). U slučaju kada se kapljica kreće, u električnom polju je  $mg - qE = 6\eta\pi r \frac{v}{2}$  (2), pošto je brzina kapljice u ovom slučaju upola manja, a na lopticu deluje i električna sila  $qE$  čiji je smer nagore. Prema relacijama (1) i (2) nalazi se da je naelektrisanje loptice

$$q = \frac{mg}{2E} = \frac{mgd}{2U} = 3,76 \text{ aC}$$

907. Komponente brzine elektrona u tački A [23] su  $v_x = v_0$  i  $v_y = at = \frac{F}{m} t = \frac{eE}{m} t$ , pa su jednačine kretanja elektrona

$$x = x(t) = v_0 t$$

$$y = y(t) = -\frac{1}{2} \frac{eE}{m} t^2$$



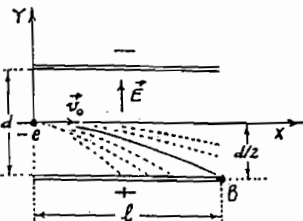
Eliminisanjem vremena  $t$ , dobija se jednačina putanje elektrona kroz električno polje

$$y = -\frac{1}{2} \frac{eE}{m v_0^2} x^2$$

908. Prema rešenju prethodnog zadatka je

$$y = -\frac{1}{2} \frac{eE}{m v_0^2} x^2 \quad (1)$$

Za tačku B [24] je  $x = l$  i  $y = -d/2$ .

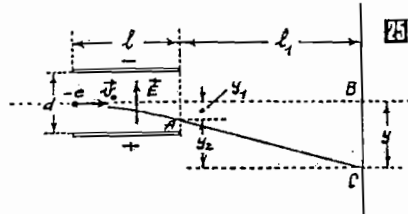


Kako je  $E = U/d$ , prema relaciji (1) potrebno je da elektron ima najmanju početnu brzinu

$$v_0 = \frac{l}{d} \sqrt{\frac{eU}{m}} \approx 37 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

909. Sa slike [25] se vidi da je otklon mlaza elektrona  $y = y_1 + y_2$ , gde je

$$y_1 = \frac{eEl^2}{2mv_0^2} \quad \text{i} \quad y_2 = l_1 \tan \alpha$$



Kako je

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{eEx^2}{2mv_0^2} \right) \Big|_{x=l} = \frac{eEl}{mv_0^2}$$

to je  $y_2 = \frac{eEl \cdot l_1}{mv_0^2}$ , odnosno

$$y = y_1 + y_2 = \frac{eEl \left( l_1 + \frac{l}{2} \right)}{mv_0^2} \quad (1)$$

Imajući u vidu da je  $eU = \frac{mv_0^2}{2}$ , to je  $v_0^2 = \frac{2eU}{m}$ , pa je prema relaciji (1)

$$y = \frac{El \left( l_1 + \frac{l}{2} \right)}{2U} \quad (2)$$

gde je  $E = \frac{U_1}{d}$  (3), dok je prema prethodnoj relaciji  $E = \frac{2yU}{l \left( l_1 + \frac{l}{2} \right)}$  (4). Na osnovu relacija

$$(3) \text{ i } (4) \text{ je } \frac{U_1}{d} = \frac{2yU}{l \left( l_1 + \frac{l}{2} \right)}$$

odnosno

$$U_1 = \frac{2yUd}{l \left( l_1 + \frac{l}{2} \right)} = 28 \text{ V}$$

910. Prema zadatku 907. je  $y_a = \frac{1}{2} \frac{q_a E}{m_a v_0^2} x^2$

i  $y_p = \frac{1}{2} \frac{q_p E}{m_p v_1^2} x^2$ , gde je  $q_a = 2e$ ,  $q_p = e$ ,  $m \approx 4m_p$ , pa je  $\frac{y_p}{y_a} = 2$ .

911. Elektron će izaći iz električnog polja u tački B, gde mu je brzina  $v_B = \sqrt{v_{xB}^2 + v_{yB}^2}$ .

Komponente ove brzine su

$$v_{xB} = v_0 \quad \text{i} \quad v_{yB} = at = \frac{F}{m} t_B = -\frac{eE}{m} t_B \quad (1)$$

Kako je  $x = v_0 t$ , tj.  $t = x/v_0$ , to je prema relaciji (1)

$$v_B = v_0 \sqrt{1 + \left( \frac{eEl}{mv_0^2} \right)^2} \approx 11,5 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

912. Kako je  $C = \frac{q}{\Delta\varphi}$ , zamenom se dobija da je

$$\Delta\varphi = \frac{q}{C} = 9 \text{ V}$$

913. a)  $C = \epsilon_0 \frac{S}{d} = 88,4 \text{ nF}$ ;

b)  $C = \epsilon \frac{S}{d} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d} = 0,22 \mu\text{F}$ .

914.  $C = \frac{q}{\varphi_Z} = \frac{q}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_Z}} = 4\pi\epsilon_0 R_Z = 707 \mu\text{F}$ .

915.  $C = 2\pi\epsilon_0 \epsilon_r \frac{l}{\ln(R/r)} = 3,6 \mu\text{F}$ .

916. a)  $C = 2\pi\epsilon_0 \frac{l}{\ln(R/r)} = 5 \text{ pF}$ ;

b)  $E = \frac{CU}{2\pi\epsilon_0 l x} = 0,1 \frac{\text{MV}}{\text{m}}$ .

917.  $\varphi = \frac{q}{C} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = 0,18 \text{ MV}$ .

918. a) Kako je naelektrisanje kondenzatora stalno, to je  $q = C_1 U_1 = C_2 U_2$ , odnosno  $C_1/C_2 = U_2/U_1$ . Pošto je  $C_2 = \epsilon_r C_1$ , a  $U_2/U_1 = 1/3$ , relativna permitivnost parafina je  $\epsilon_r = 3$ .

b) Površinska gustina naelektrisanja je  $\sigma_1 = q/S$ . Kako je  $C_1 = \epsilon_0 S/d$  i  $q = C_1 U_1$ , to je  $\sigma_1 = \epsilon_0 U_1/d = 2,65 \mu\text{C/m}^2$ .

919.  $\sigma = \frac{q}{S} = \frac{CU}{4\pi r^2}$ , gde je  $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{rR}{R-r}$ .

pa se dobija da je  $C = 66,3 \mu\text{C/m}^2$ .

920. a) Kapacitivnost ovako obrzovanog kondenzatora je

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d} = 4,42 \text{ nF}$$

b) Jačina električnog polja usamljene ravni je  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ , pa je  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{U}{d}$ , odakle je

$$U = \frac{qd}{2\epsilon_0 S} = \frac{q}{2C} = 11,3 \text{ GV}$$

921. a)  $E = \frac{U}{d} = 1 \frac{\text{MV}}{\text{m}}$ ;

b)  $q = CU = \epsilon_0 \frac{S}{d} U = \epsilon_0 SE = 8,34 \mu\text{C}$ .

922. a)  $C_{\min} = 33,3 \text{ pF}$  i  $C_{\max} = 566,6 \text{ pF}$ ;

b)  $C_{\min} = 7,44 \text{ pF}$  i  $C_{\max} = 10,9 \text{ pF}$ .

923. Kako je  $q = q_1 - q_2 = C_1 U_1 - C_2 U_2 = (C_1 + C_2) U$ , traženu napon iznosi

$$U = \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2}{C_1 + C_2} = 420 \text{ V}$$

Koliki je gubitak energije pri ovome?

924. Kada se prekidač P postavi u položaj (1), kondenzator  $C_1$  će se naelektrisati količinom elektriciteta  $q_1$ , pri čemu će napon na njegovim krajevima biti  $\varphi_1$ . Pri prebacivanju prekidača P u položaj (2) količina elektriciteta  $q_1/2$  iz kondenzatora  $C_1$  preći će u kondenzator  $C_2$  (pošto su jednaki kapacitivnosti), dok će im zajednički napon biti  $\varphi_2$ . Pri vraćanju prekidača P u položaj (1) kondenzator  $C_1$  će se doelektrisati do stanja  $q_2$  i  $\varphi_2$ . Pri sledećem prebacivanju prekidača P u položaj (2) na ploče kondenzatora  $C_2$  preći će količina elektriciteta  $q_1/4$ , a njihov zajednički napon biće  $3\varphi_1/4$ , itd.

Napon na krajevima kondenzatora  $C_2$  teorijski nikad ne može da dostigne vrednost  $\varphi_1$ , već se može samo sukcesivno približiti ovoj vrednosti posle velikog broja naizmeničnih prebacivanja prekidača P iz položaja (1) u položaj (2).

925. Jačina struje koja protiče kroz kondenzator može se izraziti relacijom

$$I = -\frac{dq}{dt}$$

gde je znak (-) uzet usled smanjenja količine elektriciteta u kondenzatoru.

Kako je  $RI = U$ , tj.  $U = q/C$ , dobija se da je

$$\frac{q}{RC} = -\frac{dq}{dt}$$

odnosno  $\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC}$ , odakle je naelektrisanje



kondenzatora

$$q = q_0 e^{-U/R}$$

Što znači da će tek posle vremena  $t = \infty$  (teorijski) kondenzator biti potpuno razelektρισan.

926. a) Napon na krajevima kondenzatora pre unošenja pločice je

$$U_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{q}{\epsilon_0 \frac{S}{d_1}}$$

a posle

$$U_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{q}{\epsilon_0 \frac{S}{d_1 - d_2}}$$

pa je  $\frac{U_1 - U_2}{U_1} = 100 \frac{d_2}{d_1} = 100 \frac{40}{100} = 40\%$

b)  $E_1 = \frac{U_1}{d_1}$  i  $E_2 = \frac{U_2}{d_1 - d_2}$ , pa je relativna promena jačine električnog polja  $(E_1 - E_2)/E_1 = 0$

927. a)  $C_1$ ; b)  $2C/3$ .

928. U slučaju paralelne veze je  $C_e = 0,95 \mu F$ , a redne  $C_e = 0,09 \mu F$ .

929.  $C_{eAB} = C/2 = 5 \text{ pF}$ . Kolika je kapacitivnost  $C_{eAD}$  i  $C_{eBD}$ ?

930.  $C_{eAB} = C = 10 \text{ pF}$ .

931. a) Ekvivalentna kapacitivnost baterije kondenzatora vezanih kao na slici (a) jeste

$$C_{eAB} = \frac{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}$$

a vezanih kao na slici (b)

$$C_{e'AB} = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} + \frac{C_2 C_4}{C_2 + C_4}$$

b) Uslov  $C_{eAB} = C_{e'AB}$  biće ispunjen ako je

$$\frac{C_1}{C_3} = \frac{C_2}{C_4}$$

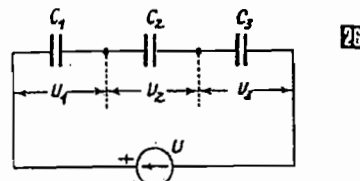
932. Ekvivalentna kapacitivnost kondenzatora može se naći iz relacije

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

gde je  $C_1 = \epsilon_1 \epsilon_0 \frac{S}{d_1}$ ;  $C_2 = \epsilon_2 \epsilon_0 \frac{S}{d_2}$ ;  $C_3 = \epsilon_3 \epsilon_0 \frac{S}{d_3}$ , pa je

$$C_e = \frac{\epsilon_0 S}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} + \frac{d_3}{\epsilon_3}} = 323 \text{ nF}$$

gde su  $\epsilon_1 = 10$ ,  $\epsilon_2 = 2,6$  i  $\epsilon_3 = 1$  — relativna permitivnost stakla, ebonita i vazduha respektivno.



933. Naelektrisanja ploča svih kondenzatora su jednaka [23], pa je  $U_1 C_1 = U_2 C_2 = U_3 C_3$  (1), dok je  $U_1 + U_2 + U_3 = U$  (2). Prema relacijama (1) i (2) je

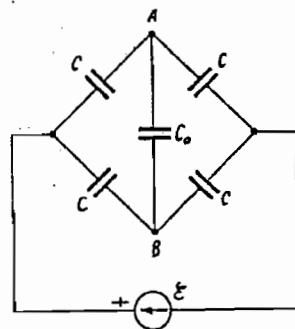
$$U_1 = \frac{U}{1 + \frac{C_2}{C_1} + \frac{C_3}{C_1}} = 6 \text{ kV}$$

$$U_2 = \frac{U}{1 + \frac{C_1}{C_2} + \frac{C_3}{C_2}} = 3 \text{ kV}$$

$$U_3 = \frac{U}{1 + \frac{C_1}{C_3} + \frac{C_2}{C_3}} = 3 \text{ kV}$$

934. a) Sa slike [24] se vidi da je  $U_{AB} = 0$ .

b)  $q = 4qC + qC_0 = 4C \frac{q}{2} + 0 = 0,2 \text{ mC}$ .



935. Ekvivalentna kapacitivnost paralelno vezanih kondenzatora  $C_1$  i  $C_2$  je  $C_{1,2} = C_1 + C_2$ , a ekvivalentna kapacitivnost cele veze

$$C_e = \frac{C_{1,2} \cdot C_3}{C_{1,2} + C_3} = 5,32 \mu F$$

pa veza sadrži količinu elektriciteta  $q = C_e U = 1,17 \text{ mC}$ .

Kako je  $q = q_{1,2} = q_3$ , to je  $q = C_{1,2} U_{1,2} = C_3 U_3$ , odnosno

$$U_{1,2} = \frac{q}{C_{1,2}} = 130 \text{ V} \quad \text{i} \quad U_3 = \frac{q}{C_3} = 30 \text{ V}$$

Naelektrisanje ploča trećeg kondenzatora je  $q_3 = C_3 U_3 = 1,17 \text{ mC}$ .

936.  $q_1 = q_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U = 0,6 \text{ mC}$ .

937.  $q_1 = C_1 U = 0,22 \text{ mC}$  i  $q_2 = C_2 U = 0,44 \text{ mC}$ .

938. a)  $C_e = C_1 + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 6,5 \mu F$ ;

b) Količina elektriciteta na pločama kondenzatora kapacitivnosti  $C_1$ , odnosno  $C_2$  je

$$q = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U, \text{ pa je } C_1 = \frac{q}{C_2} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} U = 200 \text{ V}$$

939. a)  $C_e = \frac{C_3(C_1 + C_2)}{C_1 + C_2 + C_3}$ , pa je  $q = C_e \mathcal{E} = 165 \mu C$ .

b) Posle uspostavljanja stacionarnog stanja, napon na pločama prvog odnosno drugog kondenzatora iznosi

$$U_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2} = \frac{q}{C_1 + C_2}$$

Protekla količina elektriciteta kroz prvi kondenzator je

$$q_1 = C_1 U_1 = q \frac{C_1}{C_1 + C_2} = 55 \mu C$$

a kroz drugi, analogno,

$$q_2 = q \frac{C_2}{C_1 + C_2} = 110 \mu C$$

940. a) Kapacitivnost ovog kondenzatora je  $C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$ , a sa izolatorom  $C' = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{S}{d}$ . Naelektrisanje ploča kondenzatora je u oba slučaja jednako, pa je

$$U' = \frac{q}{C'} = \frac{CU}{\epsilon_r C} = \frac{U}{\epsilon_r} = 100 \text{ V}$$

b)  $\sigma = \sigma' = \epsilon_0 \frac{U}{d} = 0,53 \frac{\mu C}{m^2}$ ;

c) Jačine električnih polja su  $E = U/d = 60 \text{ kV/m}$  i  $E' = U'/d = 20 \text{ kV/m}$ , pa je njihova promena  $\Delta E = E - E' = 40 \text{ kV/m}$ .

941. a)  $E = \frac{mv}{e} = 5,64 \frac{V}{m}$ ;

b)  $v = at = 10^6 \text{ m/s}$ ;

c)  $A = mv^2/2 = 0,45 \text{ AJ}$ ;

d)  $\Delta \varphi = A/e = 2,8 \text{ V}$ .

942. Rad u homogenom električnom polju jačine  $E$  je

$$A = F_e \cdot \Delta r = qE(r_1 - r_2)$$

Kako je  $E = \sigma/2\epsilon_0$ , dobija se da je

$$A = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0} (r_1 - r_2)$$

ti.

$$\sigma = \frac{2\epsilon_0 A}{q(r_1 - r_2)} \approx 0,88 \frac{\mu C}{m^2}$$

943. Izvršeni rad je  $A = Fl = eEl$ , gde je  $E = \sigma/2\epsilon_0$ , tj.  $A = (q\sigma l)/2\epsilon_0$  odakle je

$$\sigma = \frac{2\epsilon_0 A}{ql}$$

944.  $\frac{mv^2}{2} = eU$ , pa je

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \approx 1,25 \cdot 10^7 \frac{m}{s}$$

945.  $A = q \cdot \Delta \varphi = 27 \mu J$ .

946.  $A = q_2(\varphi_1 - \varphi_2)$ , gde je  $\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1}$  i

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2}, \text{ pa se zamenom nalazi da je}$$

$$A = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = 3,78 \mu J$$

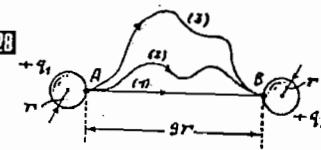
947.  $A = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$ . Kako  $R_2 \rightarrow \infty$ , odnosno  $\frac{1}{R_2} \rightarrow 0$ , to je

$$A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R_1}$$

a kako je  $q_2 = S\sigma = 4\pi R_1^2 \sigma$ , konačno se dobija da je

$$A = \frac{q_1 R_1 \sigma}{\epsilon_0} = 2,26 \mu J$$

Preporučujemo da izračunate potencijal sfere i električnu energiju njenog polja.



948. Potreban rad po svim putanjama AB [25] je

$$A_{AB} = e(\varphi_B - \varphi_A) = e[(\varphi_{B1} + \varphi_{B2}) - (\varphi_{A1} + \varphi_{A2})]$$

$$\text{gde je } \varphi_{B1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{10r}, \quad \varphi_{A1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r}$$

$$\varphi_{B2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r}, \quad \varphi_{A2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{10r}$$

Zamenom se nalazi da je

$$A_{AB} = \frac{9}{10} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e(q_2 - q_1)}{r} \approx 7,8 \text{ aJ}$$

949. Rad spoljašnjih sila za pomeranje elektrona u električnom polju je

$$A = e(\varphi_0 - \varphi_1)$$

gde su  $\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$  i  $\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2R} = \frac{\varphi_0}{2}$ , pa je

$$A = e\varphi_0/2 = 80 \text{ fJ}$$

950.  $q(\varphi_A - \varphi_B) = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2}$ , odakle je brzina tela

$$v_A = \sqrt{v_B^2 - \frac{2q}{m}(\varphi_A - \varphi_B)} = 0,167 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

951. Kinetička energija kugle u tačkama (1) i (2) je

$$E_{k1} = \frac{mv_1^2}{2} \quad \text{i} \quad E_{k2} = \frac{mv_2^2}{2}$$

dok je rad električne sile

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q\varphi_1$$

Na osnovu zakona održanja energije je

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = q\varphi_1$$

odakle je  $v_0 = \sqrt{v^2 - \frac{2q\varphi_1}{m}}$ .

952.  $v = \sqrt{\frac{e\Delta\varphi}{m}} = 4,6 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

953. a)  $U = \frac{mc^2}{2e} = 2,8 \text{ V}$ ;

b)  $E = \frac{U}{d} = 530 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ;

c)  $\sigma = \epsilon_0 E = 4,7 \text{ nC/m}^2$ .

954.  $\frac{mc^2}{2} = A = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_{\min}} - \frac{1}{r} \right)$ , pa kako je  $r \gg r_{\min}$ , dobija se da je

$$r_{\min} = \frac{q_1 q_2}{2\pi\epsilon_0 m v^2} = 3,6 \text{ cm}$$

955. Kinetička energija elektrona — projektila je  $E_k = mc^2/2$ . Ona se utroši na savladavanje Kulonovih odbojnih sila na putu od rastojanja  $r_1 = \infty$  do rastojanja  $r_2 = r_{\min}$  od elektrona — mete. Ovaj rad je

$$A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_{\min}}$$

Kako je  $A = E_k$ , iz ovog uslova nalazi se da je

$$r_{\min} = \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 m v^2} = 14,3 \text{ pm}$$

Dokazati da je

$$\left[ \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 m v^2} \right] = m$$

956.  $n_{\max} = q/e = 4\pi\epsilon_0 m v^2 / 2e^2$ .

957.  $r_{\min} = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 m_p v^2} = 25 \text{ pm}$ .

958. a) Iz uslova  $mv^2/2 > e(\varphi_A - \varphi_B) = e\varphi_A$  nalazi se da je

$$\varphi_A < \frac{mv^2}{2e} \approx 2,5 \text{ kV}$$

b) Na elektron deluje električna sila

$$F = eE = e \frac{\varphi_A}{d}$$

pa je ubrzanje elektrona  $a = F/m = e\varphi_A/md$ , a najduže vreme kretanja

$$t_{\max} = 2t_{AB} = \frac{2v}{a} = \frac{4d}{v} = 13,3 \text{ ns}$$

959. a)  $s = \frac{mv_0^2}{2eE} \approx 2,4 \text{ cm}$ ;

b)  $t_0 = \frac{mv_0}{eE} \approx 4,7 \text{ ns}$ .

960.  $U_l = 24,56 \text{ V}$ .

961.  $v = 1,4 \cdot 10^4 \text{ m/s}$ .

962. Kinetička energija pri translatornom kretanju molekula žive je  $(3/2)kT$ , dok je potrebna energija za jonizaciju  $eU_l$ . Iz uslova zadatka je  $(3/2)kT = eU_l$ , pa se nalazi da je potrebna temperatura žive

$$T = 2eU_l/3k \approx 8 \cdot 10^4 \text{ K}$$

963. Potencijalom jonizacije se naziva ona razlika potencijala koju elektron mora da pređe, polazeći iz mirovanja, da bi jonizovao atom pri udaru u njega. Prema tome je  $mv^2/2 = eU_l$ , odakle je

$$v_{\min} = \sqrt{2eU_l/m} = 2,2 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

964. Na vrhu strme ravni lopta raspolaže potencijalnom gravitacionom energijom  $mgh$  i električnom potencijalnom energijom  $-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{h}$ , što znači da je ukupna energija lopte

$$E_1 = mgh - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{h} \quad (1)$$

Na kraju strme ravni lopta raspolaže kinetičkom energijom  $\frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{7}{10} mv^2$  i električnom potencijalnom energijom  $-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{s} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{h \operatorname{ctg} \alpha}$ , pa je ukupna energija lopte u tom položaju

$$E_2 = \frac{7}{10} mv^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{h} \operatorname{tg} \alpha \quad (2)$$

Na osnovu jednačina (1) i (2) nalazi se da je

$$v = \sqrt{\frac{1}{7} \left[ 10gh + \frac{5}{2\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{mh} (\operatorname{tg} \alpha - 1) \right]} = 2,98 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Po čemu je u ovom slučaju karakterističan ugao strme ravni od  $45^\circ$ ?

965. a) Kako je  $dA = qdU = -eEdx$  i  $E = -\frac{\Delta\varphi}{R}$ , onda je rad električne sile  $x \ln \frac{r_2}{r_1}$

$$A = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{e\Delta\varphi dx}{x \ln(R/r)} = e\Delta\varphi \frac{\ln(r_1/r_2)}{\ln(R/r)}$$

Pošto je  $A = \frac{mv^2}{2}$ , to je

$$v = \sqrt{\frac{2e\Delta\varphi \ln(r_1/r_2)}{m \ln(R/r)}} = 1,5 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Za  $r_1 = R$  i  $r_2 = r$  je

$$v = \sqrt{\frac{2e\Delta\varphi}{m}} \approx 2,5 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

966.  $eU = eEd = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv^2}{2}$ , pa je

$$v_1 = \sqrt{v^2 + \frac{2edE}{m}} = 3,7 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

967. a) Jačina električnog polja sfernog kondenzatora na rastojanju  $x$  od središta sfere je

$$E = \frac{Rr \Delta\varphi}{R-r x^2}$$

pa je rad električne sile na putu  $dx$

$$dA = qdU = -eEdx$$

odnosno

$$dA = -e \frac{Rr \Delta\varphi}{R-r x^2} dx$$

ili

$$A = - \int_{r_1}^{r_2} e \frac{Rr \Delta\varphi}{R-r x^2} dx = e \frac{Rr}{R-r} \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} \Delta\varphi$$

Kako je  $A = \Delta E_k = mv^2/2$ , to je tražena brzina

$$v = \sqrt{\frac{2eR\Delta\varphi (r_1 - r_2)}{m r_1 r_2 (R-r)}} = 1,54 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Za  $r_1 = R$  i  $r_2 = r$  je

$$v = \sqrt{\frac{2e\Delta\varphi}{m}} \approx 3 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

968. Energija kondenzatora je

$$W = \frac{1}{2} qU = \frac{1}{2} q\mathcal{E}$$

gde je  $\mathcal{E} = ems$  akumulatora.

Međutim, rad koji se utroši na naelektrisanje akumulatora je  $A = \mathcal{E}It = q\mathcal{E}t$ , tj.  $A = 2W = 20 \text{ J}$ .

Objasniti razliku između dobijene i utrošene energije.

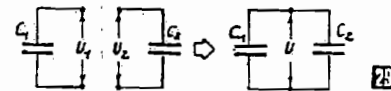
969. a) Kapacitivnost kondenzatora pre razmicanja je  $C = 88,4 \text{ pF}$ , a posle razmicanja  $C = 3,53 \text{ pF}$ . Količine elektriciteta na pločama kondenzatora su u oba slučaja jednake i iznose  $q = q' = CU = C'U' = 8,84 \text{ nC}$ . Novonastali napon je  $U' = q/C' = 2,5 \text{ kV}$ .

b) Električna energija kondenzatora pre razmicanja je  $W = CU^2/2 = 0,44 \mu\text{J}$ , a posle razmicanja  $W' = C'U'^2/2 = 11 \mu\text{J}$ .

Preporučujemo da ustanovite zbog čega je  $W' > W$ .

$$970. W = \frac{1}{2} CU^2 = \pi\epsilon_0 \frac{l}{\ln(R/r)} U^2 = Q = 0,5 \text{ mJ}$$

971. Napon na krajevima kondenzatora pre vezivanja je  $U_1 = 0$  i  $U_2 = q/C_2 = 100 \text{ V}$ , dok je posle vezivanja napon na oba kondenzatora jednak i iznosi  $U'$ . Tada je  $q_1 = C_1 U'$  i  $q_2 = C_2 U'$ .



Kako je  $q_1 + q_2 = q$ , to je

$$U' = \frac{q}{(C_1 + C_2)} = 62,5 \text{ V}$$

Kondenzator  $C_1$  stekne energiju

$$W_1' = \frac{1}{2} C_1 U'^2 = 2 \text{ mJ}$$

Preporučujemo da izračunate energije  $W_1'$  i  $W_2'$ , pri čemu treba zapaziti da je  $W_2 > W_1' + W_2'$ , pošto se jedan deo ove energije pretvori u unutrašnju energiju.

972. Naelektrisanje kugle je  $q = \rho V = \frac{4}{3} \rho \pi r^3$ , a kapacitivnost  $C = 4\pi \epsilon_r \epsilon_0 r$ , pa je energija električnog polja

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{2\pi \rho^2 r^4}{9 \epsilon_r \epsilon_0} = 12,6 \text{ kJ}$$

Dokazati da je

$$\left[ \frac{2\pi \rho^2 r^4}{9 \epsilon_r \epsilon_0} \right] = J$$

973. a) Zapreminska gustina električne energije homogenog električnog polja je  $w_e = \epsilon E^2/2$ , a kako je

$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{q}{(r+x)^2}$$

dobija se da je

$$w_e = \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{q^2}{(r+x)^4} = 0,314 \frac{J}{m^3}$$

b)  $w_e = \epsilon E^2/2$ , gde je  $E = \sigma/2\epsilon_r \epsilon_0$ , pa se dobija da je

$$w_e = \frac{\sigma^2}{8\epsilon_r \epsilon_0} = 1,4 \frac{J}{m^3}$$

Koliki je pritisak električnog polja u posmatranoj tački u oba slučaja?

974. Pritisak električnog polja na ploču kondenzatora je  $p = \epsilon E^2/2$ , pa je intenzitet privlačnih sila  $F = pS = \epsilon E^2 S/2$ . Kako je  $E = U/d$ ,  $C = \epsilon S/d$ , a  $q = CU$ , nalazi se da je

$$F = \frac{1}{2} qE = 5 \text{ mN}$$

975. a) Privlačna sila između ploča kondenzatora je  $F = \frac{1}{2} qE$ , gde je  $q = \sigma S$  i  $E = \sigma/\epsilon$ , pa je  $q = \sqrt{2F\epsilon_r \epsilon_0 S} = 42 \text{ nC}$ ;

b)  $E = \sigma/\epsilon = 950 \text{ V/m}$ ;

c)  $w_e = \epsilon_r \epsilon_0 E^2/2 \approx 4 \text{ J/m}^3$ .

976. a)  $E = U/d = 500 \text{ kV/m}$ .

b) Kapacitivnost kondenzatora je  $C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$ ,

a naelektrisanje svake ploče  $q = CU = \epsilon_0 \frac{SU}{d}$ , pa je površinska gustina elektriciteta na pločama  $\sigma = q/S = \epsilon_0 E = 4,42 \mu\text{C/m}^2$ .

c) Zapreminska gustina električne energije je  $w_e = \epsilon_0 E^2/2 = 2,21 \text{ J/m}^3$ .

d)  $F = \frac{1}{2} qE = 1,33 \text{ N}$ .

977. a) Ekvivalentna kapacitivnost redne veze kondenzatora je  $C_e = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$ , njihovo naelektrisanje

$$q_1 = q_2 = q = C_e U = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U$$

a napon između njihovih krajeva

$$U_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} U$$

$$U_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U$$

Prilikom paralelnog vezivanja, ekvivalentna kapacitivnost kondenzatora je

$$C_e' = C_1 + C_2$$

njihovo ukupno naelektrisanje  $q' = 2q$ , a napon između njihovih krajeva

$$U' = \frac{q'}{C_e'} = \frac{2q}{C_1 + C_2} = \frac{2C_1 C_2}{(C_1 + C_2)^2} U = 32 \text{ V}$$

b)  $W' = \frac{1}{2} C_e' U'^2 = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) U'^2 = 256 \mu\text{J}$

c) Kako je

$$W = W_1 + W_2 = \frac{q^2}{2C_1} + \frac{q^2}{2C_2} = \frac{C_1 C_2}{2(C_1 + C_2)} U^2 = 1600 \mu\text{J}$$

to je gubitak energije

$$\Delta W = W - W' = 1344 \mu\text{J}$$

978. a) Moment sprega koji deluje na dipol je  $\mathcal{M} = p_e \times E$ . U početnom položaju dipola, intenzitet momenta sprega je  $\mathcal{M} = p_e E = 9,6 \cdot 10^{-24} \text{ m}\cdot\text{N}$ .

b) Rad koji izvrši električna sila jednak je promeni električne potencijalne energije, tj.

$$A = \Delta E_p = p_e E = 9,6 \cdot 10^{-24} \text{ J}$$

### 2. JEDNOSMERNJA ELEKTRIČNA STRUJA

979.  $n = \frac{q}{e} = \frac{It}{e} = 10^{17}$  elektrona.

980.  $n = \frac{Pt}{eU} = 1,7 \cdot 10^{11}$  elektrona.

981. a)  $\langle v \rangle = \frac{l}{neS} = 0,00625 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ;

b)  $\langle v \rangle_t = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = 1,17 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Kako se objašnjava da je  $\langle v \rangle_t \gg \langle v \rangle$ ?

982. Odgovarajuća jačina struje je

$$I = \frac{q}{t} = \frac{e}{T}$$

gde je  $T = 2\pi r/v$  — period rotacije elektrona oko jezgra vodonika, pa je

$$I = \frac{ev}{2\pi r} \quad (1)$$

Pri kretanju elektrona po kružnoj putanji oko jezgra, centripetalna sila jeste Kulonova sila između jezgra i elektrona, dakle

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

odakle je  $v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m}}$ , pa je prema relaciji (1)

$$I = \frac{e^2}{2\pi r \sqrt{4\pi\epsilon_0 m}} = 0,93 \text{ nA}$$

983.  $R = \rho \frac{l}{S} = 8 \Omega$ , pa je  $I = \frac{U}{R} = 0,25 \text{ A}$ .

984.  $d = \sqrt{\frac{4\rho l}{\pi R}} \approx 2 \text{ mm}$ .

985.  $N = \frac{d^2 R}{4\rho D} = 400$  navojaka.

986. Otpornost provodnika je

$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{4\rho l}{\pi d^2} \quad (1)$$

a njegova masa

$$m = \rho V = \rho \frac{\pi d^2 l}{4} \quad (2)$$

Prema relacijama (1) i (2) dobija se da je  $d \approx 1 \text{ mm}$  i  $l \approx 460 \text{ m}$ .

987.  $G = \frac{1}{R} = 0,4 \text{ S}$ .

988.  $l = (59 \pm 0,3) \text{ m}$ .

989.  $j = \frac{I}{S} = 100 \frac{\text{A}}{\text{cm}^2}$ .

990.  $E = \frac{\Delta\varphi}{l} = 50 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ;  $F = eE = 8 \text{ aN}$ .

991.  $E = j/\gamma = 0,5 \text{ V/m}$ . Dokazati da je

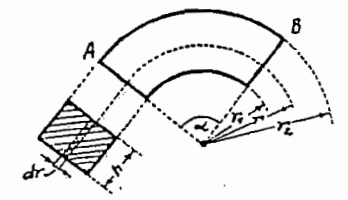
$$\left[ \frac{j}{\gamma} \right] = \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

992. Jačina električnog polja u segmentu, na cilindričnoj površini, poluprečnika  $r$ , je

$$E = \frac{\Delta\varphi_{AB}}{\alpha r}$$

pa je gustina struje na ovoj površini

$$j = \gamma E = \frac{\gamma \Delta\varphi_{AB}}{\alpha r} \quad (1)$$



Jačina struje kroz ovu površinu je  $dI = j dS = j r dr d\alpha$ , pa je prema relaciji (1)

$$dI = \frac{\gamma h \Delta\varphi_{AB} dr}{\alpha r}$$

odnosno ukupna jačina struje kroz segment

$$I = \frac{\gamma h \Delta\varphi_{AB}}{\alpha} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\gamma h \Delta\varphi_{AB}}{\alpha} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

pa je njegova otpornost

$$R_{AB} = \frac{\Delta\varphi_{AB}}{I} = \frac{\alpha}{\gamma h \ln(r_2/r_1)}$$

993.  $I = 5 \text{ A}$ .

994.  $R = (806,7 \pm 0,8) \Omega$ .

995.  $l = (6,6 \pm 0,077) \text{ m}$ .

996.  $l = (20 \pm 0,23) \text{ A}$ .

997.  $q = \frac{\pi d^2 l}{8\rho l} (U_1 + U_2)$ . Dokazati da je

$$\left[ \frac{\pi d^2 l}{8\rho l} (U_1 + U_2) \right] = C$$

998. Protekla količina elektriciteta kroz otpornik je

$$q = \int_0^{t'} I dt$$

gde je  $I = \frac{U}{R} = \frac{U_0 + kt}{R}$ , a  $k = \frac{U_1 - U_0}{t'} = 0,1 \frac{\text{V}}{\text{s}}$ , pa je

$$q = \int_0^{t'} \frac{U_0 + kt}{R} dt = \frac{U_0}{R} \int_0^{t'} dt + \frac{k}{R} \int_0^{t'} t dt$$

tj.

$$q = \frac{U_0 t'}{R} + \frac{k t'^2}{2R} = \frac{t'}{2R} (2U_0 + kt') = 20 \text{ C}$$

999.  $\rho = \rho_0 (1 + \alpha t) = 1,002 \mu\Omega \cdot \text{m}$ .

1000. Temperaturski koeficijent električne otpornosti bakra je  $\alpha = 4,3 \cdot 10^{-3} 1/K$ , pa je  $R_1 = R_0(1 + \alpha t_1) = 113 \Omega$  i  $R_2 = R_0(1 + \alpha t_2) = 134,4 \Omega$ . Relativna promena otpornosti iznosi

$$\frac{R_2 - R_1}{R_1} 100 = 10,4\%$$

1001.  $R_1 = R_1 \frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1} = 27 \Omega$ .

1002. a)  $\Delta R = 313 \Omega$ ;

b) Greška je manja od  $0,6 \Omega$ .

1003. Otpornost vlakna je  $R = \frac{U^2}{P} = \rho \frac{l}{S}$ .

Prema uslovu zadatka je  $\rho = \rho_0 \frac{T}{T_0}$ , pa je

$$l = \frac{RS}{\rho} = \frac{\pi d^2 U^2 T_0}{4 \rho_0 P T} = 0,19 \text{ cm}$$

1004. a)  $I = \frac{U}{R_0} = \frac{U}{\rho_0 \frac{l}{S}} = \frac{\pi U d^2}{4 \rho_0 l} = 1,8 \text{ A}$ ;

b)  $l = P/U = 0,18 \text{ A}$ .

Vlakno sijalice „trpi“ u početku „strujni udar“ pošto tada kroz njega prolazi struja 10 puta veće jačine od njene nominalne vrednosti (kada je vlakno zagrejano do radne temperature).

1005.  $R_0 = \frac{R_1}{1 + \alpha t_1} = 32,8 \Omega$ ;  $R_2 = \frac{U}{I} = 364 \Omega$ . Kako je  $R_2 = R_0(1 + \alpha t_2)$ , to je temperatura vlakna

$$t_2 = \frac{R_2 - R_0}{R_0 \alpha} = 220^\circ \text{C}$$

1006. Masa provodnika je  $m = \rho_0 V_0 = \rho_0 b h l$  (1), a njegova otpornost na temperaturi  $t$  je  $R_t = \frac{U}{I}$ . Ova otpornost na temperaturi  $0^\circ \text{C}$  je  $R_0 = \frac{R_t}{1 + \alpha t}$ , pa je dužina provodnika  $l = \frac{R_0 S}{\rho_0} = \frac{R_0 b h}{\rho_0}$  (2). Prema relacijama

(1) i (2) je

$$m = \rho_0 b h \frac{R_0 b h}{\rho_0} = \rho_0 b^2 h^2 \frac{U}{\rho_0 l (1 + \alpha t)}$$

1007.  $A = \eta U I t = 1,92 \text{ MJ} = 0,53 \text{ kWh}$ .

1008.  $R = 2 \Omega$ .

1009. Korisna snaga motora je

$$P_k = \frac{A}{t} = \frac{m g h}{t} = 720 \text{ W}$$

dok je snaga motora  $P = \frac{P_k}{\eta} = 900 \text{ W}$ . Motor iz mreže „vuče“ struju jačine  $I = \frac{P}{U} \approx 4 \text{ A}$ .

1010.  $U = 220 \text{ V}$ .

1011.  $Q = cm(t_k - t_1)$ , odakle je

$$m = \frac{Q}{c(t_k - t_1)} \approx 29 \text{ kg}$$

1012.  $P = \frac{\rho c V \Delta T}{t} = 7,4 \text{ kW}$ .

1013. Oslobodena količina toplote je  $Q = mc(t_2 - t_1) = 12,5 \text{ kJ}$ . Električna snaga je  $P = Q/t = 7 \text{ W}$ , pa je jačina struje

$$I = \sqrt{\frac{P}{R}} = 1,32 \text{ A}$$

1014. Na zagrevanje vode se utroši energija  $E = RI^2 t = 17,4 \text{ MJ}$ , pa je oslobođena količina toplote  $Q = 17,4 \text{ MJ}$ . Kako je  $Q = mc \Delta t$ , voda će se zagrejati za  $\Delta t = \frac{Q}{mc} = 20,8^\circ \text{C}$ .

1015. Protok vode kroz turbinu je  $m' = 600 \text{ kg/s}$ , pa je snaga turbine  $P = \eta m' g H = 0,11 \text{ MW}$ . Električna snaga generatora je  $P_1 = \eta_2 P = 101,3 \text{ kW}$ , pa generator može dati struju najveće jačine  $I = P_1/U = 230,1 \text{ A}$ .

1016. Ako je  $t_k$  — temperatura ključanja, a  $q_t$  — specifična toplota srebra, onda je za topljenje  $m = 100 \text{ g}$  srebra potrebno utrošiti količinu toplote  $Q = mc(t_k - t_1) + m q_t$ , gde je  $t_k = 960^\circ \text{C}$ ,  $t_1 = 10^\circ \text{C}$ ,  $q_t = 87,9 \text{ kJ/kg}$  i  $c = 0,39 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)}$ , pa je  $Q = 46 \text{ kJ}$ . Odgovarajuća količina električne energije iznosi  $E = \eta Q = 10,4 \text{ kWh}$ .

1017.  $\eta = \frac{mc(t_k - t_1)}{E} = 0,24$ .

1018. U oba suda se za isto vreme oslobode jednake količine toplote, pa je  $m_1 c_1 \Delta t_1 = m_2 c_2 \Delta t_2$ . Kako je  $c_1 = 4186 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ , a  $m_1 = m_2$ , to je

$$c_2 = c_1 \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = 2470 \text{ kg} \cdot \text{K}$$

1019.  $Q = mc \Delta t = 15,7 \text{ kWh}$ , što iznosi 70,65 dinara.

1020.  $\Delta t = \frac{\eta P \tau}{mc} = \frac{0,90 \cdot 3000 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s}}{100 \text{ kg} \cdot 4,18 \cdot 10^3 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}} \approx 97^\circ \text{C}$ .

1021. a)  $E = 30 P \tau = 900 \text{ kWh}$ ;

b)  $900 \text{ kWh} \cdot 4,5 \frac{\text{din}}{\text{kWh}} = 4050 \text{ din}$ .

1022. Ako je  $\tau_1$  vreme za koje će voda da proključa, a  $\tau_2$  — vreme isparavanja, onda je  $P \tau_1 = mc(t_k - t_1)$ , odakle je  $\tau_1 = \frac{mc(t_k - t_1)}{P} = 667 \text{ s}$ . Isto tako je  $P \tau_2 = m q_t$ , odakle je  $\tau_2 = \frac{m q_t}{P} = 4500 \text{ s}$ , pa je traženo vreme

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = 5167 \text{ s} = 1 \text{ h i } 25 \text{ min}$$

1023. U oba slučaja je potrebna jednaka količina toplote za zagrevanje vode do temperature ključanja, pa je  $Q_1 = Q_2$ , odnosno  $\frac{U_1^2}{R_1} t_1 = \frac{U_2^2}{R_2} t_2$ , odakle je

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{t_1}{t_2} = 0,5 \quad (1)$$

a) Pri paralelnoj vezi grejača je

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (2)$$

pa je

$$\frac{U^2}{R} t_3 = \frac{U^2}{R_1} t_1 \quad (3)$$

Prema relacijama (2) i (3) je

$$t_3 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} t_1 \quad (4)$$

a iz relacija (1) i (4) nalazi se da je  $t_3 = 10 \text{ min}$ .

b) Pri rednoj vezi grejača je  $R = R_1 + R_2$ ,

dok je  $\frac{U^2}{R} t_4 = \frac{U^2}{R_1} t_1$ . Odavde je

$$t_4 = \frac{R_1 + R_2}{R_1} t_1 = 3 t_1 = 45 \text{ min}$$

1024.  $t = \frac{m q_t}{R_1 I_1^2} = \frac{m q_t}{R_1 \left( \frac{I R_2}{R_1 + R_2} \right)^2} \approx 3200 \text{ s}$ .

1025. Rad električne struje za vreme  $dt$  je

$$dA = RI^2 dt$$

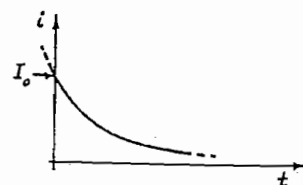
a za ukupno vreme njenog proticanja

$$A = \int_{t_1=0}^{t_2=\infty} RI^2 dt = RI_0^2 \int_0^\infty e^{-2kt} dt$$

tj.

$$A = \frac{RI_0^2}{2k} = 8 \text{ kJ}$$

2



1026.  $Q = RI^2 t = 6 \text{ MJ}$ .

1027. a) Kako je  $I = I(t) = kt$ , gde je  $k = 40 \text{ A/s}$ , to je oslobođena količina toplote za vreme  $T$

$$Q_1 = \int_0^T RI(t) dt = Rk^2 \frac{T^3}{3}$$

a za vreme  $t$

$$Q = Q_1 \frac{t}{T} = Rk^2 \frac{T^2}{3} t = 16 \text{ kJ}$$

b)  $Q = 16 \text{ kJ}$ .

1028.  $R = \frac{S_1 - S_2}{l} = 0,28 \Omega$ .

1029.  $I_{\max} = \frac{S}{r} = 5 \text{ A}$ , a  $I_{\min} = \frac{S}{R - r} = 2 \text{ A}$ .

1030.  $P_{\max} = \frac{S^2}{4R} = \frac{R}{4} \left( \frac{I_{\max} \cdot I}{I_{\max} - I} \right)^2$

1031) a)  $U_1 = 1 \text{ V}$  i  $U_2 = 9 \text{ V}$ ;

b)  $P = \frac{S^2}{4r} = 25 \text{ W}$ ;

c)  $R = r = 1 \Omega$ .

1032. a) Otpornost gasne cevi u režimu njenog rada koji odgovara nagibnom delu OB voll-amperske karakteristike je

$$R_g = \frac{U_B}{I_B} = 100 \text{ M}\Omega$$

pa je jačina struje koja odgovara ovoj otpornosti

$$I = \frac{S}{R_g + R} = 15 \mu\text{A}$$

Kako je  $I_{\max} = 10 \mu\text{A}$ , prethodni rezultat ukazuje da se radna tačka gasne cevi nalazi na delu BC voll-amperske karakteristike koji odgovara zasićenju i na kome unutrašnja otpornost gasne cevi linearno raste sa povišenjem napona. To znači da kroz cev protiče struja jačine  $I = I_2 = 10 \mu\text{A}$ .

b) Napon na krajevima gasne cevi je

$$U_g = S - RI = 3 \text{ kV}$$

što znači da je radna otpornost gasne cevi

$$R_g = \frac{U_g}{I_2} = 300 \text{ M}\Omega$$

1033. Gustina struje kroz polusferu, poluprečnika  $r$  je

$$j = \frac{I}{2\pi r^2}$$

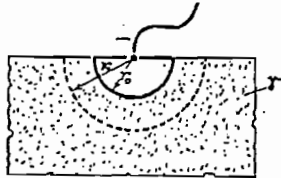
pa je, prema Omovom zakonu, jačina elek-

tričnog polja u tačkama na ovoj polusferi

$$E = \frac{j}{\gamma} = \frac{I}{2\pi\gamma r^2}$$

a razlika potencijala između elektrode i ovih tačaka

$$\Delta\varphi = \int_{r_0}^r E dr = \frac{I}{2\pi\gamma} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)$$



Prema uslovu zadatka  $r \rightarrow \infty$ , pa je

$$\Delta\varphi = \frac{I}{2\pi\gamma r_0}$$

a ukupna otpornost

$$R = \frac{\Delta\varphi}{I} = \frac{1}{2\pi\gamma r_0}$$

Ako je reč o zemlji (umesto o morskoj vodi) čija je specifična provodnost  $\gamma = 0,01 \text{ S/m}$ , izračunati otpornost ovakvog uzemljiša ako je poluprečnik elektrode  $r_0 = 5; 10; 50; 100 \text{ cm}$ .

1034. Kinetička energija jednog elektrona prilikom polaska sa katode je  $E_{k1} = \frac{mv_0^2}{2}$

a prilikom udara u anodu  $E_{k2} = \frac{mv^2}{2}$ , dok je rad električnih sila  $A = eU$ , pa je na osnovu zakona održanja energije.

$$eU = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

Odavde je impuls jednog elektrona

$$p_1 = mv = \sqrt{m(2eU + mv_0^2)} \quad (1)$$

a impuls svih elektrona koji udare o anodu tokom vremena  $\Delta t = eN/I$  iznosi

$$p = Np_1 = \frac{I\Delta t}{e} p_1 \quad (2)$$

Ako je reč o elastičnim sudarima elektrona sa anodom, pri kojima elektroni gube brzinu, onda je prema II Njutnovom zakonu  $F = -\Delta p/\Delta t$  i relacijama (1) i (2)

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{I}{e} \sqrt{m(eU + mv_0^2)}$$

1035. a) R; b)  $3R/2$ ; c)  $25R/12$ .

Kolike su ekvivalentne otpornosti između tačaka A i C, tj. B i C?

1036. a)  $3R/2$ ; b)  $2R$ ; c)  $4R$ .

Odrediti ekvivalentnu otpornost ovih veza otpornika između tačaka B i C.

1037. a)  $R_e = 4R$ ; f)  $R_e = 5R/2$ ;  
b)  $R_e = R/4$ ; g)  $R_e = 5R/3$ ;  
c)  $R_e = R$ ; h)  $R_e = 3R/5$ ;  
d)  $R_e = R$ ; i)  $R_e = 2R/5$ .  
e)  $R_e = 4R/3$ ;

1038.  $R_e = R_1 + R_{2,3} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{3}{2} R$ .

1039. Prema zadatku 1037, to je veza 4 otpornika prikazana na slici (h), pa je odgovarajuća ekvivalentna otpornost

$$R_e = 3R/5 = 60 \Omega$$

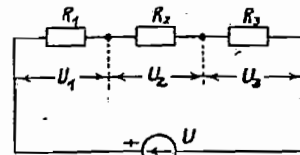
1040. a) Otpornost jedne sijalice je  $R_1 = \frac{U^2}{P} = 240 \Omega$ , a cele veze sijalica  $R_e = \frac{R_1}{12} = 20 \Omega$ ;

b)  $I = U/R_e = 6 \text{ A}$ .

1041. a) Ekvivalentna otpornost veze je  $R_e = R_1 + R_2 + R_3 = 11 \Omega$ , pa kroz kolo 4 protiče struja jačine  $I = U/R_e = 10 \text{ A}$ .

b)  $U_1 = R_1 I = 35 \text{ V}$ ;  $U_2 = R_2 I = 25 \text{ V}$ ;

$U_3 = R_3 I = 49 \text{ V}$ .



1042. Iz  $\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$  nalazi se da je

$R_e = 10,6 \Omega$ . Prema Omovom zakonu je  $I =$

$\frac{U}{R_e} = 10 \text{ A}$ . Jačina struje u granama kola su:

$I_1 = \frac{U}{R_1} = 4,42 \text{ A}$ ,  $I_2 = \frac{U}{R_2} = 3,21 \text{ A}$  i  $I_3 = \frac{U}{R_3} =$

$3,33 \text{ A}$ . Prema I Kirhofovom pravilu je

$I = I_1 + I_2 + I_3 = 10,96 \text{ A}$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 10,96 \text{ A}$$

1043. Prema II Kirhofovom pravilu je  $\mathcal{E} + \mathcal{E}_A = I(R_1 + R_2 + R_3)$ , odakle je

$$\mathcal{E}_A = I(R_1 + R_2 + R_3) - \mathcal{E} = -25,4 \text{ V}$$

1044. Kako je  $U_1 = \mathcal{E} - rI_1$  i  $U_2 = \mathcal{E} - rI_2$ ,

to je  $r = \frac{U_2 - U_1}{I_2 - I_1} = 0,02 \text{ A}$ .

1045.  $I = \frac{\mathcal{E}}{R+r} = 5 \text{ A}$ , pa je napon na krajevima akumulatora  $U = \mathcal{E} - rI = 2 \text{ V}$ .

1046. Na osnovu II Kirhofovog pravila je

$$\mathcal{E} = U = RI + rI$$

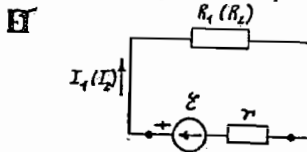
odakle je

$$r = \frac{U - RI}{I} = \frac{U}{I} - R$$

pa je tražena količina toplote

$$Q = rI^2 t = (U - RI)t = 120 \text{ J}$$

1047. U prvom slučaju je  $I_1 = \frac{\mathcal{E}}{r + R_1}$ , a u drugom  $I_2 = \frac{\mathcal{E}}{r + R_2}$ . Kako je  $\frac{I_2}{I_1} = k = 0,5$ , to

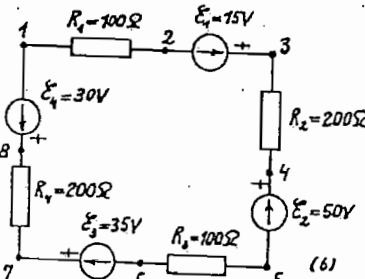
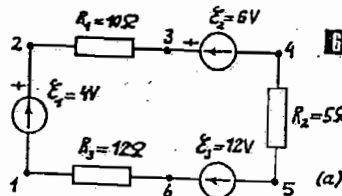


je unutrašnja otpornost akumulatora 5

$$r = \frac{R_1 - kR_2}{k - 1} = 0,5 \Omega$$

1048.  $U_1 = \mathcal{E} - rI = 1,8 \text{ V}$ . Potreban broj akumulatora je  $n = U/U_1 = 20$ .

1049. 6.



1050. Ukupno naelektrisanje oba kondenzatora je

$$q = q_C + q_{C_0}$$

gde je

$$q_C = C(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) = 20 \mu\text{C}$$

$$q_{C_0} = C_0 U_0 = C_0 \left[ \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1 - (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right] = 32,5 \mu\text{C}$$

pa je  $q = 52,5 \mu\text{C}$ .

1051. a) Kako je  $R_{1,2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$  i  $\frac{1}{R_{1,2,3,4}} =$

$\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6}$ , ekvivalentna otpornost celog

kola je  $R_e = R_{1,2} + R_3 + R_{4,5,6} = 10 \Omega$ .

b) Ovom kolu izvor daje struju jačine  $I = \frac{\mathcal{E}}{R_e} = 22 \text{ A}$ , pa su naponi  $U_{AB} = R_{1,2} I = 44 \text{ V}$  i  $U_{BC} = R_3 I = 66 \text{ V}$ .

1052. a)  $I_1 = 10 \text{ A}$ ,  $I_2 = 10 \text{ A}$  i  $I_3 = -4 \text{ A}$ .

b)  $U = 2 \text{ V}$ . Potrebno je uočiti da akumulator ems  $\mathcal{E}_2$  ne daje struju kolu, već deluju kao potrošač.

1053. a)  $I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2} = 1,3 \text{ A}$ ;

b)  $I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2} = 4 \text{ A}$ .

1054. ems akumulatora je  $\mathcal{E} = U_1$ .

a)  $I = \frac{U_2}{R}$ , pa je  $U_1' = \mathcal{E} - rI = \mathcal{E} - r \frac{U_2}{R}$ .

odakle je

$$r = R \frac{\mathcal{E} - U_1'}{U_2} = 0,016 \Omega$$

b) Pad napona na provodnicima je  $U_2 = U_1' - U_2 = 2R_1 I$ , pa je otpornost jednog provodnika

$$R_1 = \frac{U_1' - U_2}{2I} = R \frac{U_1' - U_2}{2U_2} = 1,1 \text{ m}\Omega$$

1055. a)  $(\Delta\varphi)_{AB} = \mathcal{E} = 2 \text{ V}$ ;

b)  $(\Delta\varphi)_{AB} = \mathcal{E} - rI = \frac{\mathcal{E}R}{r+R} = 1,8 \text{ V}$ .

1056.  $I = 0,2 \text{ A}$ .

1057. Ekvivalentna otpornost kola je

$$R_e = r + R_1 + R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$

pa je prema Omovom zakonu

$$I = \mathcal{E}/R_e = 1 \text{ A}$$

1058. Otpornost sijalice je  $R = U^2/P = 807 \Omega$ , pa će kroz nju proticati struja jačine  $I = \mathcal{E}/(R+r) = 0,232 \text{ A}$ . Napon na krajevima sijalice je  $U_1 = RI = 187,2 \text{ V}$ , što je nedovoljno za njen nominalni rad.

$$1059. \tau = \frac{P - \Delta P}{P} = \frac{UI - rI^2}{UI} = 1 - \frac{rI}{U} = 0,91.$$

1060. Za prvi položaj spojeva A i B je  $R_1 = R/3$  i  $R_2 = 2R/3$ , dok je

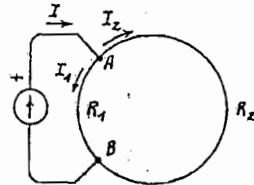
$$I = I_1 + I_2$$

$$R_1 I_1 = R_2 I_2$$

ij.

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

71



pa je snaga električne struje u ramu

$$P = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = \frac{6}{27} RI^2$$

odnosno ukupna otpornost rama

$$R = \frac{27 P}{6 I^2} = 6 \Omega$$

Za drugi položaj spojeva A i B je  $I_1 = I_2 = I$  i  $R_1 = R_2 = R/2$ , pa je

$$P = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = RI^2/4 = 121,5 \text{ W}$$

1061. a) Kako je  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$ , to je prema II Kirchofovom pravilu  $U_1 = \mathcal{E} - r_1 I$ , gde je prema Omovom zakonu

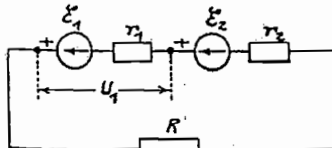
$$I = \frac{2\mathcal{E}}{R + r_1 + r_2}$$

pa je

$$U_1 = \mathcal{E} - \mathcal{E} \frac{2r_1}{R + r_1 + r_2}$$

Za  $U_1 = 0$  dobija se da je  $R = r_1 - r_2$ .

8



b) Snage generatora su  $P_1 = P_2 = \mathcal{E}I$ . Gubici snage su  $P_1' = r_1 I^2$  i  $P_2' = r_2 I^2$ , dok se na otporniku troši snaga  $P = RI^2$ .

$$c) \tau = \frac{P}{P_1 + P_2} = \frac{RI^2}{2\mathcal{E}I} = \frac{RI}{2\mathcal{E}(r_1 + r_2 + R)}$$

1062. Jačina struje koja protiče kroz otpornike je  $I = 0$ , a kroz električne izvore  $I_1 = 3\mathcal{E}/3r = 20 \text{ A}$ .

$$1063. E = \frac{\mathcal{E}}{d} \frac{R_2}{r + R_1 + R_2} = 5 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

1064. Napon između ploča kondenzatora je

$$U = RI = \frac{R\mathcal{E}}{R+r} = \frac{\mathcal{E}}{1 + \frac{r}{R}}$$

Kako je  $R = \rho \frac{d}{S}$  i  $C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{S}{d}$ , to je otpornost kondenzatora

$$R = \frac{\rho \epsilon_r \epsilon_0}{C}$$

a jačina električnog polja između njegovih ploča

$$E = \frac{U}{d} = \frac{\mathcal{E}}{d} \frac{1}{1 + \frac{r}{R}} = \frac{1}{\rho \epsilon_r \epsilon_0} \frac{\mathcal{E}}{1 + \frac{r}{R}}$$

1065. a) Posle uspostavljanja stacionarnog stanja, kroz otpornik protiče struja jačine  $I = \mathcal{E}/(R+r)$ , dok je jačina struje kroz kondenzator jednaka nuli. Napon na krajevima kondenzatora je  $U = RI = R\mathcal{E}/(R+r)$ , a količina elektriciteta na njegovim pločama

$$q = CU = CR \frac{\mathcal{E}}{R+r} = 4 \mu\text{C}$$

b) Posle isključenja prekidača električna energija kondenzatora se pretvara u unutrašnju energiju otpornika (kondenzator se isprazni kroz otpornik), pa je

$$Q = W = \frac{q^2}{2C} = 16 \mu\text{J}$$

1066. Promena električne energije prvog kondenzatora je

$$W_1 = W_1' - W_1 = \frac{1}{2} C_1 (U_1'^2 - U_1^2)$$

gde je

$$U_1' = R_1 I' = R_1 \frac{\mathcal{E}}{r + R_1 + R_2} = 0,4 \text{ V}$$

$$U_1 = \frac{\mathcal{E} - rI}{2} = 0,95 \text{ V}$$

pa je  $W_1 = -0,743 \text{ nJ}$ .

1067. a) Posle uspostavljanja stacionarnog stanja, napon na krajevima kondenzatora je

$$U = \mathcal{E} - rI$$

gde je  $I = \mathcal{E}/(r + R_1 + R_2)$ , pa je naelektrisanje

kondenzatora

$$q = CU = C\mathcal{E} \frac{R_1 + R_2}{r + R_1 + R_2} = 95 \mu\text{C}$$

a njegova električna energija

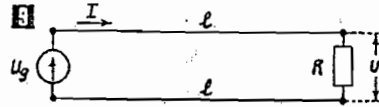
$$W = \frac{1}{2} qU = \frac{1}{2} C\mathcal{E}^2 \left( \frac{R_1 + R_2}{r + R_1 + R_2} \right)^2 \approx 4,5 \text{ mJ}$$

$$b) q = C\mathcal{E} = 100 \mu\text{C}, W = \frac{1}{2} C\mathcal{E}^2 = 5 \text{ mJ}.$$

1068. a) Otpornost voda je  $R = 2\rho \frac{l}{S} = 6,8 \Omega$ .

Kroz vod protiče struja jačine  $I = P_p/U_p = 13,7 \text{ A}$ , pa je napon na krajevima generatora

$$U_x = U_p + RI = 312,5 \text{ V}$$



b) Gubitak snage na vodu je

$$P = RI^2 = 1,26 \text{ kW}$$

c) Stepen korisnog dejstva ovog prenosnog sistema je

$$\eta = \frac{P_p}{P_g} = \frac{U_p}{U_x} = 0,70$$

1069. a)  $I = 7,6 \text{ A}$ ; b)  $I = 4,5 \text{ A}$ .

1070. a) Most je u ravnoteži kada je  $R_1 R_3 = R_2 R_4$ , odakle je

$$R_4 = \frac{R_1 R_3}{R_2} = 9 \Omega$$

b) Ekvivalentna otpornost kola između tačaka A i D je

$$R_{AD} = \frac{(r+R_1)R_2}{r+R_1+R_2} = 17 \Omega$$

pa kroz akumulator protiče struja jačine

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_3 + R_{AD}} = 0,07 \text{ A}$$

Napon između tačaka A i D je  $U_{AD} = R_{AD}I = 1,2 \text{ V}$ , pa kroz galvanometar protiče struja jačine

$$I_G = \frac{U_{AD}}{r + R_1} = 0,01 \text{ A}$$

1071. Ako je  $r$  otpornost jedne stranice kvadratne ćelije u mreži, onda je za jednu kvadratnu ćeliju (npr.  $C_1 C_2 C_4 C_3$ )

$$-rI - rI + rI + rI = 0$$

dok je za trouglaste ćelije na periferiji mreže (npr.  $C_1 C_2 C_3$ )

$$-rI - rI + r\sqrt{2}I' = 0$$

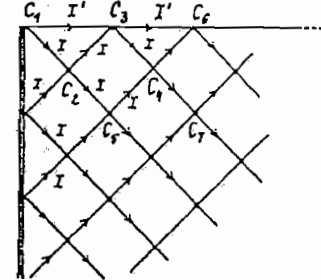
odakle je

$$I' = \sqrt{2}I$$

pa je ukupna struja kroz mrežu

$$I = 2I' + 2 \frac{I}{a} I = 2 \left( 1 + \frac{I}{\sqrt{2}a} \right) I' \quad (1)$$

10



Pad napona na ovakvom otporniku može se izraziti kao pad napona na provodniku koji čini obod ove mreže, tj.  $C_1, C_3, C_5, \dots$  čija je dužina  $L$ , a otpornost

$$R' = \rho \frac{L}{\pi d^2/4}$$

pa je

$$U_{AB} = R'I' = \frac{4\epsilon L}{\pi d^2} I' \quad (2)$$

dok je ukupna otpornost mreže, prema relacijama (1) i (2)

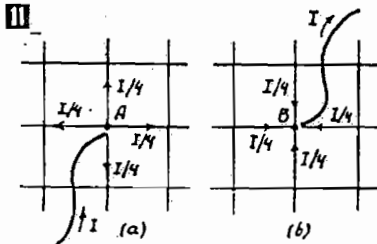
$$R = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{2\rho L}{\pi d^2} \left( 1 + \frac{I}{\sqrt{2}a} \right) = 0,77 \Omega$$

1072. Otpornost jedne stranice ćelije mreže je

$$R' = \rho'a$$

U čvoru A struja u kolu III (sl. a) jačine  $I$  deli se u četiri struje jednakih jačine  $I/4$ . U čvoru B je obratno (sl. b).

III



Superpozicijom ovih stanja nalazi se da je napon između čvorova A i B

$$U_{AB} = R' \frac{I}{2} = \frac{R'}{2} I$$

što znači da je tražena ekvivalentna otpornost

$$R_{AB} = R'/2 = \rho'a/2$$

1073. a) Na osnovu Omovog zakona je

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{a/l}$$

odakle je

$$I = \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{a}} = 1,4 \text{ A}$$

b)  $I = \frac{1}{2a} (-r + \sqrt{r^2 + 4a\mathcal{E}}) = 1,32 \text{ A}$

1074.  $I = \frac{1}{2b} [(R_1 + a) \pm \sqrt{(R_1 + a)^2 - 4b\mathcal{E}}] = (5,63 \pm 2,56) \text{ A}$

tj.  $I_1 = 8,19 \text{ A}$  i  $I_2 = 3,07 \text{ A}$ . Ovim jačinama struje odgovara napon koji treba da pokaže voltmetar

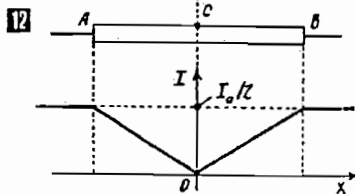
$$U_1 = R_1 I_1 = 32,76 \text{ V} \text{ i } U_2 = R_2 I_2 = 12,28 \text{ V}$$

Kako je ems električnog izvora 20V, prvo rešenje je nerealno u fizičkom smislu.

1075. Iz relacije  $I = \mathcal{E} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$  nalazi se da je

$$I = \frac{1}{2bR_1} [-aR_1 + b\mathcal{E} + \sqrt{(aR_1 - b\mathcal{E})^2 + 4bR_1\mathcal{E}(R_1 + a)}] = 4,38 \text{ A}$$

1076. Dijagram struje koja protiče kroz kolo, u odnosu na tačku C (sredinu štapa AB), prikazan je na slici 12.



Jačina struje na udaljenosti x od tačke C je

$$I_x = kx = \frac{I_0}{2L} x$$

pa je pad napona na delu štapa dužine dx, na udaljenosti x od tačke C

$$dU = I_x dR = \rho' \frac{I_0}{2L} x dx \quad (1)$$

gde je  $\rho'$  — podužna otpornost štapa.

Na osnovu jednačine (1) nalazi se da je

$$U_{CB} = \frac{\rho' I_0}{4L} x^2 \Big|_0^{L/2} = \frac{\rho' I_0 L}{16}$$

tj.  $U_{CB} = RI_0/16$ , pa je

$$U_{AB} = 2U_{CB} = RI_0/8$$

1077. Ako za vreme t ručica načini otklon

$\theta = \omega t$ , tj. tačka B pređe put  $\widehat{AB}$ , onda je otpornost ovog dela prstena

$$R_1 = \rho \frac{\theta D}{2S}$$

a preostalog

$$R_2 = \rho \frac{(2\pi - \theta)D}{2S}$$

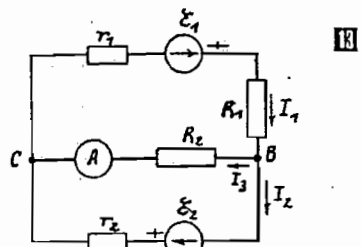
Njihova ekvivalentna otpornost je

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \rho \frac{\theta D}{2S} \left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right)$$

pa je jačina struje kroz kolo

$$i = \frac{\mathcal{E}}{r + R} = \frac{\mathcal{E}}{r + \rho \frac{\omega D}{2S} \left(1 - \frac{\omega}{2\pi}\right) t}$$

Nacrtati dijagram  $i = i(t)$ . Kolika je najveća, a kolika najmanja jačina ove struje?



1078. Primenjujući I i II Kirhofovo pravilo na strujno kolo prikazano na slici 13, gde su smerovi struja u pojedinim granama kola usvojeni proizvoljno, dobija se da je

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad (\text{za čvor B})$$

$$\mathcal{E}_1 = r_1 I_1 + R_1 I_1 + R_2 I_3 \quad (\text{za konturu } \mathcal{E}_1 BC \mathcal{E}_1)$$

$$\mathcal{E}_2 = r_2 I_2 - R_2 I_3 \quad (\text{za konturu } \mathcal{E}_2 CB \mathcal{E}_2)$$

Odavde je

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 (R_1 + r_2)}{R_2 (R_1 + r_2) + r_1 r_2 + r_2 (R_1 - R_2)}$$

Za  $I_1 = 1 \text{ A}$  je  $R_2 = 2,4 \Omega$ .

1079. a) Prema I Kirhofovom pravilu, za čvor B je

$$I_1 + I_2 - I = 0$$

a na osnovu II Kirhofovog pravila je

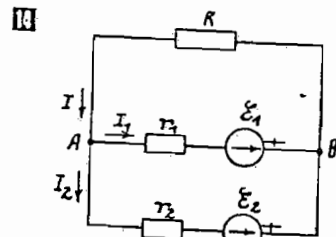
$$\mathcal{E}_1 = I_1 r_1 + IR$$

$$\mathcal{E}_2 = I_2 r_2 + IR$$

pa je

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + r_2 I}{r_1 + r_2} = \frac{r_2}{r_1 + r_2} I = 6 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 + r_1 I}{r_1 + r_2} = \frac{r_1}{r_1 + r_2} I = 3 \text{ A}$$



b) Napon na krajevima izvora je

$$U = \mathcal{E} - r_1 I_1 = 1,8 \text{ V}$$

1080. Prema Kirhofovim pravilima primenjenim na čvor A i na konture  $\mathcal{E}_1 A \mathcal{E}_1$  i  $\mathcal{E}_2 A \mathcal{E}_2$ , dobijaju se relacije

$$I_1 + I_2 - I = 0$$

$$\mathcal{E}_1 = R_1 I_1 + RI$$

$$\mathcal{E}_2 = R_2 I_2 + RI$$

odakle je

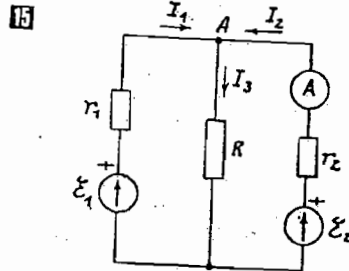
$$I = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1}{RR_2 + R_1 R_2 + RR_1} = 1,6 \text{ A}$$

1081. Prema Kirhofovim pravilima, za čvor A i konture  $\mathcal{E}_1 A B \mathcal{E}_1$  i  $\mathcal{E}_2 A B \mathcal{E}_2$ , dobija se da je

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

$$\mathcal{E}_1 = r_1 I_1 + R I_3$$

$$\mathcal{E}_2 = r_2 I_2 + R I_3$$



odakle je

$$I = \frac{r_1 \mathcal{E}_1 + R (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)}{r_1 r_2 + R (r_1 + r_2)}$$

Za  $I_1 = 1 \text{ A}$ ,  $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 = 2 \text{ V}$  i  $r_1 = r_2 = 1 \Omega$  je  $R = 9,5 \Omega$ .

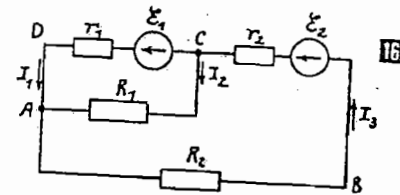
1082. a)  $I = 0,4 \text{ A}$ ; b)  $I = 0,38 \text{ A}$ .

1083. Usvajanjem proizvoljnih smerova struja  $I_1, I_2$  i  $I_3$  u granama kola i primenom Kirhofovih pravila za čvor A i konture CDAC i CABC, dobijaju se relacije

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \quad (\text{za čvor A})$$

$$\mathcal{E}_1 = r_1 I_1 - R I_2 \quad (\text{za konturu CDAC})$$

$$\mathcal{E}_2 = R I_1 + R I_2 + r_2 I_3 \quad (\text{za konturu CABC})$$



Iz ovih relacija nalazi se da je

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}_2 (r_1 + R_1) + \mathcal{E}_1 R_1}{r_1 R_1 + r_1 R_2 + R_1 R_2 + r_1 r_2 + r_2 R_1} \approx 0,86 \text{ A}$$

1084. Primenom Kirhofovih pravila nalazi se da je

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - IR}{R_1}$$

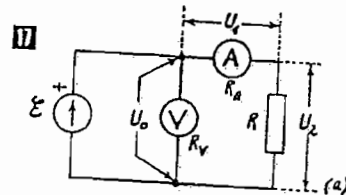
gde je

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1}{R R_2 + R R_1 + R R_2} = 0,157 \text{ A}$$

pa je  $I_1 = 0,118 \text{ A}$ .

1085. Ako ampermetar pokazuje struju  $I_0$  a voltmetar napon  $U_0$ , onda je tačna vrednost otpornosti otpornika

$$a) R_0 = \frac{U_0 - U_1}{I_0} = \frac{U_0 - R_A I_0}{I_0} = \frac{U_0}{I_0} - R_A \quad (1)$$

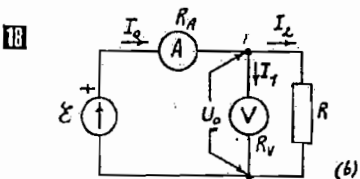


gde je  $U_0/I_0 = R$  — izmerena otpornost, a  $R_A$  — otpornost ampermetra. Greška merenja je prema tome

$$\Delta R = R_0 - R = R_A$$

b)  $R_0 = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U_0}{I_0 - I_1} = \frac{U_0}{I_0 \frac{R_V}{R_V + R}}$ , gde je  $R_V$

— otpornost voltmetra.

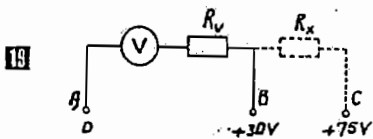


Ako je izmerena vrednost otpornosti  $R = U_0/I_0$ , onda je greška merenja

$$\Delta R = R - R_0 = \frac{R^2}{R_V - R}$$

**Napomena:** Iz dobijenih rezultata se može zaključiti da pri ovakvim merenjima treba upotrebiti ampermetar sa što manjom unutrašnjom otpornošću i voltmetar sa što većom unutrašnjom otpornošću.

1086. Voltmetru treba vezati redno još jedan dodatni otpornik otpornosti  $R_x$ , čija se vrednost određuje na sledeći način.



Ako se na krajeve AB priključi napon  $U_1 = 30V$ , instrument će skrenuti do kraja, pri čemu će kroz njega proticati struja jačine  $I_1 = U_1/R_V = 15mA$ . Struja kroz instrument mora da bude iste jačine i kada se na krajeve AC priključi napon  $U_2 = 75V$ , pa je

$$I_2 = I_1 \frac{U_2}{R_V + R_x}$$

odakle je  $R_x = 3000 \Omega$ .

1087. Prema I Faradejevom zakonu je  $m = kIt$ , pa je  $I = m/kt = 3,4A$ , pošto je elektrohemijski ekvivalent bakra  $k = 0,329 mg/C$ .

1088. Pre vezivanja ampermetra u kolo potrošača, kroz potrošač je proticala struja jačine  $I_0 = U/R$ , a posle vezivanja ampermetra

$$I_1 = \frac{U}{r+R}$$

pa je  $I_0 = \frac{r+R}{R} I_1 = 5,05A$ . Kolika je greška merenja?

1089.  $R = \frac{r}{n-1} = 50 \Omega$ . Kako se u kolu vezuje šani?

1090. a)  $U_1 = 1,375 V$ ;

b)  $U = 1,933 V$ .

1091. Kada se uključi prekidač  $P_1$ , naelektrisanje kondenzatora, tj. protokla količina elektriciteta kroz galvanometar je  $q_1 = C\mathcal{E}$ , pa je

$$\alpha_1 = kq_1 = kC\mathcal{E}$$

Uključenom prekidaču  $P_2$  odgovara naelektrisanje kondenzatora  $q_2 = CU = CRI = C\mathcal{E} \frac{R}{r+R}$ , koje je manje od  $q_1$ , pa će tada kroz galvanometar proteći količina elektriciteta  $q_1 - q_2$ , čemu odgovara otklon

$$\alpha_2 = k(q_1 - q_2) = kC\mathcal{E} \frac{r}{r+R}$$

tj.

$$\alpha_2 = \alpha_1 \frac{r}{r+R} = 10^\circ$$

1092.  $U_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2}}{\frac{C_1}{C_2} + 1} = \frac{21}{4} V$ ;

$$U_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_2 \frac{R_2}{R_1 + R_2}}{\frac{C_2}{C_1} + 1} = \frac{7}{4} V.$$

1093.  $t = \frac{m}{kI} = \frac{0,90pV}{kI} \approx 135 h$ .

1094. Kako je  $k = m_j/Ze$ , masa jona vodonika je  $m_j = kZe$ . Pošto je vodonik jednovaleantan, to je  $Z = 1$ , odnosno  $m_j = ke = 1,67 \times 10^{-27} kg$ .

S obzirom na to što se masa jona vodonika  $m_j$  razlikuje od mase atoma vodonika  $m_a$  za masu jednog elektrona ( $9 \cdot 10^{-31} kg$ ), koja je oko 1836 puta manja, može se uzeti da je  $m_a \approx m_j$  sa greškom manjom od 0,054%.

1095. a) Prema II Faradejevom zakonu, elektrohemijski ekvivalent aluminijuma je

$$k_{Al} = \frac{1}{F} \frac{M_{Al}}{Z_{Al}} = 0,93 \frac{mg}{C}$$

pa je za taloženje navedene mase aluminijuma potrebno vreme  $t = m/kI = 7,4 h$ .

b)  $E = UI \approx 3 MWh$ .

1096. Kroz oba suda za elektrolizu protiče struja jednake jačine, pa će masa izdvojene supstance da bude proporcionalna njihovim elektrohemijskim ekvivalentima, tj.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{k_{AB}}{k_{Cu}}$$

ili prema II Faradejevom zakonu

$$m_1 = m_1 \frac{k_{Cu}}{k_{Ag}} = m_1 \frac{M_{Cu} Z_{Ag}}{M_{Ag} Z_{Cu}} = 53,33 mg/C$$

gde su  $M_{Cu} = 0,064 kg/mol$ ;  $M_{Ag} = 0,108 kg/mol$ ;  $Z_{Ag} = 1$  i  $Z_{Cu} = 2$ .

1097. a) Vreme taloženja bakra je  $t = \Delta m/kI = \Delta m/kjS = 631 s$ .

b)  $q = It = jSt = 1515 C$ .

c) Ako se taloženje vrši samo na jednoj strani katode, onda je  $\Delta m = \rho dS$ , pa je debljina nataloženog sloja

$$d = \frac{\Delta m}{\rho S} = 4,7 \mu m$$

1098. Elektrohemijski ekvivalent bakra je  $k = 0,329 mg/C$ , pa kroz rastvor treba da protiče struja  $I_1 = m/kt = 6,75 A$ , dok električni izvor, prema Omovom zakonu, daje struju jačine

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + \frac{rR}{r+R}} \quad (1)$$

Napon na pločama je  $U_{AB} = I \frac{rR}{r+R}$  (2), odnosno  $U_{AB} = Ir$  (3), pa je prema relacijama (1), (2) i (3)

$$R = \frac{rI}{\mathcal{E} - I(r+R)} = 2,34 \Omega$$

1099. a) Srednja vrednost jačine struje jednaka je aritmetičkoj sredini početne i krajnje vrednosti struje,  $\langle I \rangle = \frac{0 + 2A}{2} = 1 A$ , pa je nataložena masa bakra

$$m = k \langle I \rangle t = 395 mg$$

b) U ovom slučaju je  $m = m_1 + m_2$ , tj.  $m = k(I_1 t_1 + I_2 t_2) = k t_1 (I_1 + I_2) = 592 mg$

1100.  $m = k \int_0^{t_1} I dt = k \frac{bt^2}{2} = 1,07 g$ .

1101. a)  $q = It/2 = 2 C$ ; b)  $q = It = 0,2 \mu C$ ;

c)  $q = \int_0^{T/2} I_0 \sin \omega t \cdot dt = -\frac{I_0 T}{2\pi} \cos \left( \frac{2\pi}{T} t \right) \Big|_0^{T/2} = -\frac{I_0 T}{2\pi} (\cos \pi - \cos 0) = \frac{I_0 T}{\pi} = 12,7 mC$ .

1102. a)  $\Delta \varphi = \frac{kT}{e} \left( \frac{n_1}{n_2} - \frac{n_2}{n_1} \right) \approx 36 mV$ ;

b)  $\alpha = \frac{\Delta \varphi}{T} \approx \frac{36 mV}{300 K} = 120 \frac{\mu V}{K}$ .

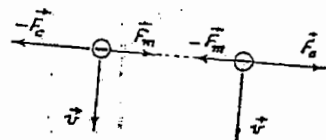
1103. Iz izraza za moć termoelementa  $\alpha = \frac{\Delta \varphi}{T} = \frac{k}{e} \left( \frac{n_1}{n_2} - \frac{n_2}{n_1} \right)$  nalazi se da odnos koncentracija slobodnih elektrona bizmuta ( $n_1$ ) i antimona ( $n_2$ ) iznosi  $n_1/n_2 \approx 1,7$ .

### 3. MAGNETNO POLJE

1104. Ovi elektroni uzajamno deluju električnom (Kulonovom) silom  $\vec{F}_e$  i magnetnom (Lorentcovom) silom  $\vec{F}_m$ . Njihovi intenziteti su:

a)  $F_e = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{e^2}{4\pi r^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2,7 pN$ ;

b)  $F_m = \mu_0 \frac{e^2 v^2}{4\pi r^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0,7 pN$ .

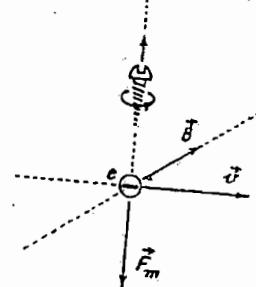


c) Rezultujuće sile koje deluju na svaki od elektrona su odbojne, tj. imaju isti pravac i smer kao i Kulonove sile, dok je njihov intenzitet  $F = F_e - F_m = 2 pN$ .

1105. a) Na elektron će delovati Lorencova sila  $\vec{F}_m = e\vec{v} \times \vec{B}$

čiji su pravac i smer naznačeni na slici, dok je njen intenzitet

$$F_m = evB \sin(\vec{v}, \vec{B}) = evB \sin(\pi/2) = evB = 24 fN$$



b) Elektron će se kretati po onoj kružnoj putanji za koju važi uslov ravnoteže Lorencove sile  $\vec{F}_m$  i centrifugalne sile  $\vec{F}_c$  (u sistemu referencije vezanom za elektron). Iz ovog



uslova je  $e v B = m v^2 / r$ , odakle je

$$r = \frac{m v}{e B} = \frac{m_0}{e B} \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 \text{ m}$$

1106.  $F_m = q v B = 11 \text{ pN}$ .

1107. Tokom kretanja, pod dejstvom električnog polja elektroni steknu kinetičku energiju  $m_e v^2 / 2$ . Kako je ona jednaka radu Kulonovih sila  $e U$ , to je

$$e U = \frac{m_e v^2}{2} \quad (1)$$

dok je iz uslova dinamičke ravnoteže centrifugalne i Lorencove sile

$$\frac{m_e v^2}{r} = e v B \quad (2)$$

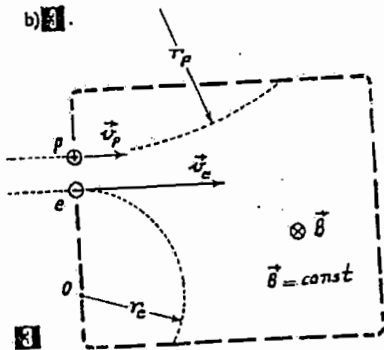
pa je prema relacijama (1) i (2)

$$r_0 = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2 m_e U}{e}} = 0,106 \text{ m}$$

Kako je  $q_e = q_p = e$ , a  $m_p = 1836 m_e$ , to je

$$r_p = \sqrt{1836} r_0 \approx 43 r_0 = 4,56 \text{ m}$$

b)  $\frac{r_p}{r_0} = 43$ .



1108. a) Iz uslova dinamičke ravnoteže električne i magnetne sile  $e E = e v B$  nalazi se da je  $v = E/B = 3,6 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ .

b)  $r = 0,34 \text{ m}$ .

1109. Ako je  $q$  — maelektrisanje, a  $v$  — brzina  $\alpha$ -čestice, onda je, posle ubrzavanja električnim poljem  $q U = m v^2 / 2$ , odakle je brzina čestice  $v = \sqrt{2 q U / m}$ . Na  $\alpha$ -česticu deluje magnetna (Lorencova) sila intenziteta

$$F_m = q v B = q B \sqrt{\frac{2 q U}{m}} \approx 0,02 \text{ N}$$

1110. a) Brzina protona je  $v = \sqrt{\frac{2 e U}{m}} =$

$= 1,32 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ , pa je poluprečnik putanje

$$r = \frac{m v}{e B} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2 m U}{e}} = 1,37 \text{ cm}$$

b)  $T = \frac{2 \pi r}{v} = 5,31 \mu\text{s}$ ;

c)  $L = m v r = r \sqrt{2 m e U} = 3,7 \cdot 10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ .

1111. a)  $F_m = e B \sqrt{\frac{2 E}{m}} = 7,9 \text{ pN}$ ;

b)  $T = \frac{\pi m}{e B} = 3,3 \mu\text{s}$ ;

c)  $r = \frac{1}{2 e B} \sqrt{2 m E} = 3,6 \text{ cm}$ .

1112. Kinetička energija protona je  $E_k = m v^2 / 2$  (1). Kako je u toku kretanja po krugu centrifugalna sila jednaka Lorencovoj sili, to je  $q v B = m v^2 / r$  (2), odakle je brzina protona  $v = q r B / m$ , a njegova kinetička energija, prema relaciji (1)

$$E_k = \frac{(q r B)^2}{2 m} \approx 0,17 \text{ MeV}$$

1113.  $v_e = \sqrt{\frac{2 e U}{m_e}}$  i  $v_p = \sqrt{\frac{2 e U}{m_p}}$ , pa su

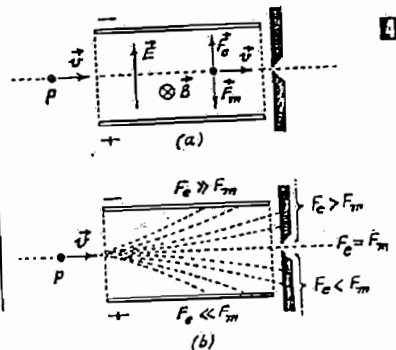
poluprečnici putanja  $r_e = \frac{m_e v}{e B} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2 m_e U}{e}}$

i  $r_p = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2 m_p U}{e}}$ , a njihov odnos

$$\frac{r_p}{r_e} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} \approx 43$$

1114.  $\frac{r_p}{r_e} = \frac{m_p}{m_e} = 1836$ .

1115. Prolazeći kroz električno i magnetno polje, neće skretati od svog pravca kretanja samo oni protoni za koje je intenzitet Kulonove sile  $F_e = e E$  jednak intenzitetu Lorencove sile  $F_m = e v B$  (sl. a). Tada se dejstva ovih



sila međusobno kompenzuju. Dakle, iz uslova  $F_e = F_m$  odnosno

$$e E = e v B$$

nalazi se brzina izdvojenih protona

$$v = \frac{E}{B} = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

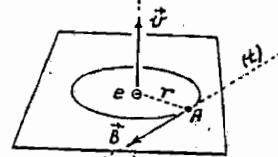
Gde će da padnu protoni za koje je  $F_e > F_m$  i  $F_e < F_m$ , a gde oni za koje  $F_e \gg F_m$  i  $F_e \ll F_m$  (sl. b)?

Dokazati da je

$$[E/B] = m/s$$

1116. Pravac i smer vektora magnetne indukcije  $\vec{B}$  u tački A naznačen je na slici, a intenzitet je

$$B = \mu_0 \frac{e v}{4 \pi r^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2,8 \text{ pT}$$



5

1117.  $B = \mu_0 \frac{q v}{4 \pi r^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0,4 \text{ fT}$ .

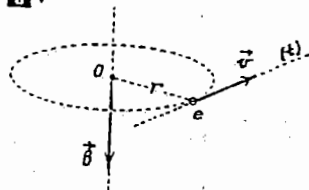
1118.  $H = \frac{q v}{4 \pi r^2}$ , odakle je

$$v = \frac{4 \pi r^2 H}{q} = 135,7 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

1119.  $H = \frac{q v}{4 \pi r^2} = 955 \frac{\mu\text{A}}{\text{m}}$ .

1120. a)  $B_0 = \mu_0 \frac{e v}{4 \pi r^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 69 \text{ aT}$ ;

b) Pri rešavanju ovog dela zadatka služiti se analogijom sa kružnim strujnim provodnikom, imajući u vidu šta čini ovu struju, kao i način kako je definisan smer struje (tehnički smer) 6.

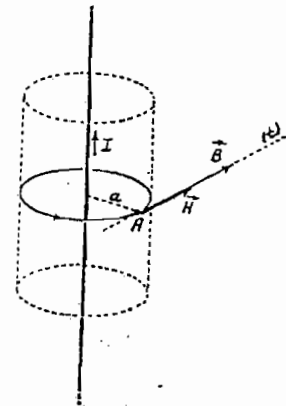


24 Zbirka zadataka iz Fizike D

1121. a)  $H = \frac{I}{2 \pi a} = \frac{50 \text{ A}}{\pi \text{ m}}$ ;

$$B = \mu_r \mu_0 H = 20 \mu\text{T}$$

b) Cilindar u čijoj se osi nalazi strujni provodnik 7.



7

1122. a)  $B = \mu_0 \frac{I}{2 \pi a} = 50 \mu\text{T}$ ;

$$H = \frac{B}{\mu_0} = 39,8 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

b)  $B = \mu_r \mu_0 \frac{I}{2 \pi a} = 500 \mu\text{T}$ ;

$$H = \frac{B}{\mu_r \mu_0} = 39,8 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

1123.  $H = \frac{I}{2 a} = 5 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ ;  $B = \mu_0 H = 62,8 \mu\text{T}$ .

1124. Prema Bio-Savarovom zakonu je

$$H = \frac{I}{2 a}$$

gde je  $I = \frac{e}{2 \pi R} \frac{e v}{S}$ , pa je

$$H = \frac{e}{2 u (r + \frac{e}{S})} = 54 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

1125. Magnetna indukcija u sredini kalem iznosi

$$B_s = \mu_0 \frac{N I}{l} = 12,57 \text{ mT}$$

a na krajevima  $B_k = B_s / 2 = 6,28 \text{ mT}$ .

$$1126. H = \frac{NI}{l} = 10 \frac{\text{kA}}{\text{m}}$$

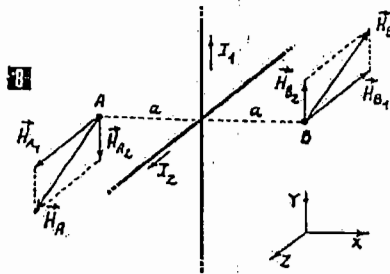
$$1127. h = \frac{l}{2\pi H Z_h} \approx 1 \text{ m}$$

$$1128. B_{\square} = \mu \frac{I}{2R}; B_{\square} = \mu \frac{4I\sqrt{2}}{\pi^2 R}, \text{ pa je}$$

$$\frac{B_{\square}}{B_{\circ}} = \frac{8\sqrt{2}}{\pi} = 1,14$$

$$1129. B = (\mu_r - 1)\mu_0 \frac{NI}{l} = 0,27 \text{ T}$$

1130. Na slici 1130 se vide pravci i smerovi vektora  $\vec{H}$  magnetnih polja pojedinih pro-



vodnika u tačkama A i B. Jačine ovih magnetnih polja su:

$$H_A = \sqrt{H_{A1}^2 + H_{A2}^2}$$

$$H_B = \sqrt{H_{B1}^2 + H_{B2}^2}$$

kako je  $H_{A1} = H_{A2} = H_{B1} = H_{B2} = \frac{I}{2\pi a}$ , to je

$$H_A = H_B = \frac{I}{\sqrt{2}\pi a} = 2,25 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

1131. Jačina magnetnog polja u tački A je

$$H_A = H_{A1} - H_{A2} = \frac{I}{2\pi \frac{d}{2}} - \frac{I}{2\pi \frac{3d}{2}}$$

$$= \frac{2I}{3\pi d} = 42,44 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

a u tački B je  $H_B = H_{B1} - H_{B2} = 0$  dok je u tački C

$$H_C = H_{C1} - H_{C2} = -H_A = -42,44 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Kolika će da bude jačina ovih polja ako struje promene smer?

$$1132. B_A = B_{A1} + B_{A2} = \mu_0 \frac{I}{2\pi a} - \mu_0 \frac{I}{2\pi a} = 0$$

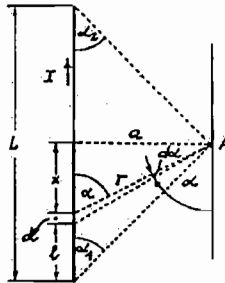
$$B_B = B_{B1} - B_{B2} = 0$$

1133. Na osnovu Laplasovog zakona

$$dB = \mu_0 \frac{I dl \sin \alpha}{2\pi r^2}$$

gde je 1133  $l = x - a \text{ ctg } \alpha$ , dobija se da je

$$dl = \frac{a dx}{\sin^2 \alpha}$$



Kako je  $\frac{a}{r} = \sin \alpha$ , tj.  $\frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2 \alpha}{a^2}$ , nalazi se da je

$$dB = \mu_0 \frac{I}{2\pi a} \sin \alpha dx$$

odnosno

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha dx =$$

$$= \mu_0 \frac{I}{2\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

Kako je prema uslovu zadatka  $\alpha_1 = \alpha_2 = 45^\circ$ , to je

$$B = \mu_0 \frac{I}{\sqrt{2}\pi a} = 2,83 \mu\text{T}$$

1134. Prema zadatku 1133. nalazi se da je

$$H_A = 4H_1 = \frac{2\sqrt{2}I}{\pi a} = 4,50 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$H_B = \frac{2\sqrt{2}I}{\pi a} \cos(\text{arc tg } 2) = 2,01 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$1135. \text{ a) } B = (2 + \sqrt{2})\mu_0 \frac{I}{4\pi a};$$

$$\text{ b) } B = \mu_0 \frac{I}{4a}; \text{ c) } B = \mu_0 \frac{I}{\pi a}$$

$$1136. \Phi = BS = \mu_r \mu_0 \frac{NI}{l} S, \text{ pa je}$$

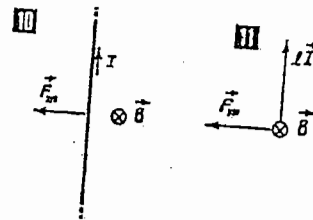
$$I = \frac{\Phi}{\mu_r \mu_0 NI} = 0,8 \text{ mA}$$

$$1137. F_m = IIB \sin \alpha = 5 \text{ mN}$$

$$1138. \text{ a) } \vec{F}_m = I\vec{l} \times \vec{B} \quad \text{1138, pa je}$$

$$F_m = IIB \sin(\angle \vec{l}, \vec{B}) = I\mu_0 I_1 l = 5 \mu\text{N}$$

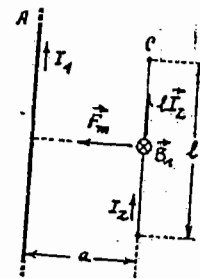
b) 1138



1139. a) Pošto se provodnik C nalazi u magnetnom polju indukcije  $B_1$  (koju stvara provodnik A), na njega deluje Amperova sila intenziteta

$$F_m = I_2 B_1 = I_2 \mu_0 \frac{I_1}{2\pi a} = \mu_0 \frac{I_1 I_2 l}{2\pi a} = 20 \mu\text{N}$$

b) 1139



$$1140. F_m = \mu \frac{I_1 I_2 l}{2\pi a} = \mu_0 \frac{I^2}{2\pi a} = 500 \text{ N}$$

1141. Ako su šine jednake, kroz svaku će proticati struja jačine  $I/2$ , pa je privlačna Amperova sila

$$F_m = \mu_r \mu_0 \frac{(I/2)(I/2)}{2\pi d} = \mu_r \mu_0 \frac{I^2 l}{8\pi d} = 0,56 \text{ N}$$

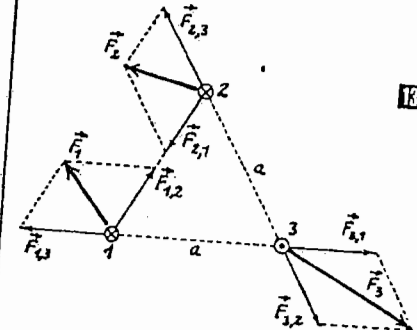
1142. Imajući u vidu da su intenziteti Amperovih sila 1142

$$F_{1,2} = F_{2,1} = \mu_0 \frac{I_1 I_2 l}{2\pi a}$$

$$F_{1,3} = F_{3,1} = \mu_0 \frac{I_1 I_3 l}{2\pi a}$$

i analogno

$$F_{3,2} = F_{2,3} = \mu_0 \frac{I_3 I_2 l}{2\pi a}$$



i da je međusobni odnos vektora  $\vec{F}_{1,2}$ ,  $\vec{F}_{1,3}$  i  $\vec{F}_{2,3}$  kao na slici, nalazi se da je

$$F_1^2 = F_{1,2}^2 + F_{1,3}^2 - F_{1,2} F_{1,3}$$

$$F_2^2 = F_{2,1}^2 + F_{2,3}^2 - F_{2,1} F_{2,3}$$

$$F_3^2 = F_{3,1}^2 + F_{3,2}^2 - F_{3,1} F_{3,2}$$

pa je

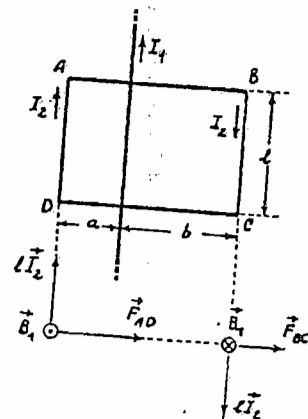
$$f_1 = \frac{F_1}{l} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \sqrt{I_2^2 + I_3^2 - I_2 I_3} = 26,5 \frac{\mu\text{N}}{\text{m}}$$

$$f_2 = \frac{F_2}{l} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} \sqrt{I_1^2 + I_3^2 - I_1 I_3} = 26,5 \frac{\mu\text{N}}{\text{m}}$$

$$f_3 = \frac{F_3}{l} = \frac{\mu_0 I_3}{2\pi a} \sqrt{I_1^2 + I_2^2 - I_1 I_2} = 26,5 \frac{\mu\text{N}}{\text{m}}$$

1143. Sa slike 1143 se vidi da je  $\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{DC} = 0$ , dok je rezultujuća Amperova sila

$$\vec{F}_R = \vec{F}_{AD} + \vec{F}_{BC}$$



pri čemu je

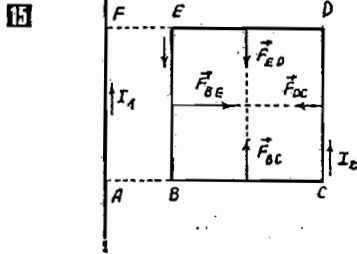
$$F_R = F_{AD} + F_{BC} = \mu_0 \frac{I_1 I_2 l}{2\pi a} + \mu_0 \frac{I_1 I_2 l}{2\pi b} = \frac{3}{4} \mu_0 \frac{I_1 I_2 l}{\pi a} = 30 \mu\text{N}$$

Sila  $\vec{F}_R$  deluje u ravni crteža i teži da pomeri ram udesno.

1144. Iz vektorske relacije  $\vec{F}_{BE} = I_2 \vec{BE} \times \vec{F}_{BE}$  vidi se da je sila  $\vec{F}_{BE}$  odbojna. Intenzitet ove sile je  $F_{BE} = I_2 \cdot BE \cdot B_{BE} = 40 \mu\text{N}$ .

$\vec{F}_{CB} = I_2 \cdot CB \times \vec{B}_{CB}$ . Pravec i smer dejstva ove sile je prikazan na slici 15. Kako je  $\vec{F}_{ED} = I_2 \cdot ED \times \vec{B}_{ED}$ , to je  $\vec{F}_{BC} = -\vec{F}_{ED}$ , pa se poništavaju dejstva ovih sila na ram.

$\vec{F}_{DC} = I_2 \cdot DC \times \vec{B}_{DC}$ . Pravec i smer dejstva ove sile prikazan je na slici, dok je njen intenzitet  $F_{DC} = I_2 \cdot DC \cdot B_{DC} = 24 \mu\text{N}$ .



Na ram, prema tome, deluje rezultujuća Amperova sila intenziteta  $F = F_{BE} - F_{DC} = 16 \mu\text{N}$ , čiji je smer isti kao sile  $\vec{F}_{BE}$ .

1145. Na osnovu II Njutnovog zakona za ubrzanje rama

$$a = \frac{\sum \vec{F}_m}{m}$$

gde je  $\sum \vec{F}_m = \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BC} + \vec{F}_{AD} + \vec{F}_{DC}$  — rezultujuća Amperova sila koja deluje na ram,  $m$  — masa rama.

Imajući u vidu da je  $m = \rho V = \rho S(4b + \sqrt{2}b) = (4 + \sqrt{2})\rho b S$  i da je vektorski izraz za Amperovu silu  $\vec{F}_{AC} = I_2 AC \times \vec{B}$ ,  $\vec{F}_{AB} = I_2 AB \times \vec{B}$ , nalazi se da je

$$a = \frac{1 + \sqrt{2}}{4 + \sqrt{2}} \frac{\gamma U B}{\rho b}$$

dok ugao vektora  $\vec{a}$  prema X-osi iznosi  $135^\circ$ .

1146. Magnetna indukcija rama u tački O je

$$B = \frac{B_0}{2} = \mu_0 \frac{I}{4R}$$

dok je jednačina struje kroz ram

$$I = \frac{\mathcal{S}}{R} = \frac{\mathcal{S}}{(\pi + 2)\rho R}$$

pa je intenzitet Amperove sile po jediničnoj dužini rama

$$F_l = \frac{F}{l} = IB = \mu_0 \frac{I^2}{4R} = \frac{\mathcal{S}^2}{4R(\pi + 2)\rho R} = 240 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

1147. a) Rezultujuća Amperova sila koja deluje na kružni deo rama jednaka je nuli. Ostaje nekompenzovana samo Amperova sila na radijalni deo rama dužine  $l = AC$ . Njen intenzitet je

$$F_m = IlB = \frac{\mathcal{S}^2}{\rho(2\pi + 1)} B = 27 \text{ mN}$$

b) Ram će pod dejstvom sile  $F_m$ , tj. njenim momentom intenziteta  $\mathcal{M} = l \frac{F_m}{2}$  da rotira oko zgloba C u suprotnom smeru od smeru rotacije kazaljke na časovniku, ugaonim ubrzanjem  $\alpha = \mathcal{M}/I$ , gde je  $I$  — moment inercije rama za osu rotacije, tj. osu koja prolazi kroz zglob C, a normalna je na ravan rama.

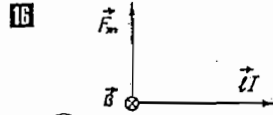
1148.  $I = \frac{\pi m \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)}}{\mu_0 g} = 41 \text{ kA}$ .

Dokazati da je

$$\left[ \frac{\pi m \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)}}{\mu_0 g} \right] = A$$

1149. a) 16.

b)  $A = I \Delta \Phi = IB \frac{a}{2} a = \frac{1}{2} B a^2 = 0,5 \text{ mJ}$ .



1150. a)  $A = Fl$ , gde je  $F = IlB$  i  $l = vt$ , pa je  $A = IlBvt = 1 \text{ J}$ ;

b)  $P = A/t = IlBv = 0,1 \text{ W}$ .

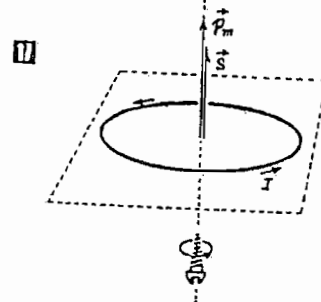
1151. Provodnici deluju između sebe odbojnom Amperovom silom intenziteta

$$F_m = \mu \frac{I_1 I_2 l}{2\pi a}$$

pa je potreban rad spoljašnjih sila

$$A = \int_{a_1}^{a_2} F da = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2} \int_{a_1}^{a_2} \frac{da}{a} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2} \ln \frac{a_2}{a_1} = 4,6 \text{ mJ}$$

1152.  $p_m = IS = I \cdot \pi r^2 = 0,0628 \text{ A} \cdot \text{m}^2$



Ako se ovaj ram nade u homogenom magnetnom polju, indukcije  $B = 1 \mu\text{T}$ , imaće određenu potencijalnu energiju. Kada će ova energija da bude najveća i koliko će iznositi?

1153. a)  $p_m = IS$ , odakle je  $p_m = IS = Ia^2 = 0,16 \text{ A} \cdot \text{m}^2$ ;

b)  $\mathcal{M} = p_m \times B$ , odakle je  $\mathcal{M} = p_m \mu_0 H = 2 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{N}$ ;

c)  $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = \mu_0 HS = 0,2 \text{ Wb}$ .

1154. a)  $\mathcal{M} = p_m \times B$ , odakle je  $\mathcal{M}_{\text{max}} = p_m B = ISB = 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{N}$ ;

b)  $\mathcal{M} = p_m B \sin(\vec{p}_m, \vec{B}) = ISB \sin \alpha$ , pa se nalazi da je  $\mathcal{M} = 7 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{N}$ .

1155. a)  $\mathcal{M} = p_m B \sin \alpha = N p_m B$ , odakle je  $\mathcal{M} = NI \pi r^2 \mu_0 H = 5,5 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{N}$

pošto je za drvo  $\mu_r \approx 1$ ;

b)  $\mathcal{M} = NI \pi r^2 \mu_r \mu_0 H = 5,5 \text{ m} \cdot \text{N}$ .

1156. a)  $\mathcal{M} = NISB = 7,2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{N}$ ;

b)  $\mathcal{M} = NISB \sin \alpha = NISB/2$ .

1157. Ako je magnet postavljen u radijalni pravac u odnosu na strujni provodnik, na njega (u početku kretanja) deluje moment sprega, intenziteta  $\mathcal{M} = p_m B$ , gde je  $B = \mu_0 I/(2\pi a)$ , pa je  $\mathcal{M} = \mu_0 p_m I/(2\pi a)$  (1). Ovaj moment sprega uvrnuće nit za ugao (u radianima)  $\theta = \frac{2l\mathcal{M}}{\pi E_p r^4}$  (2), gde je  $r = d/2$ . Prema relacijama

(1) i (2) ugao skretanja je

$$\theta = \frac{16 \mu_0 p_m I}{\pi^2 a E_p d^4} = 0,255 \text{ rad} = 14^\circ 35'$$

1158. Intenzitet momenta sprega Amperovih sila je  $\mathcal{M} = p_m B \sin(\vec{p}_m, \vec{B}) = p_m B \cos \theta = NIS \mu_0 H \cos \theta$  (1). Ovaj moment sprega uvrnuće nit za ugao (u rad.)  $\theta = 2l\mathcal{M}/(\pi E_p r^4)$  (2), gde je  $r = d/2$ , pa je prema relaciji (1)

$$I = \frac{\pi E_p d^4 \theta}{32 \mu_0 NIS H \cos \theta} \approx 0,1 \mu\text{A}$$

1159. a, b) Jačina magnetnog polja u torusu je  $H = NI/l = 1077 \text{ A/m}$ , pa je prema zavisnosti  $B = B(H)$ , magnetna indukcija u torusu  $B = 1,2 \text{ T}$ .

Relativna permeabilnost gvožđa je  $\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H} = 895$ , pa je induktivnost kalema

$$L = \mu_r \mu_0 \frac{N^2 S}{l} = 1,7 \text{ H}$$

c) Magnetni fluks kroz jedan navojak je

$$\Phi_1 = BS = \mu_r \mu_0 \frac{NI}{l} \pi r^2 = 3,38 \text{ mWb}$$

1160.  $\Phi = BS = \mu \frac{NIS}{l}$  (1), a kako je  $L = \mu \frac{N^2 S}{l}$  (2), to je prema relacijama (1) i (2)

$$\frac{\Phi}{L} = \frac{I}{N}$$
, odnosno  $N = \frac{LI}{\Phi} = 40$  navojaka.

1161. Prema zadatku 1160. je  $L = \mu N^2 S/l$ , pa je u ovom slučaju

$$N = \sqrt{\frac{IL}{\mu_0 S}} \approx 632 \text{ navojaka}$$

1162. Magnetni fluks kroz sve navojke torusa je  $\Phi = NBS = \mu \frac{N^2 IS}{l}$ , gde je  $l = 2\pi r = 2\pi \frac{r_1 + r_2}{2}$ , a  $S = (r_2 - r_1)h$ , pa je

$$\Phi = \mu \frac{N^2 I h (r_2 - r_1)}{\pi (r_1 + r_2)} \quad (1)$$

Kako je  $\Phi = LI$  (2), to je prema relacijama (1) i (2) induktivnost kalema

$$L = \mu_r \mu_0 \frac{N^2 h (r_2 - r_1)}{\pi (r_1 + r_2)} \approx 0,79 \text{ H}$$

1163. Jačina magnetnog polja u torusu je  $H = \frac{NI}{l}$ , pa je magnetni fluks kroz jedan navojak  $\Phi_1 = BS = \mu HS$ , a kroz sve navojke

$$\Phi = N\Phi_1 = \mu \frac{N^2 IS}{l}$$
. Kako je sopstveni mag-

netni fluks kalema  $\Phi = LI$ , njegova induktivnost je  $L = \frac{\Phi}{I} = \mu \frac{N^2 S}{l}$  (1), gde je  $S = \pi r^2$ .

S obzirom da je  $l = 2\pi r N$ , odnosno  $r = \frac{l}{2\pi N}$ , dobija se da je  $S = l^2 / (4\pi N^2)$  (2). Prema relacijama (1) i (2) je

$$L = \mu \frac{l^2}{4\pi l} = 0,6 \text{ H}$$

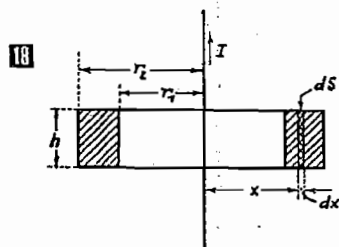
1164. Ako kroz navojke prvog kalema protiče struja  $I_1$ , ona će u kalemu da obrazuje magnetno polje indukcije  $B_1 = \mu \frac{N_1 I_1}{l}$ , čije će linije sile polja da prolaze i kroz navojke drugog kalema. Fluks magnetnog polja prvog kalema kroz navojke drugog kalema je

$$\Phi_{1/2} = N_2 S B_1 = \mu \frac{N_1 N_2 I_1 S}{l}$$

Kako je  $\Phi_{1/2} = M I_1$ , to je uzajamna induktivnost ovih kaleмова

$$M = \frac{\Phi_{1/2}}{I_1} = \mu_r \mu_0 \frac{N_1 N_2 S}{l} \approx 188 \text{ H}$$

1165. Fluks magnetnog polja strujnog provodnika kroz površinu  $dS$  [18] je  $d\Phi = NBdS$ , pošto je magnetna indukcija  $B$  jednaka u svim



tačkama površine  $dS$ . Sa slike se vidi da je  $dS = h dx$ , pa je  $d\Phi = NBh dx$ , odnosno  $\Phi = \int_{r_1}^{r_2} d\Phi = \int_{r_1}^{r_2} NBh dx$ . Magnetna indukcija pro-

vodnika na rastojanju  $x$  je  $B = \mu \frac{I}{2\pi x}$ , pa je

$$\Phi = \mu \frac{NI}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dx}{x} = \mu \frac{NIh}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Kako je uzajamni magnetni fluks  $\Phi = MI$ , to je uzajamna induktivnost provodnika i kalema

$$M = \frac{\Phi}{I} = \mu_r \mu_0 \frac{Nh}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = 1,2 \text{ mH}$$

1166.  $\mathcal{E} = kv \sin \theta = kvB = 10 \text{ V}$ .

1167.  $\mathcal{E} = -S \frac{dB}{dt} = -S \frac{B_2 - B_1}{\Delta t}$

odnosno

$$\mathcal{E} = S \frac{B_1}{\Delta t} = 1 \text{ V}$$

1168. a)  $\mathcal{E} = 0,04 \text{ V}$ ;

b)  $A = F_m \cdot a = a^2 v B^2 / R = 3,2 \text{ mJ}$ .

1169.  $\mathcal{E} = N \frac{d\Phi}{dt} = NS \frac{\Delta B}{\Delta t}$ , gde je

$$\Delta B = \mu \frac{N \Delta I}{l}$$

pa je

$$\mathcal{E} = \mu \frac{N^2 S \Delta I}{l \Delta t} = 2 \text{ V}$$

1170. Jačina magnetnog polja u kalemu je

$$H = \frac{NI}{l} = 900 \text{ A/m}$$

pa je prema datoj zavisnosti  $B = B(H)$ , magnetna indukcija u gvožđu  $B = 1,25 \text{ T}$ , a indukovana  $\mathcal{E}$ ms u kalemu

$$\mathcal{E} = N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = NS \frac{\Delta B}{\Delta t} = 2 \text{ 250 V}$$

1171. Magnetni fluks kroz ram je

$$\Phi = BS_0 \cos \omega t \cdot \sin \varphi$$

pa je indukovana  $\mathcal{E}$ ms u ramu

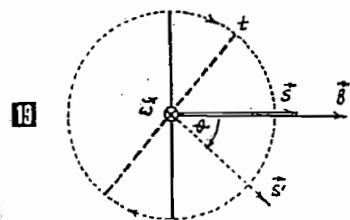
$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} = -BS_0 \sin \varphi \frac{d(\cos \omega t)}{dt} = BS_0 \omega \cdot \sin \varphi \cdot \sin \omega t$$

odakle je amplituda indukovane  $\mathcal{E}$ ms  $\mathcal{E}_0 = BS_0 \omega \sin \varphi$ , odnosno

$$\mathcal{E} = \mu_r \mu_0 HS_0 \omega \sin \varphi = 1 \text{ mV}$$

1172.  $\mathcal{E} = N \frac{d\Phi}{dt} = NS \frac{\Delta B}{\Delta t} = NS \left| \frac{B_2 - B_1}{\Delta t} \right| = \frac{NSB_2}{\Delta t} = 10,7 \text{ V}$ .

1173. a)  $\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d[BS \cos(\vec{B}, \vec{S})]}{dt} = \frac{d(BS \cos \omega t)}{dt} = -BS \omega \sin \omega t = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$ , pa



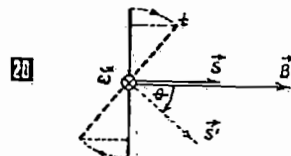
je amplituda  $\mathcal{E}$ ms

$$\mathcal{E}_0 = BS \omega = 96 \text{ mV}$$

b)  $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 4,8 \text{ Hz}$ .

1174. a) Magnetni fluks kroz ram kada je on u početnom položaju (1) [20] je

$$\Phi = BS \cos(\vec{B}, \vec{S}) = BS$$

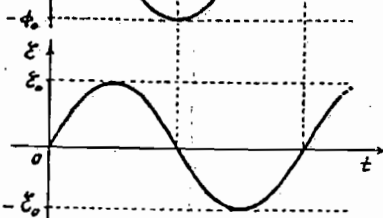
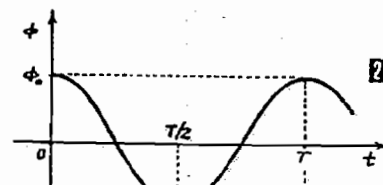


jer je tada  $\vec{B}, \vec{S} = 0$ . Kada ram dođe u položaj (2), posle vremena  $t$ , ugao između vektora  $\vec{B}$  i  $\vec{S}$  iznosi  $\theta = \omega t$ , pa je tada magnetni fluks  $\Phi = BS \cos \omega t$ , a indukovana  $\mathcal{E}$ ms

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(BS \cos \omega t) = -BS \omega \sin \omega t = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$$
 [21]

b)  $\mathcal{E}_0 = BS \omega = 6,28 \text{ mV}$ ;

c)  $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 50 \text{ Hz}$ ;  $T = \frac{1}{\nu} = 0,02 \text{ s}$ .



1175.  $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}[B_0 S (1 - e^{-kt})] = B_0 S k e^{-kt} \approx 2,1 \text{ mV}$

1176. U vremenskom intervalu  $\Delta t_{OA} = 10 \text{ ms}$  jačina struje kroz kolo linearno se povećava od  $I_1 = 0$  do  $I_2 = 2 \text{ A}$ , pa je indukovana  $\mathcal{E}$ ms samo-

indukcije

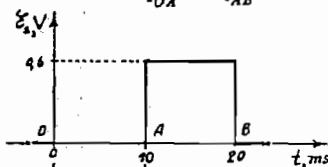
$$\mathcal{E}_{OA} = -L \frac{I_2 - I_1}{\Delta t_{OA}} = -L \frac{I_2}{\Delta t_{OA}} = -0,6 \text{ V}$$

a struja samoindukcije

$$I_{sOA} = \frac{\mathcal{E}_{OA}}{R} = -6 \text{ A}$$

Lako se nalazi da je  $\mathcal{E}_{rOA} = -\mathcal{E}_{sAB}$  i da je [22]

$$I_{sOA} = -I_{sAB}$$

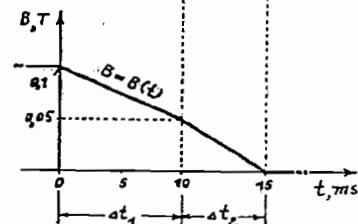
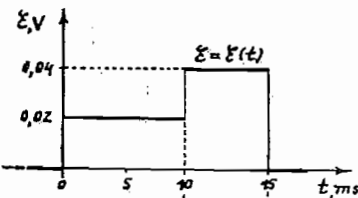


1177. U toku vremenskog intervala  $\Delta t_1$  indukovana  $\mathcal{E}$ ms je stalna, jer magnetni fluks ravnomerno opada, i iznosi

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t_1} = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta t_1} = \frac{(B_0 S / 2) - B_0 S}{\Delta t_1} = \frac{B_0 S}{2 \Delta t_1} = 0,02 \text{ V}$$

a u vremenskom intervalu  $\Delta t_2$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\Delta \Phi - B_0 S / 2}{\Delta t_2} = \frac{B_0 S}{2 \Delta t_2} = 0,04 \text{ V}$$



Dijagrami zavisnosti  $B = B(t)$  i  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(t)$  prikazani su na slici [24].

1178. Prema Faradejevom zakonu indukcije je

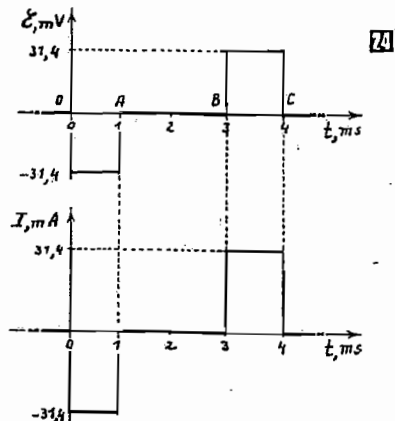
$$\mathcal{E} = -S \frac{dB}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

a prema Ohmovom zakonu  $I = \mathcal{E}/R$ , pa je za interval

OA:  $\mathcal{E} = -31,4 \text{ V}$ ;  $I = -0,314 \text{ A}$ ;

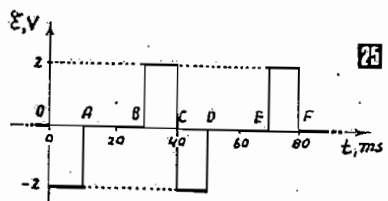
AB:  $\mathcal{E} = 0$ ;  $I = 0$ ;

BC:  $\mathcal{E} = 31,4 \text{ V}$ ;  $I = 0,314 \text{ A}$  [24].



1179. U vremenskom intervalu  $t_{OA} = 10 \text{ ms}$  magnetni fluks linearno raste do vrednosti  $\Phi_0 = 0,02 \text{ Wb}$ , pa je u tom vremenskom intervalu indukovana ems stalna i ima vrednost [25]

$$\mathcal{E}_{OA} = \frac{\Delta\Phi_{OA}}{\Delta t_{OA}} = \frac{\Phi_0}{\Delta t_{OA}} = -2 \text{ V}$$



U vremenskom intervalu  $\Delta t_{AB} = 20 \text{ ms}$  magnetni fluks je stalan, pa tada u kolu ne postoji indukcija, tj.  $\mathcal{E}_{AB} = 0$ . U trenutku  $t_B$  magnetni fluks počne linearno da opada i za vreme  $\Delta t_{BC} = 10 \text{ ms}$  opadne do nule. Potrebno je zapaziti da je za ovo vreme indukovana ems

$$\mathcal{E}_{BC} = -\frac{\Delta\Phi_{BC}}{\Delta t_{BC}} = \frac{0 - \Phi_0}{\Delta t_{BC}} = \frac{\Phi_0}{\Delta t_{BC}} = -\mathcal{E}_{OA} = +2 \text{ V}$$

a na isti način se dokazuje da je  $\mathcal{E}_{CD} = \mathcal{E}_{OA}$

1180. Prema Faradejevom zakonu indukcije je

$$\mathcal{E}_x = -L \frac{dI}{dt}$$

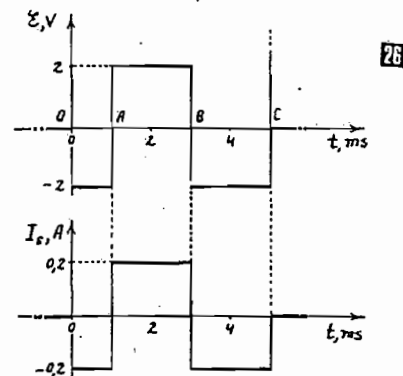
a prema Ohmovom zakonu  $I_x = \mathcal{E}_x/R$ , pa je u intervalu

OA:  $\mathcal{E}_x = -2 \text{ V}$ ;  $I_x = -0,2 \text{ A}$ ;

AB:  $\mathcal{E}_x = 2 \text{ V}$ ;  $I_x = 0,2 \text{ A}$ ;

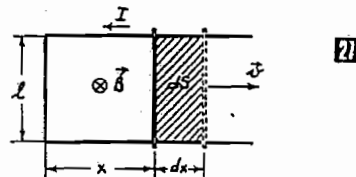
BC:  $\mathcal{E}_x = -2 \text{ V}$ ;  $I_x = -0,2 \text{ A}$  [26].

dok je u tački C:  $\mathcal{E}_x \rightarrow \infty$ ;  $I_x \rightarrow \infty$ .



1181. a)  $\mathcal{E} = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = B \left| \frac{dS}{dt} \right|$ , gde je  $dS = l dx$  [27], pa je

$$\mathcal{E} = Bl \frac{dx}{dt} = Blv = 30 \text{ mV}$$



b) Indukovana struja kroz kolo je

$$I = \frac{\mathcal{E}}{2\rho'(l+x)} = \frac{\mathcal{E}}{2\rho'(l+vt)} = 0,79 \text{ A}$$

pa je rad Amperove sile

$$A = F_m \cdot x = IlBvt = 47 \text{ mJ}$$

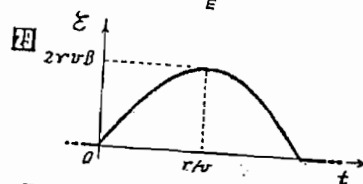
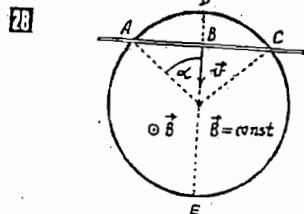
1182. a) Indukovana ems u štapi je  $\mathcal{E} = lvB$ , a struja kroz njega

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_c} = \frac{lvB}{R_1 + R_2}$$

b)  $P = \frac{\mathcal{E}^2}{R_c} = \frac{(lvB)^2}{R_1 + R_2}$

1183.  $\mathcal{E} = AC \cdot vB = 2rvB \sin \alpha$  (1) [28]. Sa slike se vidi da je  $\cos \alpha = (r-DB)/r = (r-vt)/r$ , gde je  $t$  - vreme za koje štapi pređe put  $DB$ , pa je

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{\frac{vt}{r} \left( 2 - \frac{vt}{r} \right)} \quad (2)$$

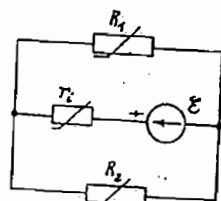


Prema relacijama (1) i (2) je

$$\mathcal{E} = 2rvB \sqrt{\frac{vt}{r} \left( 2 - \frac{vt}{r} \right)} \quad (3)$$

pa kroz deo štapa AC protiče indukovana struja jačine [29]

$$I_i = \frac{\mathcal{E}}{r_1 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$



Kako je [30]

$$r_1 = \rho' AC = 2\rho' r \sqrt{\frac{vt}{r} \left( 2 - \frac{vt}{r} \right)}$$

$$R_1 = \rho' ADC = 2\rho' r \alpha$$

$$R_2 = \rho' AEC = 2\rho' r (\pi - \alpha)$$

to je

$$I_i = \frac{vB}{\rho' \left[ 1 + \alpha \left( 1 - \frac{\alpha}{\pi} \right) \sqrt{\frac{vt}{r} \left( 2 - \frac{vt}{r} \right)} \right]}$$

gde je  $\alpha = \arccos \left( 1 - \frac{vt}{r} \right)$ .

Preporučujemo da nacrtate dijagram zavisnosti  $I_i = I_i(t)$ .

1184.  $\Delta q = \left| \frac{\Delta\Phi}{R} \right| = S \frac{B_1 - B_2}{R} =$

$$= \frac{\sqrt{3} a^2 B_1 - B_2}{4 R} = 5,35 \text{ mC.}$$

1185.  $q = I \Delta t = \frac{\mathcal{E}}{R} \Delta t$ , gde je  $\mathcal{E} = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ ,

pa je  $\Delta q = -N \frac{\Delta\Phi}{R}$  (1).

S obzirom da je  $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ , a  $\Phi_2 = -BS$  i  $\Phi_1 = BS$ , nalazi se da je  $\Delta\Phi = -2BS$ , a prema relaciji (1)

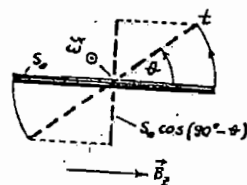
$$\Delta q = \frac{2BNS}{R} = \frac{2 \mu_0 H \pi r^2}{R} = 83,6 \text{ } \mu\text{C}$$

1186. a)  $q = \frac{a^2 B}{4R}$ ; b)  $q = \frac{a^2 B}{R}$ ; c)  $q = \frac{2a^2 B}{3R}$ .

1187.  $\Delta q = \left| N \frac{\Delta\Phi}{R} \right| = N \left| \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{R} \right|$ , gde je

$\Phi_1 = 0$  [31], a  $\Phi_2 = BZ S_0 \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = BZ S_0 \times \sin \theta$ , pa je

$$\Delta q = N \frac{BZ S_0 \sin \theta}{R} \approx 0,35 \text{ mC}$$



1188.  $\Delta q = \left| N \frac{\Delta\Phi}{R} \right| = \frac{NS}{R} (B_1 - B_2) =$

$$= (\mu_r - 1) \frac{NSH}{R} = 25 \text{ C.}$$

1189.  $q = \frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{R} = \frac{\Phi_1}{R}$ . Fluks kroz element površine rama je

$$d\Phi_1 = B dS = \mu_0 \frac{I}{2\pi x} a dx$$

a kroz ceo ram

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_a^{2a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln 2$$

Ukupna otpornost rama je  $R = \rho \frac{4a}{S}$ , pa je protekla količina elektriciteta

$$q = \frac{\mu_0 I S \ln 2}{8\pi\rho}$$

$$1190. L = \frac{\Delta l}{\Delta I_1} = 0,1 \text{ H.}$$

1191. Induktivnosti kaleмова su

$$L_1 = \mu \frac{N_1^2 S}{l} \quad (1) \quad L_2 = \mu \frac{N_2^2 S}{l} \quad (2)$$

dok je međusobna induktivnost ovih kaleмова

$$M = \mu \frac{N_1 N_2 S}{l} \quad (3)$$

Prema relacijama (1) i (2) je  $L_1 L_2 = \left(\mu \frac{S}{l}\right)^2 \times N_1^2 N_2^2$ , odakle je

$$N_1 N_2 = \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{\mu \frac{S}{l}} \quad (4)$$

pa se prema relacijama (3) i (4) nalazi da je  $M = \sqrt{L_1 L_2}$ . Indukovana ems u drugom kalemu je  $\mathcal{E} = M \frac{\Delta I_1}{\Delta t}$ , a struja kroz ovo kolo

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2} = \frac{M \Delta I_1}{R_2 \Delta t} = \frac{\sqrt{L_1 L_2} \Delta I_1}{R_2 \Delta t} = 60 \text{ A}$$

1192. Međusobna induktivnost kaleмова je (v. zad. 1191)

$$M = \mu \frac{N_1 N_2 S}{l}$$

Pošto je međusobni magnetni fluks prvog kaleма kroz drugi  $\Phi_{1,2} = M I_1$ , dobija se da je

$$\Delta q = \frac{\Delta \Phi_{1,2}}{R} = \frac{M I_1}{R} = \mu \frac{N_1 N_2 S I}{R l} = 628 \mu\text{C}$$

$$1193. W_m = \frac{L I^2}{2} = \frac{L}{2} \left(\frac{\mathcal{E}}{R+r}\right)^2 = 10 \text{ J.}$$

1194.  $w_m = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{B H}{2}$ . Prema datom dijametru  $B = B(H)$  je  $B = 1,45 \text{ T}$ , pa se dobija da je  $w_m = 2,9 \text{ kJ/m}^3$ .

1195. Zapreminska gustina magnetne energije u prerezu je  $w_v = \mu_v H^2$ , a u gvožđu  $w_g = \mu_r \mu_0 H^2$ , pa je

$$\frac{w_v}{w_g} = \frac{1}{\mu_r} = \frac{1}{1000}$$

#### 4. NAIZMENIČNA STRUJA

$$1196. \text{ a) } \langle I \rangle = \frac{2}{\pi} I_0 = 3,67 \text{ A;}$$

$$\text{ b) } I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 7,07 \text{ A;}$$

$$\text{ c) } Q = R I^2 t = 225 \text{ kJ.}$$

1197. a)  $i = I_0 \sin(\omega t + \varphi_1)$ , gde je  $I_0 = 17,9 \text{ A}$ , a  $\varphi_1 = -36^\circ 50'$ ;

b)  $\mathcal{E}_r = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \varphi_2)$ , gde je  $\mathcal{E}_0 = 107,2 \text{ V}$ , a  $\varphi_2 = -126^\circ 50'$ .

$$1198. I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}} = 0,11 \text{ A.}$$

1199. Kroz kolo protiče struja jačine

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} = 67 \text{ mA}$$

1200. Relativna promena induktivne otpornosti kalema je

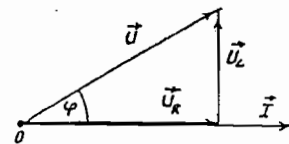
$$\frac{L\omega_2 - L\omega_1}{L\omega_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 = \frac{v_1}{v_2} - 1 = 0,20, \text{ ili } 20\%$$

$$1201. \text{ a) } I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \approx 87 \text{ A;}$$

$$\text{ b) } U_R = R I \approx 174 \text{ V,}$$

$$U_L = L \omega I \approx 136,0 \text{ V;}$$

$$\text{ c) } \cos \varphi = \frac{U_R}{U} \approx 0,80 \quad \blacksquare$$



1202. a) Pošto je maksimalna vrednost ems  $\mathcal{E}_0 = 494 \text{ V}$ , njena efektivna vrednost je  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 / \sqrt{2} = 350 \text{ V}$ .

b) Kroz kolo protiče struja

$$I = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} = 10,6 \text{ A}$$

c) Napon na krajevima termogenog otpornika je  $U_R = R I$ , a na krajevima kaleма  $U_L =$

$= L \omega I$ , pa je njihov odnos

$$\frac{U_R}{U_L} = \frac{R}{L \omega} = 0,318$$

Preporučujemo da izračunate frekvenciju  $\nu$  pri kojoj bi ovaj odnos bio 1000.

$$1203. \text{ a) } \text{Kroz kaleм protiče struja } I = \frac{U}{Z} =$$

$$\frac{U}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}, \text{ pa je njegova induktivnost}$$

$$L = \frac{1}{\omega I} \sqrt{U^2 - R^2 I^2} \approx 0,2 \text{ H}$$

b) Induktivnost kaleма je srazmerna kvadratu broja navojaka. Ako se broj navojaka smanji 2 puta, induktivnost će biti manja 4 puta, odnosno  $L_1 = L/4$ . Termogena otpornost polovine navojaka je  $R_1 = R/2$ , pa je jačina struje kroz polovinu navojaka

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + L_1^2 \omega^2}} = \frac{U}{\sqrt{\frac{R^2}{4} + \frac{L^2 \omega^2}{16}}} = 13,5 \text{ A}$$

1204. a) Iz uslova  $L\omega = \frac{1}{C\omega}$  nalazi se da je  $Z = R$ , tj.

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R} = 1,1 \text{ A}$$

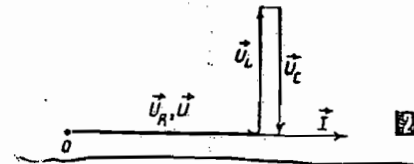
$$\text{ b) } \nu_r = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \approx 145 \text{ Hz;}$$

$$\text{ c) } U_R = R I = 220 \text{ V,}$$

$$U_L = L \omega I = 22\pi \nu_r I \approx 300 \text{ V.}$$

$$U_C = U_L;$$

$$\text{ d) } \cos \varphi_r = 1 \quad \blacksquare$$



$$1205. \text{ a) } I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}, \text{ pa se za-}$$

menom dobija da je  $I = 10 \text{ A}$ .

$$\text{ b) } U_1 = I \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2} = 642 \text{ V;}$$

$$U_2 = \frac{I}{C\omega} = 457 \text{ V.}$$

1206. a) Napon na krajevima kaleма je

$U_L = L \omega I$ , odakle je koeficijent samoindukcije

$$L = \frac{U_L}{\omega I} = \frac{U_L}{2\pi \nu I} = 0,025 \text{ H}$$

$$\text{ b) } U = I Z = I \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2} = 64 \text{ V.}$$

$$\text{ c) } \text{Prividna snaga je } P = UI = 320 \text{ VA, dok}$$

je faktor snage  $\cos \varphi = \frac{U_R}{U} = 0,78$ , pa je aktivna snaga

$$P_a = UI \cos \varphi = IU_R = R I^2 = 250 \text{ W}$$

Reaktivna snaga je

$$P_r = UI \sin \varphi = IU_L = L \omega I^2 = 200 \text{ var}$$

1207. Prema II Kirhfovom pravilu je

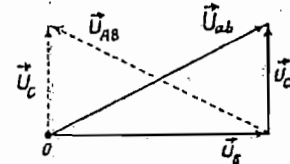
$$\vec{U}_{ab} = \vec{U}_C + \vec{U}_R$$

tj.

$$U_{ab} = U_C + U_R = U$$

Isto tako je  $\vec{U}_{AB} = \vec{U}_C - \vec{U}_R$ , tj.  $\blacksquare$

$$U_{AB} = U_C - U_R = U = 220 \text{ V}$$



$\blacksquare$

$$1208. R_c = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 6,7 \Omega; \quad L_r = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} = 2,13 \text{ mH;}$$

$$C_c = C_1 + C_2 = 480 \mu\text{C}, \text{ pa je}$$

$$Z = \sqrt{R_c^2 + \left(L_r \omega - \frac{1}{C_c \omega}\right)^2} = 6,7 \Omega$$

odnosno

$$I = U/Z = 32,8 \text{ A}$$

Traženi naponi su:

$$U_R = R_c I \approx 220 \text{ V}$$

$$U_L = L_r \omega I \approx 220 \text{ V}$$

$$U_C = \frac{1}{C_c \omega} I \approx 220 \text{ V}$$

Nacrtati vektorski dijagram napona  $\vec{U}_R, \vec{U}_L, \vec{U}_C$ .

1209. Otpornost kondenzatora iznosi

$$Z_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \nu C} \approx 3 \text{ k}\Omega$$

što znači da je  $Z_C \ll R$ , s obzirom da je  $R=100\text{ k}\Omega$ . Zbog ovog se može smatrati da je  $U_R \approx U/2$ , pa je

$$P = \frac{U_R^2}{R} \approx \frac{U^2}{4R} \approx 0,12\text{ W}$$

1210. Otpornost kondenzatora iznosi

$$Z_1 = \frac{1}{2\pi\nu C_1} \approx 30\text{ k}\Omega$$

$$Z_2 = \frac{1}{2\pi\nu C_2} \approx 15\text{ k}\Omega$$

što znači da je  $Z_{C1}, Z_{C2} \gg R$ , pošto je  $R=100\text{ k}\Omega$ , pa se može uzeti da je  $U_1=U_2=U_R=U/2$ .

1211. Prvi član napona električnog izvora uslovljava jednosmernu struju. Kako u kolu postoji kondenzator, jačina ove struje jednaka je nuli pošto je otpornost kola za nju beskonačno velika.

Drugi član napona izvora uslovljava struju prvog harmonika. Impedanca kola za nju je

$$Z_1 = \sqrt{r^2 + \left(L\omega_1 - \frac{1}{C\omega_1}\right)^2} = 30\text{ }\Omega$$

Pošto je  $L\omega_1 < 1/C\omega_1$ , strujno kolo za ovaj harmonik ima kapacitivni karakter.

Fazni ugao između napona i struje za ovaj harmonik je

$$\varphi_1 = \text{arc cos } \frac{r}{Z_1} = \text{arc cos } 0,60 = 53^\circ$$

a amplituda struje

$$I_{01} = U_1/Z_1 = 10\text{ A}$$

Treći član napona uslovljava struju trećeg harmonika. Impedanca kola za ovu komponentu struje je

$$Z_3 = \sqrt{r^2 + \left(3L\omega_3 - \frac{1}{3C\omega_3}\right)^2} = 30\text{ }\Omega$$

Kako je induktivna otpornost ovog kola, za ovu komponentu struje, veća od njegove kapacitivne otpornosti, strujno kolo za ovaj harmonik ima induktivni karakter.

Fazni ugao između napona i struje trećeg harmonika je

$$\varphi_3 = \text{arc cos } \frac{r}{Z_3} = \text{arc cos } 0,60 = 53^\circ$$

a amplituda struje

$$I_{03} = U_3/Z_3 = 5\text{ A}$$

Efektivne vrednosti struja prvog i drugog harmonika su  $I_1 = I_{01}/\sqrt{2} = 7,1\text{ A}$ ,  $I_2 = I_{02}/\sqrt{2} = 3,55\text{ A}$ , dok je efektivna vrednost

ukupne struje

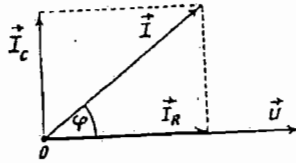
$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = 7,95\text{ A}$$

Jednačina trenutne vrednosti struje koja protiče kroz kolo je

$$i = I_0 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + I_0 \sin(3\omega_1 t - \varphi_2)$$

1212. Kroz termogeni otpornik protiče struja jačine  $I_R = U/R = 20\text{ A}$ , a kroz kondenzator  $I_C = \omega C U = 2\pi\nu C U = 3,45\text{ A}$ . Kako su ove struje fazno pomerene za  $(\pi/2)\text{ rad}$ , to je ukupna struja u kolu

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = 20,3\text{ A}$$



**4**

1213. Kroz kalem protiče struja jačine  $I_L = \mathcal{E}/L\omega = 0,175\text{ A}$ , a kroz kondenzator  $I_C = \mathcal{E}C\omega = 0,315\text{ A}$ . Kako su ove struje u protivfazi, to je ukupna jačina struje kroz kolo

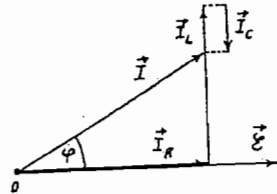
$$I = I_C - I_L = 0,17\text{ A}$$

1214. Efektivna vrednost ems je

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}} = 100\text{ V}$$

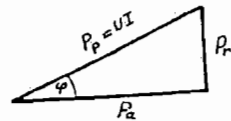
Jačina struje kroz termogeni otpornik je  $I_R = \frac{\mathcal{E}}{R} = 5\text{ A}$ , kroz kalem  $I_L = \frac{\mathcal{E}}{L\omega} = 10\text{ A}$  i kroz kondenzator  $I_C = \omega C \mathcal{E} = 1\text{ A}$ . Na osnovu vektorskog dijagrama **5**, struja izvora iznosi

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} = 10,3\text{ A}$$



**5**

1215. a)  $P_p = UI = 4,4\text{ kVA}$ ;  
b)  $P_a = P_p \cos \varphi = 3,96\text{ kW}$  **6**;  
c)  $P_k = \eta P_a = 3,37\text{ kW}$



**6**

d) Kako je  $P_k = \frac{mgh}{t}$ , to je

$$t = \frac{mgh}{P_k} \approx 2\text{ min}$$

1216.  $\text{tg } \varphi = \frac{\omega L}{R} = \frac{2\pi\nu L}{R} = 0,9$ , pa je  $\cos \varphi = 0,74$ .

Preporučujemo da izračunate koliku bi struju koristio ovaj motor iz mreže napona 220 V?

1217. Kroz motor protiče struja jačine

$$I = \frac{P_a}{U \cos \varphi} = 21,38\text{ A}$$

1218. a) Korisna snaga motora data je izrazom  $P_k = \eta P_a = \eta P \cos \varphi$ , odakle je snaga koju motor u toku rada troši

$$P_p = \frac{P_k}{\eta \cos \varphi} = 13,9\text{ kVA}$$

b) Pošto je prividna snaga motora  $P_p = UI$ , tražena jačina struje iznosi

$$I = \frac{P_p}{U} = 63,2\text{ A}$$

1219. Korisna snaga motora je

$$P_k = \eta P_a = \eta UI \cos \varphi$$

odakle je jačina struje koja protiče kroz motor, odnosno vod

$$I = \frac{P_k}{\eta U \cos \varphi} = 11,8\text{ A}$$

Gubitak (pad) napona duž voda iznosi

$$\Delta U = RI = \rho \frac{2l}{S} I = 0,03\text{ V}$$

odakle je minimalni presek provodnika

$$S = \frac{2\rho I^2 l}{\Delta U} = 3,03\text{ mm}^2$$

pa je  $S > 3,03\text{ mm}^2$  (prva veća standardizovana vrednost je  $4\text{ mm}^2$ ).

1220.  $E = \frac{U^2 t}{R}$ , pa je  $E_1/E_2 = 16$ , jer je  $U_1 = 4U_2$ .

1221. a) Prenosni odnos transformatora je

$$n = \frac{N_2}{N_1} = 12$$

b) Napon na sekundarnom navoju je

$$U_2 = nU_1 = 2\text{ 640 V}$$

1222.  $P_g = (1-\eta) P_s = 5\text{ kW}$ .

1223.  $I_p = 54,3\text{ A}$ .

1224. Kroz primar protiče struja jačine  $I_p = P/U_p = 4\text{ A}$ , a kroz sekundar struja jačine  $I_s = I_p/n = 0,16\text{ A}$ .

1225. a) Pri rezonanciji je  $\frac{U_L}{U_C} = \omega^2 LC$ .

Kako je  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , to je  $\frac{U_L}{U_C} = 1$ .

b) Za  $\omega_1 = 2\omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}}$  dobija se da je tra-

ženi odnos  $\frac{U_L}{U_C} = 4$ , dok je za  $\omega_2 = \frac{1}{2\omega_c} = \frac{1}{2\sqrt{LC}}$  ovaj odnos  $\frac{U_L}{U_C} = \frac{1}{4}$ .

Preporučujemo da dokažete da je pri rezonanciji  $\cos \varphi = 1$ .

1226. a)  $E_a = 86,5\text{ MWh}$ ;

b)  $E_r = 41,8\text{ Mvarh}$ ;

c)  $E_{ak} = 64\text{ MWh}$ .

1227. Oslobođena količina toplote u prvom otporniku je  $U^2 t/R$ , a u drugom  $U^2 t/2R$  (pošto kroz njega protiče struja čija je efektivna vrednost 2 puta manja). Ukupna oslobođena količina toplote je

$$Q = \frac{U^2 t}{R} + \frac{U^2 t}{2R} = \frac{3}{2} \frac{U^2 t}{R} = 21,8\text{ kJ}$$

1228. U toku poluperioda u kome je dioda neprovodna kroz otpornik  $R_2$  protiče struja jačine

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2}$$

i u njemu se električna energija

$$E_2 = R_2 I^2 \frac{T}{2} = \frac{U^2 R_2 T}{2(R_1 + R_2)^2}$$

pretvara u unutrašnju energiju.

U toku sledećeg poluperioda dioda je provodna, pa je napon na krajevima otpornika, otpornosti  $R_2$  i  $R_1$ ,

$$U_1 = R_1 I' = R_1 \frac{U}{R_1 + R_2}$$

gde je  $R_c = R_2 R_1 / (R_1 + R_2)$ .

Električna energija koja se pretvori u unutrašnju energiju u otpornicima, otpornosti  $R_2$  i  $R_1$ , tokom drugog poluperioda iznosi

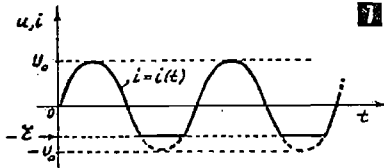
$$E_2' = \frac{U_1^2 T}{R_2} = \frac{U^2 R_1 T}{2R_2(R_1 + R_2)^2}$$

$$E_1 = \frac{U_1^2 T}{R_1} = \frac{U^2 R_2 T}{2R_1(R_1 + R_2)^2}$$

Odgovarajuća srednja snaga je:

$$\langle P_2 \rangle = \frac{E_1 + E_2'}{T} \approx 1,6 \text{ W i } \langle P_3 \rangle = \frac{E_3}{T} \approx 0,7 \text{ W}$$

1229. **71.**



Preporučujemo da nacrtate odgovarajući dijagram struje pod uslovom da je *ems* izvora jednosmerne struje suprotnog smera.

1230. a)  $C_e = C$ ; b)  $Z_C = \frac{1}{C\omega}$ .

1231. a)  $i_1 = \frac{U_0}{R} \sin \omega t$  (samo pozitivne poluperiode),

$i_2 = \frac{U_0}{R} \sin \omega t$  (samo pozitivne poluperiode),

$i_3 = \left| \frac{U_0}{R} \sin \omega t \right|$ ;

b)  $I_1 = \frac{U_0 R}{2} = 5 \text{ A}$ ,  $I_2 = \frac{U_0 R}{\sqrt{2}} = 7,07 \text{ A}$ ,  $I_3 = I_2$ .

1232. **B.**

1233. **9.**

1234. Kada je grejač priključen na napon 220 V, jačina struje koja protiče kroz njega iznosi

$$I = P/U = 4,55 \text{ A}$$

a otpornost grejača

$$R = U^2/P = 48,4 \Omega$$

Ako bi se grejač priključio na fazni napon  $U_f = 380 \text{ V}$ , kroz njega bi proticala struja jačine

$$I_f = \frac{U_f}{R} = 7,85 \text{ A}$$

što znači da bi bila oko 2 puta većeg intenziteta od nominalnog, usled čega bi grejač pregoreo. Njegova snaga bi tada bila

$$P = U_f I_f \approx 3 \text{ kW}$$

### 5. ELEKTROMAGNETNE OSCILACIJE

1235.  $L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{4\pi^2 \nu^2 C} = 10,1 \text{ mH}$ .

1236.  $T = 2\pi \sqrt{LC} = 2\pi \sqrt{\mu_0 \frac{N^2 S_1}{l} \epsilon_0 \frac{S_0}{d}} = 2,86 \mu\text{s}$ .

1237.  $C = \frac{T^2}{4\pi^2 L} = \frac{1}{\omega^2 L} = 50 \mu\text{F}$ .

1238.  $H = -H_0 \sin \omega t$ .

1239. Kako je

$$\frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = \frac{CU_0^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2}$$

to je  $U_0 = I_0 \sqrt{\frac{L}{C}} = 1,06 \text{ V}$ .

Isto tako je  $U_0 = Z_C I_0 = \frac{1}{\omega C} I_0 = I_0 \sqrt{\frac{L}{C}}$ ,

pošto je  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ .

1240.  $\delta U_0 = \delta I_0 + \frac{1}{2}(\delta L + \delta C) = 2\%$ .

1241. a)  $v = \sqrt{\frac{v_1 v_2}{v_1^2 + v_2^2}}$ ; b)  $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ .

1242. Ukupna energija u kolu je  $W = CU^2/2$ .

Prema uslovu zadatka je  $\frac{LI^2}{2} = \frac{W}{2}$ , pa je

$$I = U \sqrt{\frac{C}{2L}} = 10 \text{ mA}$$

1243.  $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = 132 \text{ Hz}$ .

1244. a)  $v_0 = \frac{1}{2\pi r} \sqrt{\frac{d}{\pi \epsilon L}}$ ;

b)  $v = \frac{1}{2\pi r} \sqrt{\frac{d + x_0 \sin\left(\frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{E_y}{\rho}} t\right)}{\pi \epsilon l}}$

1245.  $\delta v = \frac{v' - v}{v} = \frac{v'}{v} - 1$ , gde je

$$v = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{d}{\epsilon_0 LS}}$$

dok je

$$v' = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{d + \Delta d}{\epsilon_0 LS}}$$

pa je

$$\delta v = \sqrt{1 + \frac{\Delta d}{d}} - 1$$

gde je  $\Delta d$  — promena rastojanja  $d$  usled unošenja kapi žive u sud.

Kako je  $\Delta d = m/\rho S$ , to je

$$\delta v = \sqrt{1 + \frac{m}{\rho S d}} - 1$$

U praksi je najčešće  $\frac{m}{\rho S d} \ll 1$ , pa je tada

$$\delta v \approx \frac{m}{2\rho S d}$$

1246. Ukupna početna energija u kolu je  $W_0 = CU^2/2$ , a gubitak energije tokom naredne oscilacije je  $W_g = RI^2 T$ , gde je  $U_0$  — napon na krajevima kondenzatora pre njegovog uključivanja u kolo,  $I$  — efektivna vrednost jačine struje,  $T$  — period oscilovanja. Ako su oscilacije harmonijske, onda je

$$I = \frac{U_L}{Z_L} = \frac{U}{\omega L} = \frac{U_0}{\sqrt{2} \omega L}$$

pa je  $W_g = U_0^2 RT / 2\omega^2 L^2$ , tj.

$$\frac{W_g}{W_0} = \frac{RT}{L} = 2\pi R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Dokazati da je

$$[2\pi R \sqrt{C/L}] = 1$$

1247. a)  $t = 2L/R$ ; b)  $t = L/R$ .

1248. a) Ekvivalentna induktivnost kalema je  $L_e = L_1 L_2 / (L_1 + L_2)$ , pa je sopstvena kružna frekvencija oscilatornog kola

$$\omega = 1/\sqrt{L_e C}$$

b) Pošto se prekidač uključi, naponi na krajevima kalema su jednaki, pa je  $U_{L_1} = U_{L_2}$ , tj.

$$L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = L_2 \frac{\Delta I_2}{\Delta t}$$

odakle je  $L_1 \Delta I_1 = L_2 \Delta I_2$ , tj.  $L_1 (I_1 - I_{01}) = L_2 (I_2 - I_{02})$ .

Kako je u početnom trenutku  $I_{01} = I_{02} = 0$ , to je

$$L_1 I_1 = L_2 I_2 \quad (1)$$

Jačine struja  $I_1$  i  $I_2$  su najveće kada je kondenzator razelektrisan. Tada je, prema zakonu održanja energije,

$$\frac{CU^2}{2} = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2}$$

pa je prema relaciji (1)

$$I_1 = U \sqrt{\frac{L_2 C}{L_1(L_1 + L_2)}}$$

$$I_2 = U \sqrt{\frac{L_1 C}{L_2(L_1 + L_2)}}$$

1249. a) Proces uspostavljanja stacionarnog stanja u kolu nije trenutna. Posle nekog vremena od trenutka uključivanja prekidača, energija magnetnog polja kalema je  $LI^2/2$ , a električnog polja kondenzatora  $CU^2/2$ , dok izvor predá kolu energiju  $q\mathcal{E}$ , pa je prema zakonu održanja energije

$$\frac{LI^2}{2} + \frac{CU^2}{2} = q\mathcal{E} = CU^2 \quad (1)$$

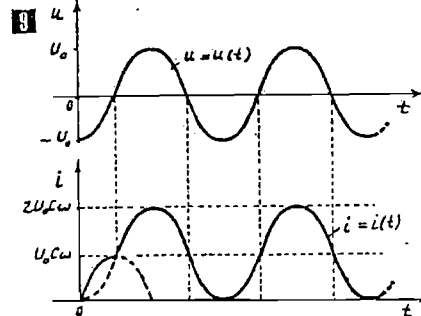
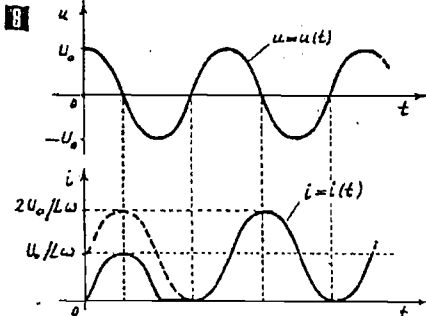
U trenutku kada je kondenzator dostigao maksimalno naelektrisanje, napon između njegovih ploča je  $\mathcal{E}$  i kondenzator počinje da povećava energiju svog polja na račun magnetne energije kalema, usled čega se jačina struje kroz njega smanjuje. Prema tome, iz uslova  $U = \mathcal{E}$ , prema relaciji (1) nalazi se da je

$$I_{\max} = \mathcal{E} \sqrt{C/L}$$

b) U trenutku kada je  $I = 0$ , napon između ploča kondenzatora je maksimalan, a prema relaciji (1) iznosi  $U_{\max} = 2\mathcal{E}$ .

Dokazati da je

$$[\mathcal{E} \sqrt{C/L}] = A$$





**6. ELEKTROMAGNETNO POLJE.  
ELEKTROMAGNETNI TALASI**

1250. Zapreminske gustine energije indukcionog električnog polja ( $w_e$ ) i magnetnog polja ( $w_m$ ) su jednake. Kako je  $w_e = \epsilon_0 E^2 / 2$ , a  $w_m = \mu_0 H^2 / 2$ , zapreminska gustina ukupne energije je

$$w = w_e + w_m = 2w_e$$

odnosno

$$w = \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \frac{C^2}{N \cdot m^2} \left(4 \cdot 10^{-1} \frac{N}{C}\right)^2 \approx \approx 0,14 \frac{J}{m^3}$$

1251. Prema relacijama  $\lambda = cT$  i  $T = 2\pi\sqrt{LC}$  dobija se da je

$$\lambda_{\min} = 2\pi c \sqrt{LC_1} = 12 \text{ m}$$

$$\lambda_{\max} = 2\pi c \sqrt{LC_2} = 25,3 \text{ m}$$

1252. Na osnovu relacija  $T = 2\pi\sqrt{LC}$  i  $T = \lambda/c$  nalazi se da je

$$\frac{\lambda}{c} = 2\pi\sqrt{LC}$$

a kako je  $C = \epsilon_0 \frac{S}{d} = \epsilon_0 \frac{\pi r^2}{d}$ , dobija se da je

$$d = \frac{4\pi^2 \epsilon_0 r^2 c^2 L}{\lambda^2} \approx 7,4 \text{ mm}$$

1253. Talasna dužina u vakuumu je  $\lambda_0 = c/v$ , a u nemagnetnoj sredini ( $\mu_r = 1$ ) relativne permitivnosti  $\epsilon_r$ , je  $\lambda = v/v_0$ , gde je

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

pa je

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{c}{v\sqrt{\epsilon_r}} - \frac{c}{v} =$$

$$= \frac{c}{v} \left( \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} - 1 \right) = -29,6 \text{ m}$$

ili  $\Delta\lambda/\lambda_0 = (1/\sqrt{\epsilon_r}) - 1 = 0,89$ , tj. 89%.

1254.  $\Delta\phi = E \cdot l = E_0 l \sin \omega t = \Delta\phi_0 \sin \omega t$ , gde je  $\Delta\phi_0 = 100 \mu\text{V}$  i  $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$ .

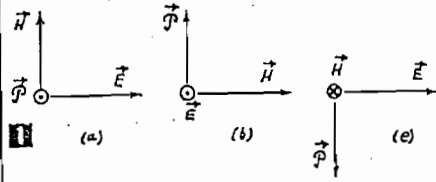
Kolikom frekvencijom se menja ova potencijalna razlika?

1255.  $E(x, t) = E_0 \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$ , gde je  $T = \lambda/c$  — period talasa.

1256.  $\lambda = 2l$ .

1257. Pravac i smer prostiranja elektromagnetnih talasa određen je pravcem i smerom

Pointingovog vektora  $\vec{\mathcal{P}} = \vec{E} \times \vec{H}$ .



1258. Da bi vektor  $\vec{\mathcal{P}}$  promenio smer, potrebno je da promeni smer vektor  $\vec{E}$  ili  $\vec{H}$ . Kako na graničnoj površini treba da bude ispunjen uslov  $\vec{E}_u = \vec{E}_r = 0$  (gde je  $\vec{E}_u$  — vektor jačine električnog polja upadnog, a  $\vec{E}_r$  — reflektovanog elektromagnetnog talasa), proizlazi da vektor  $\vec{E}$  menja smer.

1259. a)  $E = \mu_0 \frac{ea}{4\pi r} \sin \theta$ ;  $E_{\max} = \mu_0 \frac{ea}{4\pi r} = 1,6 \text{ nV/m}$ ,  $H_{\max} = E_{\max}/Z_0 = 4,25 \text{ pV/m}$ .

b) Iz uslova  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r^2} < \mu_0 \frac{ea}{4\pi r}$  nalazi se da je

$$r > \frac{1}{a} \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{c^2}{a} = 0,09 \text{ m}$$

Nacrtati dijagram zavisnosti  $E = E(\theta)$ , tj.  $H = H(\theta)$  i na osnovu njega izvesti odgovarajuće zaključke.

1260. a)  $n = \frac{c}{a/b} \approx 2,2$ , što odgovara dielektriku (npr. ulju).

Kod dielektrika je  $\mu_r = 1$ , pa je za ovu sredinu  $\epsilon_r = n^2 = 4,8$ .

$$\text{b) } \langle w \rangle = \frac{E_0 H_0}{2v} = \frac{\epsilon_r E_0^2}{2cZ_0} = 2,7 \mu\text{Pa}$$

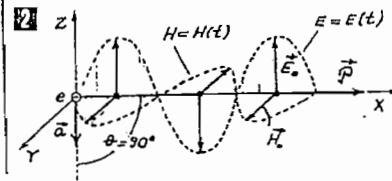
$$p = -\langle w \rangle = -2,7 \mu\text{Pa};$$

$$\text{c) } W = \langle w \rangle v St = \langle w \rangle \frac{a}{b} St \approx 373 \text{ W}$$

1261. a) Amplituda indukcionog električnog polja je

$$E = \mu_0 \frac{ea}{4\pi x} \sin \theta$$

gde je  $\theta = 90^\circ$ , tj.  $\sin \theta = 1$ .



Kako elektron osciluje harmonijski, to je  $z = z_0 \sin \omega t$ , pa je njegovo ubrzanje

$$a = \frac{d^2 z}{dt^2} = -z_0 \omega^2 \cos \omega t = -a_0 \cos \omega t$$

odnosno

$$E = \mu_0 \frac{ez_0 \omega^2}{4\pi x}$$

Do tačke na udaljenosti  $x$  talas stigne za vreme  $t = x/c$ , pa je jednačina indukcionog polja  $E$  na tom mestu

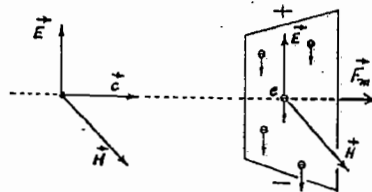
$$E = \mu_0 \frac{ez_0 \omega^2}{4\pi x} \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) = E_0 \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right)$$

Analogno je indukciono magnetno polje

$$H = \frac{E}{120\pi} = H_0 \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right)$$

b)  $E_0 = 0,2 \text{ fV/m}$ ;  $H_0 = 0,53 \text{ aA/m}$ ;  $\mathcal{P} = EH = 4,3 \cdot 10^{-33} \text{ W/m}^2$ .

1262. a) Slobodni elektroni u površinskom sloju kreću se pod dejstvom indukcionog polja  $\vec{E}$ , u pravcu ovog polja a u suprotnom smeru  $\vec{H}$ .



Ovi elektroni obrazuju električnu struju u površinskom sloju ploče, čija je gustina, prema Omovom zakonu,  $j = \gamma E$ . Kako je  $j = nev$ , to je brzina elektrona u površinskom sloju

$$v = \frac{\gamma}{ne} E \tag{1}$$

Kako se elektron kreće u magnetnom polju, indukcije  $H$ , na njega deluje Lorencova sila  $\vec{F}_m = e\vec{v} \times \vec{B} = e\vec{v} \times \mu_0 \vec{H}$ . Kako je  $\vec{E} \perp \vec{H}$ , intenzitet ove sile je  $F_m = ev\mu_0 H$ , a prema relaciji (1)  $F_m = \frac{\mu_0 \gamma}{n} EH$ , tj.

$$F_m = \frac{\mu_0 \gamma}{120\pi n} E^2 = \frac{\gamma}{nc} E^2 = 7,6 \cdot 10^{-37} \text{ N}$$

b) Ako je  $n$  zapreminska koncentracija slobodnih elektrona, onda je njihova površinska koncentracija  $(\beta/\pi)^2 = n^2/l^2$ , pa je pritisak elektromagnetnog talasa

$$p = n^2/l^2 F_m = \frac{\gamma}{cn^2 l^2} E^2 = 3,5 \text{ aPa}$$

1263. Srednja snaga zračenja je

$$\langle P \rangle = \mu_0 \frac{q^2 z_0^2 \omega^4}{12\pi c}$$

ili, pošto je  $\mu_0 = 1/\epsilon_0 c^2$ ,

$$\langle P \rangle = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q^2 z_0^2 \omega^4}{3c^3} \approx 5 \cdot 10^{-15} \text{ W}$$

Zona talasa je

$$r > \frac{c^2}{a} = \frac{c^2}{z_0 \omega^2} = 0,21 \text{ m}$$

1264. a) Jačina struje kroz antenu je  $I_0 = neS \langle v \rangle = neSZ_0 \omega$ , dok je količina elektriciteta koja učestvuje u oscilovanju  $q = neSl$ , pa je emisiona snaga predajnika

$$P = \mu_0 \frac{q^2 Z_0^2 \omega^4}{12\pi c} = \mu_0 \frac{I_0^2 l^2 \omega^2}{12\pi c}$$

Kako je dužina antene  $l = 2\lambda$ , tj.  $\omega l = \pi c$ , dobija se da je

$$P = \mu_0 \frac{\pi c I_0^2}{12} = 2,5 \pi^2 \text{ W}$$

b) Kako je  $P = RI^2 = RI_0^2/2$ , to je

$$R = \frac{2P}{I_0^2} = \mu_0 \frac{\pi c}{6} = \frac{\pi}{6} Z_0 = 20\pi^2 \Omega$$

1265. Snaga zračenja je

$$P = \mu_0 \frac{q^2 a^2}{12\pi c}$$

gde je  $a = r\omega^2$ . Kako je  $I = q/T = q\omega/2\pi$ , to je  $q = 2\pi I/\omega$ , a imajući u vidu da je  $v = r\omega$ , nalazi se da je

$$P = \mu_0 \frac{\pi I^2 v^2}{3c} = 3,2 \text{ W}$$

1266. a) Prvi čvor se nalazi na ploči, drugi na udaljenosti  $\lambda/4$  od nje (u pravcu normale), a ostali na udaljenosti  $3\lambda/4$ ,  $5\lambda/4$ ,  $7\lambda/4$  itd. od ploče.

b)  $E_{ot} = 2E_0$

$$\text{c) } \langle w \rangle = \frac{E_0 H_0}{2c} = \frac{Z_0 H_0^2}{2c}$$

gde je  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  — impedanca vakuuma.

d)  $\langle w \rangle_n = 4 \langle w \rangle = 2Z_0 H_0^2/c$ .

1267. Energija, prenesena elektromagnetnim talasom u jedinичnom vremenu, kroz jedinичnu površinu, koja je normalna na pravac prostiranja talasa, određena je Pointingovim vektorom  $\vec{\mathcal{P}} = \vec{E} \times \vec{H}$ , tj. njegovim intenzitetom  $\mathcal{P} = EH$ .

Pošto je u pitanju ravanski sinusni talas, onda je

$$\mathcal{P} = E_0 \sin \omega t \cdot H_0 \sin \omega t = E_0 H_0 \sin^2 \omega t$$

a kako je  $H_0 = \frac{E_0}{\sqrt{\mu/\epsilon}}$ , tj.  $H_0 = \frac{E_0}{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}}$ , dobi-

ja se da je

$$\mathcal{P} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E_0^2 \sin^2 \omega t$$

Imajući u vidu da je

$$\mathcal{P} = \frac{\Delta E}{S \Delta t}$$

tj.

$$\mathcal{P} = \frac{1}{S} \frac{dE}{dt}$$

nalazi se da je

$$dE = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} S E_0^2 \sin^2 \omega t dt$$

pa je ukupna energija

$$E = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} S E_0^2 \int_0^{\Delta t} \sin^2 \omega t dt \approx$$

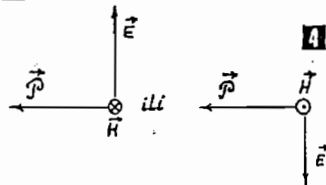
$$\approx \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} S E_0^2 \frac{\Delta t}{2} = 80 \text{ pJ}$$

1268. U LC-oscilatornom kolu fazna razlika između promene ovih polja je  $\pi/2$ . Naime, kada je jačina električnog polja kondenzatora maksimalna, jačina magnetnog polja kalema jednaka je nuli, i obratno.

1269. a) U položaju u kome je vektor  $H$  normalan na ravan rama, tj. u kome je fluks magnetnog polja kroz ram najveći ( $\theta = 90^\circ$ ).

b) Za  $\theta = 0^\circ$ .

1270. 4.



1271. 5.



## OPTIKA

### 1. FOTOMETRIJA

1272.  $E = 10 \text{ lx}$ . Koliki svetlosni fluks pada na unutrašnju površinu sfere?

1273. 1242 lm.

1274. a)  $E = 10^4 \text{ lx}$ ;  
b)  $L = 6,4 \cdot 10^3 \text{ cd/m}^2$ ;  
c)  $\Phi = 4\pi I = 2512 \text{ lm}$ .

1275.  $I = \frac{\Phi}{4\pi}$ , gde je  $\Phi = \eta P = 1,2 \text{ W} = 745 \text{ lm}$ , pa se zamenom nalazi da je  $I = 59,4 \text{ cd}$ .

1276.  $E = 2,5 \text{ lx}$ .

Preporučujemo da izračunate osvetljaj platna, znajući da je njegov koeficijent refleksije  $\rho = 0,85$ .

1277. a)  $\frac{P}{\Phi} = \frac{P}{4\pi I} = 16,1 \cdot 10^{-4} \frac{\text{W}}{\text{lm}}$ .

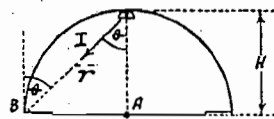
b)  $\eta = \frac{P'}{P} 100 = 1,7\%$ .

1278. a) Osvetljenost u tački A. 1 je

$$E_A = \frac{I}{H^2} = 3,1 \text{ lx}$$

a u tački B

$$E_B = \frac{I}{r^2} \cos \theta = \frac{I}{2H^2} \cos 45^\circ = 1,1 \text{ lx}$$



b) Osvetljenost osnove tunela u uglu i bočne strane je ista i iznosi  $E_B$ .

1279. a)  $E_1 = \frac{I}{r^2} \cos \theta$ , gde je  $r = a \sqrt{\frac{3}{2}}$  — rastojanje od sijalice do ugla na podu, a  $\theta = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$  — ugao između pravca upadnog zračenja i normale na površinu zida u uglu. Zamenom se dobija da je

$$E_1 = \frac{I}{a^2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \approx 5 \text{ lx}$$

b)  $E_1 = \frac{I}{r^2} = \frac{2}{3} \frac{I}{a^2} = 7,4 \text{ lx}$ ;

c) Najveća osvetljenost u prostoriji je na sredini bočnih zidova pri vrhu i iznosi

$$E_{\max} = \frac{I}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{4I}{a^2} = 44,4 \text{ lx}$$

1280. Osvetljenost u tački A je

$$E_A = \frac{I}{r^2} \cos \theta = \frac{I}{\left(\frac{H}{\sin 30^\circ}\right)^2} \cos 60^\circ = 0,125 \frac{I}{H^2}$$

Najveća osvetljenost na putu je u tački B i iznosi

$$E_B = 8E_A = 32 \text{ lx}$$

1281.) a) Svetlosna snaga sijalice, odnosno ukupni njen svetlosni fluks je  $\Phi_1 = 4\pi I = 1256 \text{ lm}$ .

Na knjigu padne svetlosni fluks  $\Phi_2 = SE = 7,5 \text{ lm}$ , pa je traženi odnos  $\Phi_2/\Phi_1 = 0,006$ , ili 0,6%.

b)  $R = \rho E = 791 \text{ lm/m}^2$ ;

c)  $r \approx \sqrt{\frac{I}{E}} \approx 0,8 \text{ m}$ .

1282. Ako se Sunčevi zraci smatraju paralelnim, onda je osvetljenost na ekvatoru  $\sqrt{2}$  puta veća.

1283. Osvetljenost druge strane ulice (u tački B) je

$$E = \frac{I}{r^2} \cos \theta = I \frac{h}{(a^2 + h^2)^{3/2}}$$

Iz uslova  $\frac{dE}{dh} = 0$  dobija se da je za  $h =$

$$\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{10 \text{ m}}{1,41} = 7,1 \text{ m}$$

osvetljenost u tački B najveća. Koliko puta je veća osvetljenost ulice u tački A nego u tački B?

1284. Vreme ekspoziranja filma  $t$  je obrnuto srazmerno osvetljenosti predmeta  $E$ , odnosno  $\frac{E_1}{E_2} = \frac{t_2}{t_1}$ . Kako je  $E$  srazmerno električnoj snazi  $U^2/R$ , to je

$$\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2 = \frac{2t_1}{t_2}$$

Prema uslovu zadatka je  $U_1 = 0,8U_2$ , pa je potrebno povećati vreme ekspoziranja filma za  $t_2/t_1 = 1,56$  puta.

$$1285. E_A = E_B = \frac{\Phi}{4\pi h^2} \left[1 + \frac{h}{(l^2 + h^2)^{3/2}}\right] \approx 114 \text{ lx}$$

$$E_C = \frac{\Phi}{2\pi} \left[h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2\right]^{-3/2} \approx 112 \text{ lx}$$

$$1286. L = \frac{I}{\pi} \left(\frac{R}{r}\right)^2 E = 1,45 \cdot 10^{11} \frac{\text{cd}}{\text{m}^2}$$

$$1287. E = \frac{\pi L}{\rho} = 19,6 \text{ lx}$$

1288. Iz relacije  $E = 8 \frac{I}{d^2} \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha$  nalazi

se da je  $h_{\max} = \frac{d \cos \alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{d}{2\sqrt{2}}$ , pošto je za ovaj

slučaj  $\cos \alpha = 1/\sqrt{3}$ .

$$1289. \text{ a) } E_1 = \frac{\pi L}{\rho} = 7,85 \cdot 10^4 \text{ lx};$$

$$\text{ b) } E_2 = 15,7 \text{ lx}$$

$$1290. \text{ a) } d_2 = d_1 \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} = 43,3 \text{ cm}$$

$$\text{ b) } E = \frac{I_1}{d_1^2} = 960 \text{ lx}$$

1291.  $I_s = (7/3)^2 I = 327 \text{ cd}$ . Kolika je osvetljenost zaklona?

$$1292. \text{ a) } E = \frac{\Phi}{S} = \frac{\Phi}{\pi d^2} = 1,11 \cdot 10^3 \text{ lx}$$

a osvetljaj

$$R = E \tau = 1,08 \cdot 10^8 \frac{\text{lm}}{\text{m}^2}$$

$$\text{ b) } L = \frac{\tau I}{S_0} = \frac{\tau I}{\pi d^2} = 3,4 \cdot 10^4 \frac{\text{cd}}{\text{m}^2}$$

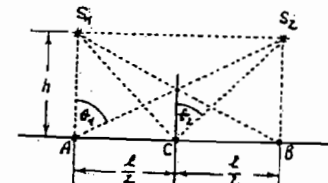
$$1293. \text{ a) } E = \frac{\Phi}{S} = 500 \text{ lx};$$

$$R = \frac{\Phi_r}{S} = \frac{\rho \Phi}{S} = \rho E = 100 \frac{\text{lm}}{\text{m}^2};$$

$$L = \frac{R}{\pi} = 31,84 \frac{\text{cd}}{\text{m}^2}$$

$$\text{ b) } R = \frac{\Phi_r}{S} = \frac{\tau \Phi}{S} = \tau E = 350 \frac{\text{lm}}{\text{m}^2};$$

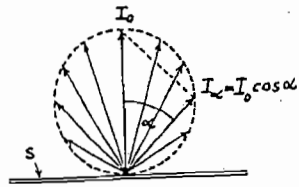
$$L = \frac{R}{\pi} = 111,5 \frac{\text{cd}}{\text{m}^2}$$



2

1294. Svetlosni fluks kroz elementarni prostorni ugao  $d\Omega$  je

$$d\Phi = I_0 d\Omega$$



Kako je veza između ugla u ravni  $\alpha$  i odgovarajućeg prostornog ugla  $\Omega$  data relacijom

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha)$$

to je  $d\Omega = 2\pi \sin \alpha d\alpha$ , pa je

$$d\Phi = I_0 \cos \alpha \cdot 2\pi \sin \alpha d\alpha$$

a ukupni fluks je

$$\Phi = 2\pi I_0 \int_0^{\pi/2} \sin \alpha d(\sin \alpha) = 2\pi I_0 \left[ \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right]_0^{\pi/2} = \pi I_0$$

1295. Od ukupnog svetlosnog fluksa  $\Phi$  sijalice u svetiljci proći će kroz njen balon svetlosni fluks  $\tau\Phi$ , dok će se fluks  $\rho\Phi$  odbiti od balona i ponovo pasti na njegovu unutrašnju površinu. Od ovog fluksa, deo  $\tau\rho\Phi$  će proći kroz staklo, dok će se deo  $\rho^2\Phi$  ponovo odbiti i pasti na unutrašnju površinu balona, itd.

Svetlosni fluks koji prođe kroz stakleni balon jeste koristan fluks svetiljke  $\Phi_{sv}$  i on iznosi

$$\Phi_{sv} = \tau\Phi(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots)$$

Pošto je  $\rho < 1$ , izraz u zagradi predstavlja opadajuću geometrijsku progresiju, pa je

$$\Phi_{sv} = \tau\Phi \frac{1}{1 - \rho}$$

dok je stepen korisnog dejstva svetiljke

$$\eta = \frac{\Phi_{sv}}{\Phi} = \frac{\tau}{1 - \rho}$$

1296. Prema Lamberovom zakonu je

$$E = \frac{I}{r^2} \cos \alpha$$

$$E_1 = \frac{I}{r_1^2} \cos \alpha + \frac{I}{r_1^2} \cos \alpha_1$$

pa je

$$\frac{E_1}{E} = 1 + \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha} = 1 + \left(\frac{r}{r_1}\right)^2$$

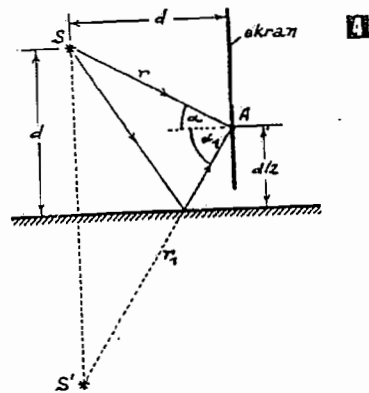
pošto je  $\cos \alpha = d/r$  i  $\cos \alpha_1 = d/r_1$ .

Kako je

$$r = \sqrt{d^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} d$$

$$r_1 = \sqrt{d^2 + \left(\frac{3d}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2} d$$

to je  $\frac{r}{r_1} = \sqrt{\frac{5}{13}}$  tj.  $\frac{E_1}{E} = 1 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1,24$ .



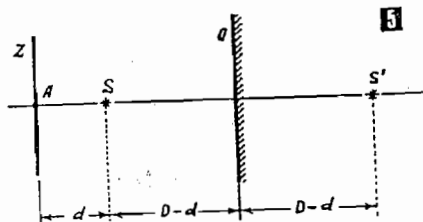
1297. Ako se uzmu u obzir samo prvi likovi svetlosnog izvora u ogledalima, tražena osvetljenost je

$$E_B = E_0 + 2E_1 = \frac{I}{(2d)^2} + 2 \frac{I}{(\sqrt{8}d)^2} \cos 45^\circ = 0,43 \frac{I}{d^2}$$

odakle je  $d = 2$  m.

Preporučujemo da se zadatak reši uzimajući u obzir i ostale likove svetlosnog izvora i da se na osnovu dobijenog rešenja donesu odgovarajući zaključci.

1298. Osvetljenost  $E$  u tački A ekrana jednaka je zbiru osvetljenosti  $E_1$ , koja potiče od svetlosnog izvora S, i osvetljenosti  $E_2$ , koja potiče od lika  $S'$  svetlosnog izvora.

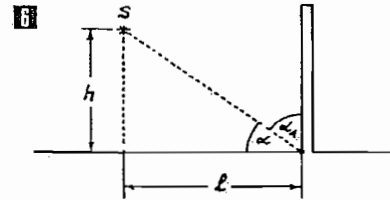


Dakle,

$$E = E_1 + E_2 = \frac{I}{d^2} + \frac{I}{(2D-d)^2}$$

1299. Osvetljenost tla u tački A je

$$E_1 = \frac{I}{r^2} \cos \alpha_1 = \frac{I}{(h^2 + l^2)} \frac{h}{\sqrt{h^2 + l^2}} = 0,36 \text{ lx}$$



dok je osvetljenost vertikalnog zida

$$E_2 = \frac{I}{r^2} \cos \alpha = \frac{I}{(h^2 + l^2)} \frac{l}{\sqrt{h^2 + l^2}} = 0,72 \text{ lx}$$

Odnos ovih osvetljenosti je

$$E_2/E_1 = l/h = 2$$

1300. Osvetljenost ekrana bez ogledala je

$$E_1 = \frac{I}{L^2}$$

a sa njim

$$E_2 = E_1 + \frac{I}{\left(\frac{R}{2}\right)^2}$$

pa je

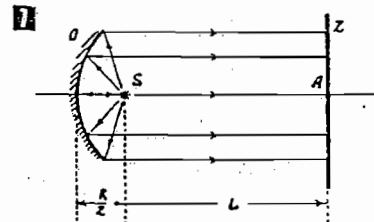
$$\frac{E_2}{E_1} = 1 + \left(\frac{2L}{R}\right)^2$$

1301. Osvetljenost ekrana u tački A kada nema sočiva je

$$E_1 = \frac{I}{d^2} = 50 \text{ lx}$$

a kada se ono postavi

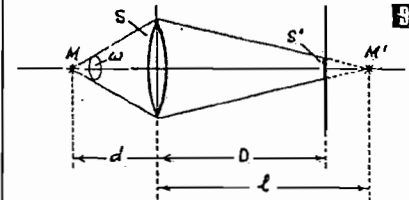
$$E_2 = \frac{I}{f^2} = 5000 \text{ lx}$$



1302. Osvetljenost u tački A je

$$E = \frac{\Phi}{S} = \frac{I\Omega}{S}$$

gde je  $\Omega$  — prostorni ugao u kome se zrači svetlosni fluks izvora koji pada na ekran, a  $S$  — površina osvetljenog dela ekrana.



Pošto je

$$\Omega = \frac{S}{d^2}$$

gde je  $S$  — površina sočiva, nalazi se da je

$$E = \frac{I}{d^2} \frac{S}{S'}$$

pri čemu je

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{l}{l-D}\right)^2$$

Kako je

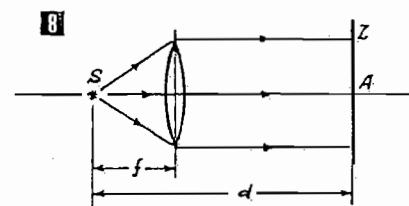
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d} + \frac{1}{l}$$

to je  $l = \frac{df}{d-f}$  pa se za osvetljenost ekrana dobija izraz

$$E = \frac{I}{d^2} \left( \frac{df}{df + Df - dD} \right)^2$$

$$1303. E = I \frac{1}{h^2} + \frac{\sqrt{1 - \frac{4l^2 \sin^2 \theta}{h^2 + 4l^2 + 4hl \cos \theta}}}{h^2 + 4l^2 + 4hl \cos \theta}$$

$$1304. E = E' \frac{1}{(l-p)^2} + \frac{R^2}{R(l+p) - 2lp} \frac{1}{1 + \frac{R^2}{R(l+p) - 2lp}}$$



2. GEOMETRIJSKA OPTIKA

1305.  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

1306.  $n = c \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \sqrt{\epsilon_r} = 1,58$

1307.  $v = \frac{c}{n} = 2 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

1308. Indeks prelamanja vode je  $n=1,33$ , pa je

$$t = \frac{l_0}{c-v} = \frac{l_0}{c \left(1 - \frac{1}{n}\right)} = 0,135 \mu s$$

1309.  $\lambda_0 N = 0,6 \text{ cm}$

1310.  $\lambda = \frac{\lambda_0}{n} = 175 \text{ nm}$

1311.  $N = \frac{nd}{\lambda_0} = 25,6 \cdot 10^3$

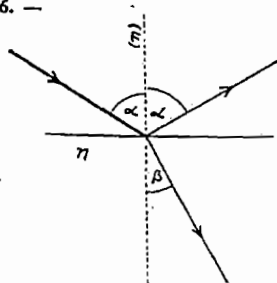
1312.  $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi c}{\lambda} = 3,2 \cdot 10^{15} \frac{\text{rad}}{s}$

1313.  $n_{31} = \frac{n_2}{n_1} = 1,2$ . Koliki je indeks prelamanja vode u odnosu na staklo?

1314. Iz relacije  $n = a + b/\lambda^2$  nalazi se da je  $a = 1,6$  i  $b = 3 \cdot 10^{-14} \text{ m}^2$ .

1315. Disperziona moć je  $\omega = \frac{n_D - n_C}{n_D - 1} = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} = 0,017$ , dok je Abeov broj  $\nu = \frac{1}{\omega} = 58,8$ .

1316. —



1317. Sa slike 1317 se vidi da je  $\alpha + \beta = 90^\circ$

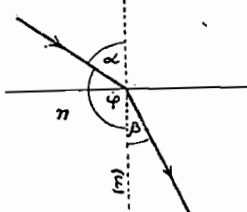
Prema zakonu prelamanja je  $\sin \alpha = n \sin \beta$

pa je prema (1)  $\alpha = \text{arc tg } n = 53^\circ 16'$ .

1318. Sa slike 1318 se vidi da je  $\varphi = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ . Kako je  $\sin \alpha = n \sin \beta$ , to je

$$\text{ctg } \alpha = \frac{1}{n \sin \varphi} = \text{ctg } \varphi = \sqrt{3} - \frac{2}{n} = 0,4$$

odnosno  $\alpha = 68^\circ 11'$ .



1319. a) Iz relacije  $\sin \alpha = n \sin \beta$  prelomni ugao je

$$\beta = 21^\circ 54'$$

b) Iz vode, pod uglom  $\alpha > \alpha_c = \text{arc sin } \frac{1}{n} = 48^\circ 16'$  prema normali.

c)  $\frac{c}{v} = n = 1,34$ .

1320.  $\alpha_c = \text{arc sin } \frac{1}{n} = 25^\circ 24'$ .

1321. Indeks prelamanja tečnosti je  $n=1,4$  pa je granični ugao totalne refleksije za zrak svetlosti koji dolazi iz tečnosti  $\alpha_c = \text{arc sin } \frac{1}{n} = 45^\circ 35'$ .

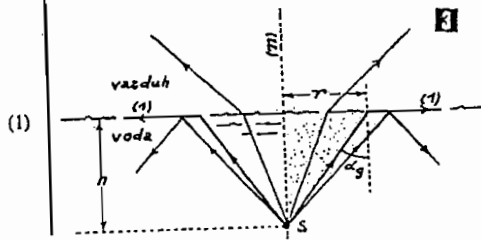
1322. a)  $\alpha_1 > \alpha_{c1} = \text{arc sin } \frac{1}{n_1} = 36^\circ 1'$ ;

b)  $\alpha_2 > \alpha_{c2} = \text{arc sin } \frac{1}{n_2} = 51^\circ 28'$ .

Potrebno povećanje upadnog ugla je

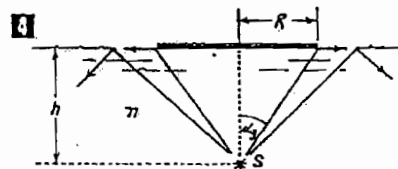
$$\Delta \alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 15^\circ 27'$$

1323. a) Prema rešenju zadatka 1319. granični ugao totalne refleksije za graničnu površinu voda — vazduh je  $\alpha_c = 48^\circ 16'$ , dok je iz označenog trougla na slici 1323, poluprečnik kružne površine na vodi kroz koju prolaze svetlosni zraci  $r = h \text{ tg } \alpha_c = 5,6 \text{ cm}$ .



b) Najveća dužina optičkog puta svetlosti u vodi je za zrak (1) i iznosi

$$\frac{nh}{\cos \alpha_c} = h \frac{n^2}{\sqrt{n^2 - 1}} \approx 10 \text{ cm}$$

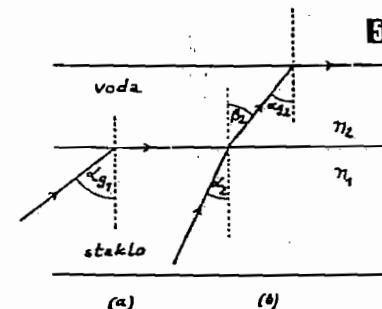


1324. Kako je granični ugao totalne refleksije

$$\sin \alpha_c = \frac{1}{n} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + R^2}}$$

to je

$$R = \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}} = 26,6 \text{ cm}$$



1325. a)  $\alpha > \alpha_{c1} = \text{arc sin } \frac{n_2}{n_1} \approx 57^\circ$

b) Kako je

$$\beta_2 = \alpha_{c2} = \text{arc sin } \frac{1}{n_2} \text{ i } \sin \alpha_2 = \frac{n_2}{n_1} \sin \beta_2$$

to je  $\sin \alpha_2 = \frac{1}{n_1}$ , odakle je potreban upadni ugao zraka svetlosti

$$\alpha_2 > \text{arc sin } \frac{1}{n_1} = 38^\circ 40'$$

Dobijeni rezultat se slaže sa činjenicom da se indeks prelamanja dve sredine ne menja ako se između njih umetne treća. Voda u ovom slučaju ne utiče na veličinu izlaznog ugla zraka svetlosti.

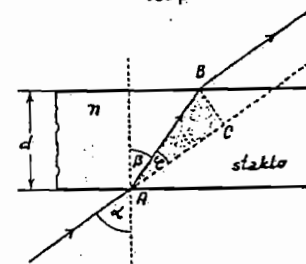
1326. a) Ugaono pomeranje je  $\varphi = \alpha - \beta$ . Kako je  $\alpha = 30^\circ$ , iz relacije  $\sin \alpha = n \sin \beta$  nalazi se da je

$$\beta = \text{arc sin } \left[ \frac{\sin 30^\circ}{1,8} \right] \approx 16^\circ$$

pa je  $\varphi = 14^\circ$ .

b) Prema označenom trouglu na slici, pomeranje zraka svetlosti po pravcu je

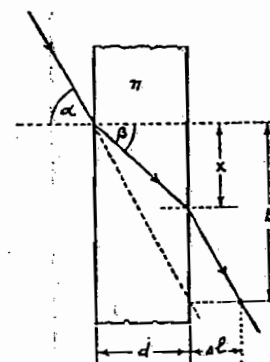
$$BC = d \frac{\sin \varphi}{\cos \beta} = 0,0252 \text{ mm}$$



c) Optička dužina puta svetlosti kroz PP-ploču je  $n \cdot AB = n \frac{d}{\cos \beta} = 0,187 \text{ mm}$ .

1327. Sa slike 1327 se vidi da je pomeranje svetlosnog snopa po PP-ploči

$$a = h - x = d (\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta)$$



Pomeranje svetlosnog snopa u pravcu optičke ose objektiva je  $\Delta l = a/\text{tg } \alpha$ , odakle je

$$\Delta l = d \left( 1 - \frac{\text{tg } \beta}{\text{tg } \alpha} \right)$$

Kako su uglovi  $\alpha$  i  $\beta$  mali, to je  $\text{tg } \alpha \approx \sin \alpha$  i  $\text{tg } \beta \approx \sin \beta$ , pa je

$$\Delta l = \left( 1 - \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \right) d \left( 1 - \frac{1}{n} \right)$$

Kako je  $n = \frac{c}{v} = \frac{3}{2}$ , to je

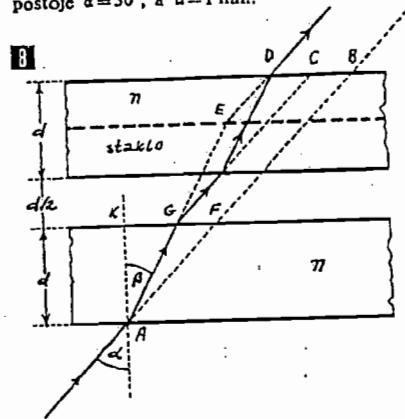
$$\Delta l = \frac{d}{3} = 0,4 \text{ cm}$$

1328. a) Pomeranje zraka svetlosti po izlasku iz druge ploče je **II**

$$BD = 2BC = 2CF = 2(FK - CK) = 2d(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)$$

Iz relacije  $\sin \alpha = n \cdot \sin \beta$  dobija se da je  $\sin \beta = 0,3125$  odnosno  $\beta = 18^\circ 12'$ .

Prema prethodnoj relaciji je  $BD = 0,497$  mm, pošto je  $\alpha = 30^\circ$ , a  $d = 1$  mm.

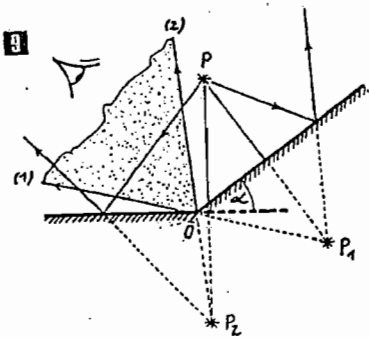


b) Kada bi se PP-ploče spojile, zrak svetlosti bi izlazio iz druge ploče u tački E, dok bi skretanje zraka svetlosti po pločama bilo isto.

1329.  $6 \times 6 \text{ cm}^2$ .

1330. Za 20 cm.

1331. Oba lika će se videti ako se nalaze u prostoru između zrakova (1) i (2) **9**.



1332.  $\Delta h = d - \frac{d}{n} = 1,9$  mm.

1333. a) Stvarna dubina vode (bazena) **10** data je relacijom

$$h = h_p n \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \quad (1)$$

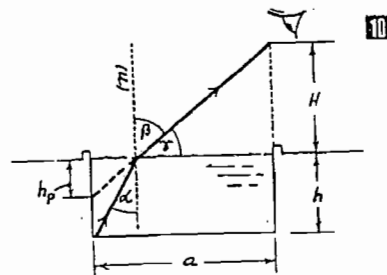
Sa slike se vidi da je  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{h_p + H}{a} = 0,2$ .

ili  $\gamma = 11^\circ 20'$ .

Isto tako je  $\beta = 90^\circ - \gamma = 78^\circ 40'$ . Kako je

$$\sin \alpha = \frac{\sin \beta}{n} = 0,723 \text{ ili } \alpha = 46^\circ 20'$$

to je prema relaciji (1)  $h \approx 46,6$  cm.



b)  $h_{p1} = \frac{h}{n} \approx 35$  cm.

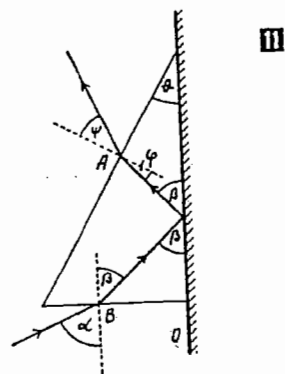
1334. a)  $\varphi_{\min} = 41^\circ 20'$ ; b)  $EF \approx 10$  cm.

1335. a) Sa slike **11** se vidi da je  $\varphi = \frac{\pi}{2} - (\beta + \theta)$ , pa je za tačku A

$$\frac{\sin \left[ \frac{\pi}{2} - (\beta + \theta) \right]}{\sin \varphi} = \frac{1}{n} \quad (1)$$

a za tačku B

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n \quad (2)$$



Kako je  $\alpha = 45^\circ$ , to je prema relaciji (2) prelomni ugao  $\beta = 26^\circ 10'$ , a prema (1) izlazni ugao  $\psi = \arcsin(n \cos 56^\circ 10') = 64^\circ 19'$ .

b) Za  $\psi = 90^\circ$  prema relaciji (1) je

$$\cos(\beta + \theta) = 1/n, \text{ odnosno } \beta + \theta = 51^\circ 20'$$

odakle je  $\beta = 51^\circ 20' - 30^\circ = 21^\circ 20'$ .

Prema relaciji (2) je

$$\sin \alpha_{\min} = n \sin \beta$$

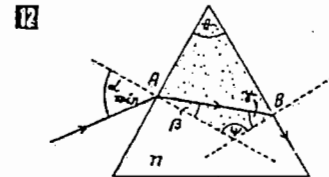
odakle je zamenom  $\alpha_{\min} = 35^\circ 40'$ .

1336. Za tačku A **12** na prizmi je

$$\sin \alpha = n \sin \beta \quad (1)$$

a za tačku B

$$n \sin \gamma = \sin 90^\circ = 1 \quad (2)$$

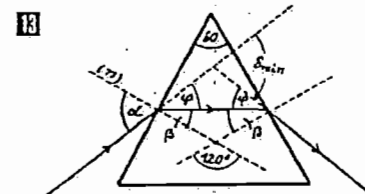


Iz označenog četvorougla na slici je  $\psi = \pi - \theta = 120^\circ$ , dok je takođe  $\beta + \gamma = 60^\circ$  (3). Kako je  $n = 1,65$ , to je prema relacijama (1), (2) i (3) minimalna vrednost upadnog ugla  $\alpha_{\min} \approx 42^\circ$ .

Koliki je ugao  $\alpha_{\min}$  pod uslovom da se prizma nalazi u vodi indeksa prelamanja  $n_1 = 1,33$ ?

1337.  $\alpha_{\min} \approx 53^\circ$ . Šta će biti sa monohromatskom svetlošću za koju je indeks prelamanja veći od navedenog?

1338. a) Zrak svetlosti najmanje skreće pri prolasku kroz prizmu ako je njegov pravac kroz nju paralelan njenoj osnovi **13**. U označenom trouglu je prelomni ugao  $\beta = 30^\circ$ , pošto je ugao prizme  $\theta = 60^\circ$ .



Za crvenu svetlost je  $\sin \alpha_c = n_c \cdot \sin \beta = 0,6645$  ili  $\alpha_c = 41^\circ 39'$ . Analogno je za ljubičastu svetlost  $\sin \alpha_{lj} = n_{lj} \cdot \sin \beta = 0,6715$  ili  $\alpha_{lj} = 42^\circ 11'$ . Sa slike se vidi da je najmanji ugao skretanja

$$\delta_{\min} = 2\varphi = 2(\alpha - 30^\circ)$$

pa je prema tome  $\delta_{\min c} = 23^\circ 18'$  i  $\delta_{\min lj} = 24^\circ 22'$ .

b) Disperzija spektra je

$$\Delta \delta = \delta_{\min lj} - \delta_{\min c} = 1^\circ 04'$$

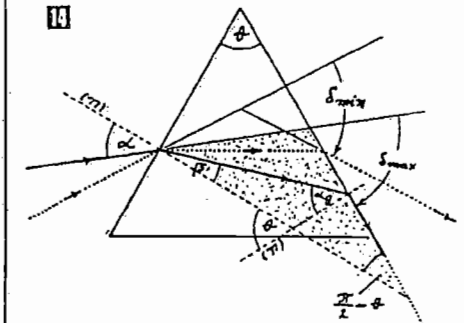
Preporučujemo da izračunate ovu disperziju prema relaciji  $\Delta \delta = (n_{lj} - n_c) \theta$  i da uočite razloge zbog kojih su rezultati različiti.

$$1339. n = \frac{\sin \left( \frac{\theta + \delta_{\min}}{2} \right)}{\sin \frac{\theta}{2}} = 1,61.$$

1340. Zrak svetlosti, prikazan na slici **14** tačkasto, najmanje skreće kroz prizmu. Iz relacije

$$n \sin \frac{\theta}{2} = \sin \left( \frac{\theta + \delta_{\min}}{2} \right) \quad (2)$$

njegovo skretanje je  $\delta_{\min} = 39^\circ 40'$ .



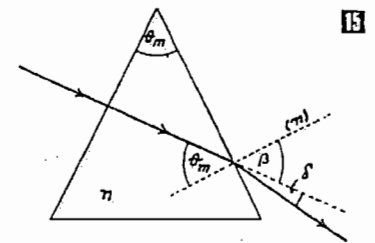
Najviše skreće kroz prizmu zrak svetlosti prikazan punom linijom. On izlazi iz prizme pod uglom koji je nešto manji od  $\pi/2$ . U ovom slučaju je najveći ugao skretanja  $\delta_{\max}$  spoljni ugao obeležnog trougla, pa je tada upadni ugao  $\alpha = \delta_{\max} + \theta - \pi/2$ , a prelomni  $\beta = \theta - \alpha$ , gde je  $\alpha_g = \arcsin(1/4) = 38^\circ 24'$  -granični ugao totalne refleksije za ove dve sredine. Prema zakonu prelamanja, za tačku A

je  $n \sin(\theta - \alpha_g) = \sin \left( \delta_{\max} + \theta - \frac{\pi}{2} \right)$ , odakle je  $\delta_{\min} = 55^\circ 40'$ .

1341.  $n' = 1 + \frac{\delta_{\min}}{\theta} = 1,88$ , pa je relativna greška  $\frac{n' - n}{n} 100 = 16,8\%$ .

1342. Koristeći se približnom relacijom  $n = 1 + \frac{\delta_{\min}}{\theta}$ , nalazi se da je  $n = 1,56$ .

1343. a) Sa slike **15** se vidi da je upadni ugao snopa svetlosti na drugu bočnu stranu



prizme  $\theta_m$ , pa je  $n \cdot \sin \theta_m = \sin 90^\circ = 1$ , odakle je najveći ugao prizme

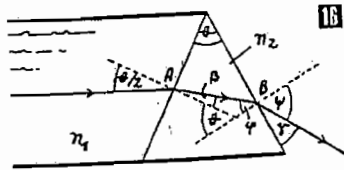
$$\theta_m = \arcsin \frac{1}{n} = 38^\circ 40'$$

b) U ovom slučaju je ugao prizme  $\frac{\theta_m}{2}$ , a i upadni ugao  $\alpha = \frac{\theta_m}{2} = 19^\circ 10'$ , pa je iz relacije

$$\sin \beta = n \sin \alpha = 0,53$$

prelomni ugao  $\beta = 32^\circ$ , odnosno ugao skretanja  $\delta = \beta - \alpha = 12^\circ 40'$

1344. a) Na slici 16 dati su neki odnosi uglova označenog trougla i ugla prizme  $\theta$



Za tačku A je

$$\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

odakle je

$$\sin \beta = \frac{n_1}{n_2} \sin \frac{\theta}{2} = 0,2943$$

ili  $\beta = 17^\circ 7'$ . Isto tako je

$$\varphi = \theta - \beta = 27^\circ 53'$$

Za tačku B je

$$\sin \psi = n_2 \sin \varphi = 0,843$$

ili

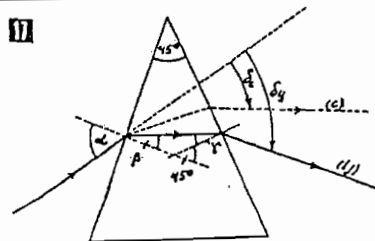
$$\psi = 57^\circ 30'$$

Sa slike se vidi da je traženi ugao

$$\gamma = 90^\circ - \psi = 32^\circ 30'$$

b) Za  $n_1 = 1$  je  $\gamma = 13^\circ 30'$ .

Preporučujemo da izračunate onu vrednost ugla prizme  $\theta$  pri kome će na njenoj spoljnoj strani nastati totalna unutrašnja refleksija.



1345. Sa slike 17 vidi se da je  $\sin \alpha = n_2 \sin 45^\circ = 0,9686$  ili  $75^\circ 36'$ .

Ugao skretanja crvene svetlosti je  $\delta_c = \alpha - 45^\circ = 30^\circ 36'$ . Isto tako je ugao skretanja ljubičaste svetlosti  $\delta_l = \alpha - \beta + \varphi - \gamma$ . Kako je  $\beta + \gamma = 45^\circ$  (1), to je

$$\delta_l = \alpha + \varphi - 45^\circ = 75^\circ 36' - 45^\circ + \varphi = 30^\circ 36' + \varphi$$

$$\sin \alpha = n_l \sin \beta \quad (2)$$

kao i  $\sin \varphi = n_l \sin \gamma$  (3).

Iz relacija (1), (2) i (3) nalazi se da je prelomni ugao  $\varphi = 2^\circ 50'$ , a ugao skretanja ljubičaste svetlosti  $\delta_l = 33^\circ 26'$ .

1346.  $t = \frac{d}{c} = 50 \mu s$ . Ako je zadovoljavajuća tačnost izmerene brzine svetlosti reda  $\pm 30 \text{ km/s}$ , odnosno  $\pm 0,01\%$ , onda je potrebna tačnost određivanja vremena reda  $\pm 5 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ .

1347. Prema jednačini sfernog ogledala

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{l} = \frac{2}{R}$$

rastojanje lika je

$$l = \frac{pR}{2p - R} = 90 \text{ cm}$$

Veličina lika je  $L = \frac{l}{p} P = 40 \text{ cm}$ . Lik je realan, uvećan i izvrnut. Žižna daljina ogledala je  $f = \frac{R}{2} = 30 \text{ cm}$ .

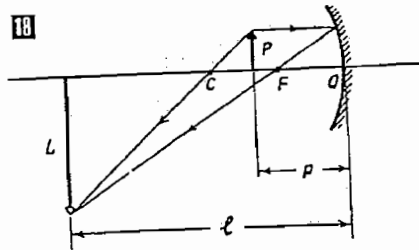
1348. Prema uslovu zadatka je

$$\frac{L}{P} = \frac{l}{p} = 10 \quad (1)$$

Da bi se dobio realan i uvećan lik, predmet je potrebno postaviti između žiže i centra krivine, pri čemu je

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{l} = \frac{2}{R}$$

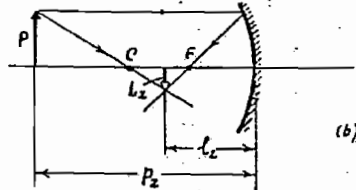
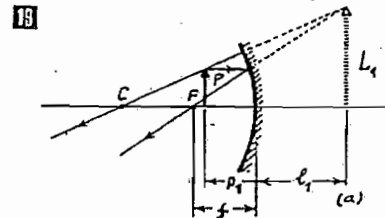
pa je prema relaciji (1) rastojanje predmeta do temena ogledala  $p = 22 \text{ cm}$ .



1349. U prvom slučaju 19 (sl. a) lik je imaginaran, pa je rastojanje lika negativno. Jednačina ogledala je onda

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{l_1} = \frac{2}{R}$$

gde je  $p_1 = 5 \text{ cm}$ , a  $R = 15 \text{ cm}$ , pa je zamenom  $l_1 = 15 \text{ cm}$ . Veličina lika je  $L_1 = \frac{l_1}{p_1} P = 6 \text{ cm}$ .



U drugom slučaju (sl. b) lik je realan, pa je jednačina ogledala

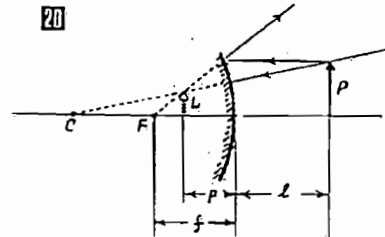
$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{l_2} = \frac{2}{R}$$

gde je  $p_2 = 20 \text{ cm}$  i  $R = 15 \text{ cm}$ . Rastojanje lika je  $l_2 = 12 \text{ cm}$ . Veličina lika prikazanog na slici je  $L_2 = \frac{l_2}{p_2} P = 1,2 \text{ cm}$ .

1350. Predmet treba postaviti između žiže i temena ogledala, kao u zadatku 1348. Pri ovome je  $\frac{l}{p} = 2$ , dok je  $\frac{1}{p} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f}$ , pa se nalazi da je rastojanje predmeta  $p = 10 \text{ cm}$ , pošto je  $f = 20 \text{ cm}$ .

1351. Predmet treba postaviti u centar krivine, pri čemu se dobije neuvećan izvrnut lik.

1352. Sa slike 20 vidi se da je lik imaginaran, pa je rastojanje lika  $l$  negativno kao



i poluprečnik  $R$ , pošto je ogledalo ispupčeno. Jednačina ogledala u ovom slučaju je

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{l} = -\frac{2}{R}$$

gde je  $p = 36 \text{ cm}$ , a  $R = 54 \text{ cm}$ , pa je  $l = 15,4 \text{ cm}$ . Veličina lika je  $L = \frac{l}{p} P = 2,57 \text{ cm}$ .

1353. a) Udaljenost lika od temena sfernog ogledala je  $l_1 = \frac{pR}{2p + R}$ , a od ravnog  $l_2 = p$ .

Kako je  $p = R$ , lik će se udaljiti za  $\frac{l_2}{l_1} = 3$ .

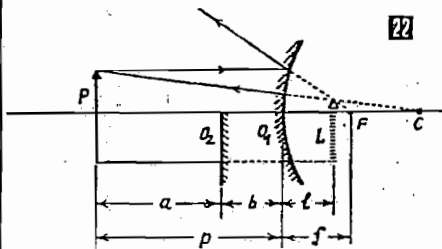
b) Uvećanje sfernog ogledala je  $\frac{L_1}{P} = \frac{l_1}{p} = \frac{1}{3}$ , a ravnog  $l$ . To znači da će lik u ravnog ogledalu biti 3 puta veći.

1354. Jednačina sfernog ogledala u ovom slučaju je  $\frac{1}{p} + \frac{1}{l} = \frac{2}{R}$ , a prema uslovu zadatka  $\frac{L}{P} = \frac{l}{p} = \frac{1}{5}$ , pa je  $p = 120 \text{ cm}$ . Lik je imaginaran.

1355. a)  $f' = f/n = 7,5 \text{ cm}$  21



b) Žižna daljina je ista kao kada je ogledalo u vazduhu, jer zakon odbijanja važi za svaku sredinu; upadni ugao jednak je odbojnom u svakoj sredini.



1356. Za ovaj slučaj je 22

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

Sa slike se vidi da je

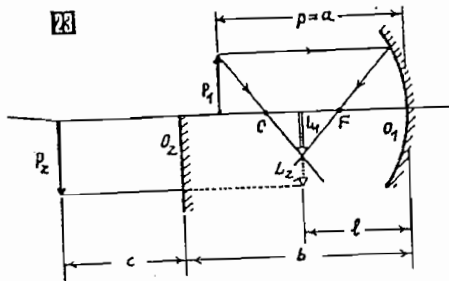
$$p = a + b \text{ i } a = b + l$$

pa je prema relaciji (1) žižna daljina ogledala

$$f = \frac{a^2 - b^2}{2b} = 40 \text{ cm}$$

1357. Prema znacima veličina na slici 23 je

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f} \quad (1)$$



Sa slike se vidi i da je  $c=b-l$  i  $a=p$ , pa je prema relaciji (1) žižna daljina ogledala

$$f = \frac{a(b-c)}{a+b-c} = 11,6 \text{ cm}$$

Da li će posmatrač videti oba lika istovremeno?

1358. Uvećanje ogledala u prvom slučaju je  $u = \frac{R}{2p-R}$ , a u drugom  $u_1 = \frac{R_1}{2p-R_1} = \frac{2R}{2p-2R} = \frac{R}{p-R}$ . Njihov odnos je  $\frac{u_1}{u} = \frac{p-R}{R}$ . Prema uslovu zadatka je  $p=3R$ , pa je  $\frac{u_1}{u} = \frac{5}{2}$ , što znači da se veličina lika poveća 2,5 puta.

1359. Jednačina ogledala u ovom slučaju je  $\frac{1}{p} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f}$ , a uvećanje  $u = \frac{l}{p}$ . Postupkom kao u prethodnom zadatku dobija se da je odnos uvećanja ogledala  $u/u_1 = 1,125$ , što znači da se uvećanje smanji za 11,25%.

1360. Položaj realnog lika  $L_1$  i predmeta  $P$  u bližem ogledalu  $O_1$  određen je jednačinom

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

Uvećanje ovog ogledala je

$$u_1 = \frac{L_1}{P} = \frac{l}{p_1} \quad (2)$$

Realan lik  $L_2$  predmeta  $L_1$  u daljem ogledalu  $O_2$  određen je jednačinom  $\frac{1}{p_2} + \frac{1}{l_2} = \frac{1}{f}$  (3), dok je uvećanje ovog ogledala  $u_2 = \frac{L_2}{L_1} = \frac{l_2}{p_2}$

(4). Sa slike se vidi da je  $p=d-l$ , i  $d=5f$ , pa je prema relacijama (1) i (3) udaljenost definitivnog lika od temena ogledala  $O_2$

$$l_2 = f \frac{4p_1 - 5f}{3p_1 - 4f} = 50 \text{ cm}$$

Iz relacija (2) i (4) je veličina ovog lika

$$L_2 = p \frac{l_1 l_2}{p_1 p_2} = p \frac{l_1 l_2}{p_1 (d-p_1)} \quad (5)$$

Prema relaciji (1), rastojanje lika  $L_1$  od temena ogledala  $O_1$  je

$$l_1 = \frac{p_1 f}{p_1 - f} = 75 \text{ cm}$$

pa je prema relaciji (5)  $L_2 = 1,5 \text{ cm}$ .

1361. Lik se nalazi na rastojanju  $l_2 = \frac{7}{11} R$  od temena izdubljenog ogledala. Lik je realan i izvrnut, veličine  $L_2 = \frac{3}{77} P = 0,23 \text{ cm}$ .

1362. a)  $l=p=30 \text{ cm}$ .

b) Iz relacije  $\frac{n_2}{l} + \frac{n_1}{p} = \frac{n_2 - n_1}{R}$ , gde je  $n_1=1$ ,  $n_2=n$  i  $R=\infty$ , zamenom se dobija da je  $l = -np = -40,2 \text{ cm}$ .

1363. a) Iz relacije

$$\frac{n_2}{l} + \frac{n_1}{p} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (1)$$

gde je  $n_1=1$ ,  $n_2=n=1,45$ ,  $R=20 \text{ cm}$  i  $p=80 \text{ cm}$ , nalazi se da je rastojanje lika od temena sferne granične površine

$$l_1 = \frac{npR}{p(n-1)-R} = 145 \text{ cm}$$

Lik  $L_1$  je realan i nalazi se na drugoj strani granične površine.

b) Optička moć površine je  $\frac{n_2 - n_1}{R} = \frac{n-1}{R} = +2,25 \text{ dioptrija}$ .

c) 1. Za  $n_1=1,33$  i  $n_2=1,45$  prema relaciji (1) je  $l_{33} = -137 \text{ cm}$ . Optička moć površine je  $+0,6 \text{ dioptrija}$ . Lik  $L_{33}$  je imaginaran i nalazi se u istoj sredini gde i predmet.

2. Za  $n_1=1,8$  i  $n_2=1,45$  prema relaciji (1) je, uzimajući  $p=80 \text{ cm}$  i  $R=+20 \text{ cm}$ , rastojanje lika  $l_{18} = -36,2 \text{ cm}$ . Optička moć površine je  $-1,75 \text{ dioptrija}$ . Lik  $L_{18}$  je imaginaran i nalazi se u istoj sredini gde i predmet.

Gde treba postaviti tačkast svetlosni izvor u slučaju  $L_{33}$  da bi prelomni zraci u drugoj sredini bili paralelni?

1364. a) Iz relacije  $\frac{n_2}{l} + \frac{n_1}{p} = \frac{n_2 - n_1}{R}$ , gde je  $n_1=1$ , a  $n_2=n$ , dobija se da je udaljenost lika od temena sferne granične površine

$$l = \frac{-npR}{p(n-1)+R} = -5,5 \text{ cm}$$

gde je  $R$  uzeto kao negativno zbog divergencije zrakova. Lik je imaginaran, jer se nalazi u preseku imaginarnih zrakova (videti sliku).

b) Ugaono uvećanje je

$$u_x \approx \frac{\theta_2}{\theta_1}$$

jer je reč o paraksijalnim zracima. Kako je

$$\theta_1 \approx \frac{h}{p}, \text{ a } \theta_2 \approx \frac{h}{l}, \text{ to je } u_x \approx \frac{l}{p} = 1,374$$

Transverzalno uvećanje je

$$u_{\perp} = \frac{n_1}{n_2} \frac{l}{u_x} = \frac{1}{n} \frac{l}{u_x} \approx 0,4$$

a longitudinalno

$$u_{\parallel} = \frac{u}{u_x}$$

c) Optička moć sferne površine je

$$\frac{n_2 - n_1}{R} = -8 \text{ D}$$

1365. a)  $R_1 = R_2 = 2f(n-1) = 42 \text{ cm}$ ;

b)  $R_1 = f(n-1) = 21 \text{ cm}$ ;  $R_2 = \infty$ .

1366. a) Iz relacije  $\frac{1}{f} = (n_1 - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ , gde je  $n_1=1,66$ ,  $f=0,9 \text{ m}$  i  $R_1=0,5 \text{ m}$ , nalazi se da je  $R_2=3,16 \text{ m}$ .

b)  $\omega = 1/f = 1,1 \text{ D}$ ;

c)  $\omega' = \frac{1}{f'} = \left( \frac{n_1}{n_2} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 0,42 \text{ D}$ .

1367. Iz relacije  $\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{-R_1} + \frac{1}{-R_2} \right)$  nalazi se da je  $f = -32,9 \text{ cm}$ .

1368. a)  $f_1 = \frac{n_1(n-1)}{n-n_1} = 90,9 \text{ cm}$ ;

b)  $f_2 = \frac{n_2(n-1)}{n-n_2} = -102 \text{ cm}$ .

Znak (-) ukazuje da će ovo sočivo postati rasipno u sredini indeksa prelamanja  $n_2$ .

1369.  $f=29,6 \text{ cm}$ .

1370.  $\omega = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = -(n-1) \frac{1}{2R_1} = -1,65 \text{ D}$ . Sočivo je rasipno.

1371.  $n_2 = \frac{n_1(f-f_0)}{f-n_1 f_0} = 1,78$ .

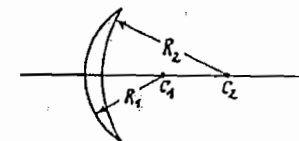
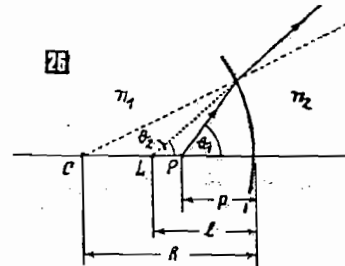
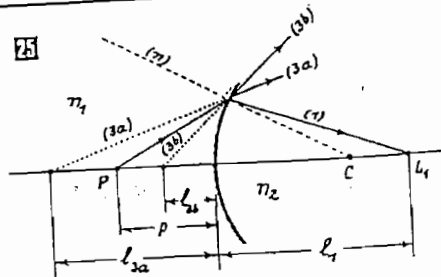
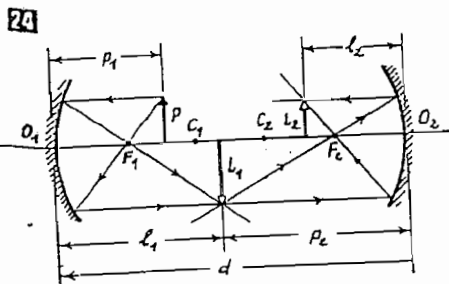
1372.  $\Delta f/f = 0,05$ .

1373. a)  $+2,5 \text{ D}$ ; b)  $-2,5 \text{ D}$ .

1374. Ako je  $f_1$ —žižna daljina rasipnog sočiva, a  $f_2$ —sabirnog, onda je ekvivalentna žižna daljina kombinovanog sočiva  $f_c = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}$  (1),

gde je  $f_1 = \frac{R}{1-n_1}$ ,  $f_2 = \frac{R}{n_2-1}$ . Prema relaciji (1) je

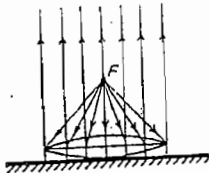
$$f_c = \frac{R}{n_2 - n_1} \approx 105 \text{ cm}$$



1375. a) Svetlosni zrak dva puta prođe kroz sočivo a jedanput se odbije od ogledala. Ako je  $\omega_1 = \frac{1}{f_1}$  - optička moć sočiva, a  $\omega_2 = \frac{1}{f_2}$  - optička moć ogledala, onda je ekvivalentna optička moć sistema  $\omega_e = 2\omega_1 + \omega_2 = \frac{2}{f_1} + \frac{1}{f_2}$  (1). Kako je  $\frac{1}{f_1} = (n-1) \frac{2}{R}$ , a  $\frac{1}{f_2} = \frac{2}{R}$ , to je prema relaciji (1)

$$\omega_e = (2n-1) \frac{2}{R} = 17,3 \text{ D}$$

ili  $f_e = 1/\omega_e \approx 5,8 \text{ cm}$ .



b) Žiža je na istom mestu kao kada je sočivo u vazduhu.  $\omega_1 = \frac{1}{f_1}$

c) Žižna daljina sočiva pri potapanju smanji se za

$$\Delta f = f - f_e = 4,2 \text{ cm}$$

1376. Ekvivalentna žižna daljina sistema je  $f_e = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}$  (1), gde je  $f_1$  - žižna daljina sabirnog sočiva od stakla, a  $f_2$  - žižna daljina rasipnog sočiva od vode.  $\omega_1 = \frac{1}{f_1}$



Kako je  $\frac{1}{f_1} = (n-1) \frac{1}{R}$ , a  $\frac{1}{f_2} = (1-n_2) \frac{1}{R}$ , to je prema relaciji (1)

$$f_e = \frac{n_1 - 1}{n_1 - n_2} f_1 = 115 \text{ cm}$$

1377. a) Žižna daljina sočiva u vazduhu je  $f' = \frac{R}{1-n_1} = -33,3 \text{ cm}$ , dok je njegova optička moć  $\omega = 1/f' = -3 \text{ D}$ .

b) Ako je  $f_1$  - žižna daljina staklenog rasipnog sočiva, a  $f_2$  - žižna daljina sabirnog sočiva obrazovanog od zaostalog vazduha u konkavnom delu staklenog sočiva, onda je ekvivalentna žižna daljina ove kombinacije  $f_e = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}$  (1), gde je  $\frac{1}{f_1} = \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) \frac{1}{R}$ , a  $\frac{1}{f_2} = \left(\frac{1}{n_2} - 1\right) \frac{1}{R}$ , pa je prema relaciji (1)

$$f_e = \frac{n_2}{1-n_1} R = n_2 f' = -44,3 \text{ cm}$$

$$c) f_1 = \frac{n_1}{n_2 - n_1} R = -100 \text{ cm}$$

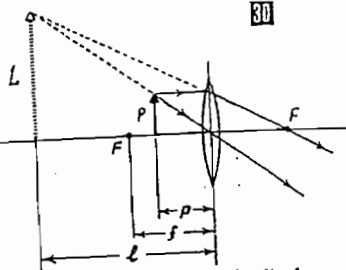
1378. Optička moć sočiva za crvenu svetlost  $\omega_c = \frac{1}{f_c} = (n_c - 1) \frac{1}{R}$ , a za ljubičastu  $\omega_{lj} = (n_{lj} - 1) \frac{1}{R}$ , pa je dužina hromatične aberacije

$$f_c - f_{lj} = R \frac{n_{lj} - n_c}{(n_{lj} - 1)(n_c - 1)} = 0,83 \text{ cm}$$

Kolika je ova dužina kada je sočivo u vodi čiji su indeksi prelamanja  $n_c = 1,54$  i  $n_{lj} = 1,58$ ?

1379. Za sočivo je  $\frac{1}{f_c} = (n-1) \frac{1}{R}$ , a za sferno ogledalo  $\frac{1}{f_o} = \frac{2}{R}$ , pa je  $\frac{f_c}{f_o} = \frac{2}{n-1}$ .

Prema tablicama na kraju knjige, indeks prelamanja stakla je 1,515 do 1,9 pa je  $f_c/f_o = 3,9$  do 2,2.



1380. Sa slike 30 vidi se da je lik lupe imaginaran pa je jednačina sočiva  $\frac{1}{p} - \frac{1}{l} = \frac{1}{f}$ , gde je  $l = 25 \text{ cm}$ , a  $f = 5 \text{ cm}$ . Zamenom se nalazi da je rastojanje predmeta  $p = 4,17 \text{ cm}$ , a uvećanje lupe  $u = l/p = 6$ .

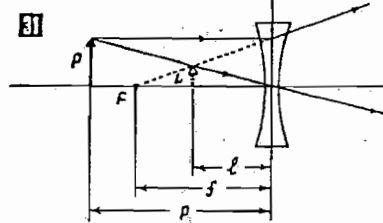
1381. Iz relacija  $\frac{1}{p} = 5$  i  $\frac{1}{p} + \frac{1}{l} = (n-1) \frac{2}{R}$  nalazi se da je  $p = 36 \text{ cm}$  i  $l = 180 \text{ cm}$ .

1382. Žižna daljina sočiva je  $f = \frac{R}{n-1} = 1 \text{ m}$ , dok je uvećanje sočiva  $u = \frac{L}{p} = \frac{l}{p-f} = 3$ , pa je rastojanje predmeta  $p \approx 1,33 \text{ m}$ .

Koliko bi bilo rastojanje  $p$  da je lik imaginaran?

1383. a) Predmet treba postaviti na rastojanje  $p > f$ , pri čemu će se dobiti realan i

izvnut lik. Prema uslovu zadatka je  $\frac{L}{p} = \frac{l}{p} = -4$  (1), dok je za ovaj slučaj jednačina sočiva  $\frac{1}{p} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f}$ . Kako je  $f = 0,1 \text{ m}$  i uzimajući u obzir relaciju (1), nalazi se da je  $p = 0,125 \text{ m}$ .



b) U ovom slučaju je lik imaginaran i umanjen, pa je prema znacima veličina na slici 31 (s obzirom na to što je žižna daljina rasipnih sočiva negativna)

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{l} = \frac{1}{f}$$

Prema tome, nalazi se da je  $l = 5,56 \text{ cm}$ . Veličina lika je

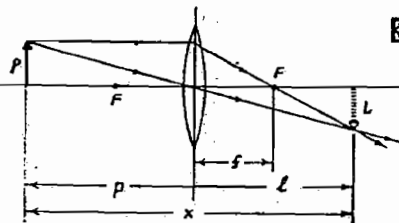
$$L = p \frac{l}{p} = 0,88 \text{ cm}$$

1384. Iz jednačine sočiva dobija se da je

$$l = \frac{pf}{p-f}$$

pa je 32

$$x = p + l = \frac{p^2}{p-f}$$



Najmanje rastojanje  $x$  nalazi se iz uslova da je  $\frac{dx}{dp} = 0$ , tj.  $\frac{p^2 - 2pf}{(p-f)^2} = 0$ , odakle se dobija da je  $p = 0$  i  $p = 2f$ , pri čemu prvo rešenje nema fizički smisao.

1385. a) 60 cm; b) 20 cm.

1386. Jednačina sabirnog sočiva je  $\frac{1}{p} + \frac{1}{l} = \omega_1$  (1), a kombinovanog  $\frac{1}{p} + \frac{1}{l + \Delta l} = \omega_1 + \omega_2$  (2), gde je  $\omega_1$  - optička moć rasipnog

sočiva. Iz relacija (1) i (2) nalazi se da je  $\omega_2 = 1,5$  dioptrija, pa je žižna daljina rasipnog sočiva  $f_2 = -0,67 \text{ m}$ .

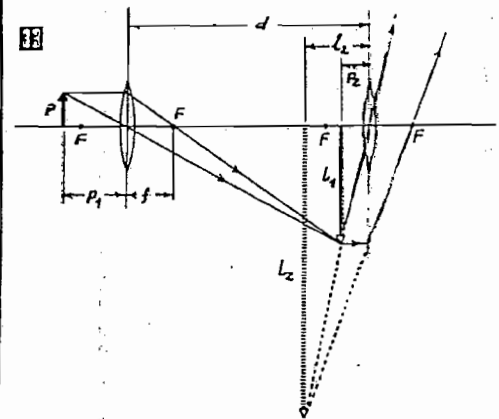
Bilo bi korisno da se dokaže da je odnos uvećanja sistema u ova dva slučaja

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\omega_1 l - 1}{(1 + \Delta l)(\omega_1 - \omega_2) - 1}$$

1387. Udaljenost lika  $L_1$  od prvog sočiva prema relaciji  $\frac{1}{p_1} - \frac{1}{l_1} = \omega$  je

$$l_1 = \frac{p_1}{p_1 \omega - 1} = 1 \text{ m}$$

Sa slike 33 se vidi da je  $p_2 = d - l_1 = 0,1 \text{ m}$ . Lik  $L_2$  je realan i on je predmet drugom sočivu, koje u ovom slučaju deluje kao lupa, pa je lik  $L_2$  imaginaran.



Iz jednačine sočiva za ovaj slučaj

$$\frac{1}{p_2} - \frac{1}{l_2} = \omega_2, \text{ pa je } l_2 = \frac{p_2}{1 - \omega_2 p_2} = 0,2 \text{ m}$$

Veličina definitivnog lika je

$$L_2 = p \frac{l_1 l_2}{p_1 p_2} = 8 \text{ mm}$$

1388. a) Jednačina sabirnog sočiva je  $\frac{1}{p} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f}$  (1), a kombinovanog sočiva  $\frac{1}{p} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$  (2), gde je  $l = 20 \text{ cm}$ ,  $f_1 = 40 \text{ cm}$ . Iz relacija (1) i (2) nalazi se da je žižna daljina rasipnog sočiva

$$f_2 = \frac{l_1 l}{l_1 - l} = 40 \text{ cm}$$

a kombinovanog  $f_e = (40/3) \text{ cm}$ .



b) U prvom slučaju je

$$u = \frac{l}{p} = \frac{l}{f} - 1 = 1$$

a u drugom

$$u_1 = \frac{l_1}{p} = \frac{l_1}{f} - 1 = 2$$

1389. Iz jednačine sočiva za prvi i drugi slučaj

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{l_1} = \omega_1; \quad \frac{1}{p_2} + \frac{1}{l_2} = \omega_2$$

a imajući u vidu da je  $u_1 = l_1/p_1$  i  $u_2 = l_2/p_2$ , pri čemu je  $u_1 = u_2 = u$ , nalazi se da je

$$p_1 = \frac{u+1}{u\omega_1} \quad \text{i} \quad p_2 = \frac{u+1}{u\omega_2}$$

odakle je

$$p = p_2 - p_1 = \frac{u+1}{u} \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1 \omega_2} = 0,64 \text{ m}$$

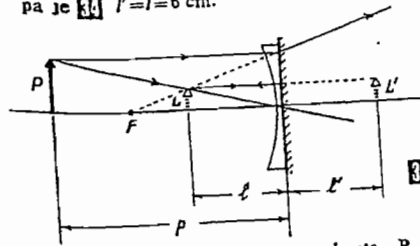
1390. Iz jednačine sočiva

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l}$$

nalazi se da je

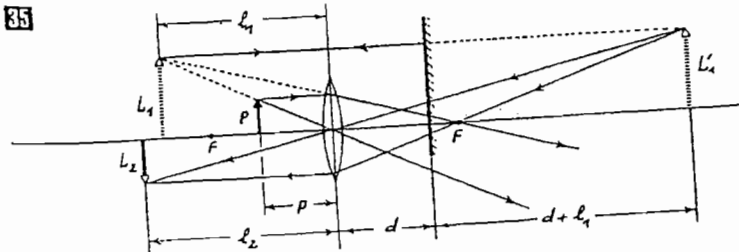
$$l = \frac{pf}{p+f} = 6 \text{ cm}$$

pa je  $l' = l = 6 \text{ cm}$ .



1391. Imaginarni lik  $L_1$  predmeta P u ogledalu udaljen je od sočiva za  $d-p$ . Kako je lik  $L_2$  realan, to je jednačina sočiva  $\frac{1}{2d-p} + \frac{1}{l} = \omega$ , gde je  $d=0,8 \text{ m}$ ,  $p=0,2 \text{ m}$  i  $\omega=2,5 \text{ D}$ .

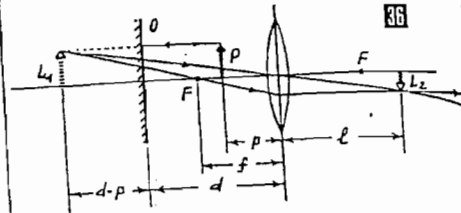
35



400

Zamenom se nalazi da je udaljenost lika  $l=0,56 \text{ m}$ , dok je veličina lika

$$L_1 = \frac{l}{2d-p} P = 0,4 \text{ m}$$



36

1392. Definitivan realan lik  $L_2$  prikazan je na slici 36. Udaljenost imaginarnog lika  $L_1$  od sočiva je  $l_1 = \frac{p_1 f}{f-p_1}$ , gde je  $p_1 = 0,6f$ . Zamenom se nalazi da je  $l_1 = 1,5f = 30 \text{ cm}$ .

Udaljenost imaginarnog lika  $L_1'$  u ogledalu od sočiva je  $p_2 = 2d + l_1 = 64 \text{ cm}$ . Realan lik  $L_2$  je udaljen od sočiva za

$$l_1 = \frac{p_2 f}{p_2 - f} = 29,1 \text{ cm}$$

Veličina ovog lika je

$$L_2 = \frac{l_1 l_2}{p_1 p_2} P = 1,36 \text{ cm}$$

1393. Lik je realan, pa je jednačina sočiva

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{d-p} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

gde je  $d=40 \text{ m}$ , a  $f=1,4 \text{ m}$ . Iz relacije (1) je

$$p = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} - df} = (20 \pm 18,6) \text{ m}$$

U fizičkom smislu, realan rezultat je

$$p = 20 \text{ m} - 18,6 \text{ m} = 1,4 \text{ m}$$

Ako je veličina slike na filmskoj traci  $24 \times 35 \text{ mm}^2$ , kolika će biti njena veličina na ekranu?

1394. Prema uslovu zadatka je  $p+l=d=15 \text{ m}$ , dok je  $u=83,3$ , pa je

$$\frac{1}{f} = \frac{1+u}{d} + \frac{1+u}{ud} = 17,5 \text{ cm}$$

$$1395. \quad \omega = \frac{(u+1)^2}{ud} = 6,8 \text{ D.}$$

1396. a)  $p \approx f$ ; b)  $3,2 \times 2 \text{ m}^2$ .

1397.  $u \approx sf = 8,3$ .

$$1398. \quad f_{ok} = \frac{ls}{uf_{ob}} = 1,25 \text{ cm.}$$

1399.  $l = 14,4 \text{ cm}$ .

$$1400. \quad \frac{1}{f_e} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{a}{f_1 f_2} = \frac{4}{3f}, \quad \text{odakle je}$$

$$f_e = \frac{3}{4} f = 9 \text{ cm.}$$

1401. Kako je  $d = f_{ok} + f_{ob}$ , a  $u = f_{ob} f_{ok}$ , to je

$$f_{ok} = \frac{d}{1+u} \approx 1,5 \text{ cm}$$

$$f_{ob} = d - f_{ok} \approx 178,5 \text{ cm}$$

1402.  $u = f_{ob} f_{ok} = 2,8$ .

1403. Uvećanje objektiv je  $u = \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} = 15 \cdot 10^{-6}$ . Kako je  $u = \frac{l}{p}$  (1), a  $\frac{1}{p} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f}$  to je prema relaciji (1)

$$f = \frac{u}{1+u} H \approx 3 \text{ cm}$$

pošto je  $p=H$ .

1404. a) Ako je  $S_1$  - površina snimka na filmu, a  $S_2$  - snimljena površina Zemlje, onda je

$$\sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \frac{l}{p} = \frac{f}{p-f} \quad (1)$$

gde je  $f=l=0,1 \text{ m}$ ,  $p=1,6 \cdot 10^3 \text{ m}$  i  $S_1 = 9 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ , pa je

$$S_2 = S_1 \left( \frac{p-f}{f} \right)^2 \approx S_1 \left( \frac{p}{f} \right)^2 = S_1 \left( \frac{d}{f} \right)^2 = 2,3 \cdot 10^9 \text{ m}^2$$

Dakle, može da se snimi površina  $48 \times 48 \text{ km}^2$ .

b)  $\frac{\Delta L}{\Delta P} = \frac{\Delta L}{vt} \approx \frac{f}{p-f}$ . Kako je  $p=d \gg f$ , veličina pomeranja na snimku iznosi

$$\Delta L \approx \frac{vtf}{d} = 0,1 \text{ mm}$$

što je zadovoljavajuće.

26 Zbirka zadataka iz Fizike D

1405. Pomeranje rakete na snimku  $\Delta L = 10^{-4} \text{ m}$  predstavlja lik pomeranja  $\Delta P = vt$  rakete po putanji, gde je  $t$  - vreme eksponiranja filma. Uvećanje objektiv je

$$u = \frac{\Delta L}{\Delta P} = \frac{l}{p} \quad (1)$$

Kako je  $\frac{1}{p} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f}$ , to je  $l = \frac{pf}{p-f}$ , a prema relaciji (1) je  $\frac{\Delta L}{vt} = \frac{f}{p-f}$ . Kako je  $p = d \gg f$ , može se smatrati da je

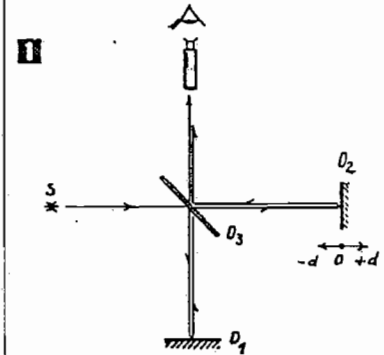
$$\frac{\Delta L}{vt} \approx \frac{f}{d}$$

odakle je

$$t \approx \frac{\Delta L d}{vf} = 0,2 \text{ ms}$$

### 3. TALASNA OPTIKA

1406. Pomeranje ogledala  $O_2$  za  $\pm d$  dovede do interferencije na polupropustljivom



ogledalu  $O_2$ , koja će se za različite vrednosti pomeranja ogledala  $O_2$  (od 0 do  $d$ ) manifestovati nastajanjem i nestajanjem interferencijalnih maksimuma, pa je

$$\lambda = \frac{2d}{k} = 390,2 \text{ nm}$$

$$1407. \quad d_{\min} = \frac{\lambda}{2n} = 0,2 \mu\text{m.}$$

1408. Posmatrač neće videti boje vidljivog spektra talasnih dužina  $\lambda_c = 4dn = 360 \text{ nm}$  i  $\lambda_s = 2\lambda_c = 720 \text{ nm}$  zbog njihovog maksimalnog slabljenja iznad sloja. Potrebno je zapaziti da će ovo poništavanje nastati i pri debljinama sloja  $d' = kd$ , gde je  $k=1, 2, 3, \dots$  kao npr.  $d' = 0,6 \mu\text{m}$ .

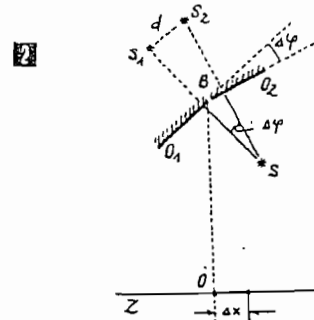
1409. a) Iz relacije  $2nd = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$  vidi se da je minimalna debljina opne za  $k=0$ .

401

Kako je  $n=1,35$ , a  $\lambda=0,48 \mu\text{m}$ , to je  $d_{\min} = \frac{\lambda}{4n} = 0,09 \mu\text{m}$ . Ostale debljine opne koje zadovoljavaju navedene uslove su  $3d_{\min}, 5d_{\min}, 7d_{\min}, \dots$

b) Talasne dužine oslabljenih boja vidljivog spektra su  $\lambda_1 = 2nd \cos \beta = 360 \text{ nm}$  i  $\lambda_2 = 2\lambda_1 = 720 \text{ nm}$ .

1410. Najpovoljniji indeks prelamanja je  $n_1 = \sqrt{n} = 1,32$ , dok je debljina  $d_{\min} = \frac{\lambda}{4n_1}$ , gde je  $\lambda = 589 \text{ nm}$  — talasna dužina žute Na svetlosti, koja odgovara sredini vidljivog dela spektra. Zamenom je  $d_{\min} = 0,112 \mu\text{m}$ .



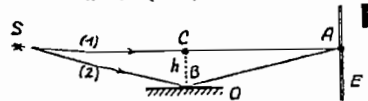
1411. Kako je ugao  $\Delta\varphi$  mali, to je  $d \approx 2SB\Delta\varphi$  i  $a \approx OB+SB$ , pa je prema poznatoj relaciji rastojanje između dve susedne interferentne pruge

$$\Delta x = \lambda \frac{a}{d} \approx \lambda \frac{OB+SB}{2SB\Delta\varphi}$$

odakle je

$$\Delta\varphi \approx \lambda \frac{OB+BS'}{2SB\Delta x} = 4^\circ 25'$$

1412.  $f = \frac{R}{n-1} = \frac{r^2}{(n-1)k\lambda} = 109 \text{ cm}$ .



1413. Prvi zrak pređe put  $s_1 = SA = l$ , dok je efektivna vrednost pređenog puta drugog zraka  $s_2 = SB - BA + \lambda/2$ , s obzirom na skok faze talasa od  $\pi$  radijana pri refleksiji od ogledala u tački B. Razlika pređenih puteva ova dva snopa je

$$s = s_2 - s_1 = SB + BA + \frac{\lambda}{2} - SA = 2SB - SA + \frac{\lambda}{2}$$

Kako je  $SB = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2}$ , a  $SA = l$ , dobija

se da je

$$\Delta s = l \left[ 1 - \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{l}\right)^2} \right] + \frac{\lambda}{2}$$

Imajući u vidu da je  $(1+a^2)^{1/2} \approx 1 + \frac{a^2}{2}$  za  $a \ll 1$ , a količnik  $2h/l$  ispunjava ovaj uslov, može se napisati da je

$$\Delta s = \frac{2h^2}{l} + \frac{\lambda}{2}$$

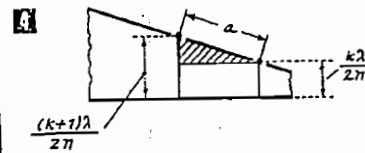
Kako je količnik

$$\frac{\Delta s}{\lambda/2} = 1 + \frac{4h^2}{\lambda l} = 9$$

dakle, neparan broj, u tački A će nastati interferencijski minimum.

Preporučujemo da procenite pri kojim dužinama  $l$  mogu da se ostvare efekti interferencije ( $l < 3 \text{ m}$ ).

1414. Iz relacije  $\beta = \arccos \left[ \frac{(2k+1)\lambda}{4nd} \right]$  nalazi se da je  $\beta_{\min} = 65^\circ$ , pošto je  $k=9$ .



1415. Iz obeleženog trougla na slici 4 je

$$\sin \alpha = \left[ \frac{(k+1)\lambda}{2n} - \frac{k\lambda}{2n} \right] \frac{1}{a} = \frac{\lambda}{2na}$$

odakle je

$$\alpha = \frac{\lambda}{2na} \text{ rad} \approx 21''$$

1416. Poluprečnik tamnih krugova je

$$r_1 = \sqrt{\frac{Rk\lambda_1}{n_1}} \quad (1), \text{ a svetlih krugova}$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{R\lambda_2(2k+1)}{2n_1}} \quad (2)$$

U oba slučaja je  $k=3$ , pa je prema relaciji (1) poluprečnik krivine sočiva  $R = \frac{n_1 r_1^2}{k\lambda_1} \approx 2 \text{ m}$ , dok je prema relacijama (1) i (2) talasna dužina

$$\lambda_2 = \lambda_1 \frac{2k}{2k+1} \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \approx 770 \text{ nm}$$

1417. Poluprečnik svetlog Njutnovog prstena u reflektovanoj svetlosti određen je

relacijom  $r_k = \sqrt{kR\lambda}$ , pa je

$$dk_1 = 2\sqrt{k_1 R\lambda} \quad \text{i} \quad dk_2 = 2\sqrt{k_2 R\lambda}$$

tj.

$$d_{k_2}^2 - d_{k_1}^2 = 4R\lambda(k_2 - k_1)$$

odakle je

$$\lambda = \frac{d_{k_2}^2 - d_{k_1}^2}{4R(k_2 - k_1)} = 500 \text{ nm}$$

1418. Sa slike 5 vidi se da je

$$(R-x)^2 + r_0^2 = R^2$$

$$[R-(d+x)]^2 + r_k^2 = R^2$$

odakle se dobija da je

$$x \approx \frac{r_0^2}{2R} \quad \text{i} \quad d+x \approx \frac{r_k^2}{2R}$$

tj.

$$d \approx (r_k^2 - r_0^2) \frac{1}{2R}$$

Razlika pređenih puteva je  $2d$ , pa je za tamne Njutnove prstenove u reflektovanoj svetlosti

$$2d = \frac{r_k^2 - r_0^2}{R} = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$$

odakle je

$$r_k = \sqrt{r_0^2 + \left(k + \frac{1}{2}\right) \lambda R} = 3,73 \text{ mm}$$

1419. Ukupna razlika puteva svetlosnih snopova koji interferišu 6 je

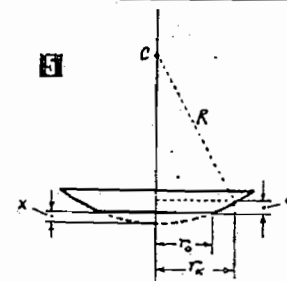
$$d = 4d_0 = 4 \frac{r_k^2}{2R} \quad (1)$$

Za tamne Njutnove prstenove u reflektovanoj svetlosti važi relacija

$$d = (2k+1) \frac{\lambda}{2} \quad (2)$$

tj. na osnovu relacija (1) i (2) je

$$\frac{2r_k^2}{R} = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$$



odakle je poluprečnik krivine sočiva

$$R = \frac{4r_k^2}{(2k+1)\lambda}$$

pa je optička moć ovog sistema sočiva

$$\omega = (n-1) \frac{2}{R} = (n-1) \frac{(2k+1)\lambda}{2r_k^2} = 2,4 \text{ D}$$

1420.  $R = \frac{\Delta r^2}{k\Delta\lambda} \approx 77 \text{ cm}$ , odnosno

$$f = \frac{R}{n-1} \approx 128 \text{ cm}$$

1421.  $\lambda = \frac{n_2(r_2^2 - r_1^2)}{sR} = \frac{n_2}{n_1 - 1} \frac{r_2^2 - r_1^2}{sf} \approx 452,3 \text{ nm}$ ,

gde je  $s = k_2 - k_1 = 20$ .

1422. Iz relacije  $\sin \theta_k = \frac{k\lambda}{a}$  za  $k=1$  i

$\sin \theta \approx \frac{\Delta s}{l}$  dobija se da je  $a = \frac{\lambda l}{\Delta s} = 0,2 \text{ mm}$ .

1423. Prema postavci zadatka, za spektar 4. reda  $k=4$  treba da bude  $\theta_k < \frac{\pi}{2}$ , odnosno

$\sin \theta_k = \frac{k\lambda}{d} < 1$ , odakle je konstanta rešetke  $d_{\min} = 4\lambda$ . Broj zarezaja je

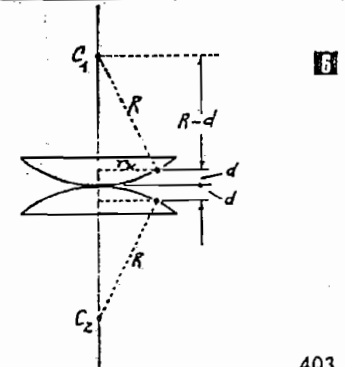
$$N > \frac{b}{d_{\min}} = \frac{b}{4\lambda} = 10^4$$

1424. a) Iz relacije  $\sin \theta_k = \frac{k\lambda}{d}$  nalazi se da je

$$k_{\max} = \frac{d \sin 90^\circ}{\lambda} = 4,8$$

što znači da je u fizičkom smislu  $k_{\max} = 4$ , tj. da difrakcionih maksimuma ima 9.

b)  $\theta_4 = \arcsin \frac{4\lambda}{d} \approx 56^\circ$ .



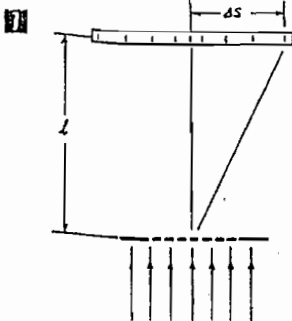
1425. Iz relacija

$$d \sin \theta_k = k\lambda$$

$$\sin \theta_k = \frac{\Delta s}{\sqrt{l^2 + (\Delta s)^2}}$$

nalazi se da je

$$l = \Delta s \sqrt{\frac{d^2}{k^2 \lambda^2} - 1} \approx 0,5 \text{ m}$$



1426.  $N = \frac{\sin \theta}{k\lambda} = 4 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{cm}}$ , tj. 4000 zarezu po svakom centimetru širine optičke rešetke,

1427. Iz relacije  $\sin \theta_k = \frac{k\lambda}{d} = 1$  dobija se da je najveći broj reda  $k = \frac{d}{\lambda} = 2,7$ , što znači da je najveći broj reda dva.

1428. Najudaljenija linija vidljivog spektra 1. reda je

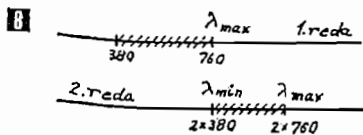
$$\Delta s_{1\text{max}} = \frac{\lambda_{\text{max}}}{d}$$

a najbliža linija spektra 2. reda

$$\Delta s_{2\text{min}} = \frac{2\lambda_{\text{min}}}{d}$$

Za  $\Delta s_{1\text{max}} = \Delta s_{2\text{min}}$  je  $\lambda_{\text{max}} = 2\lambda_{\text{min}}$ .

Kako je  $\lambda_{\text{min}} = 380 \text{ nm}$ , a  $\lambda_{\text{max}} = 760 \text{ nm}$ , nastaje delimično preklapanje spektra.



1429.  $\lambda_2 = \lambda_1 \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{3}{2} \lambda_1 = 690 \text{ nm}$ . Konstanta rešetke je  $d = \frac{2\lambda_1}{\sin \theta_1} \approx \frac{1}{94} \text{ mm}$ .

1430. Na osnovu relacije  $\sin \theta_k = \frac{k\lambda}{d}$ , imajući u vidu da je  $\sin \theta_k = \frac{\Delta s_k}{l}$ , nalazi se da je udaljenost linija spektra od sredine  $\Delta s_k = \frac{k\lambda}{d}$ , gde je za ovaj slučaj  $k=1$ . Širina spektra 1. reda je

$$\Delta s_{1\text{max}} - \Delta s_{1\text{min}} = \frac{l}{d} (\lambda_2 - \lambda_1) = 3,8 \text{ mm}$$

1431.  $\frac{\lambda}{\Delta \lambda} = kN = k \frac{b}{d} = 12500$ .

1432. Moć razlaganja optičke rešetke je  $\frac{\lambda}{\Delta \lambda} = k \frac{b}{d}$ , gde je  $\lambda = 365 \text{ nm}$ ,  $\Delta \lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 0,5 \text{ nm}$ ,  $k=2$  i  $b=3 \text{ cm}$ . Iz prethodne relacije nalazi se da je  $d = \frac{1}{438} \text{ mm}$ .

1433. Kako je za difrakcionu rešetku  $d \sin \theta_k = k\lambda$ , ugaona disperzija ove rešetke je

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{k}{d \sin \theta_k} = \frac{1}{\lambda} = 2,2 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{cm}}$$

1434. a) Na osnovu relacije  $\frac{\lambda}{\Delta \lambda} = kN$ , ukupan broj zarezu ove rešetke je  $N=570$ , pa je konstanta rešetke  $d = \frac{1}{190} \text{ cm}$ .

b)  $\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{k}{d \sin \theta_k} \approx \frac{1}{\lambda_1} = 1,78 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{cm}}$ .

1435. Iz približne relacije za moć razlaganja teleskopskog sistema  $\theta'' \approx 140''/D$  dobija se da je  $\theta'' = 4,67''$ .

1436. Moć razlaganja optičke prizme je  $\frac{\lambda}{\Delta \lambda} = b \frac{\Delta n}{\Delta \lambda}$ , pa je njena najmanja širina

$$b = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \frac{1}{\frac{\Delta n}{\Delta \lambda}} \approx 0,76 \text{ cm}$$

1437. Moć razlaganja se povećava za nominalno uvećanje objektiva  $D/d = 10$ .

1438. a)  $\Delta s_1 = \frac{\lambda}{2A} = 705 \text{ nm}$

b)  $\Delta s_2 = \frac{\Delta s_1}{n} = 427 \text{ nm}$ .

1439. a) U prvom slučaju se mogu raspoznati predmeti veličine  $\Delta s_1 = \lambda_1/2A = 0,21 \mu\text{m}$ , a u drugom  $\Delta s_2 = \lambda_2/2A = 0,42 \mu\text{m}$ , pa je povećanje moći razlaganja mikroskopa

$$\frac{\Delta s_2}{\Delta s_1} = 2 \text{ puta}$$

b)  $\Delta s_2 = 0,14 \mu\text{m}$ , pa je naredno poboljšanje  $\Delta s_1/\Delta s_2 = 1,5$  puta.

1440. Moć razlaganja oka je  $\theta \approx 1,22 \frac{\lambda}{d} \approx 1,9 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$ , dok je srednji razmak između susjednih pruga  $\Delta l \approx 0,643 \text{ mm}$ . Ako je  $d$  — najmanje rastojanje gledaoca od ekrana, onda je  $\theta \cdot d = \Delta l$ , pa je  $d < \frac{\Delta l}{\theta} \approx 3,4 \text{ m}$ .

Prema tome, gledalac treba da je na rastojanju većem od 3,4 m da ne bi zapazio pruge na ekranu.

1441. Moć razlaganja orlovog oka je  $\theta \approx 1,22 \frac{\lambda}{d} \approx 6,8 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$ . Ovom uglu odgovara dužina na zemlji  $\Delta l \approx \theta H$ . Za  $\Delta l = 5 \text{ cm}$  najveća visina je  $H \approx 74 \text{ m}$ , dok je za veće otvore zenice ova visina nešto veća.

1442. a) Moć razlaganja oka kosmonauta je  $\theta \approx 1,22 \frac{\lambda}{d}$ . Za srednju talasnu dužinu vidljivog spektra  $\lambda = 560 \text{ nm}$  i  $d = 0,5 \text{ cm}$  dobija se da je  $\lambda \approx 1,39 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$ . Ovom uglu odgovara veličina predmeta na zemlji  $\Delta l \approx \theta H \approx 34 \text{ m}$ , koje je astronaut mogao raspoznati, što može da odgovara dimenzijama prosečne zgrade gledane odozgo.

b) Ugao pod kojim se vidi čovek odozgo, prosečne širine  $l=1 \text{ m}$ , iznosi  $\theta_1 \approx l/H = 3,7 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$ , pa je potrebno uvećanje dubina  $\frac{\theta_1}{\theta} \approx 3,6$ , što znači da prečnik objektiva treba da bude  $D \approx 36d = 18 \text{ cm}$ .

1443. Prema Brusterovom zakonu je  $\text{tg } \alpha = n$ . Kako je  $\sin \alpha = \frac{1}{n}$ , to je najpogodnija veličina upadnog ugla  $\alpha_0 = \arccos \left( \frac{1}{\sin \alpha} \right) \approx 49^\circ 6'$ .

1444.  $\alpha = 53^\circ 16'$ .

1445. Indeks prelamanja stakla je  $n = \text{tg } \alpha \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ . Iz ove dve jednačine nalazi se da je  $n = \text{ctg } \alpha = 1,60$ .

1446. Prema prethodnom zadatku je  $n = \text{ctg } \beta = \text{tg } \alpha$  (1), pa je prema relaciji (1)  $\sin \alpha = n/\sqrt{1+n^2}$ . Za  $n_1 = 1,52$  je  $\alpha_1 = 56^\circ 29'$ , a za  $n_2 = 1,9$  je  $\alpha_2 = 62^\circ 14'$ . To znači da upadni ugao treba da se nalazi između dobijenih vrednosti za  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ .

1447.  $\lambda_R = 455,3 \text{ nm}$  i  $\lambda_N = 196,3 \text{ nm}$ .

1448. Ako je  $I_0$  jačina svetlosti koja pada na analizator, a  $I$  — koja prođe kroz njega, onda je prema Malusovom zakonu  $I = I_0 \cos^2 \theta$ , gde je  $\theta$  — ugao između polarizacionih ravni.

Kroz analizator ne prođe deo svetlosti  $\delta = \frac{I_0 - I}{I_0} = 1 - \cos^2 \theta$ , a prođe  $\delta' = 1 - \delta = \cos^2 \theta$ .

Zamenom se nalazi da je

za  $\theta = 30^\circ$  je  $\delta' = 0,75$ , ili 75%  
 $= 60^\circ$  = 0,25 25%  
 $= 90^\circ$  = 0 0%

1449.  $\rho = \left( \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2$ , gde je  $n_1 = 1$  — indeks prelamanja vazduha, a  $n_2 = 1,54$  — stakla. Zamenom se dobija da je  $\rho = 0,045$ . To znači da se 4,5% svetlosne energije reflektuje od ovog graničnog sloja.

#### 4. TOPLOTNO ZRAČENJE

1450.  $\frac{R_2}{R_1} = \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^4 = 10^4$ .

1451. Na osnovu Stefan-Bolcmanovog zakona je  $T = (R/\sigma)^{1/4}$ , pa je prema Vinovom zakonu pomeranja

$$\lambda_{\text{max}} = \left( \frac{b}{R} \right)^{1/4} = b \left( \frac{R}{\sigma} \right)^{-1/4}$$

Kako je  $b = 2,898 \text{ m} \cdot \text{K}$ ,  $R = 8 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2$ , a  $\sigma = 5,670 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K}^4)$ , to je  $\lambda_{\text{max}} = 2,66 \mu\text{m}$ .

1452. Snaga IR-zračenja kroz otvor na peći je

$$P = \sigma T^4 S = 17,2 \text{ kW}$$

pa je odgovarajuća energija  $E = P \Delta t = 17,2 \text{ kJ}$ .

1453.  $Q = 0,45 \sigma T^4 S t = 450 \text{ J}$ .

1454. Prema Stefan-Bolcmanovom zakonu energijski osvetljaj vlakna sijalice je  $R = \sigma T^4$ ,

gde je  $R = \frac{P'}{S} = \frac{0,4P}{\pi d l}$ , pa je temperatura vlakna

$$T = \sqrt[4]{\frac{0,4P}{\pi d l \sigma}} = 2865 \text{ K}$$

1455.  $T = \sqrt[4]{\frac{R}{\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{P}{\sigma S}} = \sqrt[4]{\frac{Q}{\sigma S t}} \approx 1800 \text{ K}$ ,

ili  $1527^\circ \text{C}$ .

1456. Snaga zračenja određena je relacijom

$$P = kRS = k\sigma T^4 \pi R^2$$

pa je temperatura sfere

$$T = \sqrt[4]{\frac{P}{4\pi k\sigma R^2}} = 1029 \text{ K}$$

Da li ova sfera može da bude od olova?

1457. Energijski osvetljaj čovečjeg tela kao sivog tela dat je relacijom

$$R = k\sigma T^4$$

Kako je  $k=0,90$ ;  $\sigma=5,670 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K}^4)$  i  $T=309 \text{ K}$ , dobija se da je energijski osvetljaj čovečjeg tela  $R=0,46 \text{ kW/m}^2$ .

1458. Prema Vinovom zakonu pomeranja, za prvo telo je

$$\lambda_{1\text{max}} = \frac{b}{T_1}$$

a za drugo  $\lambda_{2\text{max}} = \lambda_{1\text{max}} + \Delta\lambda = \frac{b}{T_1} + \Delta\lambda$ , pa je odgovarajuća temperatura

$$T_2 = \frac{b}{\lambda_{2\text{max}}} = \frac{bT_1}{b + \Delta\lambda T_1} = 1750 \text{ K}$$

1459. a)  $R = \frac{P}{S} = \frac{\eta P_1}{\pi d l} = 56,7 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$ ;

b)  $T = \sqrt[4]{\frac{R}{\sigma}} = 1000 \text{ K}$  ili  $727^\circ\text{C}$ .

1460. Energijski osvetljaj kugle određen je Stefan-Bolcmanovim zakonom  $R_0 = \sigma T^4$ , odakle je njena temperatura

$$T = \sqrt[4]{\frac{R_0}{\sigma}} \quad (1)$$

Pošto je fluks energije jednak kroz sfere površina  $4\pi(D/2)^2$  i  $4\pi d^2$ , to je

$$4\pi(D/2)^2 R_0 = 4\pi d^2 R$$

Imajući u vidu relaciju (1), nalazi se da je temperatura kugle

$$T = \sqrt[4]{\frac{2d}{D}} \cdot \sqrt[4]{\frac{R}{\sigma}} = 1450 \text{ K}$$

1461. a) Iz relacija  $R = \sigma T^4$  i  $\lambda_m T = b$  nalazi se da je

$$R = \sigma \left(\frac{b}{\lambda_m}\right)^4 \approx 65 \frac{\text{MW}}{\text{m}^2}$$

b)  $P = RS = R 4\pi R_S^2 = 4 \cdot 10^{16} \text{ W}$ ;

c)  $E = \frac{P}{4\pi d^2} \approx 1580 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 1 \text{ Mlx}$ .

Zbog apsorpcije Zemljine atmosfere, stvarna maksimalna osvetljenost je oko 10 puta manja.

1462. Za vreme  $t$  Sunce izrači ukupnu energiju

$$E = RS_S t = \sigma T^4 4\pi R_S^2 t$$

Na površini sfere  $4\pi d^2$  ( $d$ —rastojanje Zemlja—Sunce) nalazi se slobodna površina  $S$  vode u sudu. Njihov odnos  $S/4\pi d^2$  jednak je odnosu ukupne izračene energije  $E$  Sunca i energije  $E_1$  koja padne na slobodnu površinu

nu vode, pa je

$$E_1 = E \frac{S}{4\pi d^2} = \sigma T^4 4\pi R_S^2 t \frac{S}{4\pi d^2} \quad (1)$$

Ovu energiju apsorbuje voda u sudu, usled čega se njena unutrašnja energija povećava za  $Q = mc\Delta T$ . Kako je  $E_1 = Q$ , prema relaciji (1) nalazi se da je

$$T = \sqrt[4]{\frac{d}{R_S}} \cdot \sqrt[4]{\frac{mc\Delta T}{\sigma S t}} \approx 6 \text{ kK}$$

1463. Energijski osvetljaj Sunca na njegovoj površini je  $R_0 = \sigma T^4$ , a na udaljenosti Zemlje

$$R_Z = R_0 \frac{4\pi R^2}{4\pi d^2} = \sigma T^4 \left(\frac{R}{d}\right)^2$$

gde je  $d$ —rastojanje Zemlja—Sunce.

Kako je ovo snaga Sunčevog zračenja koja pada na jediničnu normalnu površinu Zemlje, odgovarajući broj fotona (od kojih svaki poseduje energiju  $h\nu = hc/\lambda$ ) iznosi

$$n = \frac{R_Z}{h\nu} = \frac{\lambda R_Z}{hc} = 3,97 \cdot 10^{21} \frac{\text{fotona}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}$$

## TEORIJA RELATIVNOSTI

### 1. SPECIJALNA I OPŠTA TEORIJA RELATIVNOSTI

1464. Iz relacije  $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  za  $\frac{l}{l_0} = 0,5$  nalazi se da je  $v = 0,866c$ .

1465.  $\Delta t = t_0 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = 1,3 \mu\text{s}$ .

1466.  $\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ , a kako je  $\Delta t = 2\Delta t_0$ ,

nalazi se da je  $v = (\sqrt{3}/2)c = 0,866c$ .

1467.  $\Delta l = l_0 - l = l_0 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \approx$

$$\approx l_0 \left( 1 - 1 - \frac{v^2}{2c^2} \right) = \frac{l_0 v^2}{2c^2} = 2,02 \text{ mm}$$

1468.  $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \infty$ , što znači da se

u ovom slučaju gubi pojam o vremenu.

1469. a) Vreme života  $\mu$ -mezona je

$$\tau = \frac{l}{v} = 20 \mu\text{s}$$

a njegovo sopstveno vreme života je

$$\tau_0 = \tau \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 2,8 \mu\text{s}$$

b) Pređeni put  $\mu$ -mezona u sistemu referencije vezanom za sam  $\mu$ -mezon, ili njegov sopstveni put je  $l_0 = v\tau_0 = 840 \text{ m}$ .

1470.  $l = 0,999\ 999\ 999\ 645\ l_0$   
 $0,999\ 999\ 999\ 303\ l_0$   
 $0,999\ 999\ 998\ 45\ l_0$   
 $0,999\ 999\ 95\ l_0$   
 $0,995\ l_0$   
 $0,966\ l_0$   
 $0,866\ l_0$   
 $0,436\ l_0$   
 $0,141\ l_0$   
 $0,044\ 7\ l_0$   
 $0,001\ 42\ l_0$   
 $0,000\ 45\ l_0$

1471. U nepokretnom sistemu referencije (vezanom za prepreku) njihovo međusobno rastojanje je

$$x = v\Delta t$$

dok je, prema STR, njihovo sopstveno rastojanje

$$\Delta x_0 = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v \Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 7,81 \text{ m}$$

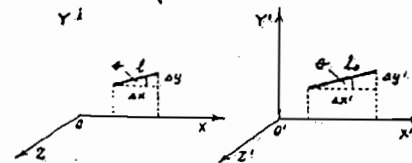
1472. Vreme života  $\mu$ -mezona u nepokretnom sistemu referencije je  $\tau = l/v$ , pa je njegovo sopstveno vreme života

$$\tau_0 = \tau \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{l}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 25 \text{ ns}$$

1473. Na osnovu Lorencovih transformacija i slike 11 je

$$\Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Delta y = \Delta y'$$



Kako je

$$l_0 = \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2}$$

dobija se da je

$$l_0 = \sqrt{\left( \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)^2 + (\Delta y)^2}$$

Pošto je

$$\Delta x = l \cos \theta$$

$$\Delta y = l \sin \theta$$

sopstvena dužina štapa je

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta} \approx 1,08 \text{ m}$$

1474. Letilica pređe put od  $s = 2r = 8,6$  svetlosnih godina, tj.  $s = 8,14 \cdot 10^{16} \text{ m}$ . Za to vreme na časovniku na Zemlji protekne vreme od  $t = s/v_0 = 75\ 329\ 630 \text{ h} \approx 9\ 000$  godina.

Vreme proteklo na časovniku u letilici biće

$$t_0 = t \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} \approx 75\ 329\ 592 \text{ h}$$

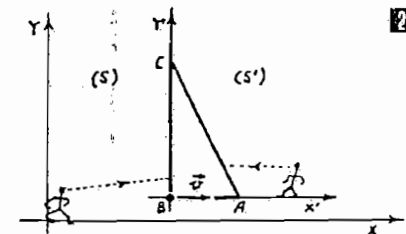
pa će razlika pokazivanja časovnika iznositi  $\Delta t = t - t_0 \approx 38 \text{ h}$ .

1475.  $v_r = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} = c$ .

1476. Relativna brzina u klasičnom smislu je  $v_k = v_1 + v_2 = c$ , a u relativističkom

$$v_r = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} = \frac{9}{11} c$$

pa je greška 18,2%.



1477. U sistemu referencije S površina trougla je u slučaju (a)

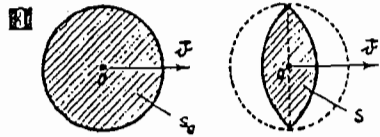
$$S = \frac{ab'}{2} = \frac{ab \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{2} = S_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

a u slučaju (b)

$$S = \frac{a'b}{2} = \frac{a \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot b}{2} = S_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

gde je  $S_0$  — površina trougla u sistemu referencije  $S'$ .

U sistemu referencije  $S$  površina trougla u oba slučaja je jednaka.



1478. U sistemu referencije vezanom za disk površina diska je

$$S_0 = \pi R_0^2$$

a u nepokretnom sistemu referencije

$$S = S_0 \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{k}{1} - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{k^2}{3} - \left(\frac{1.3 \cdot 5}{2.4 \cdot 6}\right)^2 \frac{k^3}{5} \dots \right]$$

gde je  $k = v^2/c^2$ .

1479. a) U sistemu referencije vezanom za cilindar, zapremina cilindra je

$$V_0 = S_0 h_0 = \pi R_0^2 h$$

dok je ona u nepokretnom sistemu referencije

$$V = S h_0 = V_0 \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{k}{1} - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{k^2}{3} - \left(\frac{1.3 \cdot 5}{2.4 \cdot 6}\right)^2 \frac{k^3}{5} \dots \right]$$

gde je  $k = v^2/c^2$ .

b)  $V_0 = S_0 h_0 = \pi R_0^2 h_0$ , dok je

$$V = S_0 h_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = V_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

1480. a)  $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = 1,78 \cdot 10^{-16}$  kg;

b)  $4 \cdot 10^{-11}$  kg; c)  $1,11 \cdot 10^{-17}$  kg.

1481. Relativna promena mase čestice prema Ajnštajnovoj relaciji  $E = \Delta m c^2$  je  $\frac{\Delta m}{m} = \frac{E}{m_0 c^2}$ , gde je  $E$  — energija čestice,  $m_0$  — njena

masa u mirovanju, a  $c$  — brzina svetlosti u vakuumu. Dobijeni rezultati su sređeni u priloženoj tablici.

1482. Ukupna energija čestice je  $E = m c^2$ , što se može napisati i u obliku  $\frac{E}{m_0} = \frac{\Delta m}{m_0} c^2 = n c^2$ , odakle je

$$E = n m_0 c^2 \quad (1)$$

gde je prema uslovu zadatka  $n = \Delta m / m_0 = 0,1$ .

Za deutron je  $m_0 = m_d = 3,35 \cdot 10^{-27}$  kg, pa se zamenom u (1) nalazi da je energija deutrona  $E_d = 188$  MeV.

Na isti način se nalazi da je energija protona  $E_p = 94$  MeV.

1483. Kako je  $n = \frac{m}{m_0} = 1,7$ , gde je  $m$  — masa elektrona kada se kreće brzinom  $v$ , a  $m_0$  — njegova masa u mirovanju, to je prema

relaciji  $m = m_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  brzina elektrona

$v = \frac{c}{n} \sqrt{n^2 - 1} = 0,788c$ , gde je  $c$  — brzina prostiranja svetlosti u vakuumu.

1484. Rad uložen na povećanje brzine čestice jednak je priraštaju njene kinetičke energije, pa je prema STR

$$\begin{aligned} A = \Delta E_k &= (m_2 c^2 - m_0 c^2) - (m_1 c^2 - m_0 c^2) = \\ &= m_2 c^2 - m_1 c^2 = \\ &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} - \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = 0,20 m_0 c^2 \end{aligned}$$

Međutim, prema klasičnoj fizici bilo bi

$$A' = \Delta E_k' = \frac{m_0 v_2^2}{2} - \frac{m_0 v_1^2}{2} = 0,135 m_0 c^2$$

| Čestica  | Masa $m_0$ , kg        | $\Delta m/m$          |                       |                      |         |          |
|----------|------------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|---------|----------|
|          |                        | 0,1 MeV               | 1 MeV                 | 10 MeV               | 100 MeV | 1000 MeV |
| elektron | $9,1 \cdot 10^{-31}$   | 0,1957                | 1,957                 | 19,57                | 195,7   | 1957     |
| proton   | $1,672 \cdot 10^{-27}$ | $1,065 \cdot 10^{-4}$ | $1,065 \cdot 10^{-3}$ | 0,010 65             | 0,1065  | 1,065    |
| deutron  | $3,345 \cdot 10^{-27}$ | $5,32 \cdot 10^{-5}$  | $5,32 \cdot 10^{-4}$  | $5,32 \cdot 10^{-3}$ | 0,0532  | 0,532    |

1485.  $Q = mc\Delta t = 192,8$  kJ, pri čemu prema Ajnštajnovoj relaciji odgovara povećanje mase

$$\Delta m = \frac{E}{c^2} = \frac{Q}{c^2} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ kg}$$

1486. Prema uslovu zadatka je

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = n m_0 v, \text{ tj. } n^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1, \text{ odakle je}$$

$$v = \frac{c}{n} \sqrt{n^2 - 1} = 0,87c$$

1487. Prema osnovnoj relaciji relativističke dinamike i dinamike uopšte je  $\frac{dp}{dt} = F$ , tj.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = eE$$

ili

$$d \left( \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = eE dt$$

odakle je

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = eEt + C \quad (1)$$

Konstanta  $C$  može se odrediti iz početnih uslova, tj. za  $t=0$  je  $v=0$ , pa je  $C=0$ .

Iz relacije (1) nalazi se da je

$$v = \frac{eEt}{m_0} \sqrt{1 + \left(\frac{eEt}{m_0 c}\right)^2}$$

a zamenom u relativistički izraz za kinetičku energiju

$$E_k = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

dobija se da je

$$E_k = m_0 c^2 \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{eEt}{m_0 c}\right)^2} - 1 \right] \approx 2,5 \text{ MeV}$$

1488. a)  $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}}}$ , pri čemu je  $\Delta t' =$

$= 2\Delta t$ , pa je

$$\varphi = \frac{3}{8} c^2 = 33,75 \frac{\text{PJ}}{\text{kg}}$$

$$\text{b) } \varphi = \frac{c^2}{2} = 45 \frac{\text{PJ}}{\text{kg}}$$

1489. Ako je  $T_0$  trajanje vremenskog intervala izvan dejstva gravitacionog polja, onda je njegovo trajanje na površini Zemlje

$$T_1 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{2\varphi_1}{c^2}}}$$

a na visini  $h=R$

$$T_2 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{2\varphi_2}{c^2}}}$$

pa je njihov odnos

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2\varphi_2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{2\varphi_1}{c^2}}} = \frac{1 - \frac{\varphi_2}{c^2}}{1 - \frac{\varphi_1}{c^2}}$$

jer je  $(\varphi_1/c^2) \ll 1$  i  $(\varphi_2/c^2) \ll 1$ .

Kako je  $\varphi_1 = \gamma m/R$ , a  $\varphi_2 = \gamma m/2R = \varphi_1/2$ , to je

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2c^2 - \varphi_1}{2c^2 - 2\varphi_1} > 1$$

1490. Ako je  $l_0$  — dimenzija nekog predmeta bez prisustva gravitacionog polja, onda je ona na površini Zemlje

$$l_Z = l_0 \sqrt{1 - \frac{2\varphi_Z}{c^2}}$$

a na površini Meseca

$$l_M = l_0 \sqrt{1 - \frac{2\varphi_M}{c^2}}$$

pa je

$$\frac{l_M}{l_Z} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2\varphi_M}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{2\varphi_Z}{c^2}}} = \frac{1 - \frac{\varphi_M}{c^2}}{1 - \frac{\varphi_Z}{c^2}} = \frac{c^2 - \varphi_M}{c^2 - \varphi_Z}$$

Kako je  $\varphi_M = \gamma \frac{m_M}{R_M} \approx 2,8 \text{ MJ/kg}$ , a  $\varphi_Z = \gamma \frac{m_Z}{R_Z} \approx 62,3 \text{ MJ/kg}$ , to je  $\frac{l_M}{l_Z} > 1$ .

1491.  $\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} = 1 - \frac{\lambda}{\lambda_0} = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varphi_Z}{c^2}}$

Kako je  $\frac{\varphi_Z}{c^2} \ll 1$ , to je

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = \frac{\varphi_Z}{2c^2}$$

Prema zadatku 1490. je  $\varphi_Z = 62,3 \text{ MJ/kg}$ , pa se dobija da je  $\Delta\lambda/\lambda_0 = 3,46 \cdot 10^{-10}$ .

1492. Prema OTR je

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}}}$$

pa je  $\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = 2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}}}$ , odakle je

$$\varphi = \frac{3}{8} c^2 = \gamma \frac{M_Z}{R_Z}$$

tj.  $R_Z = \frac{8\gamma M_Z}{3c^2} = 1,2 \text{ cm}$ .

1493. Prema OTR je

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}}$$

Pošto je prema uslovu zadatka  $l=0$ , to je

$$\sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}} = 0, \text{ tj. } \varphi = \frac{c^2}{2}$$

Kako je  $\varphi = \gamma \frac{M_Z}{R_Z}$ , dobija se da je traženi poluprečnik Zemlje

$$R_Z = \frac{2\gamma M_Z}{c^2} \approx 0,9 \text{ cm}$$

a njena gustina

$$\rho = \frac{M_Z}{V_Z} = \frac{M_Z}{\frac{4}{3} \pi R_Z^3} \approx 2 \cdot 10^{27} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

1494. Ako je  $T_0$  trajanje posmatranog vremenskog intervala bez prisustva gravitacionog polja, onda je ono na površini Zemlje i na visini  $h$

$$T_1 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{2\varphi_1}{c^2}}} \approx T_0 \left( 1 + \frac{\varphi_1}{c^2} \right)$$

$$T_2 \approx T_0 \left( 1 + \frac{\varphi_2}{c^2} \right)$$

pa je

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1 + \frac{\varphi_1}{c^2}}{1 + \frac{\varphi_2}{c^2}} = \frac{1 + \frac{\varphi_1}{c^2} + \frac{\varphi_2}{c^2} - \frac{\varphi_1 \varphi_2}{c^4}}{1 - \frac{\varphi_2^2}{c^4}}$$

Kako su veličine  $\varphi_1/c^2$  i  $\varphi_2/c^2$  infinitezimalne veličine drugog reda u poređenju sa veličinama  $\varphi_1/c^2$  i  $\varphi_2/c^2$ , to je

$$\frac{T_1}{T_2} \approx 1 + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}$$

Imajući u vidu da je  $\varphi_1 = \gamma \frac{M_Z}{R_Z}$ , a  $\varphi_2 =$

$= \gamma \frac{M_Z}{R_Z + h}$ , gde je  $h \ll R_Z$ , nalazi se da je

$$\varphi_1 - \varphi_2 \approx \gamma \frac{M_Z}{R_Z^2} h = gh$$

pa je

$$\frac{T_1}{T_2} = 1 + \frac{gh}{c^2}$$

gde je  $g$  — ubrzanje Zemljine teže.

1495. Ako je visina jednog sprata  $h' = 4 \text{ m}$  izvor  $\gamma$ -fotona poveća svoje rastojanje od središta Zemlje za  $h = 24 \text{ m}$ , pa je relativna promena talasne dužine (prema zad. 1491),

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2} = \frac{gh}{c^2} = 2,7 \cdot 10^{-14}$$

što je zanemarljivo.

1496. Iz uslova  $E_k + m_0 c^2 = m c^2$ , gde je

$m = m_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ , nalazi se da je brzina protona koji pri sudaru sa protonom u mirovanju uslovljava nastajanje para proton — antiproton

$$v = \frac{c}{m_0 c^2 + E_k} \sqrt{E_k (2m_0 c^2 + E_k)} \approx 0,99c$$

pošto je  $m_0 c^2 \approx 0,938 \text{ GeV}$ .

Ako se oba protona kreću jednakim brzinama, onda je njihova potrebna brzina  $v$  određena relacijom

$$\frac{v' + v'}{1 + \frac{v'^2}{c^2}} > v = 0,99c$$

odake je  $v' \approx 0,87c$ , pa je odgovarajuća kinetička energija ovih protona

$$E_k = mc^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - (0,87)^2}} - 1 \right) \approx 0,97 \text{ GeV}$$

1497. a) Prema rešenju zadatka 1496, brzina protona je  $v \approx c$ , što znači da je potrebno vreme  $t = 10^3$  svetlosnih godina, tj. kao i fotonu svetlosti.

b) Kako je  $E_k = mc^2 - m_0 c^2 = 10^{10} \text{ GeV}$ , a  $E_0 = m_0 c^2 \approx 1 \text{ GeV}$ , to je  $E_k/E_0 = 10^{10}$ .

Isto tako je

$$\frac{E_k}{E_0} = \frac{mc^2 - m_0 c^2}{m_0 c^2} \approx \frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 10^{10}$$

dok je, takode,

$$\frac{t}{t_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

pa je potrebno vreme za prolazak protona kroz Galaktiku, tj. sopstveno vreme protona

$$t_0 = \frac{t}{10^{10}} = 10^{-3} \text{ svetlosnih godina}$$

ili  $t_0 \approx 5 \text{ min}$ .

## 2. DOPLEROV EFEKAT

1498. Slepi miš će čuti reflektovani zvuk od stene, čija je frekvencija povišena i iznosi  $v_2 = v_1 \frac{c+v}{c-v}$ , gde je  $v_1 = v \frac{c}{c-v}$  — frekvencija zvučnog talasa koji nailazi na stenu,  $v$  — frekvencija zvuka koji slepi miš emituje, prema tome je

$$v_2 = v \frac{c+v}{c-v} \frac{c}{c-v} = v \frac{c+v}{c-v} = 46 \text{ 783 Hz}$$

pa je Doplerova frekvencija u ovom slučaju

$$\Delta v_d = v_2 - v = 1623 \text{ Hz}$$

1499. Kako je  $v_1 = \frac{c}{c-v} v$ , a  $v_2 = \frac{c}{c+v} v$ ,

to je brzina aviona

$$v = c \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} = 141,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 509,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

1500. a)  $v_d = v_1 - v_0 = 0,56 \text{ kHz}$

$$b) v_1 = \frac{v_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}} \approx v_0 \frac{c}{c-v}$$

odakle je

$$v = c \frac{v_1 - v_0}{v_1} = c \frac{v_d}{v_1} = 336 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

1501. Ako se vozilo približava radaru, frekvencija odbijenih elektromagnetnih talasa je

$$v_1 = v_0 \frac{c}{c-v} \approx 10 \text{ GHz} + 0,7 \text{ kHz}$$

a ako se udaljava

$$v_2 = v_0 \frac{c}{c+v} = 10 \text{ GHz} - 0,7 \text{ kHz}$$

Doplerova frekvencija u prvom slučaju je  $v_d = v_1 - v_0 = 0,7 \text{ kHz}$ , a u drugom slučaju  $v_d = -0,7 \text{ kHz}$ .

1502. Pošto je u ovom slučaju najpre izvor nepokretan (radio-lokator), a zatim izvor pokretan (avion od koga se reflektuju impulsi), to je

$$v = v_1 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}} \frac{1 + \frac{v}{c}}{c}$$

tj.

$$v = v_1 \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}} = v_0 \frac{c+v}{c-v}$$

ili

$$v_d = v - v_0 = 2v_0 \frac{v}{c}$$

odakle je brzina približavanja aviona

$$v = \frac{c v_d}{2v_0} = 250 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

1503.  $v_d = v_0 \frac{2v}{c-v} \approx v_0 \frac{2v}{c} = 30 \text{ kHz}$ .

Kolika je tačnost određivanja brzine na ovaj način?

1504. Prema relativističkom izrazu za Doplerov efekat, gde se u ovom slučaju izvor (maglina) kreće od Zemlje brzinom  $v$ , dobija se da je

$$v = v_0 \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

tj.

$$\lambda = \lambda_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}} \quad (1)$$

gde je  $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$ .

Ako se relacija (1) reši po  $\frac{v}{c}$ , dobija se jednačina oblika

$$\frac{v^2}{c^2} \left( \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} + 1 \right) - \frac{2\lambda^2 v}{\lambda_0^2 c} + \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} - 1 = 0$$

čija su rešenja  $v_1 \approx c$  (koje nema fizičkog smisla) i  $v_2 \approx 0,26c$ .

1505. Zbog rotacije Sunca oko svoje ose, dve suprotne tačke na periferiji Sunčevog diska približavaju se odnosno udaljavaju od Zemlje brzinom  $v$  (revolucija Zemlje oko Sunca i rotacija Zemlje oko sopstvene ose mogu se zanemariti) pa je na osnovu Doplerovih relacija, za  $v \ll c$

$$v = v_0 \frac{c+v}{c}$$

tj.

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$$

a kako je  $v = \omega R_S = \frac{2\pi}{T_S} R_S$ , dobija se da je

$$T_S = \frac{2\pi R_S}{v} = \frac{2\pi R_S \lambda}{c \Delta\lambda} \approx 25 \text{ dana}$$

gde je  $R_S$  — poluprečnik Sunca.

1506. Pod uslovom da je brzina kosmičkog broda znatno manja od brzine prostiranja svetlosti, tj. da važi  $v \ll c$ , brzina broda može se približno odrediti iz relacije

$$\frac{\lambda_d}{\lambda_0} = \frac{v}{c} \quad (1)$$

gde je  $\lambda_d$  — Doplerova talasna dužina,  $\lambda_0$  — talasna dužina koju emituje laser na Zemlji,  $v$  — brzina kosmičkog broda i  $c$  — brzina svetlosti u vakuumu, odakle je

$$v = c \frac{\lambda_d - \lambda_0}{\lambda_0} \approx \frac{c}{8,6}$$

Da li je u ovom slučaju korektno koristiti relaciju (1)?

1507. Kako je brzina rotacije Zemlje mnogo manja od brzine prostiranja svetlosti, može se primeniti približna Doplerova relacija za frekvenciju Fraunhoferove linije

$$v = v_0 \frac{c}{c+v}$$

na osnovu koje je

$$\Delta\lambda = \lambda_0 \frac{v}{c}$$

tj.  $\Delta\lambda = 9,6 \text{ pm}$ .

1508. Kako je brzina kapsule mnogo manja od brzine svetlosti, može se primeniti relacija

$$v = v_0 \frac{c-v}{c}$$

odakle je

$$\Delta\nu = \nu - \nu_0 = \nu_0 \frac{v}{c} = -3,48 \text{ kHz}$$

što znači da je komuniciranje moguće.

1509. Relativna širina spektralne linije je  $\Delta\lambda/\lambda$ , gde je  $\Delta\lambda$  posledica termičkog kretanja atoma vodonika. Njihova srednja kvadratna

brzina je određena relacijom  $\sqrt{\frac{3RT}{M}}$ , a

kako je prema Doplerovom efektu

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$$

to je

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{2}{c} \sqrt{\frac{3RT}{M}} \approx 1,5 \cdot 10^{-5}$$

### 3. UBRZAVAČI NAELEKTRISANIH ČESTICA

1510. a) Iz relacije  $E = eU$  nalazi se da je  $U = 3,5 \text{ kV}$ .

b) Iz relacije  $E = mv^2/2$  nalazi se da je

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

Kako je  $E = 3,5 \text{ GeV} = 5,6 \cdot 10^{-10} \text{ J}$ ,  $m = 10^{-31} \text{ kg}$ , zamenom se nalazi da je  $v = 1,06 \text{ mm/s}$ .

1511. Kinetička energija elektrona je

$$E_k = eU = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = c^2 (m - m_0)$$

odakle je

$$\frac{m - m_0}{m_0} = \frac{E_k}{m_0 c^2} = \frac{eU}{m_0 c^2} = 0,195$$

ili 19,5%.

1512. a) Poluprečnik krivine putanje za proton je  $r_p = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_p U_1}{e}}$  (1), a za nepoz-

natu česticu  $r_x = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_x U_1}{e}}$  (2). Prema us-

lovu zadatka je  $r_p = r_x$ , pa prema relacijama (1) i (2) sledi  $m_p U_1 = m_x U_1$ . Kako je  $2U_1 = U_1$ , to je  $m_x = 2m_p$ , što znači da je nepoznata čestica deutron.

b)  $eU_1 = \frac{eU_1}{2} = 0,05 \text{ MeV}$ , što ukazuje da

(prema zad. 1481) nije potrebno primenjivati relativističke stavove, pošto je energija čestica relativno mala.

c) Vreme kretanja ovih čestica kroz spektroskop je

$$t_p = \frac{T_p}{2} = \frac{\pi m_p}{eB} \approx 47 \text{ ns} \quad \text{i} \quad t_d = \frac{T_d}{2} = \frac{\pi m_d}{eB} = \frac{T_p}{4}$$

što znači da će se deutron kretati duže od protona za  $t_d - t_p = 23,5 \text{ ns}$ .

Preporučujemo da dokažete da je

$$\left[ \frac{\pi m}{eB} \right] = s$$

1513. Kinetička energija neutrona čija brzina iznosi  $v_n = 0,2c$  je

$$E_n = m_n c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = 0,0808 m_n c^2$$

Naelektrisanje deutrona je  $q = +e$ , pa je njegova energija posle ubrzanja u električnom polju  $E_d = eU$ . Iz uslova zadatka je  $eU = 0,808 m_n c^2$ , pa se zamenom dobija da je potrebna potencijalna razlika  $U = 76 \text{ MV}$ .

Preporučujemo da dokažete da je brzina deutrona posle ubrzanja  $v = 0,276c$ .

1514. a) Masa elektrona u kretanju je  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  (1), dok je njegova energija

$$E = eU = \frac{m v^2}{2} \quad (2). \text{ Iz relacija (1) i (2) dobija}$$

se da je

$$m^2 - \frac{2emU}{c^2} - m_0^2 = 0$$

odnosno

$$\left( \frac{m}{m_0} \right)^2 - \frac{2eU}{m_0 c^2} \left( \frac{m}{m_0} \right) - 1 = 0$$

Koreni ove jednačine su

$$\frac{m}{m_0} = \frac{eU}{m_0 c^2} \pm \sqrt{\left( \frac{eU}{m_0 c^2} \right)^2 + 1}$$

Kako je  $\frac{m}{m_0} > 0$ , realan koren je

$$\frac{m}{m_0} = \frac{eU}{m_0 c^2} + \sqrt{\left( \frac{eU}{m_0 c^2} \right)^2 + 1}$$

Zamenom datih vrednosti dobija se da je  $m/m_0 = 3,4$ .

$$b) v = \sqrt{\frac{2eU}{3,4 m_0}} = 1,26 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,42c.$$

$$1515. a) \frac{E_x}{E_p} = \frac{2eU}{eU} = 2.$$

$$b) \text{ Kako je } \frac{E_x}{E_p} = 2 = \frac{m_x v_x^2}{m_p v_p^2}, \text{ a } m_x \approx 4m_p, \text{ to je } \frac{v_x}{v_p} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1516. a) Proton u ciklotronu dobije energiju  $E = E_1 - E_0 = 5,1 \text{ MeV} - 0,1 \text{ MeV} = 5 \text{ MeV}$ . Kako je  $E = 2enU_m$ , to je broj obrtaja protona

$$n = \frac{E}{2eU_m} = 100$$

b) Vreme kretanja protona u ciklotronu je  $t = nT = \frac{n}{\nu} = 0,1 \text{ ms}$ .

Preporučujemo da dokažete da je brzina protona posle izlaska iz ciklotrona

$$v = \sqrt{\frac{A}{2} (-A + \sqrt{A^2 + 4c^2})}$$

gde je  $A = \frac{4E}{m_p c}$ .

1517. Poluprečnik putanje jezgra je  $r = \frac{mv}{qB}$ , gde je  $m$  — masa jezgra,  $v$  — brzina jezgra,  $q$  — njegovo naelektrisanje i  $B$  — magnetna indukcija. Kako su naelektrisanja ovih jezgara  $q = +e$ , njihova energija je  $E = eU = \frac{mv^2}{2}$ , odakle je  $mv = \sqrt{2mU}$ , odnosno

$$r = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{e}}$$

Kako je  $m_d < m_p$ , to je  $r_d < r_p$ , što znači da će u tačku  $A_1$  pasti deutron, a u  $A_2$  tritijum. Prema podacima iz tablica na kraju knjige nalazi se da je  $r_d = 20,5 \text{ cm}$ , a  $r_t = 25 \text{ cm}$ , pa je rastojanje  $A_1 A_2 = r_t - r_d = 4,5 \text{ cm}$ .

Preporučujemo da izračunate vreme kretanja ovih čestica kroz spektroskop i da dokažete da je

$$\left[ \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{e}} \right] = \text{m}$$

1518. a) Kinetička energija elektrona je

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{(m_0 + \Delta m)v^2}{2} = \frac{\left( m_0 + \frac{E}{c^2} \right) v^2}{2}$$

odakle je brzina elektrona

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m_0 + \frac{E}{c^2}}} \approx 4 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Najveći intenzitet Lorencove sile je  $F = evB = 6,4 \text{ pN}$ .

c) Iz uslova  $eU = mv^2/2$ , poluprečnik putanje elektrona je

$$r = \frac{mv}{eB} = \frac{\left( m_0 + \frac{E}{c^2} \right) v}{eB} \approx 0,22 \text{ m}$$

d) Moment impulsa elektrona je

$$L = mvr = \left(m_0 + \frac{E}{c^2}\right) vr \approx 0,4 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$$

1519. a) Prema zadatku 1481. za deuterone energije 10 MeV nije potrebno koristiti relativističke stavove, pa je kinetička energija deuteronu  $E_k = m_0 v^2 / 2$ , odakle je njegova brzina  $v = \sqrt{2E_k / m_0}$  (1). Iz uslova dinamičke ravnoteže centrifugalne i Lorencove sile je  $e_0 B = m_0 v^2 / r$  (2). Prema relacijama (1) i (2) najveći poluprečnik putanje deuteronu iznosi

$$r_{\text{max}} = \frac{1}{eB} \sqrt{2m_0 E} = 0,227 \text{ m}$$

b) Iz relacije (1) je  $v = 3,27 \cdot 10^7 \text{ m/s}$ .

1520. a)  $B = 2\pi v \left(\frac{m}{q}\right) = \pi v \left(\frac{m}{e}\right)$  (1), gde je  $v = 10^7 \text{ Hz}$  — frekvencija, dok je relativistička masa čestice

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\pi r_{\text{max}} v}{c}\right)^2}} \quad (2)$$

Kako je brzina čestice pri izlasku iz ciklotrona  $v = 2\pi r_{\text{max}} v = 9,42 \cdot 10^7 \text{ m/s}$ , prema relaciji (2) masa  $\alpha$ -čestice pri izlasku iz ciklotrona je  $m = 7,05 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ , dok je prema relaciji (1) magnetna indukcija u ciklotronu  $B = 1,38 \text{ T}$ .

b) Energija čestice pri izlasku iz ciklotrona je

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(2\pi r_{\text{max}} v)^2}{2} \approx 195 \text{ MeV}$$

c) Kako je  $E = 2nqU_m = 4neU_m$ , to je broj obrtaja  $\alpha$ -čestice u toku ubrzavanja

$$n = \frac{E}{4eU_m} = 482$$

Preporučujemo da izračunate ove veličine ne uvodeći relativističke stavove [ $B = 1,31 \text{ T}$ ,  $E = 186 \text{ MeV}$  i  $n = 464$ ].

1521. a) Kako se čestica kreće po kružnoj putanji u homogenom magnetnom polju, postoji dinamička ravnoteža između Lorencove i centrifugalne sile koje deluju na česticu, tj.

$$\frac{m_0 v^2}{r} = qvB$$

odakle se nalazi da je

$$v = \frac{rqB}{m_0} = 100 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

odnosno

$$T = \frac{2\pi m_0}{qB} = 6,5 \mu\text{s}$$

b) Na isti način je  $\frac{m_0 v^2}{r \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = qvB$ ,

tj.

$$v^2 \left[ m_0^2 + \left(\frac{rqB}{c}\right)^2 \right] = (rqB)^2$$

odakle je

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_0 c}{rqB}\right)^2}} = 0,51c$$

$$T = \frac{2\pi m_0}{qB \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 4,1 \text{ ns}$$

1522. a) Iz uslova dinamičke ravnoteže Lorencove i centrifugalne sile dobija se da je

$$\frac{m_p v^2}{r} = qvB, \text{ tj. } v = \frac{rqB}{m_p}, \text{ pa je}$$

$$E_k = \frac{m_p v^2}{2} = \frac{(rqB)^2}{2m_p} = 12 \text{ MeV}$$

b) Minimalna frekvencija izvora naizmenične struje kojom se napaja ciklotron može se dobiti iz relacije

$$m_p \omega^2 r = \frac{m_p v^2}{r}$$

tj.  $m_p (2\pi v)^2 r = \frac{m_p v^2}{r}$ , odakle je

$$v_{\text{min}} = \sqrt{\frac{m_p v^2}{4\pi^2 m_p r^2}} = \frac{1}{\pi r} \sqrt{\frac{E_k}{2m_p}} = 20 \text{ MHz}$$

1523. Čestice koje se ubrzavaju kreću se po kružnoj putanji čiji se poluprečnik stalno povećava. Njihov maksimalni poluprečnik je  $R_{\text{max}} = D/2$ .

Iz uslova jednakosti Lorencove i centrifugalne sile, maksimalna brzina čestice se dobija kao funkcija naelektrisanja, mase čestice i maksimalnog poluprečnika putanje, tj.

$$qvB = \frac{mv^2}{R}$$

odakle je

$$v_{\text{max}} = \frac{qBD}{2m}$$

pa je maksimalna energija čestice (nerelativistička)

$$E_{\text{max}} = \frac{mv_{\text{max}}^2}{2} = \frac{q^2 B^2 D^2}{4m}$$

Zamenom se dobija da je  $E_{\alpha} = 19,52 \text{ MeV}$ ;

$$E_{\text{H}} = 9,67 \text{ MeV}; E_{\text{p}} = 19,4 \text{ MeV}.$$

1524. Energija protona je

$$E = \frac{(m_0 + \Delta m)v^2}{2} \quad (1)$$

gde je  $\Delta m = \frac{E}{c^2}$ , pa je prema relaciji (1) njegova brzina

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m_0 + \frac{E}{c^2}}}$$

odnosno De Brojjeva talasna dužina

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\left(m_0 + \frac{E}{c^2}\right) v} = \frac{h}{\sqrt{2E \left(m_0 + \frac{E}{c^2}\right)}} \approx 1,2 \text{ fm}$$

1525. Energija tela u mirovanju je  $m_0 c^2$ , dok je njegova kinetička energija data relacijom

$$E_k = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

Iz uslova jednakosti ove dve energije dobija se da je potrebna brzina tela  $v = 0,87c$ .

## ATOMSKA I NUKLEARNA FIZIKA

### 1. KVANTNA PRIRODA ELEKTROMAGNETNOG ZRAČENJA. TALASNA SVOJSTVA ČESTICA

1526.  $m_0 = \frac{hv}{c^2} = \frac{E}{c^2}$ , odakle je

$$E = m_0 c^2 = 81,9 \text{ fJ} = 0,51 \text{ MeV}$$

1527.  $E = hv = \frac{hc}{\lambda} = 0,2 \text{ nJ}$ ;

$$p = mc = \frac{h}{\lambda} = 3,3 \cdot 10^{-24} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

1528. Iz relacije  $mc = \frac{hv}{c}$ , masa fotona je

$m = h/c\lambda$ , pa je

a)  $m_1 = 4,4 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$ ;

b)  $m_2 = 1,1 \cdot 10^{-21} \text{ kg}$ ;

c)  $m_3 = 1,5 \cdot 10^{-20} \text{ kg}$ .

$$1529. \lambda = \frac{hc}{E} = 0,414 \text{ fm}.$$

1530. a) Izlazni rad elektrona je

$$A_1 = hv = \frac{hc}{\lambda_{\text{max}}} = 0,375 \text{ aJ}$$

b) Prema Ajnštajnovoj relaciji za fotoelektrični efekat  $hv = A_1 + m_0 v^2 / 2$ , brzina fotoelektrona je

$$v = \sqrt{\frac{2}{m_0} \left( \frac{hc}{\lambda} - A_1 \right)} \approx 4 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

1531. a) Izlazni rad elektrona je

$$A_1 = hv = \frac{mv^2}{2} = 0,7 \text{ aJ} = 4,38 \text{ eV}$$

b) Energija fotoelektrona je

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = 0,29 \text{ aJ} = 1,81 \text{ eV}$$

c) Fotoelektrični efekat biće sprečen ako je  $eU > E_k$ , gde je  $U$  — potencijalna razlika između ploča, odnosno

$$U > E_k / e = 1,82 \text{ V}$$

1532. a) Iz relacije  $hv_1 = A_1 + e\varphi_1$ , nalazi se da je izlazni rad elektrona

$$A_1 = hv_1 - e\varphi_1 = \frac{hc}{\lambda_1} - e\varphi_1 = 5,9 \text{ eV}$$

b) U ovom slučaju je  $hv_2 = A_2 + e\varphi_2$ , odakle je potrebna potencijalna razlika

$$\varphi_2 = \frac{1}{e} \left( \frac{hc}{\lambda_2} - A_1 \right) = 120 \text{ V}$$

Potrebno povećanje potencijalne razlike je

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 119 \text{ V}$$

1533. Iz relacije  $hv = A_1 + \frac{mv^2}{2}$ , tj.

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_0} + \frac{mv^2}{2}$$

nalazi se da je

$$v = \sqrt{\frac{2hc}{m} \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right)} \approx 1,1 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

1534. Na osnovu Ajnštajnovе relacije za fotoelektrični efekat

$$hv = A_1 + \frac{mv^2}{2}$$

dobija se izraz za izlazni rad iz metala

$$A_1 = hc \frac{n^2 - (\lambda_2 \lambda_1)}{\lambda_2 (n^2 - 1)} = 1,9 \text{ eV}$$

Prema tablicama na kraju knjige dolazi se do zaključka da je reč o cezijumu.



1535. Pozitivno naelektrisanje kuglice će rasti sve dotle dok njeno električno polje ne postane toliko jako da spreči izlazak fotoelektrona iz nje. Tada je

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = e\varphi = e \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

pa je prema Ajnštajnovoj relaciji

$$h\nu = A_1 + e \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

odakle je

$$q = \left( h \frac{c}{\lambda} - A_1 \right) \frac{4\pi\epsilon_0 r}{e} = 0,19 \text{ nC}$$

1536. Kako je  $h\nu_1 = A_1 + eU_1$  i  $h\nu_2 = A_1 + eU_2$ , Plankova konstanta je

$$h = e \frac{U_1 - U_2}{\nu_1 - \nu_2} = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

1537. Stepen korisnog dejstva sijalice je  $\eta = 0,05$ , a energija jednog fotona  $h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ . Ako se u 1s oslobodi  $n$  fotona, onda je  $\frac{nhc}{\lambda} = \eta P$ . Odavde je  $n = \frac{\eta P \lambda}{hc}$ , pa je masa oslobođenih fotona tokom vremena od 1s

$$m = n \frac{h}{c} = \frac{\eta P \lambda}{hc} \frac{h}{c} = \eta \frac{P}{c^2} = 5 \cdot 10^{-17} \text{ kg}$$

Preporučujemo da se izračuna za koje vreme bi se ova masa povećala na 1 kg.

1538.  $n = \frac{\eta P}{hc} = 67 \cdot 10^{17}$  fotona/s. Kolika je snaga zračenja ove sijalice?

1539. Koeficijent refleksije crne pločice je  $\rho_1 = 0$ , pa na nju deluje sila  $F_1 = p_1 S = \frac{ES}{c}$ , gde je  $E = 0,77 \text{ kW/m}^2$  — energijski osvetljaj,  $S = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$  i  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ , pa se zamenom nalazi da je  $F \approx 0,5 \text{ nN}$ .

Koeficijent refleksije sjajne pločice je  $\rho_2 = 1$ , pa na nju deluje sila pritiska

$$F_2 = p_2 S = \frac{ES}{c} (1 + \rho^2) = \frac{2ES}{c} = 2F_1$$

Intenzitet početnog momenta koji teži da okrene krak sa pločicama A i B je

$$M = a(F_2 - F_1) = aF_1 = 2,5 \cdot 10^{-11} \text{ m}\cdot\text{N}$$

Potrebno je naglasiti da rotacija Krukovog radiometra nije posledica samo ovog spregu, već i pritiska molekula gasa ispred pločica, koji može da bude veći od svetlosnog pritiska, pri čemu se obrazuje rezultujući moment suprotnog smera.

1540. Koeficijent refleksije balona je

$$\rho = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right) = 0,053$$

pa je pritisak svetlosti na balon

$$p = \frac{E}{c} (1 + \rho) = \frac{P_k}{cS} (1 + \rho) = \frac{\eta P}{4\pi r^2 c} (1 + \rho) = 10,2 \mu\text{Pa}$$

1541. a) Zemlja prima od Sunca energiju

$$E = 1,35 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}, \text{ a pritisak svetlosti na nju je}$$

$n = \frac{E}{c} (1 + \rho)$ . Za crno telo koeficijent refleksije je  $\rho = 0$ , pa je  $p = E/c = 4,5 \mu\text{Pa}$ .

b) Na Zemlju deluje sila  $E = pS = \pi R^2 = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ Pa} \cdot 3,14 (6,87 \cdot 10^6 \text{ m})^2 \approx 2,8 \text{ MN}$ .

1542. a) Iz relacije  $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$ , gde je  $m = M/N_A = 3,34 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$  — masa jednog molekula Hg,  $E = 0,16 \cdot 10^{-12} \text{ J}$ , zamenom se nalazi da je  $\lambda = 2,95 \text{ fm}$ .

b) Kinetička energija molekula žive je  $E_k = 3kT/2$ , pa je talasna dužina

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{3kmT}} = 10,2 \text{ pm}$$

gde je  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$  — Bolcmanova konstanta.

1543. De Brojjeva talasna dužina je

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{m_0 v} \quad (1)$$

Kinetička energija čestice ubrzanje potencijalnom razlikom  $U$  je

$$E_k = qU = mc^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad (2)$$

Iz relacija (1) i (2) dobija se da je

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 qU \left( 1 + \frac{qU}{2m_0 c^2} \right)}}$$

1544. Prema De Brojjevoj relaciji  $\lambda = h/mv$  i relaciji za najverovatniju brzinu  $v_w = \sqrt{\frac{2kT^0}{m}}$ , dobija se da je

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{m \sqrt{\frac{2kT^0}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{2mkT^0}}$$

Kako je  $m = M/N_A$ , sledi

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{\frac{2MkT^0}{N_A}}} = 128 \text{ pm}$$

1545. Rastojanje dva susedna maksimuma, pri difrakciji na uzanim otvorima, dato je relacijom

$$x = \frac{\lambda a}{d}$$

gde je  $\lambda$  — talasna dužina upotrebljenog elektromagnetnog zračenja. Kako elektronima energije  $eU$  po De Brojjevoj relaciji odgovara talasna dužina

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2m_e U}}$$

traženo rastojanje je

$$x = \frac{ha}{d\sqrt{2m_e U}} = 4,9 \mu\text{m}$$

1546. a) Kako je kinetička energija elektrona  $E_k = mv^2/2 = eU$ , De Brojjeva talasna dužina je

$$\lambda_1 = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2m_e U}} = 172 \text{ pm}$$

b) S obzirom na to što je energija elektrona u ovom slučaju velika, prema STR je

$$\lambda_2 = \frac{h}{m_0 v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_k + \frac{E_k^2}{c^2}}}$$

tj.

$$\lambda_2 = \frac{h}{\sqrt{2m_0 eU + \left( \frac{eU}{c} \right)^2}} = 1,4 \text{ pm}$$

1547. Iz uslova

$$\frac{h}{mv} = \frac{h}{m_0 c}$$

tj.

$$\frac{h}{m_0 v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{h}{m_0 c}$$

nalazi se da je  $v^2 = c^2/2$ , pa je traženi odnos

$$\frac{E_k}{m_0 c^2} = \frac{1}{\left( \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1 \right)} = 0,414$$

1548. Energija upadnog fotona je

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \text{ a rasejanog } h\nu' = \frac{ch}{\lambda + \Delta\lambda}$$

Relativna promena ove energije je

$$\delta = \frac{h\nu - h\nu'}{h\nu'} = \frac{\frac{c}{\lambda} + \frac{c}{\lambda + \Delta\lambda} - \frac{c}{\lambda}}{\frac{c}{\lambda + \Delta\lambda}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

Prema relaciji za Komptonov efekat

$$\Delta\lambda = \frac{2h}{m_0 c} (1 - \cos\theta) = \frac{2h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

nalazi se da je

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{2h}{m_0 c \lambda} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Najveća relativna promena je za  $\theta = \pi$  i iznosi

$$\left( \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right)_{\text{max}} = \frac{2h}{m_0 c \lambda} = 0,0486, \text{ ili } 4,86\%$$

1549. Na osnovu prethodnog zadatka je  $\left( \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right)_{\text{max}} = \frac{2h}{m_0 c \lambda}$ . Prema uslovu zadatka granična vrednost ove promene je 0,001, pa je najveća talasna dužina  $\lambda_{\text{max}} = 4,86 \text{ nm}$ . Ovaj rezultat ukazuje da je za vidljivo, pa i UV-zračenje Komptonov efekat zanemarljiv.

1550. Relacija za Komptonov efekat

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{2h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

može se napisati u obliku

$$\frac{hc}{E_1} - \frac{hc}{E_2} = \frac{2hc}{m_0 c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

odakle je

$$E_2 = \frac{E_1 m_0 c^2}{m_0 c^2 - E_1 \cdot 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = 1,85 \text{ MeV}$$

1551. Prema Doplerovom efektu (ako se izvor kreće u pravcu gledanja) promena talasne dužine primljenog svetlosnog impulsa je  $\Delta\lambda_1 = \lambda \frac{v}{c}$ , dok je prema Komptonovom efektu promena talasne dužine pri rasejavanju fotona pod uglom  $\theta = \pi$  rad

$$\Delta\lambda_2 = \frac{hc}{m_0 c^2} (1 - \cos\theta) = 2\Delta\lambda_k$$

Za  $\Delta\lambda_1 = \Delta\lambda_2$ , nalazi se da je

$$v = \frac{2h}{m_0 \lambda} = 3,6 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

1552. Energija fotona pre rasejavanja je  $E_1 = \frac{hc}{\lambda_0}$ , a posle  $E_2 = \frac{hc}{\lambda_0 + \Delta\lambda_k}$ . Promena energije je

$$\Delta E = E_1 - E_2 = hc \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_0 + \Delta\lambda_k} \right) = \frac{hc}{\lambda_0} \frac{\Delta\lambda_k}{\lambda_0 + \Delta\lambda_k} = E_1 \frac{\Delta\lambda_k}{\lambda_0 + \Delta\lambda_k}$$

gde je  $E_1 = \frac{hc}{\lambda_0} = 2 \cdot 10^{-15} \text{ J}$  i  $\Delta\lambda_k = 2,43 \text{ pm}$ . Zamenu se nalazi da je  $\Delta E \approx 4,9 \text{ aJ} \approx 30 \text{ eV}$ .

1553.  $\lambda = \frac{2h}{m_0c} = 2\Delta\lambda_k = 4,86 \text{ pm}$ .

1554.  $E \approx 2m_0c^2 = 1,022 \text{ MeV}$ .

1555. Proces raspadanja  $\pi^0$ -mezona može se predstaviti relacijom

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$$

a prema zakonu održanja energije je

$$m_{\pi^0}c^2 = 2E_\gamma$$

pa je  $E_\gamma = m_{\pi^0}c^2/2 = 67,5 \text{ MeV}$ .

1556.  $2m_0c^2 = 2 \frac{hc}{\lambda}$  tj.  $\lambda = \frac{h}{m_0c}$ , gde je  $m = m_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ , pa se zamenu dobija da je  $\lambda = 7,47 \text{ pm}$ .

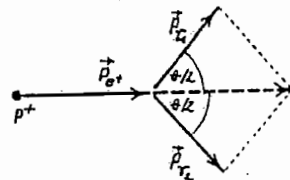
1557. Proces nestajanja može se predstaviti relacijom

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$$

i za njega važi zakon održanja impulsa i energije. Na osnovu zakona održanja impulsa je

$$\vec{p}_e = \vec{p}_{\gamma_1} + \vec{p}_{\gamma_2}$$

pri čemu je  $p_{\gamma_1} = p_{\gamma_2} = \frac{E_\gamma}{c}$ .



Ugao raštrkavanja je

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{p_e/2}{p_\gamma} = \frac{p_e c}{2E_\gamma}$$

Na osnovu zakona održanja energije je

$$m_0c^2 + m_0c^2 + E_e = 2m_0c^2 + E_e = 2E_\gamma$$

a kako je relativistički impuls pozitrona

$$p_e = \sqrt{2m_0E_e \left( 1 + \frac{E_e}{2m_0c^2} \right)}$$

dobija se da je

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{c}{2m_0c^2 + E_e} \sqrt{2m_0E_e \left( \frac{E_e}{2m_0c^2} \right)} \approx 0,856$$

odakle je  $\theta \approx 60^\circ$ .

## 2. BOROVA TEORIJA. RENDGENSKO ZRAČENJE

1558. Energija fotoelektrona koji izleću iz volframa je  $E_1 = \frac{hc}{\lambda} - A_1 = 8,6 \text{ eV}$ . Elektron koji se kreće u smeru kretanja rakete ima energiju  $E = E_1 + E_0 = E_1 + \frac{mv_0^2}{2} \approx 8,6 \text{ eV}$ , što je manje od potrebnog rada za jonizovanje atoma vodonika, koji iznosi  $A_1 = 13,6 \text{ eV}$ , pa se on neće jonizovati.

1559.  $\lambda_{\text{max}} = \frac{hc}{eU_1} = 93 \text{ nm}$ .

1560. Prema II Borovom postulatu je

$$mvr_k = nh = 2 \frac{h}{2\pi} = \frac{h}{\pi} = 2,1 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

1561.  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1^2}$ . Kako je  $q = 0,16 \cdot 10^{-18} \text{ C}$

i  $r_1 = 0,05 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ , dobija se da je

$$E = 5,76 \cdot 10^{11} \text{ N/C}$$

1562. Između jezgra atoma i elektrona na orbiti deluje privlačna električna Kulonova sila, intenziteta

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_1^2} = 9,22 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

i gravitaciona sila, intenziteta

$$F_2 = \gamma \frac{m_p m_e}{r_1^2} = \gamma \frac{1838 m_e^2}{r_1^2} = 1,9 \cdot 10^{-44} \text{ N}$$

Očigledno je  $F_1 \gg F_2$ .

1563. Za jonizovanje jednog atoma H potrebna je energija  $A_1 = 13,6 \text{ eV}$ , a za količinu vodonika od 1 mol

$$E = N_A A_1 = 81,9 \cdot 10^{11} \frac{\text{eV}}{\text{mol}}$$

1564. Kako je za Limanovu seriju  $k=1$ , a za njene granične talasne dužine je  $n=2$  i  $n=\infty$ , dobija se

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{4}{3R} = 121,7 \text{ nm}; \quad \lambda_{\text{min}} = \frac{1}{R} = 91,9 \text{ nm}$$

1565.  $\Delta E = hv = 1,86 \text{ eV}$ . Energiju  $\Delta E$  elektron izgubi pošto prelazi sa višeg na niži energijski nivo (sa udaljenije orbite na onu bližu jezgru).

1566. a) Izlazni rad elektrona iz vodonikovog atoma je  $A_1 = \frac{hc}{\lambda} = Rch \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ , gde je za ovaj slučaj  $k=2$  i  $n=\infty$ , pa je

$$A_1 = \frac{Rch}{4} = 3,4 \text{ eV}$$

b)  $v = \sqrt{\frac{2A_1}{m}} \approx 1,1 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Kolike su ove veličine ako se elektron nalazi na prvoj orbiti ( $k=1$ )?

1567. Izlazni rad elektrona iz atoma vodonika je  $A_1 = eU_1$ , gde je  $e$  - naelektrisanje elektrona,  $U_1$  - potencijal jonizacije. Takođe je

$$A_1 = hv = Rch \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Za  $k=1$  i  $n=\infty$ , nalazi se da je

$$A_1 = Rch = 13,6 \text{ eV}$$

1568. Najveća talasna dužina Balmerove serije je za  $k=2$  i  $n=3$  i iznosi  $\lambda_{\text{max}} = 36/5 R = 656,8 \text{ nm}$ , dok je najmanja talasna dužina ove serije za  $k=2$  i  $n=\infty$  i iznosi  $\lambda_{\text{min}} = 4/R = 365 \text{ nm}$ .

1569. a) Potrebna energija za pomeranje elektrona sa 1. na 2. Borovu orbitu je  $E_{1,2} = Rch \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4} Rch = 10,2 \text{ eV}$ . Ovoj energiji odgovara jedna spektralna linija.

b) Da bi se elektron pomerio na 4. orbitu, potrebno je uložiti energiju  $E_{1,4} = Rch \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2} \right) = \frac{15}{16} Rch = 12,8 \text{ eV}$ . Ovoj energiji odgovaraju tri spektralne linije. Za dve spektralne linije treba da je  $12,8 \text{ eV} > E > 10,2 \text{ eV}$ .

1570. Iz uslova  $3kT/2 > eU_1$ , dobija se da je potrebna temperatura

$$T > \frac{2}{3} \frac{eU_1}{k} = 105 \text{ kK}$$

1571. Najpovoljnije je kada se elektron kreće u smeru kretanja satelita. Da bi tada elektron mogao jonizovati atom vodonika, treba da ima najmanju brzinu

$$v = \sqrt{\frac{2eU_1}{m}} \approx 22 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Kako je brzina satelita  $v_0 \ll v$ , jonizacija neće nastati.

1572. a) Iz Kulonovog zakona

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze \cdot 2e}{r^2}$$

nalazi se da je najmanje rastojanje do koga se približila čestica-projekttil čestici-meti

$$r = e \sqrt{\frac{Z}{2\pi\epsilon_0 F}}$$

b) Na osnovu zakona održanja energije je

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze \cdot 2e}{r}$$

gde je  $m$  - masa  $\alpha$ -čestice, nalazi se da je

$$v = \sqrt{\left( \frac{e}{m} \right)^2 \frac{2ZF}{\pi\epsilon_0}}$$

Dokazati da je

$$\left[ \sqrt{\left( \frac{e}{m} \right)^2 \frac{2ZF}{\pi\epsilon_0}} \right] = \frac{m}{s}$$

1573. a) Prema relaciji  $eU = hv_{\text{max}}$  Planckova konstanta je

$$h = \frac{eU}{v_{\text{max}}} = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

b)  $E_{\text{max}} = hv_{\text{max}} = 0,06 \text{ MeV}$ ;

c)  $eU/hv_{\text{max}} = 1$ .

1574.  $U = 12,4 \text{ kV}$ .

1575. Pri udaru u anodu elektron ima energiju  $E = eU = 0,04 \text{ MeV} = 6,4 \cdot 10^{-17} \text{ J}$ . U vidu X-fotona zrači se energija  $E_1 = \eta E = 2,56 \cdot 10^{-17} \text{ J}$ . Talasna dužina ovih fotona je  $\lambda = hc/E_1 = 77,6 \text{ pm}$ .

Preporučuje se da se izračuna količina toplote koja se oslobodi na anodi za vreme  $t = 1 \text{ h}$  ako je anodna struja  $I = 0,1 \text{ mA}$ .

1576.  $\lambda_{\text{min}} = 62 \text{ pm}$ .

1577. a) Iz relacije  $\Delta\lambda = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos \theta_1)$ ,

tj.  $\Delta\lambda = \frac{2h}{m_0c} \sin^2 \frac{\theta_1}{2}$ , nalazi se da je za  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$  rad i za rasejavanje na elektronima

$$\Delta\lambda = \lambda_k = \frac{h}{m_0c} = 2,43 \text{ pm}$$

b)  $\lambda_2 = \lambda_0 + \Delta\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{m_0c} (1 - \cos \theta_2)$ . Za  $\theta_2 = (3\pi/2)$  rad je  $\cos \theta_2 = -0,5$ , pa je

$$\lambda_2 = \lambda_0 - \frac{h}{2m_0c} = \lambda_0 + \frac{\lambda_k}{2} = 121,4 \text{ pm}$$

odnosno

$$\lambda_1 = \lambda_0 + 2\lambda_k = 124,9 \text{ pm}$$

1578. Iz relacije  $\lambda = \frac{hc}{E_1 + E_0}$  nalazi se da je potrebna energija elektrona

$$E_0 = \frac{hc}{\lambda} - E_1 = \frac{mv_0^2}{2}$$

pa je njegova početna brzina

$$v_0 = \sqrt{\frac{2}{m} \left( \frac{hc}{\lambda} - E_1 \right)} \approx 7,5 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

1579. Prema Mozleovoj jednačini je

$$\frac{1}{\lambda} = R(Z-b)^2 \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

gde je  $R$  — Ridbergova konstanta,  $Z$  — redni broj elementa od koga je anoda u Periodnom sistemu i  $b=1$  (samo za K-seriju rendgenskog zračenja). Najmanja talasna dužina je za  $k=1$  i  $n=\infty$  i data je relacijom

$$\lambda_{\text{min}} = \frac{1}{R(Z-1)^2}$$

a)  $\lambda_{\text{min}} = 17 \text{ pm}$ , a potrebni napon  $U_1 > \frac{hc}{e\lambda_{\text{min}}} = 73 \text{ kV}$ ;

b)  $\lambda_{\text{min}} = 59 \text{ pm}$  i  $U_2 > 21 \text{ kV}$ .

1580. Za Mo je  $Z=42$ , a za najveću talasnu dužinu  $k=1$  i  $n=2$ , pa je prema Mozleovoj jednačini

$$\frac{1}{\lambda_{\text{max}}} = R(Z-b)^2 \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right) = 79 \text{ pm}$$

1581. Za  $b=1, k=1, n=\infty, \lambda=20 \cdot 10^{-12} \text{ m}$  nalazi se, prema Mozleovoj jednačini, da je redni broj elementa od koga treba da je načinjena anoda

$$Z > b + \sqrt{\frac{k^2}{R\lambda_{\text{min}}}} = 69$$

što odgovara volframu kao najpogodnijem metalu s obzirom na to što ima visoku temperaturu topljenja.

1582. Redni broj elementa nalazi se iz Mozleove jednačine

$$Z = b + kn \sqrt{\frac{1}{\lambda R(n^2 - k^2)}}$$

gde je  $b=1, k=1, n=2, \lambda=752 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ . Zamenom se nalazi da je  $Z=23$ , što odgovara vanadijumu.

1583. Iz relacije  $k\lambda = 2d \sin \theta$  [1], nalazi se da je za  $k=1$

$$\theta_{\text{min}} = \arcsin \frac{\lambda}{2d} = 5^\circ 44'$$

1584. Zapremina jednog mola je  $V_m = M/\rho$ , a jednog molekula  $V = M/\rho N_A$ . Kako jedan molekul kuhinjske soli ima 2 jona, zapremina jednog jona je  $V_j = M/2\rho N_A$ , a približna dužina stranice kristalne kocke

$$d = \sqrt[3]{V_j} = \sqrt[3]{\frac{M}{2\rho N_A}} = 280 \text{ pm}$$

pa je najmanji ugao upadnog rendgenskog zračenja prema kristalnim ravnima NaCl

$$\theta = \arcsin \frac{\lambda}{2d} = 7^\circ 48'$$

### 3. HAJZENBERGOVE RELACIJE NEODREĐENOSTI

1585. Prema Hajzenbergovoj relaciji je

$$\Delta x \cdot \Delta(mv) \approx \hbar$$

tj.

$$\Delta v \approx \frac{\hbar}{\Delta x \cdot m}$$

Kako je  $\Delta x = a$  i  $v = \sqrt{2E_k/m}$ , dobija se da je

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\hbar}{avm} = \frac{\hbar}{a\sqrt{2mE_k}}$$

1586. Prečnik 1. Borove orbite je

$$d = \frac{8\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}$$

pa je neodređenost brzine elektrona na njoj

$$\Delta v \approx \frac{\hbar}{dm} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 \hbar}$$

Kako je brzina elektrona na ovoj orbiti

$$v = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar}$$

dobija se  $\Delta v/v \approx 0,50$ , ili 50%.

1587. Prema relaciji neodređenosti je

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx \hbar$$

pa se za  $\Delta x = \frac{\hbar}{mv_x}$  dobija da je

$$\frac{\hbar}{p_x} \Delta p_x \approx \frac{\hbar}{2p_x}$$

tj.  $\frac{\Delta p_x}{p_x} \approx \frac{1}{2} = 0,16$ , ili 16%.

1588. Prema relaciji neodređenosti

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx \hbar$$

dobija se da je neodređenost brzine elektrona

$$\Delta v_e \approx \frac{\hbar}{\Delta x \cdot m_e} = 1,1 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

a protona

$$\Delta v_p \approx \frac{\hbar}{\Delta x \cdot m_p} = 6,3 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

dok je za za kuglicu

$$\Delta v_k \approx \frac{\hbar}{\Delta x \cdot m_k} = 1,05 \cdot 10^{-22} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

1589. Prema relaciji

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar$$

gde se za neodređenost vremena može uzeti da je reda veličine samog trajanja pobudnog stanja, tj.  $\Delta t \approx \tau$ , pa je

$$\Delta E \approx \frac{\hbar}{\tau} = 6,6 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$$

1590. Ako se pretpostavi da je neodređenost vremena trajanja pobudnog stanja atoma jednako trajanju tog stanja, tj.  $\Delta t = \tau$ , imajući pri tom u vidu da je energija fotona  $E = \hbar\omega$ , a njena neodređenost  $\Delta E = \hbar \cdot \Delta\omega$ , dobija se da je

$$\hbar \cdot \Delta\omega \cdot \tau \approx \hbar$$

odakle je

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx \frac{1}{\omega\tau} = \frac{\lambda}{2\pi c\tau} = 3 \cdot 10^{-4}$$

1591.  $\langle E_k \rangle \approx \frac{\hbar^2}{2ma^2} \approx 3 \text{ eV}$ ;

$$\langle v \rangle = \frac{\langle p \rangle}{m} \approx \frac{\hbar}{ma} \approx 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

1592.  $\Delta x \approx \frac{\hbar}{\Delta(mv)} = \frac{\hbar}{m\Delta v} \approx 10^{-4} \text{ m}$ .

1593. Ako se pretpostavi da atom ima linearne dimenzije  $a$ , tada će se elektron na-

laziti u prostoru dimenzija  $a$  pa će neodređenost njegove koordinate biti  $\Delta x = a$ .

Najveća neodređenost impulsa elektrona može da bude jednaka samom impulsu tj.  $\Delta p \approx p = \sqrt{2mE_k}$ , pa se minimalne dimenzije atoma dobijaju iz relacije neodređenosti  $\Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar$ . Naime,

$$a_{\text{min}} \approx \frac{\hbar}{\Delta p} = \frac{\hbar}{\sqrt{2mE_k}} = 0,25 \text{ nm}$$

1594.  $\Delta x \approx \frac{\hbar}{m\Delta v} \approx 1,5 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ . Imajući u vidu da su dimenzije atoma reda veličine  $10^{-10} \text{ m}$ , a atomskog jezgra  $10^{-14} \text{ m}$ , rezultati Raderfordovog eksperimenta mogu se smatrati pouzdanim.

1595. Prema relaciji neodređenosti je

$$\Delta r \cdot m\Delta v_r \approx \hbar$$

pa je

$$\text{a) } \Delta v_r \approx \frac{\hbar}{m\Delta r} \approx 0,06 \frac{\text{m}}{\text{s}};$$

$$\text{b) } \Delta r \approx \frac{\hbar}{m\Delta v_r} \approx 3 \text{ nm}.$$

$$1596. \langle p \rangle \approx \frac{\hbar}{a} = 10^{-21} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}};$$

$$\langle v \rangle = \frac{\langle p \rangle}{m} = 10^{-28} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Rezultati ukazuju da se novčić nalazi u mirovanju, tj. da u Njutnovo mehanici Hajzenbergove relacije neodređenosti nemaju onakav značaj kao u kvantnoj fizici ili fizici mikročestica.

1597. Iz uslova dinamičke ravnoteže Kulonove i centrifugalne sile koje deluju na elektron

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

nalazi se da je kinetička energija elektrona

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \quad (1)$$

Kako je ovaj elektron lokalizovan u oblasti dimenzija  $a \approx 2r$ , njegova kinetička energija je

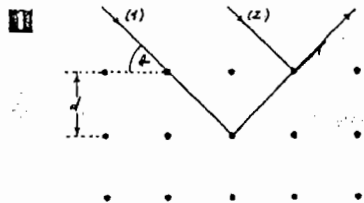
$$\langle E_k \rangle \approx \frac{\hbar^2}{2ma^2} = \frac{\hbar^2}{8mr^2} \quad (2)$$

pa je prema relacijama (1) i (2)

$$r \approx \frac{\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}$$

1598. Srednji impuls elektrona u oblasti lokalizacije je

$$\langle p \rangle \approx \frac{\hbar}{a} \approx 10^{-21} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$



Kako je

$$\langle p \rangle = mv = \frac{m_0 \frac{v}{c} c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

tj.

$$\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\langle p \rangle}{m_0 c} \approx 360$$

na osnovu čega se zaključuje da je  $v/c \approx 1$ , tj. da kretanje elektrona spada u oblast relativističke mehanike, pa je

$$\langle E_k \rangle \approx \langle p \rangle c \approx 200 \text{ MeV}$$

1599. Ako je koncentracija slobodnih elektrona u metalu  $n$ , njihova oblast lokalizacije iznosi

$$a = n^{-1/3} \approx 2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

pa je njihov srednji impuls

$$\langle p \rangle \approx \frac{h}{a} \approx 5 \cdot 10^{-25} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

Prema zadatku 1598. je

$$\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\langle p \rangle}{m_0 c} = 2 \cdot 10^{-3}$$

odakle je  $v/c \approx 2 \cdot 10^{-3}$ , što znači da je brzina slobodnih elektrona u metalu mala i da je u oblasti Njutnove (nerelativističke) mehanike, pa je

$$\langle E_k \rangle \approx \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{2m} \approx 1 \text{ eV}$$

1600. Broj neutrona u pulsaru je

$$N = \frac{m}{m_0} = 1,2 \cdot 10^{27}$$

a njihova koncentracija

$$n = \frac{N}{\frac{4}{3} \pi r^3} \approx 3 \cdot 10^{14} \frac{1}{\text{m}^3}$$

pa su dimenzije oblasti lokalizacije

$$a = n^{-1/3} = 1,5 \cdot 10^{-13} \text{ m}$$

Srednji impuls neutrona u pulsaru je  $\langle p \rangle \approx \frac{h}{a} \approx 7 \cdot 10^{-20} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ , pa se na način poka-

zan u zadatku 1598 nalazi da je

$$\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\langle p \rangle}{m_0 c} = 0,14$$

odakle je  $v/c \approx 0,14$ . To znači da je kretanje neutrona nerelativističko, a njegova kinetička energija

$$\langle E \rangle \approx \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{2m} \approx 9 \text{ MeV}$$

1601. Kinetička energija molekula u okolini apsolutne nule je  $E_k = \frac{3}{2} kT$ , što odgovara energiji lokalizovane čestice, pa je

$$\frac{3}{2} kT = \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{2m_0}$$

odakle je

$$T \approx \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{3k m_0} \approx 2 \text{ mK}$$

gde je  $m_0 \approx 7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ .

#### 4. RADIOAKTIVNOST

1602. Aktivnost posmatrane količine radioaktivne supstancije data je izrazom

$$A = A_0 e^{-\lambda t}$$

gde je  $A_0 = \lambda N_0$  — njena početna aktivnost. Konstanta radioaktivnosti je  $\lambda = (\ln 2)/T$ , a broj atoma u početnom trenutku  $N_0 = mN_A/M$ . Zamenu se dobija da je

$$A_0 = \frac{\ln 2}{T} \frac{mN_A}{M} = 66,8 \text{ PBq}$$

pa je tražena aktivnost posle vremena  $t$

$$A = A_0 2^{-t/T} = 81,6 \text{ TBq}$$

1603.  $A = A_0 e^{-\lambda t} = A_0 2^{-t/T} = 1,43 \text{ MBq}$ .

1604. Molarna masa radijuma je  $M = 0,226 \text{ kg/mol}$ . Pošto količina radijuma  $n = 1 \text{ mol}$  sadrži Avogadrov broj atoma, to se u jednom gramu radijuma nalazi

$$N = nN_A = \frac{m}{M} N_A = 2,66 \cdot 10^{21} \text{ atoma}$$

Konstanta radioaktivnosti je  $\lambda = A/N$ , gde je  $A = 3,62 \cdot 10^{10} \text{ 1/s}$  — aktivnost posmatrane količine radijuma, pa se zamenu nalazi da je  $\lambda = 1,36 \cdot 10^{-11} \text{ 1/s}$ . Period poluraspada radijuma je  $T_{Ra} = (\ln 2)/\lambda = 1617 \text{ godina}$ .

Koliko je vreme života Ra?

1605. Broj raspadnutih jezgara je

$$N = N_0 - N = N_0 - N_0 e^{-\lambda t}$$

odnosno

$$N = N_0(1 - e^{-\lambda t})$$

Kako je  $N_0 = \frac{m}{M} N_A$ , to je

$$N = \frac{m}{M} N_A (1 - e^{-\lambda t}) = 9,3 \cdot 10^{11}$$

pošto je  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ 1/mol}$ ,  $M = 0,24 \text{ kg/mol}$ .

1606. Broj neraspadnutih jezgara u uzorku

$^{21}\text{Mg}$  koji se ispituje je

$$N_1 = N_0 e^{-\lambda_1 t}$$

$$N_2 = N_1 e^{-\lambda_2 \Delta t} = N_0 e^{-\lambda_1 \Delta t}$$

pa je broj raspadnutih jezgara (emitovanih  $\beta$ -čestica) za vreme  $\Delta t$

$$n_1 = N_0 - N_1 = N_0 (1 - e^{-\lambda_1 \Delta t}) \quad (1)$$

a posle vremena  $3\Delta t$

$$n_2 = N_1 - N_2 = N_0 (1 - e^{-3\lambda_1 \Delta t}) \quad (2)$$

Kako je  $n_2 = 2,26 n_1$ , prema relacijama (1) i (2) sledi

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{1 - e^{-\lambda_1 \Delta t}}{2,26 (1 - e^{-3\lambda_1 \Delta t})}$$

odakle je

$$\lambda = \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{2,26 e^{\lambda_1 \Delta t} - 1}{1,26 e^{\lambda_1 \Delta t}} = 0,28 \frac{1}{\text{s}}$$

1607. Broj nastalih atoma RaA je

$$N_{RaA} = N_0 - N = N_0 (1 - e^{-\lambda t}) = N_0 (1 - e^{-t/T})$$

gde je  $N_0 = 10^6$  atoma,  $t = 2 \text{ h}$ , a  $T = 3,82 \times 24 \text{ h} \approx 92 \text{ h}$ , pa se zamenu dobija da je  $N_{RaA} = 1,5 \cdot 10^4$  atoma.

Preporučujemo da izračunite masu RaA.

1608. Broj neraspadnutih atoma u trenutku  $t_1$  je  $N_1 = N_0 e^{-\lambda t_1}$  a u trenutku  $t_2$  je  $N_2 = N_0 e^{-\lambda t_2}$ . Procenat raspadnutih atoma je

$$\frac{N_1 - N_2}{N_1} = 0,1 = 1 - e^{-\lambda t_2} \quad (\text{ako je } t_1 = 0) \quad (1)$$

Iz relacije (1) nalazi se da je konstanta radioaktivnosti  $\lambda = (\ln 0,9)/t_2 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ 1/s}$ .

Preporučujemo da izračunate period poluraspada ( $T = 6,4 \text{ h}$ ).

$$1609. \lambda = 4,5 \cdot 10^{-11} \frac{1}{\text{s}}; v = \frac{1}{\lambda} \approx 7 \cdot 10^9 \text{ godina.}$$

1610. Aktivnost posmatrane količine radijuma je  $A = 3,62 \text{ GBq}$ , pa broj atoma helijuma nastalih u toku vremena od 1 s iznosi

$N_1 = 3,62 \cdot 10^9$ , a u toku vremena od jednog meseca  $N = 9,36 \cdot 10^{12}$ .

Masa nastalog helijuma je

$$m = \frac{\rho M V^0}{RT^0} = 5,6 \cdot 10^{-1} \text{ g}$$

1611. Kako je početna aktivnost  $^{11}\text{Na}$  poznata, aktivnost posle vremena  $t$  iznosi

$$A_1 = A_0 e^{-\lambda t} = A_0 2^{-t/T}$$

pa je ukupna zapremina krvi ovog čoveka

$$V_k = \frac{A_1}{A_1'} = \frac{A_0}{A_1'} 2^{-t/T} \approx 6 \text{ dm}^3$$

1612. a) Odgovarajuća snaga zračenja iznosi

$$P = E_{\alpha} A = 0,031 \text{ W}$$

pa se u toku vremena  $t = 1 \text{ h}$  oslobodi količina toplote  $Q = Pt = 111,6 \text{ J}$ .

b) Vreme života radona je  $v = 1/\lambda = 132 \text{ h}$ , pa je emitovana količina toplote za vreme  $v$  jednaka  $Q = Pv = 14,73 \text{ kJ}$ .

1613. Prema uslovu radioaktivne ravnoteže produkata raspada RaD, RaE i Po, broj emitovanih  $\beta$ -čestica (koji iznosi  $10^3$ ) iz RaD i RaE jednak je broju emitovanih  $\alpha$ -čestica iz Po. Isto tako je

$$\lambda_{RaD} \cdot N_{RaD} = \lambda_{RaE} \cdot N_{RaE} = \lambda_{Po} \cdot N_{Po} = A \quad (1)$$

Kako je  $T_{RaD} = \frac{0,693}{\lambda_{RaD}} = 22 \text{ godine} = 6,9 \cdot 10^4 \text{ s}$ , odgovarajuća konstanta radioaktivnosti je  $\lambda_{RaD} = 10^{-5} \text{ 1/s}$ , pa je broj atoma RaD u pre-

paratu  $N_{RaD} = \frac{A}{\lambda_{RaD}} = 10^{14}$ . Na sličan način

se dobija da je  $N_{RaE} = \frac{A \cdot T_{RaE}}{0,693} = 6,2 \cdot 10^{10}$

atoma i  $N_{Po} = \frac{A \cdot T_{Po}}{0,693} = 1,75 \cdot 10^{12}$  atoma.

Preporučujemo da izračunate odgovarajuću masu sastojka.

1614. Iz reakcije za radioaktivnu ravnotežu

$$\lambda_{234} \cdot N_{234} = \lambda_{231} \cdot N_{231} \quad \text{ili} \quad \frac{T_{234}}{T_{231}} = \frac{\lambda_{231}}{\lambda_{234}} = \frac{N_{234}}{N_{231}}$$

dobija se da je  $T_{234} = 6 \cdot 10^{-1} \cdot T_{231}$ , pa je period poluraspada  $T_{234} = 2,7 \cdot 10^4 \text{ godina}$ .

1615. Prema šemi (u tabl. 55) nastaje RaC, čije je vreme života

$$v = T/\ln 2 = 28,4 \text{ min}$$

1616. U slučaju radioaktivne ravnoteže je  $A_{Ra} = A_{Rn}$ , tj.

$$\lambda_{Rn} \cdot N_{Rn} = \lambda_{Ra} \cdot N_{Ra} = A_{Ra} = 36,2 \text{ GBq}$$

pa je

$$N_{Ra} = \frac{e^{-\lambda t} R_a}{\ln 2} = 17,2 \cdot 10^{13} \text{ atoma}$$

iii

$$n = \frac{N_{Ra}}{N_A} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ mol}$$

uj.

$$V = nV^0 = 67,2 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3$$

Masa nastalog gasa je  $m = nM_{Ra} = 6,7 \cdot 10^{-9} \text{ kg}$ .

1617. Ako je debljina prve pločice  $d'$ , onda je intenzitet  $\gamma$ -zračenja iza prve i druge pločice

$$I_1 = I_0 e^{-\mu d}$$

$$I_2 = I_0 e^{-\mu(d'+d)}$$

gde je  $I_0$  — intenzitet  $\gamma$ -zračenja ispred prve pločice. Iz prethodnih relacija se dobija da je

$$\frac{I_1}{I_2} = e^{\mu d}$$

odakle je linearni koeficijent apsorpcije

$$\mu = \frac{1}{d} \ln \frac{I_1}{I_2}$$

Kako je  $I_1 = k(z_1 - z_0)$  i  $I_2 = k(z_2 - z_0)$ , to je

$$\mu = \frac{1}{d} \ln \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} = 137 \frac{1}{\text{m}}$$

uj.

$$\mu_2 = \frac{\mu}{\rho} = 0,0163 \frac{\text{m}^2}{\text{kg}}$$

1618. Potrebna masa urana je

$$m_1 = \frac{P t M}{E_{\gamma} N_A} = 961 \text{ kg}$$

a kamenog uglja

$$m_2 = \frac{P t}{4k\tau_2} = 7,2 \cdot 10^4 \text{ kg}$$

$$1619. m = \frac{s F_0 M}{\tau E N_A} = 0,105 \text{ kg.}$$

1620. Apsorbovana doza jonizujućeg zračenja iznosi

$$D_a = \frac{E}{m} = 0,13 \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 0,13 \text{ Gy}$$

dok je brzina apsorbovane doze

$$D_a = \frac{D_a}{t} = 6 \frac{\mu\text{Gy}}{\text{s}}$$

1621. Apsorbovana doza zračenja je

$$D_a = \frac{E}{m} = \frac{n E_x}{m} = 0,392 \text{ Gy}$$

a odgovarajuća ekvivalentna doza

$$D_e = K D_a = 7,84 \text{ Sv}$$

1622. Broj jonskih parova koje obrazuje ovo zračenje u vazduhu koji se nalazi u komori je

$$N_j = \frac{I t}{e}$$

pa je ekspoziciona doza

$$D_{exp} = \frac{N_j e}{m} = \frac{I t}{\rho V} = 77,5 \frac{\mu\text{C}}{\text{kg}}$$

1623. Ekspoziciona doza kojoj je izložen čovek iznosi

$$D_{exp} = D'_{exp} t$$

gde je  $D'_{exp}$  — snaga ekspozicione doze kosmičkog zračenja. Kako je

$$D'_{exp} = \frac{q}{m \Delta t} = \frac{N_j e}{\rho V \Delta t}$$

dobija se da je

$$D_{exp} = \frac{N_j e}{\rho V \Delta t} t = 89,3 \frac{\text{nC}}{\text{kg}}$$

gde je  $N_j = 120$  — broj jonskih parova,  $e = 0,16 \cdot 10^{-11} \text{ C}$  — elementarno naelektrisanje,  $\rho = 1,29 \text{ kg/m}^3$  — gustina vazduha (ako se vazduh nalazi na standardnim uslovima),  $V = 10^{-6} \text{ m}^3$  — posmatrana zapremina vazduha.

1624. Broj jonizovanih molekula vazduha u količini vazduha, mase  $m = 1 \text{ kg}$ , iznosi

$$N_j = \frac{D_{exp}}{e} m = 2 \cdot 10^{13}$$

Ukupni broj molekula u posmatranoj količini vazduha je

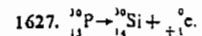
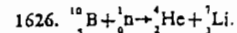
$$N = \frac{m}{M} N_A = 2,08 \cdot 10^{25}$$

pa broj jonizovanih molekula vazduha, izražen u procentima, iznosi

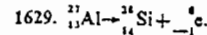
$$\frac{N_j}{N} 100\% = 9,6 \cdot 10^{-9} \%$$

## 5. NUKLEARNE REAKCIJE

1625.  ${}^{14}_7\text{N} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{14}_6\text{C} + {}^1_1\text{H}$ . Na osnovu ove reakcije određuje se starost predmeta.



1628.  ${}^9_4\text{B} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{12}_6\text{C} + {}^1_0\text{n}$ . Kako bi izgledala ova relacija kada bi se  ${}^9_4\text{B}$  bombardovao deuteronomima  ${}^2_1\text{H}$ ?



1630. a)  $13p + 12n$ , b)  $3p + 2n$ ;  
c)  $15p + 17n$ , d)  $55p + 85n$ ;  
e)  $92p + 143n$ .

$$1631. \Delta m = 8,44 \cdot 10^{-26} \text{ kg.}$$

$$1632. \Delta m = m_n - m_p = m_e + \frac{E}{c^2} \approx 23 \cdot 10^{-31} \text{ kg.}$$

1633.  $E = mc^2 = 931,5 \text{ MeV}$ . Kolika je tačnost oba rezultata?

1634. Energija veze je  $E_v = \Delta mc^2$  — gde je (zanemarujući energiju veze elektrona)  $\Delta m = 4m_p + 5m_n - m_B = 0,0602 \text{ u}$ . Ovome odgovara energija

$$E_v = 0,0602 \text{ u} \cdot 931,5 \frac{\text{MeV}}{\text{u}} = 56,1 \text{ MeV}$$

1635.  $E_p = 931,5 \text{ MeV/u}$  [ $Zm_H + (A-Z) \times m_n - m_X$ ] =  $104,6 \text{ MeV}$ . Odgovarajuća energija veze po nukleonu je

$$E = E_p/A = 7,47 \text{ MeV}$$

1636. Defekt mase je

$$\Delta m = Zm_H + (A-Z)m_n - m_{\text{He}} = 0,030486 \text{ u,}$$

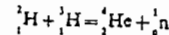
pa je odgovarajuća energija veze

$$E_v = \Delta mc^2 = 28,4 \text{ MeV}$$

1637.

| Jezero           | ${}^2_1\text{H}$ | ${}^3_1\text{H}$ | ${}^6_3\text{Li}$ | ${}^{12}_6\text{C}$ | ${}^{16}_8\text{O}$ | ${}^{238}_{92}\text{U}$ |
|------------------|------------------|------------------|-------------------|---------------------|---------------------|-------------------------|
| Energ. veze, MeV | 2,22             | 7,97             | 37,8              | 92,1                | 127,6               | 1802                    |

1638. Najveća energija se dobija pri nuklearnoj reakciji



Pri sintezi jednog jezgra helijuma oslobađa se energija

$$E_1 = (m_1 {}^1_1\text{H} + m_2 {}^1_1\text{H} - m_3 {}^4_2\text{He} - m_4 {}^1_0\text{n}) c^2 = 931,5 \text{ MeV/u} = 17,6 \text{ MeV} = 2,82 \text{ pJ}$$

Broj jezgara helijuma u 1 kg je

$$N = n N_A = \frac{m}{M} N_A = 1,5 \cdot 10^{24}$$

pa je ukupna energija oslobođena pri ovoj sintezi

$$E = N E_1 = 0,423 \text{ PJ}$$

1639. a) Zbir masa čestica pre reakcije je  $\Sigma m_1 = 3,0170 \text{ u} + 2,01474 \text{ u} = 5,03174 \text{ u}$ , a posle ostvarene reakcije  $\Sigma m_2 = 4,003876 \text{ u} + 1,00795 \text{ u} = 5,011826 \text{ u}$ . Razlika ovih masa je  $\Delta m = \Sigma m_1 - \Sigma m_2 = 0,02028 \text{ u}$ . Ovaj masi odgovara energija od  $18,9 \text{ MeV}$ , odnosno oslobođena količina toplote  $Q_1 = 3 \text{ pJ}$ .

b) Na isti način se dobija da je  $Q_2 = 8,84 \text{ pJ}$ .

Kako je  $Q_2 > Q_1$ , znači da je reakcija (a) energetski povoljnija.

$$1640. E = 1,05 \text{ MeV.}$$

$$1641. \text{ a) } 3,6 \text{ pJ};$$

$$\text{ b) } 3,61 \text{ TJ.}$$

1642. Masa čestica pre reakcije je  $\Sigma m_1 = 14,00753 \text{ u} + 4,00387 \text{ u} = 18,0114 \text{ u}$ , a posle reakcije  $\Sigma m_2 = 17,00450 \text{ u} + 1,008145 \text{ u} = 18,01264 \text{ u}$ . Odgovarajući defekt mase je  $\Delta m = 0,00124 \text{ u}$ , pa je energija potrebna za ovu reakciju  $E \approx 1,15 \text{ MeV}$

1643. Zbir masa čestica pre reakcije je  $\Sigma m_1 = 7,0182 \text{ u} + 1,0081 \text{ u} = 8,0263 \text{ u}$ , a posle reakcije  $\Sigma m_2 = 2 \cdot 4,0039 \text{ u} = 8,0078 \text{ u}$ , pa je njihova razlika  $0,0185 \text{ u}$ . Ovome odgovara oslobođena energija  $E = 1,72 \text{ MeV}$

1644. Za ovu nuklearnu reakciju potrebno je utrošiti energiju od  $8,61 \text{ MeV}$ , dok energija bombardujućih protona iznosi  $0,125 \text{ MeV}$ , pa je prema zakonu održanja energije, energija svake  $\alpha$ -čestice

$$E = 8,62 \text{ MeV} - 0,125 \text{ MeV} = 8,495 \text{ MeV}$$

1645. Uložena snaga ove centrale je  $P = E/t$  a njena korisna snaga

$$P_k = \eta \frac{E}{t}$$

gde je  $E$  — oslobođena energija pri deobi svih jezgara koji se nalaze u količini urana mase  $m$ . U ovoj količini urana nalazi se broj jezgara

$$N = n N_A = \frac{m}{M} N_A$$

gde je  $M = 0,235 \text{ kg/mol}$  — molarna masa urana —  $235$ , a  $N_A$  — Avogadrova konstanta.

Na ovaj način je ukupna oslobođena energija u centrali

$$E = N E_v = \frac{m}{M} N_A E_v$$

a njena korisna snaga

$$P_k = \eta \frac{m N_A E_v}{M t} \approx 0,28 \text{ GW}$$

1646. U toku svakog vremenskog intervala od  $1 \text{ s}$  Zemlja primi energiju  $E = P t = 10^{12} \text{ J} = 6,25 \cdot 10^{17} \text{ MeV}$ . Ako četiri atoma  ${}^1_1\text{H}$  prelaze

u jedan atom  ${}^4_2\text{He}$ , onda nastaje defekt mase  
 $\Delta m = 4m_{\text{H}} - m_{\text{He}} - 2m_e = 0,02857 \text{ u}$ , čemu od-  
 govara energija  $E_0 \approx 28 \text{ MeV}$ .

Broj potrebnih atoma  ${}^1_1\text{H}$  je

$$N = \frac{4E}{E_0} = 9 \cdot 10^{14} \frac{\text{atoma}}{\text{s}}$$

a njihova masa je

$$m = N \frac{M}{N_A} = 1,5 \text{ kg}$$

$$1647. \text{ a) } B = \frac{2\pi m_0 v_1}{e} = \frac{2\pi m v_2}{e} = 1,62 \text{ T.}$$

b) Kako je

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1$$

to je

$$E = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) =$$

$$= m_0 c^2 \left( \frac{v_1}{v_2} - 1 \right) = 300 \text{ MeV}$$

# PRILOZI

## 1. Greške merenja i određivanja fizičkih veličina

• Apsolutna greška merenja  $\Delta x$  fizičke veličine  $x$  predstavlja razliku između izmerene vrednosti (rezultata merenja)  $x_{iz}$  i poredbene vrednosti  $x_p$  merene veličine. Dakle,

$$\Delta x = x_{iz} - x_p$$

pri čemu poredbena vrednost  $x_p$  merene veličine može da bude:

- prava (stvarna) vrednost merene veličine (koja, po pravilu nije poznata),
- nazivna (dogovorena, sporazumna, konvencionalna, normirana) vrednost merene veličine,
- aritmetička sredina rezultata jedne serije merenja (koja po pravilu, može da bude poznata),
- etalonska vrednost merene veličine, dobijena odgovarajućim etalonskim merenjem (koja je po pravilu, poznata).
- Relativna greška merenja fizičke veličine  $x$  predstavlja količnik odgovarajuće apsolutne greške  $\Delta x$  i poredbene vrednosti  $x_p$ , tj.

$$\delta = \frac{\Delta x}{x_p}$$

Ukoliko se fizička veličina  $y$  određuje merenjem fizičkih veličina  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , tj. ako je

$$y = y(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

onda je maksimalna apsolutna greška određivanja veličine  $y$

$$\begin{aligned} \Delta y &= \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| |\Delta x_i| = \\ &= \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial x_i} y(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \right| |\Delta x_i| \end{aligned}$$

gde su  $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots, \Delta x_n$ , tj.  $\Delta x_i$  – apsolutne greške merenja fizičkih veličina  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , tj.  $x_i$ .

Maksimalna relativna greška određivanja fizičke veličine  $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$  određena je relacijom

$$\begin{aligned} \delta_y &= \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial (\ln y)}{\partial x_i} \right| |\Delta x_i| = \\ &= \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \ln y(x_1, x_2, \dots, x_n) \right| |\Delta x_i| \end{aligned}$$

Prethodne relacije važe pod pretpostavkom da su apsolutne greške merenja  $\Delta x_i$  fizičkih veličina  $x_i$  male veličine i da se njihovi proizvodi, kvadrati i viši stepeni mogu zanemariti, tj. da je  $\Delta y \approx dy$ .

MAKSIMALNE APSOLUTNE I RELATIVNE GREŠKE

| Fizička veličina<br>$y=y(x_i)$ | Maksimalna<br>apsolutna greška   | Maksimalna<br>relativna greška                                 |
|--------------------------------|--|--|
| $y=x_1+x_2$                    | $\Delta y= \Delta x_1 + \Delta x_2 $                                   | $\delta y=\frac{ \Delta x_1 + \Delta x_2 }{ x_1+x_2 }$         |
| $y=x_1-x_2$                    | $\Delta y= \Delta x_1 + \Delta x_2 $                                   | $\delta y=\frac{ \Delta x_1 + \Delta x_2 }{ x_1-x_2 }$         |
| $y=x_1 \cdot x_2$              | $\Delta y= \Delta x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot \Delta x_2 $               | $\delta y=\frac{ \Delta x_1 }{x_1} + \frac{ \Delta x_2 }{x_2}$ |
| $y=\frac{x_1}{x_2}$            | $\Delta y=\frac{ x_2 \cdot \Delta x_1 + x_1 \cdot \Delta x_2 }{x_2^2}$ | $\delta y=\frac{ \Delta x_1 }{x_1} + \frac{ \Delta x_2 }{x_2}$ |
| $y=x^n$                        | $\Delta y=n x ^{n-1}\Delta x$  | $\delta y=n \frac{ \Delta x }{x}$                              |
| $y=x^{1/n}$                    | $\Delta y=\frac{1}{n} x ^{(1-n)/n}\Delta x$                            | $\delta y=\frac{1}{n} \frac{ \Delta x }{x}$                    |
| $y=e^x$                        | $\Delta y=e^x \Delta x $   | —  |
| $y=\ln x$                      | $\Delta y=\frac{ \Delta x }{x}$  | $\delta y=\frac{ \Delta x }{ x  \ln x}$                        |
| $y=\log x$                     | $\Delta y=M \frac{ \Delta x }{x}$<br>gde je $M=0,434 29$               | $\delta y=M \frac{ \Delta x }{ x  \log x}$                     |
| $y=\sin x$                     | $\Delta y= \cos x   \Delta x $   | $\delta y= \operatorname{ctg} x   \Delta x $                   |
| $y=\cos x$                     | $\Delta y= \sin x   \Delta x $   | $\delta y= \operatorname{tg} x   \Delta x $                    |
| $y=\operatorname{tg} x$        | $\Delta y=\frac{ \Delta x }{\cos^2 x}$                                 | $\delta y=\frac{2 \Delta x }{ \sin 2x }$                       |
| $y=\operatorname{ctg} x$       | $\Delta y=\frac{ \Delta x }{\sin^2 x}$                                 | $\delta y=\frac{2 \Delta x }{ \sin 2x }$                       |

PRIMERI

1. Površina kružne membrane, koja se koristi u nekom tehnološkom procesu, treba da bude određena sa najvećom relativnom greškom  $\delta S=0,1\%$ . Poluprečnik membrane je  $r=10,25$  cm. Kolika treba da bude apsolutna greška pri određivanju poluprečnika i sa koliko decimala treba uzeti broj  $\pi$ ?

• Površina membrane je  $S=\pi r^2$ , pa je maksimalna relativna greška

$$\delta S=d(\ln \pi+2 \ln r)=\frac{|\Delta \pi|}{\pi}+2 \frac{|\Delta r|}{r}=0,001$$

Ako se pretpostavi da obe veličine ravnopravno utiču na veličinu relativne greške, onda je

$$\frac{\Delta \pi}{\pi}<0,0005 \text{ i } \frac{2|\Delta r|}{r}<0,0005$$

odnosno

$$\Delta \pi<1,57 \cdot 10^{-3} \text{ i } \Delta r<50 \mu \text{m}$$

što znači da je  $\pi$  dovoljno uzeti sa dve decimale, tj.  $\pi=3,14$ .

Da li je ovakvo rešenje praktično za realizaciju?

2. Za određivanje Jungovog modula elastičnosti čelika upotrebljena je čelična žica dužine  $l=(2,5 \pm 0,01)$  m i poluprečnika  $r=(0,5 \pm 0,1)$  mm. Kada je žica opterećena tegom mase  $m=(5 \pm 0,01)$  kg, njeno izduženje je bilo  $\Delta l=(0,89 \pm 0,02)$  mm. Ubrzanje slobodnog padanja na mestu gde se eksperiment izvodi je  $g=(9,81 \pm 0,02)$  m/s<sup>2</sup>. Kolike su maksimalna apsolutna i relativna greška pri određivanju Jungovog modula ovom metodom?

• Jungov modul elastičnosti dat je izrazom

$$E_y=\frac{l}{(\Delta l)} \frac{mg}{\pi r^2}$$

pa je maksimalna apsolutna greška

$$\begin{aligned} \Delta E_y &= \frac{\partial E_y}{\partial l} |\Delta l| + \frac{\partial E_y}{\partial (\Delta l)} |\Delta(\Delta l)| + \frac{\partial E_y}{\partial m} |\Delta m| + \frac{\partial E_y}{\partial g} |\Delta g| + \frac{\partial E_y}{\partial r} |\Delta r| = \\ &= \frac{mg}{(\Delta l)\pi r^2} |\Delta l| + \frac{lmg}{(\Delta l)^2} |\Delta(\Delta l)| + \frac{lg}{(\Delta l)\pi r^2} |\Delta m| + \frac{lm}{(\Delta l)\pi r^2} |\Delta g| + \frac{2lmg}{(\Delta l)\pi r^3} |\Delta r| = 12,4 \text{ GPa} \end{aligned}$$

pošto je  $l=2,5$  m,  $|\Delta l|=0,01$  m,  $r=5 \cdot 10^{-3}$  m,  $|\Delta r|=10^{-3}$  m,  $m=5$  kg,  $|\Delta m|=0,01$  kg ( $\Delta l=8,9 \cdot 10^{-4}$  m,  $|\Delta(\Delta l)|=2 \cdot 10^{-3}$  m,  $g=9,81$  m/s<sup>2</sup> i  $|\Delta g|=0,02$  m/s<sup>2</sup>).

Maksimalna relativna greška je

$$\begin{aligned} \delta E_y &= d(\ln l + \ln m + \ln g + \ln (\Delta l) + \ln \pi + 2 \ln r) = \\ &= \frac{|\Delta l|}{l} + \frac{|\Delta m|}{m} + \frac{|\Delta g|}{g} + \frac{|\Delta(\Delta l)|}{(\Delta l)} + 2 \frac{|\Delta r|}{r} = 0,071 \end{aligned}$$

a Jungov modul elastičnosti

$$E_y=(175 \pm 12,4) \text{ GPa}$$

3. Kolike su maksimalna apsolutna i relativna greška sa kojima može da se odredi ubrzanje slobodnog padanja  $g$ , pomoću matematičkog klatna, ako je dužina klatna  $l=(1,431 \pm 0,001)$  m, a njegov period oscilovanja  $T=(2,4 \pm 0,1)$  s? Broj  $\pi$  uzeti sa tri sigurne cifre.

• Koristeći izraz za period oscilovanja matematičkog klatna  $T=2\pi\sqrt{l/g}$ , dobija se da je

$$g=4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

pa je tražena maksimalna apsolutna greška

$$\Delta g=\frac{8\pi l}{T^2} |\Delta \pi| + \frac{4\pi^2}{T^2} |\Delta l| + \frac{8\pi^2 l}{T^3} |\Delta T| = 0,032 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

pošto je  $\pi=3,14$ ,  $|\Delta \pi|=0,001 59$ ,  $l=1,431$  m,  $|\Delta l|=10^{-3}$  m,  $T=2,4$  s i  $|\Delta T|=0,1$  s, dok je odgovarajuća relativna greška

$$\delta g=\frac{2|\Delta \pi|}{\pi} + \frac{|\Delta l|}{l} + \frac{2|\Delta T|}{T} \approx 0,084$$

Prema tome, ubrzanje je

$$g=(9,79 \pm 0,03) \text{ m/s}^2$$

4. Pri određivanju koeficijenta površinskog napona vode, metodom kapilare izmereno je da je visina vode u kapilari  $h=(49 \pm 0,5)$  mm, a poluprečnik kapilare  $r=(0,3 \pm 0,02)$  mm, dok je poznato da je ubrzanje slobodnog padanja  $g=(9,81 \pm 0,02)$  m/s<sup>2</sup>, a gustina vode  $\rho=(1000 \pm 1)$  kg/m<sup>3</sup>. Odrediti maksimalnu apsolutnu i relativnu grešku pri određivanju koeficijenta površinskog napona  $\alpha$  ovom metodom.

• Koefficient površinskog napona (kada se određuje metodom kapilare) definisan je relacijom

$$\alpha = \frac{1}{2} r h \rho g$$

pa je odgovarajuća maksimalna apsolutna greška

$$\Delta \alpha = \frac{1}{2} (h \rho g |\Delta r| + r \rho g 2 |\Delta h| + r h g |\Delta \rho| + r h \rho |\Delta g|) = 6,49 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$$

pošto je  $\Delta r = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ,  $\Delta h = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ,  $\Delta \rho = 1 \text{ kg/m}^3$ ,  $\Delta g = 0,02 \text{ m/s}^2$  dok je maksimalna relativna greška

$$\delta \alpha = \frac{\Delta r}{r} + 2 \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta g}{g} = 0,09$$

gde je  $r = 0,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ,  $h = 0,049 \text{ m}$ ,  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

Prema tome, koefficient površinskog napona je

$$\alpha = (72,1 \pm 6,5) \text{ mN/m}$$

5. Da bi se odredio moment inercije tela nepravilnog oblika, koristi se torziona klatno. Vrednost torzione konstante je određena i iznosi  $c = (0,7 \pm 0,02) \text{ m} \cdot \text{N/rad}$ , dok period torzionih oscilacija tela, čiji se moment inercije određuje, iznosi  $T = (0,42 \pm 0,01) \text{ s}$ . Ako je  $\pi = 3,14 \pm 0,0016$ , kolike su maksimalna apsolutna i relativna greška koje nastaju pri određivanju momenta inercije tela nepravilnog oblika ovom metodom?

• Period torzionih oscilacija tela dat je relacijom  $T = 2\pi\sqrt{I/c}$ , pa je moment inercije tela

$$I = \frac{cT^2}{4\pi^2}$$

odakle je maksimalna apsolutna greška određivanja momenta inercije tela ovom metodom

$$\Delta I = \frac{T^2}{4\pi^2} |\Delta c| + \frac{cT}{2\pi^2} |\Delta T| + \frac{cT^2}{2\pi^2} |\Delta \pi| = 2,38 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

pošto je  $c = 0,7 \text{ m} \cdot \text{N/rad}$ ;  $|\Delta c| = 0,02 \text{ m} \cdot \text{N/rad}$ ,  $T = 0,42 \text{ s}$ ,  $|\Delta T| = 0,01 \text{ s}$ ,  $\pi = 3,14$ ,  $\Delta \pi = 0,0016$  dok je odgovarajuća relativna greška

$$\delta I = \frac{|\Delta c|}{c} + 2 \frac{|\Delta T|}{T} + 2 \frac{\Delta \pi}{\pi} = 0,0343$$

što znači da je moment inercije

$$I = (3,13 \pm 0,24) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

6. Telo, mase  $m = (2 \pm 0,1) \text{ kg}$ , nalazi se na visini  $h = (3 \pm 0,1) \text{ m}$  od podloge. Ako je ubrzanje slobodnog padanje na tom mestu  $g = (9,8 \pm 0,03) \text{ m/s}^2$ , izračunati kolika je maksimalna apsolutna, a kolika maksimalna relativna greška kojima je određena gravitaciona potencijalna energija ovog tela.

• Potencijalna gravitaciona energija tela, u odnosu na podlogu, data je relacijom  $E_p = mgh$ . Maksimalna apsolutna greška definisana je izrazom

$$\Delta E_p = \frac{\partial E_p}{\partial m} |\Delta m| + \frac{\partial E_p}{\partial g} |\Delta g| + \frac{\partial E_p}{\partial h} |\Delta h| = gh |\Delta m| + mh |\Delta g| + mg |\Delta h| = 5,08 \text{ J}$$

pošto je  $m = 2 \text{ kg}$ ,  $|\Delta m| = 0,1 \text{ kg}$ ,  $h = 3 \text{ m}$ ,  $|\Delta h| = 0,1 \text{ m}$ ,  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  i  $|\Delta g| = 0,03 \text{ m/s}^2$ .

Maksimalna relativna greška je

$$\begin{aligned} \delta E_p &= d(\ln m + \ln g + \ln h) = \\ &= \frac{|\Delta m|}{m} + \frac{|\Delta g|}{g} + \frac{|\Delta h|}{h} = 0,086 \end{aligned}$$

Da li je opravdano u ovom slučaju za apsolutnu i relativnu grešku koristiti izraze

$$\Delta E_p \approx gh |\Delta m| + mg |\Delta h|; \delta E_p \approx \frac{|\Delta m|}{m} + \frac{|\Delta h|}{h}$$

7. Dva otpornika, otpornosti  $R_1 = (100 \pm 1) \Omega$  i  $R_2 = (60 \pm 1) \Omega$ , vezani su:  
a) redno,  
b) paralelno.

Kolike su maksimalna apsolutna i relativna greška pri izračunavanju ekvivalentne otpornosti obe veze otpornika?

• a) Ekvivalentna otpornost je  $R_e = R_1 + R_2$ , pa je maksimalna apsolutna greška pri njenom izračunavanju

$$\Delta R_e = |\Delta R_1| + |\Delta R_2| = 2 \Omega$$

pošto je  $|\Delta R_1| = 1 \Omega$  i  $|\Delta R_2| = 1 \Omega$ , dok je maksimalna relativna greška

$$\delta R_e = \frac{|\Delta R_1| + |\Delta R_2|}{R_1 + R_2} = 0,0125$$

pošto je  $R_1 = 100 \Omega$  i  $R_2 = 60 \Omega$ .

b) Kod paralelne veze otpornika, ekvivalentna otpornost je  $R_e = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ , odakle se dobija da je maksimalna apsolutna greška

$$\Delta R_e = \frac{R_2(R_1 + R_2) + R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} |\Delta R_1| + \frac{R_1(R_1 + R_2) + R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} |\Delta R_2| = 1,47 \Omega$$

a relativna

$$\delta R_e = \frac{|\Delta R_1|}{R_1} + \frac{|\Delta R_2|}{R_2} + \frac{|\Delta R_1| + |\Delta R_2|}{R_1 + R_2} = 0,0392$$

8. Da bi se izračunala otpornost provodnika nepoznate otpornosti  $R$ , meri se struja koja protiče kroz provodnik i napon na njegovim krajevima. Najmanja podela na skali ampermetra je  $0,1 \text{ A}$ , a na skali voltmetra  $0,25 \text{ V}$ . Ako je pokazivanje instrumenata bilo:

— na ampermetru  $I = 1,6 \text{ A}$ ,

— na voltmetru  $U = 12,5 \text{ V}$ ,

a) kolike su maksimalna apsolutna i relativna greška pri određivanju nepoznate otpornosti,  
b) kolika je nepoznata otpornost?

• a) Maksimalna apsolutna greška je

$$\Delta R = \frac{\partial R}{\partial U} |\Delta U| + \frac{\partial R}{\partial I} |\Delta I| = \frac{\Delta U}{I} + \frac{U \Delta I}{I^2} = 0,64 \Omega$$

a odgovarajuća maksimalna relativna greška

$$\delta R = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} = 0,0825$$

gde je  $\Delta U = 0,25 \text{ V}$  i  $\Delta I = 0,1 \text{ A}$ .

b) Vrednost na ovaj način određene otpornosti može se napisati kao

$$R = \frac{U}{I} \pm \frac{U}{I} \delta R = (7,81 \pm 0,64) \Omega$$

9. Prilikom eksperimentalnog određivanja specifične toplotne kapacitivnosti vode pomoću kalorimetra sa stacionarnim tokom dobijeni su sledeći podaci:

— napon na krajevima grejača  $U = (22 \pm 1) \text{ V}$ ,

— jačina struje kroz grejač  $I = (1,5 \pm 0,1) \text{ A}$ ,

— maseni protok vode  $m' = (8 \pm 0,5) \text{ g/s}$ ,

— temperatura vode na ulazu u kalorimetar  $t_1 = (15 \pm 0,1)^\circ \text{C}$ ,

— temperatura vode na izlazu iz kalorimetra  $t_2 = (16 \pm 0,1)^\circ \text{C}$ .



Kolika je maksimalna relativna greška određivanja specifične toplotne kapacitivnosti ovom metodom?

- Specifična toplotna kapacitivnost vode je

$$c = \frac{UI}{m(t_2 - t_1)}$$

pa je maksimalna relativna greška

$$\delta c = d(\ln c) = d[\ln U + \ln I + \ln m + \ln(t_2 - t_1)] = \frac{|\Delta U|}{U} + \frac{|\Delta I|}{I} + \frac{|\Delta m|}{m} + \frac{|\Delta t_2| + |\Delta t_1|}{t_2 - t_1} = 0,375$$

odnosno

$$c = (4125 \pm 1546) \frac{J}{kg \cdot K}$$

10. Pri eksperimentalnom određivanju elektrohemijjskog ekvivalenta bakra, masa katode (načinjene od bakarnog lima) iznosila je  $m_1 = (90,252 \pm 0,005) g$ , na početku eksperimenta. Posle elektrolize, koja je trajala  $t = (900 \pm 1) s$ , pri čemu je jačina struje kroz elektrolit bila stalna i iznosila  $I = (1,2 \pm 0,1) A$ , utvrđeno je da je masa katode  $m_2 = (90,610 \pm 0,005) g$ .

Kolike su apsolutna i relativna greška određivanja elektrohemijjskog ekvivalenta u ovom eksperimentu?

Koliki je elektrohemijjski ekvivalent bakra prema ovim podacima?

- Elektrohemijjski ekvivalent određen je relacijom

$$k = \frac{m_2 - m_1}{It}$$

pa je apsolutna greška u ovom eksperimentu

$$\Delta k = \frac{\partial k}{\partial(m_2 - m_1)} (\Delta m_2 + \Delta m_1) + \frac{\partial k}{\partial I} \Delta I + \frac{\partial k}{\partial t} \Delta t = \frac{|\Delta m_2| + |\Delta m_1|}{It} + \frac{|m_2 - m_1|}{I^2 t} \Delta I + \frac{|m_2 - m_1|}{It^2} \Delta t = 3,72 \cdot 10^{-4} \frac{kg}{C}$$

a relativna

$$\delta k = d[\ln(m_2 - m_1) + \ln I + \ln t] = \frac{|\Delta m_2| + |\Delta m_1|}{|m_2 - m_1|} + \frac{|\Delta I|}{I} + \frac{|\Delta t|}{t} = 0,112$$

gde je  $\Delta m_1 = \Delta m_2 = 5 \cdot 10^{-4} kg$ ;  $\Delta I = 0,1 A$ ;  $\Delta t = 1 s$ ;  $m_1 = 90,252 g$ ;  $m_2 = 90,610 g$ ;  $I = 1,2 A$ ;  $t = 900 s$ .

Prema tome, elektrohemijjski ekvivalent bakra je

$$k = (3,3 \pm 0,37) \cdot 10^{-3} kg/C$$

11. Bikonveksno sočivo, žižne daljine  $f_1 = (20 \pm 0,5) cm$ , i bikonkavno sočivo, žižne daljine  $f_2 = (-10 \pm 0,5) cm$ , dodiruju se sfernim površinama.

a) Kolika se maksimalna relativna greška čini pri određivanju ekvivalentne žižne daljine ovog sistema sočiva računskim putem?

b) Da li je moguće eksperimentalno odrediti ekvivalentnu žižnu daljinu ovog sistema sočiva?

c) Kolika je ekvivalentna žižna daljina?

- a) Ekvivalentna žižna daljina datog sistema sočiva je

$$f_c = \frac{|f_1| - |f_2|}{|f_1| |f_2|}$$

pa je maksimalna relativna greška pri njenom izračunavanju

$$\delta f_c = d[|\ln|f_2 - f_1| + |\ln|f_1| + |\ln|f_2||] = \frac{|\Delta f_1| + |\Delta f_2|}{|f_2 - f_1|} + \frac{|\Delta f_1|}{|f_1|} + \frac{|\Delta f_2|}{|f_2|} = 0,175$$

b) Nije moguće, jer njihova kombinacija predstavlja rasipno sočivo.

c)  $f_c = (-5 \pm 0,9) cm$ .

12. Koristeći Beselovu metodu za određivanje žižne daljine sabirnog sočiva, za sočivo nepoznate žižne daljine izmereno je da je rastojanje predmeta i lika  $D = (0,86 \pm 0,01) m$  a rastojanje između dva konjugovana položaja sočiva  $d = (0,24 \pm 0,01) m$ .

Kolika je maksimalna relativna greška pri izračunavanju žižne daljine ovog sočiva?

- Prema Beselovoj metodi, žižna daljina sočiva određena je relacijom

$$f = \frac{D^2 - d^2}{4D} = \frac{(D+d)(D-d)}{4D}$$

pa je maksimalna relativna greška

$$\delta f = d \left[ \ln \frac{(D+d)(D-d)}{4D} \right] = d[\ln(D+d) + \ln(D-d) + \ln 4D] = \frac{|\Delta D| + |\Delta d|}{D-d} + \frac{|\Delta D - \Delta d|}{D-d} + \frac{|\Delta D|}{D} = 0,062$$

a žižna daljina

$$f = (19,8 \pm 1,0) cm$$

13. Pri određivanju talasne dužine monohromatske svetlosti difrakcionom rešetkom korišćena je optička rešetka čija je konstanta  $d = 1/50 mm$ . Spektar drugog reda ( $k=2$ ) video se pod uglom (u odnosu na spektar nultog reda)  $\theta = (3^\circ 12' \pm 12')$ .

a) Kolika je maksimalna apsolutna i relativna greška pri određivanju talasne dužine u ovom eksperimentu?

b) Kolika je talasna dužina ove monohromatske svetlosti?

- a) Maksimalna apsolutna greška definisana je izrazom

$$\Delta \lambda = \frac{d}{k} \frac{d}{d\theta_k} \sin \theta_k \cdot |\Delta \theta_k| = \frac{d}{k} \cos \theta_k \cdot |\Delta \theta_k| = 34,8 nm$$

dok je maksimalna relativna greška

$$\delta \lambda = \text{ctg } \theta_k \cdot \Delta \theta_k = 0,062$$

gde je  $\theta_k = 3^\circ 12' = 0,056 rad$  i  $|\Delta \theta_k| = 3,5 \cdot 10^{-3} rad$

b) Tražena talasna dužina je

$$\lambda = \frac{d \cdot \sin \theta_k}{k} \pm \lambda \delta \lambda = (558 \pm 34,8) nm$$

14. Kolika je maksimalna relativna greška pri izračunavanju kapacitivnosti ravnog vazdušnog kondenzatora, čije su ploče oblika kvadrata stranice  $a = (10 \pm 0,1) cm$ , ako je rastojanje između njih  $d = (2 \pm 0,1) mm$ ? Relativna permitivnost vazduha iznosi  $\epsilon_r = 1,000 58 \pm 0,000 001$ , dok je električna konstanta  $\epsilon_0 = (8,854 18 \pm 0,000 01) \cdot 10^{-12} F/m$ .

- Kapacitivnost ravnog kondenzatora data je izrazom

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{a^2}{d}$$

pa je maksimalna relativna greška pri izračunavanju njegove kapacitivnosti

$$\delta C = d(\ln \epsilon_0 + \ln \epsilon_r + 2 \ln a + \ln d) = \frac{|\Delta \epsilon_0|}{\epsilon_0} + \frac{|\Delta \epsilon_r|}{\epsilon_r} + \frac{2|\Delta a|}{a} + \frac{|\Delta d|}{d} \approx \approx \frac{2|\Delta a|}{a} + \frac{|\Delta d|}{d} = 0,07$$

gde je  $\Delta a = 0,1$  cm;  $\Delta d = 0,1$  mm;  $a = 10$  cm,  $d = 2$  mm. Prema prethodnim podacima, kapacitivnost ovog kondenzatora je

$$C = (44,2 \pm 3,1) \text{ pF}$$

Napomena. Dobijeni rezultat ukazuje da se u ovom, i sličnim slučajevima, vazduh po svojim električnim svojstvima može smatrati kao vakuum.

15. Kolika se maksimalna relativna greška načini pri izračunavanju rezonantne frekvencije jednog LC-kola ako su, prema deklaraciji proizvođača, vrednosti kapacitivnosti i induktivnosti u kolu  $C = 10 \mu\text{F} \pm 10\%$  i  $L = 0,5 \text{ H} \pm 10\%$ ? Broj  $\pi$  uzeti sa tri tačne cifre.

- Prema postavci zadatka, apsolutne greške s kojima su određeni kapacitivnost i induktivnost u kolu jesu

$$|\Delta C| = 1 \mu\text{F} \quad \text{i} \quad |\Delta L| = 0,05 \text{ H}$$

Kako je rezonantna frekvencija LC-kola

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

to je maksimalna relativna greška pri njenom izračunavanju

$$\delta \nu = d \left( \ln \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \right) \approx \frac{|\Delta C|}{2C} + \frac{|\Delta L|}{2L} = 0,1$$

gde je  $C = 10 \mu\text{F}$  i  $L = 0,5 \text{ H}$ .

Prema prethodnim podacima, rezonantna frekvencija je

$$\nu = (71,2 \pm 7,1) \text{ Hz}$$

16. Kolika se maksimalna relativna greška načini pri izračunavanju Bolcmanove konstante ako je

$$T^0 = 273,15 \text{ K},$$

$$p^0 = 101\,325 \text{ Pa},$$

$$V^0 = (22,4138 \pm 0,0007) \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{mol},$$

$$N_A = (6,022\,04 \pm 0,000\,03) \cdot 10^{23} \text{ 1/mol?}$$

- Bolcmanova konstanta je određena, pomoću datih konstanti, izrazom

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{p^0 V^0}{T^0 N_A}$$

pa je maksimalna relativna greška pri njenom izračunavanju

$$\delta k = d \left( \ln \frac{p^0 V^0}{T^0 N_A} \right) = \frac{|\Delta p^0|}{p^0} + \frac{|\Delta V^0|}{V^0} + \frac{|\Delta T^0|}{T^0} + \frac{|\Delta N_A|}{N_A}$$

Kako je  $\Delta p^0 = 0$  i  $\Delta T^0 = 0$  (prema međunarodnoj konvenciji), dobija se da je

$$\delta k = \frac{|\Delta V^0|}{V^0} + \frac{|\Delta N_A|}{N_A} \approx 36 \cdot 10^{-6}$$

pa je Bolcmanova konstanta

$$k = (1,380\,66 \pm 0,000\,05) \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

17. Kolika je maksimalna relativna greška sa kojom je izračunata Komptonova talasna dužina za elektron ako je poznato da je

$$h = (6,626\,176 \pm 0,000\,034) \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s},$$

$$m_e = (9,109\,534 \pm 0,000\,046) \cdot 10^{-31} \text{ kg},$$

$$c = (299\,792\,458 \pm 1,2) \text{ m/s?}$$

- Komptonova talasna dužina definisana je relacijom

$$\lambda_C = \frac{2h}{m_e c}$$

pa je maksimalna relativna greška pri njenom izračunavanju

$$\delta \lambda_C = d \left( \ln \frac{2h}{m_e c} \right) = \frac{|\Delta h|}{h} + \frac{|\Delta m_e|}{m_e} + \frac{|\Delta c|}{c}$$

Kako je  $\Delta c/c \ll \Delta m_e/m_e$  i  $\Delta c/c \ll \Delta h/h$ , prethodna relacija se može uprostiti na oblik

$$\delta \lambda_C \approx \frac{|\Delta h|}{h} + \frac{|\Delta m_e|}{m_e} \approx 10 \cdot 10^{-6}$$

pa je Komptonova talasna dužina

$$\lambda_C = (4,852\,618 \pm 0,000\,048) \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

## 2. Dimenziona analiza

na osnovu jediničnih jednačina

### 1. UVOD

Značajno je upoznati dimenziona razmatranja složenih matematičkih relacija u kojima figuriše više fizičkih veličina, a posebno ako su one iz različitih oblasti fizike. Ovo se čini da bi se utvrdila njihova fizička priroda, što može da bude koristan podatak za utvrđivanje tačnosti posmatrane relacije. Naime, ukoliko je posmatrana relacija dimenziono usaglašena, može se sa velikom sigurnošću smatrati da je ona i tačna.

Opšte uzevši, u fizici mogu da se izjednačavaju samo veličine iste prirode, tj. istih dimenzija. To znači da obe strane jednačine, koja povezuje određene fizičke veličine, moraju da imaju iste dimenzije, a samim tim i jedinice. Isto tako, iste dimenzije, tj. jedinice treba da imaju i svi članovi polinoma neke jednačine s obzirom na to da se jedino mogu sabirati i oduzimati fizičke veličine iste prirode. Tako, na primer, u polinomu

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = A$$

koji može da se napiše u obliku

$$\{A_1\} [A_1] + \{A_2\} [A_2] + \dots + \{A_n\} [A_n] = \{A\} [A]$$

mora da bude ispunjen uslov jednakosti jedinica pojedinih članova polinoma i strana jednačine

$$[A_1] = [A_2] = \dots = [A_n] = [A]$$

i da važi jednakost zbira brojnih vrednosti

$$\{A_1\} + \{A_2\} + \dots + \{A_n\} = \{A\}$$

U slučaju složenih veza fizičkih veličina  $A, B, C$ , kao na primer

$$\frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{B_1 + B_2 + \dots + B_k} = C_1 + C_2 + \dots + C_m$$

treba da bude ispunjen uslov

$$[A_1] = [A_2] = \dots = [A_n] = [A]$$

$$[B_1] = [B_2] = \dots = [B_k] = [B]$$

$$[C_1] = [C_2] = \dots = [C_k] = [C]$$

pri čemu je

$$\frac{[A]}{[B]} = [C]$$

Ako se prethodna relacija napiše u skraćenom obliku

$$\frac{\sum_{i=1}^n A_i}{\sum_{i=1}^m B_i} = \sum_{i=1}^k C_i$$

onda je

$$\frac{\sum_{i=1}^n \{A_i\}}{\sum_{i=1}^m \{B_i\}} = \sum_{i=1}^k \{C_i\}$$

Prema postavljenim uslovima,  $n, m$  i  $k$  su celi brojevi.

Na isti način mogu dimenziono da se razmotre i drugi odnosi fizičkih veličina ma u kojoj njihovoj uzajamnoj vezi. Tako, na primer, ako je veza fizičkih veličina  $A, B, C$  oblika

$$\sum_{i=1}^n A_i \cdot \sum_{i=1}^m B_i = \sum_{i=1}^k C_i$$

mora da bude ispunjen uslov

$$[A] \cdot [B] = [C]$$

pa je

$$\sum_{i=1}^n \{A_i\} \cdot \sum_{i=1}^m \{B_i\} = \sum_{i=1}^k \{C_i\}$$

Isto tako, ako je

$$\frac{\prod_{i=1}^n A_i}{\prod_{i=1}^m B_i} = \prod_{i=1}^k C_i$$

mora da bude ispunjen uslov

$$\frac{[A]^n}{[B]^m} = [C]^k$$

pri čemu je

$$\frac{\prod_{i=1}^n \{A_i\}}{\prod_{i=1}^m \{B_i\}} = \prod_{i=1}^k \{C_i\}$$

PRIMEDBA. U slučaju veze fizičkih veličina oblika

$$\sum_{i=1}^n A_i = C$$

može doći do zabune kažu je  $C=0$ . Naime, i tada treba da bude ispunjen uslov

$$[A] = [C]$$

$$\sum_{i=1}^n [A] = [C]$$

što znači da nulu u ovom slučaju treba prividno smatrati fizičkom veličinom iste prirode kao što je fizička veličina  $A$  čija je brojna vrednost jednaka nuli. Nula, isto tako, može da se smatra i kao razlika dve fizičke veličine istih priroda, jednakih brojnih vrednosti a suprotnih znakova.

Ovakvi primeri se često javljaju u praksi. Takav slučaj je sa uslovom ravnoteže tela

$$\sum_{i=1}^n \vec{F} = 0; \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0$$

zakonom održanja impulsa sistema tela koji je pre dejstva spoljašnjih sila bio u mirovanju

$$\sum_{i=1}^n \vec{p}_i = 0$$

Isto je i sa Kirhofovim pravilima

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{G}_i - \sum_{i=1}^m (R\mathcal{I})_i = 0; \quad \sum_{i=1}^k I_i = 0$$

itd.

## 2. JEDINIČNE JEDNAČINE

Jedna od osnovnih primena dimenzione analize je utvrđivanje prirode posmatrane izvedene fizičke veličine ili složene veze među fizičkim veličinama. Ovo se najčešće vrši radi utvrđivanja tačnosti posmatrane relacije. Ovakva provera redovno je sastavni deo svake analize fizičkih problema, posebno prilikom rešavanja zadataka. Ove analize predstavljaju dokazan postupak za individualno, efikasno i brzo dokazivanje tačnosti dobijenih relacija. Naime, kod dugih i složenih matematičkih operacija u fizici mogu da se učine greške raznih vrsta, koje ponekad pogodno utiču na tok postupka, pa je dimenziona analiza efikasan način za utvrđivanje propusta.

Dimenziona analiza se najpogodnije vrši primenom jedinica tj. na osnovu jediničnih jednačina. Dobijena saglasnost jedinica ukazuje na veliku verovatnoću ispravnosti postupka i tačnost dobijene relacije, dok nesaglasnost jedinica ukazuje na greške u postupku ili postavci prilikom rešavanja problema. Retki

su slučajevi da postoji saglasnost jedinica a da rezultat nije tačan. Ovo se dešava ako se načini paran broj grešaka koje se međusobno kompenzuju u pogledu jedinica, što je malo verovatno. Naravno, ovde se ne uzimaju u obzir greške računanja sa brojnim vrednostima, koje same po sebi nisu problem.

Dobro poznavanje dimenzione analize na osnovu jediničnih jednačina može, doprineti da se na prvopogled oceni da li je neka relacija tačna, kzo u slučaju

$$l = \frac{l_1}{l_1 + l_2}$$

Ova relacija očigledno nije tačna, jer je dimenzija leve strane dužina, dok je desna strana neimenovan broj s obzirom na to da predstavlja količnik fizičkih veličina iste prirode. Da ista relacija ima oblik  $l = l_1 \cdot l_2 / (l_1 + l_2)$ , ona bi bila dimenziono usaglašena, pa verovatno i tačna.

Isto tažo, lako se uočava da relacija za pređeni put

$$s = \frac{1}{2} at$$

nije tačna, pošto je jedinica leve strane  $[s] = m$ , a desne  $\left[\frac{1}{2} at\right] = \frac{m}{s^2} \cdot s = \frac{m}{s}$ , što je pogrešno. Očigledno je da u ovoj relaciji treba da figuriše kvadrat vremena.

U relaciji za pređeni put

$$s = Ft^2 \frac{m_1}{m_2^2}$$

postoji dimenziona saglasnost, s obzirom na to da je

$$[s] = m$$

$$\left[Ft^2 \frac{m_1}{m_2^2}\right] = N \cdot s^2 \frac{kg}{kg^2} = \frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot s^2 \cdot \frac{1}{kg} = m$$

Međutim, desilo se da je isti zadatak imao rešenje

$$s = \frac{Ft^2}{m_1}$$

koje je takođe dimenziono ispravno. Koji je od ovih rezultata tačan, treba da pokaže detaljna analiza celog postupka.

Relacija za pređeni put

$$s = v_0 + \frac{1}{2} at^2$$

nije tačna jer nije dimenziono usaglašena, tj.

$$[s] = m; [v_0] = m/s; \left[\frac{1}{2} at^2\right] = \frac{m}{s^2} \cdot s^2 = m$$

Često se nailazi i na pogrešno napisanu relaciju sledećeg oblika

$$v = \sqrt{v_0 + 2gh}$$

jer je

$$[v] = [\sqrt{2gh}] \neq [\sqrt{v_0}]$$

Sasvim se lako može dokazati dimenziona ispravnost relacije za centrifugalnu silu

$$F = mr\omega^2$$

imajući u vidu da je  $[F] = N$ . Pošto je  $[m] = kg$ ,  $[r] = m$ ,  $[\omega] = rad/s$ , to je

$$\begin{aligned} [mr\omega^2] &= [m] [r] [\omega]^2 = \\ &= kg \cdot m \left(\frac{rad}{s}\right)^2 = \frac{kg \cdot m}{s^2} = N \end{aligned}$$

U ovom slučaju potrebno je uzeti u obzir da je ugao neimenovana fizička veličina i da je  $[0] = rad = 1$ .

Opisani način dimenzionog proveravanja relacija u fizici ima poseban značaj jer doprinosi potpunijem poznavanju jedinica u fizici.

PRIMEDBA. Prilikom sprovođenja dimenzionih analiza potrebno je imati u vidu pravilno pisanje matematičkih relacija u pogledu dimenzione usaglašenosti pri korišćenju pojedinih matematičkih operatora. Naime, u pogledu dimenzione ispravnosti izraz

$$\log \frac{R}{r}$$

ne može se pisati u obliku

$$\log R - \log r$$

jer se može definisati samo logaritam nimenovanog broja a ne i imenovanog broja. Tako, na primer, ispravno je pisati

$$\log \frac{100 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = \log 10 = 1$$

ali nije ispravno pisati  $\log 100 \text{ cm} - \log 10 \text{ cm}$ , jer bi se opravdano postavilo pitanje šta znači logaritam jedinice dužine.

Isti je slučaj i sa eksponencijalnom funkcijom oblika

$$e^{-tT} \text{ ili } e^{-ax}$$

koje ne treba pisati u obliku

$$\frac{1}{T \sqrt{e^t}} \text{ ili } \frac{1}{e^t \cdot e^x}$$

s obzirom na to da koren i eksponent, po svojoj prirodi, treba da budu naimenovani brojevi.

### 3. PRIMERI

#### MEHANIKA

1. Telo je pušteno da slobodno pada sa visine  $h$ . Postavlja se pitanje koliko traje vreme padanja tela od trenutka kada se nalazi na visini  $h_1$ , pa dok ne padne na tle. Navedeno je da je to vreme određeno relacijom

$$t = \sqrt{\frac{2}{g}} (\sqrt{h} - \sqrt{h_1})$$

Da li je ona tačna?

• Jedinica desne strane relacije je

$$\begin{aligned} \left[ \sqrt{\frac{2}{g}} (\sqrt{h} - \sqrt{h_1}) \right] &= \\ &= \sqrt{\frac{1}{\frac{m}{s^2}} (\sqrt{m} - \sqrt{m})} = \sqrt{\frac{s^2}{m} \cdot m} = \sqrt{s^2} = s \end{aligned}$$

Kako je  $[\Delta t] = s$ , relacija je dimenziono usaglašena, pa verovatno i tačna.

2. Dva tela krenu istovremeno iz istog početnog položaja u međusobno normalnim pravcima. Jedno telo krene stalnom brzinom  $v$ , a drugo stalnim ubrzanjem  $a$ . Njihovo rastojanje posle vremena  $t$  određeno je relacijom

$$d = \frac{t}{2} \sqrt{4v^2 + a^2 t^2}$$

Da li je dobijena relacija dimenziono usaglašena?

• Jedinica leve strane relacije je  $[d]=m$ , a desne strane

$$\left[ \frac{t}{2} \sqrt{4v^2 + a^2 t^2} \right] = s \sqrt{\frac{m^2}{s^2} + \frac{m^2}{s^4} \cdot s^2} = s \sqrt{\frac{m^2}{s^2}} = m$$

pa je relacija dimenziono usaglašena.

3. Točak počne da rotira stalnim ugaonim ubrzanjem  $\alpha$ . U jednom trenutku tangencijalno ubrzanje njegovih tačaka na obodu postane jednako radijalnom ubrzanju. Relacije koja definiše vreme posle koga ovo nastaje ima oblik

$$\Delta t = \sqrt{\frac{l}{\alpha}}$$

Da li je ona dimenziono usaglašena?

• Pošto je  $[\alpha]=\text{rad/s}^2$ , odnosno  $1/s^2$ , to je

$$\left[ \sqrt{\frac{l}{\alpha}} \right] = \sqrt{\frac{l}{1/s^2}} = s$$

4. Relacija

$$R = \frac{8\gamma M}{3c^2}$$

određuje poluprečnik Zemlje pri kome bi njeno gravitaciono polje bilo toliko jako da bi na njenoj površini prestalo da teče vreme (prema opštoj teoriji relativnosti).

Da li je ova relacija dimenziono usaglašena?

• Ako desna strana relacije ima jedinicu dužine, onda je relacija dimenziono usagla-

šena. Kako je

$$[\gamma] = \frac{N \cdot m^2}{kg^2} = \frac{m^2}{s^2 \cdot kg}; [M] = kg; [c] = \frac{m}{s}$$

to je

$$\left[ \frac{8\gamma M}{3c^2} \right] = \frac{\frac{m^2}{s^2 \cdot kg} \cdot kg}{\frac{m^2}{s^2}} = m$$

5. Elektron, mase  $m_e$ , kreće se u oblasti dimenzija  $d$ . Njegova energija određena je relacijom

$$E \geq \frac{2h^2}{m_e d^2}$$

gde je  $h$  — Plankova konstanta.

Da li je ova relacija dimenziono usaglašena?

• Kako je  $[h]=J \cdot s$ , to je

$$\left[ \frac{2h^2}{m_e d^2} \right] = \frac{J^2 \cdot s^2}{kg \cdot m^2} = \frac{J^2}{\frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot m} = \frac{J^2}{N \cdot m} = J$$

pošto je  $N \cdot m = J$ .

Kako je jedinica leve strane relacije takođe džul, tj.  $[E]=J$ , relacija je dimenziono usaglašena.

6. Odrediti jedinicu, a samim tim i prirodu fizičke veličine, određene izrazom

$$\frac{4}{d} \sqrt{\frac{\pi m l}{E_y}}$$

gde je  $d$  — prečnik žice,  $l$  — njena dužina,  $m$  — mase tega kojim je žica opterećena.  $E_y$  — Jungov modul elastičnosti metala od koga je žica načinjena.

• Kako je  $[d]=m$ ,  $[m]=kg$ ,  $[l]=m$ ,  $[E_y]=Pa=N/m^2$ , to je

$$\left[ \frac{4}{d} \sqrt{\frac{\pi m l}{E_y}} \right] = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{kg \cdot m}{\frac{N}{m^2}}} = \sqrt{\frac{kg \cdot m}{N}} = s$$

što znači da ovaj izraz ima prirodu vremena.

7. Masa protekle tečnosti, koeficijenta viskoznosti  $\eta$  i gustine  $\rho$ , za vreme  $t$ , kroz cev dužine  $l$  i poluprečnika  $R$ , određena je relacijom

$$m = \frac{\pi R^4 \rho t}{8\eta l} \Delta p$$

gde je  $\Delta p$  — razlika pritiska na početku i kraju cevi.

Da li je ova relacija dimenziono ispravna?

• Kako je  $[\rho]=1$ ,  $[R]=m$ ,  $[\rho]=kg/m^3$ ,  $[t]=s$ ,  $[\Delta p]=Pa$ ,  $[\eta]=Pa \cdot s$ ,  $[l]=m$ , to je

$$\left[ \frac{\pi R^4 \rho t}{8\eta l} \Delta p \right] = \frac{m^4 \cdot \frac{kg}{m^3} \cdot s}{Pa \cdot s \cdot m} \cdot Pa = kg$$

pa je relacija dimenziono ispravna, s obzirom na to da je  $[m]=kg$ .

8. Temperaturski koeficijent linearnog širenja metala od koga je načinjen štap na koji deluje sila termičkog naprezanja  $F$  kada se njegova temperatura povisi za  $\Delta t$ , određen je relacijom

$$\alpha = \frac{F}{SE_y \Delta t}$$

gde je  $E_y$  — Jungov modul elastičnosti metala od koga je štap načinjen, a  $S$  — površina njegovog poprečnog preseka

Da li je ova relacija dimenziono saglasna, pa prema tome i verovatno tačna?

• Pošto je  $[\alpha]=1/K$ ,  $[F]=N$ ,  $[S]=m^2$ ,  $[E_y]=Pa=N/m^2$ ,  $[\Delta t]=C=K$ , to je

$$\left[ \frac{F}{SE_y \Delta t} \right] = \frac{N}{m^2 \cdot \frac{N}{m^2} \cdot K} = \frac{1}{K}$$

pa je relacija dimenziono usaglašena, pa verovatno i tačna.

9. U relaciji za ugao otklona fizičkog klatna

$$\alpha = \arccos \left( 1 - \frac{2h}{lg} \right)$$

veličine  $h$  i  $l$  su dužine,  $g$  — ubrzanje slobodnog padanja.

Da li je ova relacija tačna?

• Relacija je verovatno tačna ako je izraz  $2h/lg$  naimenovan broj. Naime,

$$\left[ \frac{2h}{lg} \right] = \frac{m}{\frac{m}{s^2} \cdot m} = \frac{s^2}{m}$$

pa relacija nije dimenziono usaglašena, što znači da nije tačna.

## TOPLOTA

10. Zapremina gasa količine  $n$ , koji se nalazi na temperaturi  $T$  i pritisku  $p$  određena je relacijom

$$V = \frac{nRT}{p}$$

gde je  $R$  — molarna gasna konstanta.

Da li je relacija dimenziono usaglašena?

• Jedinica leve strane relacije je  $[V]=m^3$ , a s obzirom na to da je  $[n]=\text{mol}$ ,  $[R]=J/(\text{mol} \cdot K)$ ,  $[p]=Pa$ , jedinica desne strane je

$$\left[ \frac{nRT}{p} \right] = \frac{\text{mol} \cdot \frac{J}{\text{mol} \cdot K} \cdot K}{Pa} = \frac{J}{Pa} = \frac{N \cdot m}{\frac{N}{m^2}} = m^3$$

što znači da je relacija dimenziono usaglašena.

11. Kada se metalno telo, mase  $m$ , unese u kalorimetar sa vodom, u njemu se oslobodi količina toplote  $Q$ , a srednja temperatura u kalorimetru je tada  $t_s$ . Temperatura tela pre unošenja u kalorimetar određena je relacijom

$$t_x = \frac{Q}{mc} + t_s$$

gde je  $c$  — specifična toplotna kapacitivnost metala.

Da li je relacija dimenziono usaglašena?

• Dimenziona saglasnost će postojati ako izraz  $Q/mc$  ima prirodu temperature, tj. ako je njegova jedinica, kelvin. Pošto je  $[Q]=J$ ,  $[m]=kg$ ,  $[c]=J/(kg \cdot K)$ , to je

$$\frac{J}{\frac{J}{kg \cdot K}} = K$$

pa je potreban uslov ispunjen.

12. U relaciji za promenu temperature

$$\Delta T = \frac{Mv^2}{jR}$$

je  $M$  — molarna masa gasa,  $v$  — brzina suda u kome se on nalazi,  $j$  — broj stepena slobode gasa,  $R$  — molarna gasna konstanta.

Da li je ova relacija tačna?

• Relacija je verovatno tačna ako je dimenziono usaglašena. Pošto je  $[M]=\text{kg/mol}$ ,  $[v]=\text{m/s}$ ,  $[l]=1$ ,  $[R]=\text{J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$ , to je

$$\left[ \frac{Mv^2}{jR} \right] = \frac{\frac{\text{kg} \cdot \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{\text{mol}}}{\frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}} = \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{\text{K}}{\text{J}} = \text{K}$$

S obzirom na to da je jedinica leve strane relacije  $[\Delta T]=\text{K}$ , ona je dimenziono usaglašena.

## ELEKTRICITET

13. Četiri elektrona nalaze se u vakuumu na međusobno-jednakim rastojanjima  $d$ . Pri tome je intenzitet sile međusobnog dejstva elektrona  $F$ . Ovo rastojanje je određeno relacijom

$$d = \sqrt{\frac{3,83 \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot F}}$$

gde je  $\epsilon_0$ —električna konstanta a  $e$ —naelektrisanje elektrona.

Da li je ova relacija dimenziono usaglašena?

• Relacija je dimenziono usaglašena ako je jedinica desne strane metar. Pošto je  $[\pi]=1$ ,  $[\epsilon_0]=\text{C}^2/(\text{N}\cdot\text{m}^2)$ ,  $[e]=\text{C}$ ,  $[F]=\text{N}$ , to je

$$\left[ \sqrt{\frac{3,83 \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot F}} \right] = \sqrt{\frac{1}{\frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2}} \cdot \frac{\text{C}^2}{\text{N}}} = \text{m}$$

što znači da je potreban uslov ispunjen.

14. Izvesti jedinicu izraza

$$\frac{mc^2}{16l\sigma}$$

gde je  $\epsilon_0$ —električna konstanta,  $m$ —masa  $c$ —brzina svetlosti,  $e$ —naelektrisanje elektrona,  $\sigma$ —površinska gustina elektriciteta.

• Kako je  $[\epsilon_0]=\text{C}^2/(\text{N}\cdot\text{m}^2)$ ,  $[m]=\text{kg}$ ,  $[c]=\text{m/s}$ ,  $[e]=\text{C}$ ,  $[\sigma]=\text{C}/\text{m}^2$ , nalazi se da je

$$\left[ \frac{mc^2}{16l\sigma} \right] = \frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2} \cdot \frac{\text{kg} \cdot \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{\text{C} \cdot \frac{\text{C}}{\text{m}^2}} = \text{m}$$

15. Dokazati da je

$$\left[ d \sqrt{\frac{2m}{q\Delta\phi}} \right] = \text{s}$$

gde je  $d$ —dužina.

• Kako je  $[d]=\text{m}$ ,  $[m]=\text{kg}$ ,  $[q]=\text{C}$ ,  $[\Delta\phi]=\text{V}$ , to je

$$\left[ d \sqrt{\frac{2m}{q\Delta\phi}} \right] = \text{m} \sqrt{\frac{\text{kg}}{\frac{\text{C}}{\text{V}} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{J}}}} = \sqrt{\frac{\text{m}^2 \cdot \text{kg}}{\text{J}}}$$

Kako je  $\text{J}=\text{N}\cdot\text{m}=\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$ , nalazi se da je jedinica posmatranog izraza sekunda.

16. Električna susceptibilnost dielektrika polarizovanog orijentacionom određena je relacijom (zakon Debaja)

$$\chi_e = \frac{2np_e^2}{k\epsilon_0 T}$$

gde je  $n$ —koncentracija molekula čiji je električni moment  $p_e$ ,  $k$ —Bolcmanova konstanta,  $\epsilon_0$ —električna konstanta,  $T$ —apsolutna temperatura.

Dokazati dimenzionu ispravnost prethodne relacije.

• Električna susceptibilnost je neimenovan broj, tj.  $[\chi_e]=1$ , pa i desna strana ove relacije mora da bude takva.

Imajući u vidu da je  $[n]=1/\text{m}^3$ ,  $[p_e]=\text{C}\cdot\text{m}$ ,  $[k]=\text{J}/\text{K}$ ,  $[\epsilon_0]=\text{C}^2/(\text{N}\cdot\text{m}^2)$ ,  $[T]=\text{K}$ , nalazi se da je

$$\left[ \frac{2np_e^2}{k\epsilon_0 T} \right] = \frac{\frac{1}{\text{m}^3} \cdot (\text{C}\cdot\text{m})^2}{\frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot \frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2} \cdot \text{K}} = \frac{1}{\frac{\text{J}}{\text{N}\cdot\text{m}}} = 1$$

17. Električni motor, stepena korisnog dejstva  $\eta$ , priključen je na mrežu napona  $U$ . Ovaj motor pokreće građevinsku dizalicu kojom se podiže teret mase  $m$ . Teret se diže na visinu  $h$ . Da bi se dizanje tereta završilo za vreme  $t$ , kroz motor treba da protiče struja jačine  $I$ . Ovo vreme je određeno relacijom

$$t = \frac{mgh}{\eta UI}$$

gde je  $g$ —ubrzanje slobodnog padanja. Dokazati dimenzionu ispravnost prethodne relacije.

• Jedinica desne strane relacije treba da bude sekunda. Pošto je  $[m]=\text{kg}$ ,  $[g]=\text{m}/\text{s}^2$ ,

$[mgh]=\text{N}\cdot\text{m}$ ,  $[h]=\text{m}$ ,  $[\eta]=1$ ,  $[U]=\text{V}=\text{J}/\text{C}$ ,  $[I]=\text{A}=\text{C}/\text{s}$ , to je

$$\left[ \frac{mgh}{\eta UI} \right] = \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{V}\cdot\text{A}} = \frac{\text{J}}{\frac{\text{J}}{\text{C}} \cdot \frac{\text{C}}{\text{s}}} = \text{s}$$

18. Kada se dva elektrona (naelektrisanja  $e$ ) kreću jednakim brzinama  $v$ , po pravolinijskim putanjama, između kojih je rastojanje  $r$ , onda je sila uzajamnog dejstva elektrona (Lorencova sila) određena relacijom

$$F_m = \mu_0 \frac{e^2 v^2}{4\pi r^2}$$

pod uslovom da je  $v \ll c$ . U ovoj relaciji  $\mu_0$  je magnetna konstanta.

Dokazati dimenzionu usaglašenost prethodne relacije.

• Izvedena jedinica desne strane ove relacije treba da je njuton. Pošto je  $[\mu_0]=\text{N}/\text{A}^2$ ,  $[e]=\text{C}$ ,  $[v]=\text{m/s}$ ,  $[r]=\text{m}$ , nalazi se da je

$$\left[ \mu_0 \frac{e^2 v^2}{4\pi r^2} \right] = \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \cdot \frac{\text{C}^2 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \cdot \left(\frac{\text{C}}{\text{s}}\right)^2 = \text{N}$$

pošto je  $(\text{C}/\text{s})=\text{A}$ .

19. Kada elektron (čija je masa  $m_e$ , a naelektrisanje  $e$ ) uleti u homogeno magnetno polje, indukcije  $B$ , on se kreće po kružnoj putanji poluprečnika

$$r = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_e \Delta\phi}{e}}$$

gde je  $\Delta\phi$ —potencijalna razlika kojom je elektron prethodno ubrzan.

Dokazati dimenzionu usaglašenost prethodne relacije.

• Pošto je  $[m_e]=\text{kg}$ ,  $[\Delta\phi]=\text{V}$ ,  $[B]=\text{T}$ , to je

$$\left[ \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_e \Delta\phi}{e}} \right] = \frac{1}{\text{T}} \sqrt{\frac{\text{kg}\cdot\text{V}}{\text{C}}}$$

Kako je  $\text{T}=\text{N}/(\text{m}\cdot\text{A})$ ,  $\text{V}=\text{J}/\text{C}$ ,  $\text{A}=\text{C}/\text{s}$ , nalazi se da je jedinica ovog izraza metar, kako i treba da bude s obzirom, na to da on definiše poluprečnik putanje.

20. Dokazati da količnik jačine električnog polja  $E$  i magnetne indukcije  $B$  ima prirodu brzine.

• Imajući u vidu da je  $[E]=\text{N}/\text{C}$ , a  $[B]=\text{T}=\text{N}/(\text{m}\cdot\text{A})$ , nalazi se da je

$$\left[ \frac{E}{B} \right] = \frac{\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{A}}{\text{C}\cdot\text{N}} = \frac{\text{m}}{\text{C}} = \frac{\text{m}}{\text{A}\cdot\text{s}}$$

pošto je  $\text{C}/\text{A}=\text{s}$ .

21. Magnetna susceptibilnost paramagnetika određena je relacijom

$$\chi_m = \mu_0 \frac{np_m^2}{kT}$$

gde je  $\mu_0$ —magnetna konstanta,  $n$ —koncentracija atoma paramagnetika  $p_m$ —njihov magnetni moment,  $k$ —Bolcmanova konstanta,  $T$ —temperatura na kojoj se nalazi paramagnetik.

Dokazati dimenzionu usaglašenost prethodne relacije.

• Pošto je  $[\chi_m]=1$ , desna strana relacije treba da je isto tako naimenovana. S obzirom na to da je  $[\mu_0]=\text{N}/\text{A}^2$ ,  $[n]=1/\text{m}^3$ ,  $[p_m]=\text{A}\cdot\text{m}$ ,  $[k]=\text{J}/\text{K}$ ,  $[T]=\text{K}$ , to je

$$\left[ \mu_0 \frac{np_m^2}{kT} \right] = \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \cdot \frac{\frac{1}{\text{m}^3} (\text{A}\cdot\text{m})^2}{\frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot \text{K}} = \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{J}} = 1$$

22. Dokazati da je

$$[L\omega] = \Omega$$

gde je  $L$ —induktivnost kalema,  $\omega$ —kružna frekvencija naizmenične struje koja protiče kroz njega.

• Imajući u vidu da je  $[L]=\text{H}=\frac{\text{V}}{\text{A}/\text{s}}$ , a  $[\omega]=\text{rad}/\text{s}=1/\text{s}$  i da je  $[\Omega]=\text{V}/\text{A}$ , nalazi se da je

$$[L\omega] = \text{H} \cdot \frac{1}{\text{s}} = \frac{\text{V}}{\text{A}} \cdot \frac{1}{\text{s}} = \frac{\text{V}}{\text{A}} = \Omega$$

23. Pritisak električnog polja određen je proizvodom permitivnosti sredine  $s$  i kvadratom jačine električnog polja  $E$ . Naime, dokazati da je

$$[eE^2] = \text{Pa}$$

• Pošto je  $[e]=\text{C}^2/(\text{N}\cdot\text{m}^2)$ ,  $[E]=\text{N}/\text{C}$  i  $\text{Pa}=\text{N}/\text{m}^2$ , nalazi se da je

$$[eE^2] = \frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2} \cdot \frac{\text{N}^2}{\text{C}^2} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$$

24. Kada se elektron kreće ubrzanjem  $a$ , onda je jačina električnog indukcionog polja, na normalnom rastojanju  $r$  od njega, određena relacijom

$$E_i = \mu_0 \frac{ea}{4\pi r}$$

gde je  $\mu_0$ —permeabilnost vakuuma.

Da li je ova relacija dimenziono usaglašena?

• Jedinica leve strane relacije je

$$[E_i] = N/C$$

a desne

$$\left[ \mu_0 \frac{ea}{4\pi r} \right] = [\mu_0] \frac{[e][a]}{[r]} =$$

$$= \frac{N}{A^2} \cdot \frac{C \cdot \frac{m}{s^2}}{m} = \frac{N}{A^2} \cdot \frac{A}{s} = \frac{N}{A \cdot s} = \frac{N}{C}$$

tj. ista je kao i leve strane.

25. Dokazati da je:

a)  $\frac{N}{C} = \frac{V}{m}$  (jedinica jačine električnog polja)

b)  $\frac{C^2}{N \cdot m^2} = \frac{F}{m}$  (jedinica električne permitivnosti)

c)  $\frac{N}{A^2} = \frac{T \cdot m}{A} = \frac{H}{m}$  (jedinica magnetne permeabilnosti)

• a) Imajući u vidu da je  $V = J/C$  i  $J = N \cdot m$ , nalazi se da je

$$\frac{V}{m} = \frac{J}{C \cdot m} = \frac{N \cdot m}{C \cdot m} = \frac{N}{C}$$

b) Pošto je  $F = C/V$ ,  $V = J/C$ , to je

$$\frac{F}{m} = \frac{C}{V \cdot m} = \frac{C}{\frac{J}{C} \cdot m} = \frac{C^2}{J \cdot m} = \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

c) Kako je  $T = N/(m \cdot A)$ , to je

$$\frac{T \cdot m}{A} = \frac{N}{m \cdot A} \cdot \frac{m}{A} = \frac{N}{A^2}$$

a pošto je  $H = \frac{V}{A/s}$ , to je

$$\frac{H}{m} = \frac{V \cdot s}{A \cdot m} = \frac{J}{C \cdot A \cdot m} = \frac{N \cdot m \cdot s}{A \cdot s \cdot A \cdot m} = \frac{N}{A^2}$$

## OPTIKA

26. Razmak između tačkastih svetlosnih izvora, svetlosne jačine  $I$ , koji u određenoj tački prostora ostvaruju osvetljenost  $E$ , određen je relacijom

$$a = \sqrt{0,43 \frac{I}{E}}$$

Dokazati dimenzionu usaglašenost relacije.

• Kako je  $[I] = cd = lx \cdot m^2$ , a  $[E] = lx$ , to je

$$\left[ \sqrt{0,43 \frac{I}{E}} \right] = \sqrt{\frac{lx \cdot m^2}{lx}} = m$$

27. Luminancija kugle, poluprečnika  $R$ , u kojoj se nalazi tačkasti svetlosni izvor, ukupnog svetlosnog fluksa  $\Phi$ , određena je relacijom

$$L = \frac{\Phi}{4\pi^2 R^2}$$

Dokazati dimenzionu usaglašenost relacije.

• Prethodna relacija treba da se napiše u obliku

$$L = \frac{\Phi}{4\pi} \cdot \frac{1}{\pi R^2}$$

da bi se dimenziono proverila. Pošto je

$$[\Phi] = lm = cd \cdot sr$$

$$[4\pi] = sr$$

$$[\pi R^2] = m^2$$

to je

$$\left[ \frac{4\pi}{\Phi} \cdot \frac{1}{\pi R^2} \right] = \frac{lm}{sr} \cdot \frac{1}{m^2} = \frac{cd \cdot sr}{sr} \cdot \frac{1}{m^2} = \frac{cd}{m^2}$$

Kako je  $[L] = cd/m^2$ , relacija je dimenziono usaglašena.

28. Brzina prostiranja svetlosti u vakuumu određena je relacijom

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

gde su  $\mu_0$  i  $\epsilon_0$ —permeabilnost i permitivnost vakuuma.

Dokazati da je jedinica desne strane ove relacije m/s.

• Pošto je  $[\mu_0] = N/A^2$  i  $[\epsilon_0] = C^2/(N \cdot m^2)$  nalazi se da je

$$\left[ \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \right] = \sqrt{\frac{A^2}{N} \cdot \frac{N \cdot m^2}{C^2}} = \frac{m}{C} = \frac{m}{A \cdot s}$$

## ATOMSKA I NUKLEARNA FIZIKA

29. Komptonova talasna dužina određena je relacijom

$$\lambda_k = \frac{2h}{mc}$$

gde je  $h$ —Planckova konstanta,  $m$ —masa čestice na kojoj se vrši rasejavanje,  $c$ —brzina fotona elektromagnetnog zračenja.

Da li je ova relacija dimenziono usaglašena?

• Imajući u vidu da je  $[h] = J \cdot s$ ,  $[m] = kg$ ,  $[c] = m/s$ , nalazi se da je

$$\left[ \frac{2h}{mc} \right] = \frac{J \cdot s}{\frac{kg \cdot m}{s}} = \frac{kg \cdot m^2 \cdot s^2}{kg \cdot m} = m$$

Kako je  $[\lambda] = m$ , relacija je dimenziono usaglašena.

30. Ridbergova konstanta je određena relacijom

$$R = \frac{me^4 Z^2}{8\epsilon_0^2 ch^3}$$

gde je  $m$ —masa elektrona,  $e$ —njegovo naelektrisanje,  $Z$ —redni broj elementa,  $\epsilon_0$ —električna konstanta,  $c$ —brzina fotona elektromagnetnog zračenja,  $h$ —Planckova konstanta.

Izvesti jedinicu za ovu konstantu.

• Kako je  $[m] = kg$ ,  $[e] = C$ ,  $[Z] = 1$ ,  $[\epsilon_0] = C^2/(N \cdot m^2)$ ,  $[c] = m/s$ ,  $[h] = J \cdot s$ , nalazi se da je

$$\left[ \frac{me^4 Z^2}{8\epsilon_0^2 ch^3} \right] = \frac{kg \cdot C^4}{\left( \frac{C^2}{N \cdot m^2} \right)^2 \cdot \frac{m}{s} \cdot (J \cdot s)^3} = \frac{kg \cdot m}{J \cdot s^2} = \frac{1}{m}$$

31. Vodoniak se nalazi na pritisku  $p$  i temperaturi  $T$ . Energija elektrona u

sastavu atoma vodonika, pod uslovom da je poluprečnik njihove orbite jednak polovini rastojanja između centara susjednih atoma, određena je relacijom

$$E = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{p}{kT} \right)^{1/3}$$

Proveriti tačnost ove relacije primenjajući dimenzionu analizu.

• Ako je relacija dimenziono usaglašena, ona je verovatno i tačna. U tom smislu, jedinica desne strane relacije treba da je džul. Pošto je  $[e] = C$ ,  $[\epsilon_0] = C^2/(N \cdot m^2)$ ,  $[p] = Pa$ ,  $[k] = J/K$ ,  $[T] = K$ , to je

$$\left[ \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{p}{kT} \right)^{1/3} \right] = \frac{C^2}{N \cdot m^2} \left( \frac{\frac{N}{m^2}}{\frac{J}{K} \cdot K} \right)^{1/3} =$$

$$= N \cdot m^2 \left( \frac{1}{m^3} \right)^{1/3} = N \cdot m = J$$

32. Aktivnost količine urana mase  $m$ , iznosi  $\lambda$ . Ovi podaci određuju konstantu radioaktivnosti urana  $\lambda$ , pošto je  $\lambda = A/N$ , gde je  $N$ —broj neraspadnutih atoma urana. Kako je  $N = n \cdot N_A = \frac{m}{M} N_A$ , nalazi se da je

$$\lambda = \frac{c \cdot M}{m N_A}$$

gde je  $M$ —molarna masa urana, a  $N_A$ —Avogadrova konstanta.

Dokazati da je prethodna relacija dimenziono usaglašena.

• Imajući u vidu da je  $[\lambda] = 1/s$ , znači da i desna strana relacije treba da ima istu jedinicu. Kako je  $[A] = Bq = 1/s$ ,  $[n] = kg/mol$ ,  $[m] = kg$ ,  $[N_A] = 1/mol$ , nalazi se da je

$$\left[ \frac{c \cdot M}{m N_A} \right] = \frac{\frac{1}{s} \cdot \frac{kg}{mol}}{\frac{kg}{mol} \cdot \frac{1}{mol}} = \frac{1}{s}$$

što ukazuje da je relacija dimenziono usaglašena.

### 3. Tablice

VREDNOST NEKIH FIZIČKIH KONSTANTI

Tablica 1

| Naziv   | Oznaka           | Vrednost   | Relativna greška, % 10 <sup>-4</sup> |
|---|------------------|--|--------------------------------------|
| Brzina svetlosti u vakuumu                              | <i>c</i>         | 299 792 458 m/s  | 0,004                                |
| Magnetna konstanta                                      | $\mu_0$          | $4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m                                     | tačno                                |
| Električna konstanta, $1/\mu_0 c^2$                     | $\epsilon_0$     | $8,854 187 818 \cdot 10^{-12}$ F/m                           | 0,008                                |
| Gravitaciona konstanta                                  | $\gamma, G$      | $6,672 0 \cdot 10^{-11}$ N·m <sup>2</sup> /kg <sup>2</sup>   | 615                                  |
| Plankova konstanta                                      | <i>h</i>         | $6,626 176 \cdot 10^{-34}$ J·s                               | 5,4                                  |
|   | $\hbar = h/2\pi$ | $1,054 588 \cdot 10^{-34}$ J·s                               | 5,4                                  |
| Avogadrova konstanta                                    | $N_A$            | $6,022 054 \cdot 10^{23}$ 1/mol                              | 5,1                                  |
| Elementarno naelektrisanje                              | <i>e</i>         | $1,602 189 92 \cdot 10^{-19}$ C                              | 2,9                                  |
| Atomska jedinica mase                                   | <i>u</i>         | $1,660 565 5 \cdot 10^{-27}$ kg                              | 5,1                                  |
| Standardni pritisak                                     | $p^0$            | 101 325 Pa   | tačno                                |
| Standardna temperatura                                  | $T^0$            | 273,15 K   | tačno                                |
| Standardno ubrzanje slobodnog padanja                   | $g^0$            | 9,806 65 m/s <sup>2</sup>                                    | tačno                                |
| Temperatura trojne tačke vode                           | $T_{tr}$         | 273,160 0 K  | 0,37                                 |
| Masa — elektrona  | $m_e$            | $9,109 534 \cdot 10^{-31}$ kg                                | 5,1                                  |
|   |                  | $5,485 802 6 \cdot 10^{-4}$ u                                | 0,38                                 |
| — protona   | $m_p$            | $1,672 648 5 \cdot 10^{-27}$ kg                              | 5,1                                  |
|   |                  | $1,007 276 47$ u   | 0,011                                |
| — neutrona  | $m_n$            | $1,674 954 3 \cdot 10^{-27}$ kg                              | 5,1                                  |
|   |                  | $1,008 665 01$ u   | 0,037                                |
| — miona   | $m_\mu$          | $1,883 566 \cdot 10^{-28}$ kg                                | 5,6                                  |
|   |                  | $0,113 429 20$ u   | 2,3                                  |
| Faradejeva konstanta, $N_A \cdot e$                     | <i>F</i>         | $9,648 456 \cdot 10^4$ C/mol                                 | 2,8                                  |
| Ridbergova konstanta, $\mu_0^2 m_e e^4 c^3 / 8h^3$      | $R_\infty$       | $1,097 373 177 \cdot 10^7$ 1/m                               | 0,075                                |
| Borov magneton, $eh/4\pi m_e$                           | $\mu_B$          | $9,274 076 \cdot 10^{-24}$ J/T                               | 3,9                                  |
| Magnetni moment elektrona                               | $\mu_e$          | $9,284 832 \cdot 10^{-24}$ J/T                               | 3,9                                  |
| Komptonova talasna dužina, $h/mc$                       |                  |  |                                      |
| — elektrona   | $\lambda_{C,e}$  | $2,426 308 9 \cdot 10^{-12}$ m                               | 1,6                                  |
| — protona   | $\lambda_{C,p}$  | $1,321 409 9 \cdot 10^{-15}$ m                               | 1,7                                  |
| — neutrona  | $\lambda_{C,n}$  | $1,319 590 9 \cdot 10^{-15}$ m                               | 1,7                                  |
| Molarna zapremina idealnog gasa na standardnim uslovima | $V_m$            | $22,413 83 \cdot 10^{-3}$ m <sup>3</sup> /mol                | 31                                   |
| Molarna gasna konstanta $p^0 V_m / T^0$                 | <i>R</i>         | 8,314 41 J/(mol·K)   | 31                                   |
| Boltzmanova konstanta, $R/N_A$                          | <i>k</i>         | $1,380 662 \cdot 10^{-23}$ J/K                               | 32                                   |
| Stefan-Boltzmanova konstanta, $\pi^2 k^4 / 60h^3 c^2$   | $\sigma$         | $5,670 32 \cdot 10^{-8}$ W/(m <sup>2</sup> ·K <sup>4</sup> ) | 125                                  |
| Vinova konstanta, $\lambda_{max} \cdot T$               | <i>b</i>         | $2,897 82 \cdot 10^{-3}$ m·K                                 | 44,9                                 |
| Prva konstanta zračenja, $2\pi hc^2$                    | $c_1$            | $3,741 832 \cdot 10^{-16}$ W/m <sup>2</sup>                  | 5,4                                  |
| Druga konstanta zračenja, $hc/k$                        | $c_2$            | $1,438 786 \cdot 10^{-2}$ m·K                                | 31                                   |
| Gustina žive na standardnim uslovima                    | $\rho_{Hg}$      | 13 595,04 kg/m <sup>3</sup>                                  | 4,4                                  |
| Borov poluprečnik, $\mu_0 e^2 h^2 / 4\pi m_e e^2$       | $a_0$            | $5,291 770 6 \cdot 10^{-11}$ m                               | 0,83                                 |
| Klasični poluprečnik elektrona, $\mu_0 e^2 / 4\pi m_e$  | $r_e$            | $2,817 938 0 \cdot 10^{-15}$ m                               | 2,5                                  |

### NEKE MATEMATIČKE KONSTANTE I PRIBLIŽNE FORMULE

Tablica 2

| Konstante   | Približne formule (pri $x \ll 1$ )   |
|---|--|
| $\pi = 3,1416$<br>$\pi^2 = 9,8696$<br>$\sqrt{\pi} = 1,7725$<br>$e = 2,7183$<br>$\log e = 0,4343$<br>$\ln 10 = 2,3026$ | $(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx$<br>$e^x \approx 1 + x$<br>$\ln(1+x) \approx x$<br>$\sin x \approx x$<br>$\cos x \approx 1 - x^2/2$<br>$\operatorname{tg} x \approx x$ |

### NEKE TRIGONOMETRUSKE RELACIJE

Tablica 3

|  |   |
|--|---|
| $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$<br>$\sec^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha = 1$<br>$\csc^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1$<br>$\sin \alpha \cdot \csc \alpha = 1$<br>$\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1$<br>$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$   | $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$<br>$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$<br>$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$<br>$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \pm 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}$   |
| $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$<br>$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$<br>$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$<br>$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$<br>$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$<br>$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$ | $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$<br>$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$<br>$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$<br>$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$<br>$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$<br>$\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \pm \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$ |
| $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$<br>$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$   | $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$<br>$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$<br>$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$  |
| $\operatorname{sh} \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}$<br>$\operatorname{ch} \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}$   | $\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$<br>$\operatorname{cth} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$   |



NEKE TABLIČNE VREDNOSTI IZVODA I INTEGRALA

Tablica 4

| Funkcija        | Izvod                   | Funkcija                   | Izvod                              |
|-----------------|-------------------------|----------------------------|------------------------------------|
| $x^n$           | $nx^{n-1}$              | $\sin x$                   | $\cos x$                           |
| $\frac{1}{x}$   | $-\frac{1}{x^2}$        | $\cos x$                   | $-\sin x$                          |
| $\frac{1}{x^n}$ | $-\frac{n}{x^{n+1}}$    | $\operatorname{tg} x$      | $\frac{1}{\cos^2 x}$               |
| $\sqrt{x}$      | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$   | $\operatorname{ctg} x$     | $-\frac{1}{\sin^2 x}$              |
| $e^x$           | $e^x$                   | $\arcsin x$                | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$           |
| $e^{ax}$        | $ae^{ax}$               | $\arccos x$                | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$          |
| $a^x$           | $a^x \ln a$             | $\operatorname{arctg} x$   | $\frac{1}{1+x^2}$                  |
| $\ln x$         | $\frac{1}{x}$           | $\operatorname{arccctg} x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$                 |
| $\sqrt{u}$      | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$  | $\operatorname{sh} x$      | $\operatorname{ch} x$              |
| $\ln u$         | $\frac{u'}{u}$          | $\operatorname{ch} x$      | $\operatorname{sh} x$              |
| $\frac{u}{v}$   | $\frac{vu' - uv'}{v^2}$ | $\operatorname{th} x$      | $\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$  |
|                 |                         | $\operatorname{cth} x$     | $-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ |

NEKE TABLIČNE VREDNOSTI INTEGRALA

Tablica 5

|   |  |
|---|--|
| $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} (n \neq -1)$ | $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$       |
| $\int \frac{dx}{x} = \ln x$                     | $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$     |
| $\int \sin x dx = -\cos x$                      | $\int e^x dx = e^x$                                    |
| $\int \cos x dx = \sin x$                       | $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$       |
| $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x$     | $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$             |
| $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x$     | $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ |

GRČKA AZBUKA

|             |            |             |             |
|-------------|------------|-------------|-------------|
| A α alfa    | H η eta    | N ν ni      | T τ tau     |
| B β beta    | Θ θ teta   | Ξ ξ ksi     | Υ υ ipsilon |
| Γ γ gama    | I ι jota   | Ο ο omikron | Φ φ fi      |
| Δ δ delta   | K κ kapa   | Π π pi      | Χ χ hi      |
| E ε epsilon | Λ λ lambda | Ρ ρ ro      | Ψ ψ psi     |
| Z ζ zeta    | Μ μ mi     | Σ σ sigma   | Ω ω omega   |

NEKA PRAVILA VEKTORSKOG RAČUNA

Tablica 5

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \\ \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot (-\vec{c}) \\ \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) &= \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} &= \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c}) + \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} - (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} \\ \frac{d}{dt} (\vec{a} \cdot \vec{b}) &= \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt} \\ \frac{d}{dt} (z\vec{a}) &= z \frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{a} \frac{dz}{dt} \\ \frac{d}{dt} (\vec{a} \cdot \vec{b}) &= \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt} \\ \frac{d}{dt} (\vec{a} \cdot \vec{b}) &= \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt} \end{aligned}$$

FIZIČKE KARAKTERISTIKE VODE

Tablica 6

|                                       |          |
|---------------------------------------|----------|
| Parametri kritičnog stanja:           |          |
| — temperatura, °C                     | 374,15   |
| — pritisak, MPa                       | 24,2     |
| — gustina, kg/m <sup>3</sup>          | 307      |
| Molarna masa, kg/mol                  | 0,018016 |
| Relativna permitivnost                |          |
| — na temperaturi                      |          |
| 0 °C                                  | 88,3     |
| 20 °C                                 | 81,0     |
| 100 °C                                | 74,6     |
| 0 °C (led)                            | 74,6     |
| Gustina, kg/m <sup>3</sup>            |          |
| — na temperaturi                      |          |
| 0 °C                                  | 999,841  |
| 3,98 °C                               | 999,973  |
| 20 °C                                 | 998,203  |
| 100 °C (para)                         | 0,598    |
| 0 °C (led)                            | 916,8    |
| Koeficijent površinskog napona, mN/m  |          |
| — na temperaturi                      |          |
| 0 °C                                  | 75,6     |
| 20 °C                                 | 72,7     |
| 100 °C                                | 58,8     |
| Apsolutni indeks prelamanja (20 °C)   | 1,332 99 |
| Srednji poluprečnik molekula, nm      | 0,138    |
| Brzina prostiranja zvuka (25 °C), m/s | 1497     |
| Temperatura (101 325 Pa), °C          |          |
| — očvršćavanja                        | 0,00     |
| — ključanja                           | 100,00   |
| — najveće gustine                     | 3,98     |

Trojna tačka

|  |        |
|--|--------|
| — temperatura, K   | 273,16 |
| — pritisak, Pa   | 610    |
| Specifična toplotna kapacitivnost (98 066,5 Pa), kJ/(kg·K)         |        |
| — na temperaturi 0 °C  | 4,218  |
| 20 °C  | 4,182  |
| 100 °C (para)  | 2,135  |
| 0 °C (led)   | 2,039  |
| Specifična toplota očvršćavanja (topljenja) (101 325 Pa), MJ/kg    | 0,32   |
| Specifična toplota kondenzovanja (isparavanja) (101 325 Pa), MJ/kg | 2,26   |
| Specifična električna provodnost, μS/m                             |        |
| — na temperaturi 0 °C  | 1,5    |
| 18 °C  | 4,4    |
| 50 °C  | 18,9   |
| 0 °C (led)   | 0,4    |

FIZIČKE KARAKTERISTIKE VAZDUHA

Tablica 7

|  |                         |
|--|-------------------------|
| Parametri kritičnog stanja:                                    |                         |
| — temperatura, °C  | —140,6                  |
| — pritisak, MPa  | 3,7                     |
| — gustina, kg/m <sup>3</sup>                                   | 350                     |
| Molarna masa, kg/mol   | 0,028 97                |
| Relativna permitivnost (101 325 Pa)                            |                         |
| — na temperaturi 0 °C  | 1,000 59                |
| 19 °C  | 1,000 58                |
| Gustina suvog vazduha (101 325 Pa), kg/m <sup>3</sup>          |                         |
| — na temperaturi -25 °C  | 1,424                   |
| 0 °C   | 1,293                   |
| 20 °C  | 1,205                   |
| 100 °C   | 0,946                   |
| 500 °C   | 0,456                   |
| 1000 °C  | 0,276                   |
| Apsolutni indeks prelamanja                                    | 1,000 29                |
| Brzina prostiranja zvuka (0 °C), m/s                           | 331,46                  |
| Temperatura, °C  |                         |
| — ključanja  | —192,0                  |
| — topljenja  | —213                    |
| Koeficijent dinamičke viskoznosti, μPa·s                       | 18,4                    |
| Temperaturski koeficijent zapreminskog širenja (0–100 °C), 1/K | 0,003 66                |
| Specifična električna provodnost na površini Zemlje, S/m       | (1–2)·10 <sup>-18</sup> |
| Specifična toplotna kapacitivnost, kJ/(kg·K)                   |                         |
| — pri stalnom pritisku   | 1,024                   |
| — pri stalnoj zapremini  | 0,727                   |
| Adijabatska konstanta  | 1,40                    |

NEKE KARAKTERISTIKE PLANETA SUNČEVOG SISTEMA

Tablica 8

| Planeta | Srednje udaljenje od Sunca, aj | Brzina u orbiti, km/s | Relativna masa | Period kretanja oko Sunca, god. | Prva kosmička brzina, km/s | Druga kosmička brzina, km/s | Ubrzanje slobodnog padanja na površini plan., m/s <sup>2</sup> | Najviša temperatura, °C |
|---------|--------------------------------|-----------------------|----------------|---------------------------------|----------------------------|-----------------------------|--|-------------------------|
| Merkur  | 0,39                           | 47,9                  | 0,052          | 0,24                            | 3,0                        | 4,25                        | 2,55   | -400                    |
| Venera  | 0,72                           | 35,0                  | 0,82           | 0,62                            | 7,2                        | 10,2                        | 8,86   | -194                    |
| Zemlja  | 1,00                           | 29,8                  | 1              | 1,00                            | 7,9                        | 11,2                        | 9,81   | -63                     |
| Mars    | 1,52                           | 24,2                  | 0,11           | 1,88                            | 3,6                        | 5,1                         | 3,72   | -30                     |
| Jupiter | 5,2                            | 13,1                  | 316            | 11,86                           | 42,6                       | 60,4                        | 25,90  | -129                    |
| Saturn  | 9,54                           | 9,65                  | 95             | 29,46                           | 25,7                       | 36,4                        | 11,10  | -152                    |
| Uran    | 19                             | 5,78                  | 12,9           | 84,02                           | 15,1                       | 21,5                        | 10,45  | -168                    |
| Neptun  | 30                             | 5,42                  | 17,2           | 164,8                           | 16,6                       | 23,2                        | 13,88  | -200                    |
| Pluton  | 39,4                           | 4,73                  | —              | 249,7                           | —                          | —                           | 23,00  | -220                    |

NEKE KARAKTERISTIKE SUNCA, ZEMLJE I MESECA

Tablica 9

| Veličina   | Sunce                   | Zemlja                    | Mesec                  |
|--|-------------------------|---------------------------|------------------------|
| Masa, kg   | 2 · 10 <sup>30</sup>    | 6 · 10 <sup>24</sup>      | 7,3 · 10 <sup>22</sup> |
| Poluprečnik, km                                      | 696 000                 | 6 371                     | 1 738                  |
| Zapremina, km <sup>3</sup>                           | 1,4 · 10 <sup>18</sup>  | 1 · 10 <sup>12</sup>      | 2,2 · 10 <sup>10</sup> |
| Srednja gustina, kg/m <sup>3</sup>                   | 1 400                   | 5 518                     | 3 350                  |
| Gustina u središtu, kg/m <sup>3</sup>                | 1 · 10 <sup>5</sup>     | (15-18) · 10 <sup>3</sup> | —                      |
| Srednje ubrzanje slobodnog padanja, m/s <sup>2</sup> | 273,8                   | 9,81                      | 1,62                   |
| Rastojanje od Zemlje, km                             |                         |                           |                        |
| — najmanje   | 147,1 · 10 <sup>6</sup> | —                         | 356 410                |
| — najveće  | 152,1 · 10 <sup>6</sup> | —                         | 406 740                |
| — srednje  | 149,6 · 10 <sup>6</sup> | —                         | 384 440                |
| Srednja brzina kretanja po orbiti, km/s              | 250                     | 30                        | 1                      |
| Druga kosmička brzina na površini, km/s              | 618                     | 11,2                      | 2,4                    |

SASTAV ZEMLJINE ATMOSFERE, %

Tablica 10

| Gas           | po zapremini | po masi   |
|---------------|--------------|-----------|
| Azot          | 78,09        | 75,53     |
| Kiseonik      | 20,95        | 23,14     |
| Argon         | 0,93         | 1,28      |
| Ugljendioksid | 0,03         | 0,045     |
| Neon          | 0,001 8      | 0,001 2   |
| Helijum       | 0,000 53     | 0,000 073 |
| Metan         | 0,000 15     | 0,000 084 |
| Kripton       | 0,000 1      | 0,003     |
| Vodonik       | 0,000 05     | 0,000 003 |
| Ozon          | 0,000 04     | 0,000 07  |
| Ksenon        | 0,000 008    | 0,000 04  |

\* Smatra se da je visina Zemljine atmosfere 200 km

ATMOSFERSKI PRITISAK NA NEKIM VISINAMA

Tablica 11

| h, km | p, kPa    |
|-------|-----------|
| 0     | 101,325   |
| 1     | 89,876    |
| 2     | 79,501    |
| 3     | 70,120    |
| 4     | 61,660    |
| 5     | 54,048    |
| 6     | 47,218    |
| 7     | 41,105    |
| 8     | 35,652    |
| 9     | 30,801    |
| 10    | 26,500    |
| 20    | 5,5       |
| 30    | 1,2       |
| 50    | 0,8       |
| 100   | 0,000 026 |

UBRZANJE SLOBODNOG PADANJA NA NEKIM VISINAMA IZNAD POVRŠINE ZEMLJE

Tablica 12

| h, km  | g, m/s <sup>2</sup> |
|--------|---------------------|
| 0      | 9,806 6             |
| 1      | 9,803 6             |
| 2      | 9,800 5             |
| 3      | 9,797 4             |
| 4      | 9,794 3             |
| 5      | 9,791 2             |
| 6      | 9,788 2             |
| 8      | 9,782 0             |
| 10     | 9,775 9             |
| 20     | 9,745 2             |
| 50     | 9,654 2             |
| 80     | 9,564 4             |
| 100    | 9,505               |
| 1 000  | 7,36                |
| 10 000 | 1,50                |

UBRZANJE SLOBODNOG PADANJA NA NEKIM GEOGRAFSKIM ŠIRINAMA ZEMLJE, m/s<sup>2</sup> (na nivou mora)

Tablica 13

| φ, °      | g, m/s <sup>2</sup> |
|-----------|---------------------|
| 0 (pol)   | 9,780 49            |
| 10        | 9,782 04            |
| 20        | 9,786 52            |
| 30        | 9,793 38            |
| 40        | 9,801 80            |
| 45        | 9,806 16            |
| 50        | 9,810 79            |
| 60        | 9,819 24            |
| 70        | 9,826 14            |
| 80        | 9,830 65            |
| 90 (ekv.) | 9,832 35            |

GEOGRAFSKE ŠIRINE NEKIH GRADOVA I ODGOVARAJUĆE UBRZANJE SLOBODNOG PADANJA

Tablica 14

| Grad         | φ, °   | g, m/s <sup>2</sup> |
|--------------|--------|---------------------|
| Aleksandrija | 31°12' | 9,741 16            |
| Banja Luka   | 44°46' | 9,805 91            |
| Bar          | 42°5'  | 9,803 45            |
| Beograd      | 44°48' | 9,806 00            |
| Bjelovar     | 45°53' | 9,806 96            |
| Budimpešta   | 47°30' | 9,808 42            |
| Vašington    | 38°53' | 9,800 67            |
| Zagreb       | 45°59' | 9,807 06            |
| Ljubljana    | 46°3'  | 9,807 11            |
| Prag         | 50°6'  | 9,810 75            |
| Titograd     | 42°26' | 9,803 84            |
| Sarajevo     | 43°52' | 9,805 13            |
| Skoplje      | 41°58' | 9,803 40            |

GUSTINE NEKIH ČVRSTIH I TEČNIH SUPSTANCIJA

Tablica 15

| Supstancija             | Gustina 10 <sup>3</sup> kg/m <sup>3</sup> |
|-------------------------|---|
| Azbest                  | 2,1-2,3                                   |
| Aluminijum              | 2,5-2,7                                   |
| Antimon                 | 6,57                                      |
| Asfalt                  | 1,1-1,5                                   |
| Bakar                   | 8,3-9                                     |
| Beton                   | 1,8-2,3                                   |
| Boraks                  | 1,7-1,3                                   |
| Bronza                  | 8,7-8,9                                   |
| Gvožđe — čisto          | 7,86                                      |
| — liveno                | 8,3-8,9                                   |
| Granit                  | 2,3-2,7                                   |
| Grafit                  | 1,9-2,3                                   |
| Živa                    | 13,59                                     |
| Zlato                   | 19,25-19,35                               |
| Kalaj                   | 7,2                                       |
| Kvarc                   | 2,5-2,3                                   |
| Kuhinjska so            | 2,3-2,4                                   |
| Led                     | 0,92-0,92                                 |
| Mesing                  | 8,4-8,72                                  |
| Olovo                   | 11,25-11,35                               |
| Pesak                   | 1,2-2                                     |
| Platina                 | 21  |
| Pluta                   | 0,2-0,35                                  |
| Porcelan                | 2,25-2,5                                  |
| Srebro                  | 10,5                                      |
| Staklo prozorsko        | 2,4-2,7                                   |
| Čelik                   | 7,85                                      |
| Alkohol (15 °C)         | 0,79                                      |
| Benzin (15 °C)          | 0,68-0,74                                 |
| Glicerin (0 °C)         | 1,25                                      |
| Mineralna ulja          | 0,9-0,96                                  |
| Nafta (19 °C)           | 0,76                                      |
| Sumporna kiselina (87%) | 1,8                                       |
| Terpentinsko ulje       | 0,78                                      |

GUSTINA VODE NA NEKIM TEMPERATURAMA (na pritisku 101 325 Pa)

Tablica 16

| t, °C | ρ, kg/m <sup>3</sup> | t, °C | ρ, kg/m <sup>3</sup> |
|-------|----------------------|-------|----------------------|
| 0     | 999,841              | 15    | 999,100              |
| 1     | 999,902              | 20    | 998,203              |
| 2     | 999,941              | 30    | 997,645              |
| 3     | 999,965              | 40    | 997,21               |
| 4     | 1 000,000            | 50    | 996,64               |
| 5     | 999,965              | 60    | 996,21               |
| 6     | 999,941              | 70    | 995,79               |
| 7     | 999,902              | 80    | 995,40               |
| 8     | 999,842              | 90    | 995,07               |
| 9     | 999,770              | 100   | 994,83               |
| 10    | 999,700              |       |                      |

\* Voda ima najveću gustinu na temperaturi 3,98 °C i ona iznosi 999,973 kg/m<sup>3</sup>. U skladu se uzima da je gustina vode 1 000 kg/m<sup>3</sup> (zaokruženo) na temperaturi +4 °C.

\* Gustina vode na temperaturi 100 °C iznosi 958,35 kg/m<sup>3</sup> a zasićene vodene pare iste temperature 0,598 kg/m<sup>3</sup>.

MOLARNA MASA I GUSTINA NEKIH GASOVA  
(0 °C; 101 325 Pa)

Tablica 17

| Gas                           | Formula                       | Molarna masa, kg/mol | Gustina, kg/m <sup>3</sup> | Relativna gustina |
|-------------------------------|-------------------------------|----------------------|----------------------------|-------------------|
| Azot                          | N <sub>2</sub>                | 0,028 016            | 1,25                       | 0,967             |
| Vodonik                       | H <sub>2</sub>                | 0,002 016            | 0,089                      | 0,0685            |
| Vazduh (bez CO <sub>2</sub> ) | —                             | 0,028 97             | 1,293                      | 1                 |
| Etan                          | C <sub>2</sub> H <sub>6</sub> | 0,030 07             | 1,356                      | 1,049             |
| Kiseonik                      | O <sub>2</sub>                | 0,032 00             | 1,429                      | 1,105             |
| Ksenon                        | Xe                            | 0,131 30             | 5,821                      | 4,525             |
| Neon                          | Ne                            | 0,020 18             | 0,900                      | 0,696             |
| Radon                         | Rn                            | 0,222 00             | 9,96                       | 7,703             |
| Hlor                          | Cl <sub>2</sub>               | 0,070 91             | 3,21                       | 2,485             |

GUSTINA SUVOG VAZDUHA NA RAZNIM TEMPERATURAMA

Ova zavisnost je data relacijom  $\rho_t = \frac{p_a \cdot p}{1 - \alpha t} \cdot \frac{p}{p^0}$ , gde je  $p_a = 1,2932 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  — gustina vazduha na  $T^0$  i  $p^0$ ,  $\alpha = 0,00367 \text{ 1/}^\circ\text{C}$  — temperaturni koeficijent zapreminskog širenja suvog vazduha pri stalnom pritisku,  $p$  — pritisak vazduha i  $p^0$  — standardni pritisak.

Tablica 18

| t, °C | p, mbar |         |       |
|-------|---------|---------|-------|
|       | 1000    | 1013,25 | 1027  |
| 0     | 1,276   | 1,293   | 1,31  |
| 5     | 1,253   | 1,27    | 1,287 |
| 10    | 1,231   | 1,247   | 1,264 |
| 15    | 1,21    | 1,226   | 1,242 |
| 20    | 1,189   | 1,205   | 1,221 |
| 25    | 1,169   | 1,185   | 1,200 |
| 30    | 1,150   | 1,165   | 1,180 |
| 35    | 1,130   | 1,145   | 1,160 |

GUSTINA ZEMLJINE ATMOSFERE NA NEKIM VISINAMA

Tablica 19

| h, km | $\rho$ , kg/m <sup>3</sup> |
|-------|----------------------------|
| 0     | 1,225                      |
| 0,2   | 1,202                      |
| 0,3   | 1,190                      |
| 0,5   | 1,167                      |
| 1     | 1,112                      |
| 2     | 1,007                      |
| 4     | 0,819                      |
| 6     | 0,660                      |
| 8     | 0,526                      |
| 10    | 0,414                      |
| 12    | 0,312                      |
| 16    | 0,166                      |
| 20    | $8,891 \cdot 10^{-2}$      |
| 30    | $1,841 \cdot 10^{-2}$      |
| 40    | $4,000 \cdot 10^{-3}$      |
| 50    | $1,027 \cdot 10^{-3}$      |
| 60    | $3,097 \cdot 10^{-4}$      |
| 70    | $8,285 \cdot 10^{-5}$      |
| 80    | $1,846 \cdot 10^{-5}$      |
| 90    | $3,418 \cdot 10^{-6}$      |
| 100   | $5,550 \cdot 10^{-7}$      |
| 120   | $2,440 \cdot 10^{-9}$      |

KOEFICIJENT POVRŠINSKOG NAPONA NEKIH TEČNOSTI

Tablica 20

| Tečnost          | t, °C | $\alpha$ , mN/m |
|------------------|-------|-----------------|
| Alkohol          | 20    | 22,8            |
| — etil           | 20    | 23              |
| — metil          | 16,4  | 23,8            |
| — propil         | 16,8  | 23,3            |
| Aceton           | 700   | 840             |
| Aluminijum       | 13    | 29              |
| Benzol           | 0     | 75,6            |
| Voda             | 20    | 72,5            |
|                  | 50    | 67,8            |
|                  | 100   | 58,8            |
| Glicerin         | 15,5  | 64,3            |
| Živa             | 20    | 471,6           |
| Kiselina         |       |                 |
| — azotna (80%)   | 20    | 59,4            |
| — sumporna (85%) | 18    | 57,6            |
| — sona           | 20    | 23,5            |
| Krv              | 37    | 60              |
| Ulje             | 18    | 33              |
| Olovo            | 253   | 526             |
| Zlato            | 1130  | 1102            |

KOEFICIJENT POVRŠINSKOG NAPONA VODE NA NEKIM TEMPERATURAMA

Tablica 21

| t, °C | $\alpha$ , mN/m |
|-------|-----------------|
| 0     | 75,49           |
| 5     | 74,75           |
| 10    | 74,01           |
| 15    | 73,26           |
| 20    | 72,53           |
| 30    | 71,05           |
| 40    | 69,54           |
| 50    | 67,80           |
| 60    | 66,00           |
| 70    | 64,20           |
| 80    | 62,30           |
| 85    | 61,40           |
| 100   | 58,8            |

KOEFICIJENT VISKOZNOSTI NEKIH GASOVA I PARA

Tablica 23

| Gas         | t, °C | $\eta$ , $\mu\text{Pa}\cdot\text{s}$ |
|-------------|-------|--------------------------------------|
| Azot        | 0     | 16,7                                 |
|             | 15    | 17,4                                 |
| Argon       | 23    | 22,1                                 |
| Vazduh      | 0     | 17,2                                 |
|             | 22    | 18,4                                 |
| Vodena para | 0     | 8,7                                  |
|             | 100   | 12,3                                 |
| Živina para | 0     | 16,2                                 |
| Hlor        | 20    | 13,2                                 |
| Cian        | 17    | 9,9                                  |

KOEFICIJENT VISKOZNOSTI NEKIH TEČNOSTI

Tablica 22

| Tečnost  | t, °C | $\eta$ , $\mu\text{Pa}\cdot\text{s}$ |
|----------|-------|--------------------------------------|
| Alkohol  | 20    | 1190                                 |
| Aceton   | 25    | 320                                  |
| Benzin   | 20    | 530                                  |
| Voda     | 20    | 1006                                 |
| Glicerin | -20   | $1,3 \cdot 10^4$                     |
|          | 0     | $1,2 \cdot 10^7$                     |
|          | 20    | $1,5 \cdot 10^8$                     |
|          | 100   | $1,3 \cdot 10^4$                     |
| Živa     | -20   | 1850                                 |
|          | 20    | 1550                                 |
| Mleko    | 20    | 1800                                 |
| Helijum  | -271  | 2,5                                  |

KOEFICIJENT VISKOZNOSTI VODE NA NEKIM TEMPERATURAMA

Tablica 24

| t, °C | $\eta$ , $\mu\text{Pa}\cdot\text{s}$ |
|-------|--------------------------------------|
| 0     | 1739                                 |
| 10    | 1309                                 |
| 20    | 1006                                 |
| 30    | 800                                  |
| 40    | 656                                  |
| 50    | 550                                  |
| 60    | 469                                  |
| 70    | 406                                  |
| 80    | 357                                  |
| 90    | 317                                  |
| 100   | 284                                  |

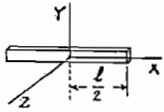
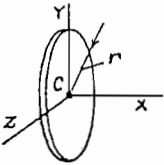
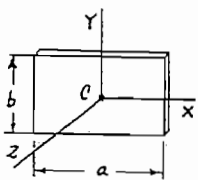
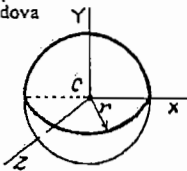
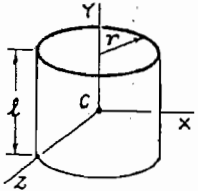
JUNGOV MODUL ELASTIČNOSTI  $E_y$ , TORZIJE  $G$  ILI SMICANJA  $E_s$ , JAČINA MATERIJALA NA KIDANJE  $\sigma_k$ , I POASONOV KOEFICIJENT  $\mu$  ZA NEKE SUPSTANCJE

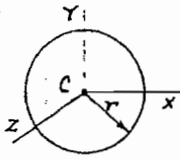
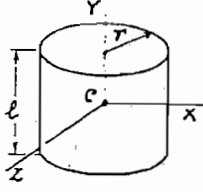
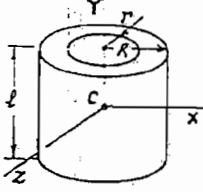
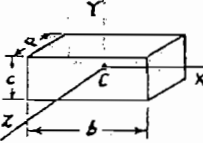
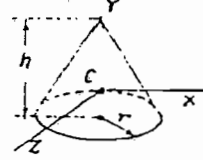
Tablica 25

| Supstancija     | $E_y$ , GPa | $E_s$ , GPa | $\sigma_k$ , MPa | $\mu$     |
|-----------------|-------------|-------------|------------------|-----------|
| Aluminijum      | 65—75       | 23—27       | 60—110           | 0,34      |
| Bakar           | 80—120      | 40—48       | 200—300          | 0,3—0,4   |
| Beton           | 15—40       | 7—17        | —                | 0,1—0,15  |
| Gvožđe — kovano | 200—220     | 80—88       | 400—600          | 0,28      |
| — čelik         | 210—240     | 80—88       | 500—1600         | 0,25—0,35 |
| Granit, mermer  | 30—50       | 15—20       | —                | 0,2—0,3   |
| Mesing          | 80—100      | 27—37       | 100—200          | 0,34—0,4  |
| Nikl            | 210         | 75          | 500              | 0,3       |
| Olovo           | 150—170     | 5—6         | 12—20            | 0,45      |
| Staklo          | 55—28       | 22—28       | 70               | 0,25      |

Veza između modula elastičnosti je  $E_y = 2E_s(1 + \mu) = 3E_s(1 - 2\mu)$ , gde je  $E_y$  — zapreminski modul elastičnosti, koji se može prema gornjim podacima izračunati za navedene supstancije dok je za vodu 2,1 GPa, naftu 1,4, živu 2,8.

Tablica 26-1

| Telo   | Moment inercije $I_0$   | Poluprečnik inercije $k$  |
|--|---|---|
| <p>Tanak štap</p>                       | $I_{xx} = \frac{1}{12} ml^2$  | $k_x = 0,2866 l$  |
| <p>Disk</p>                             | $I_{xx} = \frac{mr^2}{4}$<br>$I_{zz} = \frac{mr^2}{2}$  | $k_x = 0,5 r$<br>$k_z = 0,707 r$  |
| <p>Tanka ploča</p>                      | $I_{xx} = \frac{mb^3}{12}$<br>$I_{yy} = \frac{ma^3}{12}$<br>$I_{zz} = \frac{m}{12} (a^2 + b^2)$ | $k_x = 0,2876 b$<br>$k_y = 0,2886 a$<br>$k_z = 0,2886 \sqrt{a^2 + b^2}$ |
| <p>Šuplja lopta tankih zidova</p>      | $I = \frac{2}{3} mr^2$  | $k = 0,816 r$   |
| <p>Šuplji cilindar tankih zidova</p>  | $I_{xx} = mr^2$<br>$I_{zz} = \frac{m}{2} (l^2 + 6r^2)$  | $k_x = r$<br>$k_z = 0,2886 \sqrt{l^2 + 6r^2}$                           |

| Telo   | Moment inercije $I_0$  | Poluprečnik inercije $k$  |
|--|--|---|
| <p>Puna lopta</p>       | $I = \frac{2}{5} mr^2$   | $k = 0,6325 r$  |
| <p>Puni cilindar</p>    | $I_{xx} = \frac{mr^2}{2}$<br>$I_{zz} = \frac{m}{12} (l^2 + 3r^2)$  | $k_x = 0,707 r$<br>$k_z = 0,2886 \sqrt{l^2 + 3r^2}$   |
| <p>Šuplji cilindar</p>  | $I_{xx} = \frac{m}{12} (R^2 - r^2)$<br>$I_{zz} = \frac{m}{2} [l^2 + 3(R^2 - r^2)]$                                 | $k_x = 0,707 \sqrt{R^2 - r^2}$<br>$k_z = 0,2886 \sqrt{l^2 + 3(R^2 - r^2)}$                            |
| <p>Kvadar</p>          | $I_{xx} = \frac{m}{12} (b^2 + a^2)$<br>$I_{yy} = \frac{m}{12} (c^2 + a^2)$<br>$I_{zz} = \frac{3m}{12} (c^2 + b^2)$ | $k_x = 0,2886 \sqrt{b^2 + a^2}$<br>$k_y = 0,2886 \sqrt{c^2 + a^2}$<br>$k_z = 0,2886 \sqrt{c^2 + b^2}$ |
| <p>Kupa</p>           | $I_{xx} = \frac{3}{10} mr^2$<br>$I_{zz} = \frac{3m}{20} \left( r^2 - \frac{h^2}{4} \right)$                        | $k_x = 0,5477 r$<br>$k_z = 0,3865 \sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$   |

BRZINA ZVUKA U NEKIM SUPSTANCIJAMA, m/s

Tablica 27

| Gasovi               |                |       |
|----------------------|----------------|-------|
| Azot (0 °C)          |                | 334   |
| Amonijak (0 °C)      |                | 475   |
| Vazduh (0 °C)        |                | 331   |
| Vodonik (0 °C)       |                | 1 285 |
| Vodena para (134 °C) |                | 494   |
| Kisconik (0 °C)      |                | 316   |
| Neon (0 °C)          |                | 437   |
| Tečnosti             |                |       |
| Alkohol (20 °C)      |                | 1 120 |
| Aceton (20 °C)       |                | 1 192 |
| Voda                 |                |       |
| — morska (17 °C)     |                | 1 550 |
| — obična (25 °C)     |                | 1 500 |
| Glicerin (20 °C)     |                | 1 923 |
| Živa (20 °C)         |                | 1 451 |
| Čvrste supstancije   |                |       |
| Aluminijum 5 080     | Mesing 3 490   |       |
| Bakar 3 710          | Olovo 2 730    |       |
| Gvožđe 5 170         | Staklo         |       |
| Ebonit 1 570         | kvarceno 5 370 |       |
| Zemlja 8 200         | Cink 3 810     |       |

PODELA ZVUKA

|                      |   |
|----------------------|---|
| Infrazvuk            | 0,5—20 Hz                                 |
| Zvuk koga čuje čovek | 20 Hz—20 kHz                              |
| Ultrazvuk            | 20 · 10 <sup>3</sup> —10 <sup>16</sup> Hz |
| Hiperzvuk            | > 10 GHz                                  |

Brzina prostiranja zvuka u gasovima na nekoj temperaturi određuje se prema relaciji  $c = c_0 \sqrt{T_0/T}$ , gde je  $c_0$  — brzina na 0 °C,  $T_0 = 273$  K a  $T = T_0 + t$  — apsolutna temperatura gasa.

Za vazduh je  $c \approx 20 \sqrt{T}$ .

TEMPERATURSKI KOEFICIJENT LINEARNOG ŠIRENJA NEKIH ČVRSTIH I TEČNIH SUPSTANCIJA

Tablica 28

| Supstancija           | $\alpha, 10^{-4} 1/K$ |
|-----------------------|-----------------------|
| Aluminijum            | 0,238                 |
| Bakar                 | 0,165                 |
| Bronza                | 0,140—0,180           |
| Voda                  | 0,00207               |
| Volfram               | 0,045                 |
| Gvožđe                | 0,105                 |
| Drvo                  | 0,02—0,04             |
| Živa                  | 0,00018               |
| Led (od —10 do —0 °C) | 0,507                 |
| Mesing                | 0,189                 |
| Olovo                 | 0,293                 |
| Staklo                | 0,07—0,09             |
| Celuloid              | 0,074                 |

TEMPERATURSKE SKALE

• Na *Farenhajtovoj* skali je 0 °C označeno sa 32 °F a 100 °C sa 212 °F, pa je prema ovome 1 °C jednak 9/5 °F.

• Na *Reomirovoj* skali je 0 °C označeno sa 0 °R a 100 °C sa 80 °R pa je 1 °C jednak 4/5 °R a 1 °R jednak 5/4 °C.

• Apsolutna temperatura je  $T = 273 + t$ .

• Na *Celzijusovoj* skali je sa 0 °C označena temperatura smeše destilovane vode i leda (od destilovane vode). Sa 100 °C je označena temperatura ključanja destilovane vode na standardnom pritisku.

Prema navedenom je

$$t^{\circ}C = \left(\frac{9}{5} t + 32\right)^{\circ}F = \frac{4}{5} t^{\circ}R$$

$$t^{\circ}R = \frac{5}{4} t^{\circ}C = \left(\frac{9}{4} t + 32\right)^{\circ}F$$

$$t^{\circ}F = \frac{5}{9} (t - 32)^{\circ}C = \frac{4}{9} (t - 32)^{\circ}R$$

$$t^{\circ}K = (t - 273)^{\circ}C$$

Tako je, na primer,

$$t = 20^{\circ}C$$

$$= 293^{\circ}K$$

$$= 25^{\circ}F$$

$$= 122^{\circ}F$$

SPECIFIČNA TOPLOTNA KAPACITIVNOST NEKIH ČVRSTIH I TEČNIH SUPSTANCIJA

Tablica 29

| Supstancija | $t, ^{\circ}C$ | $c, kJ/(kg \cdot K)$ |
|-------------|----------------|----------------------|
| Alkohol     | 25             | 2,43                 |
| Aluminijum  | 17—100         | 0,91                 |
| Bakar       | 20             | 0,39                 |
| Voda        | 15             | 4,19                 |
| Volfram     | 20—100         | 0,14                 |
| Gvožđe      | 18—100         | 3,82                 |
| Živa        | 0—100          | 0,14                 |
| Kalaj       | 18             | 0,25                 |
| Led         | —20            | 0,20                 |
| Olovo       | 20—100         | 0,13                 |
| Srebro      | 15—100         | 0,23                 |
| Staklo      | 15—100         | 0,67—0,84            |
| Grafit      | 20—100         | 0,47                 |

\* Specifična toplotna kapacitivnost čiste i destilovane vode, u temperaturnom intervalu 14,5—15,5 °C iznosi

$$C = 4186,8 \frac{J}{kg \cdot K}$$

SPECIFIČNA TOPLOTNA KAPACITIVNOST NEKIH GASOVA I PARA NA STANDARDNOM PRITISKU

Tablica 30

| Gas — para    | $t, ^{\circ}C$ | $c_p, kJ/(kg \cdot K)$ | $\kappa = c_p/c_v$ |
|---------------|----------------|------------------------|--------------------|
| Azot          | 0—10           | 1,04                   | 1,404              |
| Amonijak      | 24—200         | 2,24                   | 1,346              |
| Aceton (para) | 26—110         | 1,57                   | 1,26               |
| Benzol (para) | 80             | 1,09                   | —                  |
| Vazduh        | 0—100          | 1,01                   | 1,40               |
| Vodonik       | 10—200         | 14,27                  | 1,41               |
| Vodena para   | 100            | 2,13                   | —                  |
| Etan          | 15             | 1,72                   | 1,22               |
| Metan         | 10—200         | 2,48                   | 1,31               |

TEMPERATURA TOPLIENJA (očvršćavanja) I SPECIFIČNA TOPLOTA TOPLIENJA (očvršćavanja) NEKIH SUPSTANCIJA

Tablica 31

| Supstancija    | $t_f (t_0), ^{\circ}C$ | $q_f (q_0), kJ/kg$ |
|----------------|------------------------|--------------------|
| Alkohol — etil | —115                   | 105                |
| Aluminijum     | 660                    | 389                |
| Amonijak       | — 75                   | 452                |
| Aceton         | — 94                   | 84                 |
| Bakar          | 1 085                  | 215                |
| Voda — led     | 0                      | 335                |
| Vudova legura  | 65                     | 34                 |
| Gvožđe         | 1 540                  | 205                |
| Zlato          | 2 677                  | 67                 |
| Metan          | —184                   | —                  |
| Olovo          | 327                    | 25                 |
| Parafin        | 38                     | 146                |
| Platina        | 1 177                  | 113                |
| Cink           | 420                    | 114                |

SPECIFIČNA TOPLOTA SAGOREVANJA (toplotna moć) NEKIH GORIVA

Tablica 33

| Gorivo                 | $q_H, MJ/kg$ |
|------------------------|--------------|
| Alkohol                | 29,3         |
| Benzin                 | 50,2         |
| Gas                    |              |
| — generatorski         | 5,0          |
| — vodeni               | 10,8         |
| — iz visoke peći       | 4,2          |
| — iz koks peći         | 14,6         |
| Gorivo za dizel motore | 41,6         |
| Drvo — suvo            | 13,4         |
| Mazut                  | 41,6         |
| Nafta                  | 46,0         |
| Petroleum              | 46,5         |
| Ter                    | 35,6         |
| Ugalj                  |              |
| — kameni               | 29,0         |
| — treset               | 14,2         |
| — mrki                 | 13,0         |
| — briket               | 19,0         |
| Ulje                   | 40,2         |

TEMPERATURA KLJUČANJA (kondenzovanja) I SPECIFIČNA TOPLOTA ISPARAVANJA (kondenzovanja) NEKIH SUPSTANCIJA

Tablica 32

| Supstancija    | $t_k (t_{kond.}), ^{\circ}C$ | $q_k (q_{kond.}), MJ/kg$ |
|----------------|------------------------------|--------------------------|
| Alkohol — etil | 78                           | 0,86                     |
| Aceton         | 57                           | 0,52                     |
| Aluminijum     | 2 056                        | 8,37                     |
| Voda           | 100                          | 2,26                     |
| Glicerin       | 290                          | —                        |
| Bakar          | 2 595                        | 7,37                     |
| Gvožđe         | 30 000                       | 6,78                     |
| Živa           | 138                          | 0,34                     |
| Olovo          | 1 740                        | 0,93                     |
| Hloroform      | 61                           | 0,26                     |

SPECIFIČNA TOPLOTA ISPARAVANJA (kondenzovanja) VODE NA NEKIM TEMPERATURAMA I PRITISKU 101 325 Pa

Tablica 34

| $t, ^{\circ}C$ | $q_t, MJ/kg$ |
|----------------|--------------|
| 0              | 2,50         |
| 10             | 2,47         |
| 20             | 2,45         |
| 30             | 2,40         |
| 50             | 2,38         |
| 70             | 2,32         |
| 90             | 2,28         |
| 100            | 2,26         |
| 120            | 2,20         |
| 150            | 2,11         |

KRITIČNA TEMPERATURA I PRITISAK  
ZA NEKE SUPSTANCIJE

Tablica 35

| Supstancija | $t_k, ^\circ\text{C}$ | $p_k, \text{MPa}$ |
|-------------|-----------------------|-------------------|
| Azot        | -147,1                | 3,35              |
| Brom        | 302                   | 13,1              |
| Voda        | 374                   | 21,7              |
| Vodonik     | -240                  | 1,28              |
| Vazduh      | -140,7                | 3,72              |
| Etan        | 32,3                  | 4,88              |
| Kiseonik    | -118,8                | 4,97              |
| Metan       | -82,1                 | 4,58              |
| Neon        | -228,7                | 2,69              |
| Radon       | 104                   | 6,2               |
| Helijum     | -268                  | 0,2               |
| Hlor        | 144                   | 7,6               |

Van der Valsove konstante mogu se odrediti preko relacija  $a = \frac{27T_k^2 R^2}{64p_k}$  i  $b = \frac{T_k R}{8p_k}$

EFEKTIVNI PREČNICI NEKIH ATOMA I MOLEKULA, nm

Tablica 36

|                                |      |
|--------------------------------|------|
| Helijum (He)                   | 0,19 |
| Vodonik (H <sub>2</sub> )      | 0,23 |
| Kiseonik (O <sub>2</sub> )     | 0,29 |
| Azot (N <sub>2</sub> )         | 0,31 |
| Hlor (Cl <sub>2</sub> )        | 0,37 |
| Vodena para (H <sub>2</sub> O) | 0,26 |

KOEFICIJENT DIFUZIJE, SREDNJA DUŽINA SLOBODNOG PUTA I SREDNJA KVADRATNA BRZINA MOLEKULA NEKIH GASOVA (na 0°C i 101 325 Pa)

Tablica 37

| Gas      | $D, \text{mm}^2/\text{s}$ | $\lambda, \text{nm}$ | $\sqrt{\langle v^2 \rangle}, \text{m/s}$ |
|----------|---------------------------|----------------------|--|
| Azot     | 14                        | 88                   | 493                                      |
| Vodonik  | 91                        | 16                   | 1844                                     |
| Kiseonik | 18                        | 92                   | 461                                      |
| Helijum  | 72                        | 18                   | 1304                                     |

PRITISAK I GUSTINA ZASIĆENE VODENE PARE NA RAZNIM TEMPERATURAMA

Tablica 38

| $t, ^\circ\text{C}$ | $p, \text{Pa}$ | $\rho, \text{g/m}^3$ |
|---------------------|----------------|----------------------|
| -30                 | 37,3           | 0,33                 |
| -29                 | 41,3           | 0,37                 |
| -28                 | 46,7           | 0,41                 |
| -27                 | 50,7           | 0,46                 |
| -26                 | 57,3           | 0,51                 |
| -25                 | 62,7           | 0,55                 |
| -24                 | 69,3           | 0,66                 |
| -23                 | 77,3           | 0,68                 |
| -22                 | 85,3           | 0,73                 |
| -21                 | 93,3           | 0,80                 |

|     |          |      |
|-----|----------|------|
| -20 | 102,6    | 0,85 |
| -19 | 113,3    | 0,96 |
| -18 | 125,3    | 1,05 |
| -17 | 137,3    | 1,15 |
| -16 | 150,6    | 1,27 |
| -15 | 165,3    | 1,38 |
| -14 | 181,3    | 1,51 |
| -13 | 198,6    | 1,65 |
| -12 | 217,3    | 1,80 |
| -11 | 237,3    | 1,96 |
| -10 | 259,9    | 2,14 |
| -9  | 283,9    | 2,33 |
| -8  | 337,2    | 2,54 |
| -7  | 351,9    | 2,76 |
| -6  | 367,9    | 2,99 |
| -5  | 401,2    | 3,24 |
| -4  | 437,2    | 3,51 |
| -3  | 475,9    | 3,81 |
| -2  | 517,2    | 4,13 |
| -1  | 562,5    | 4,47 |
| 0   | 610,5    | 4,84 |
| 1   | 656,1    | 5,22 |
| 2   | 758,4    | 5,60 |
| 3   | 797,3    | 5,98 |
| 4   | 812,1    | 6,40 |
| 5   | 871,8    | 6,84 |
| 6   | 934,4    | 7,3  |
| 7   | 1001,1   | 7,8  |
| 8   | 1073,1   | 8,3  |
| 9   | 1147,7   | 8,8  |
| 10  | 1227,7   | 9,4  |
| 11  | 1300,7   | 10,0 |
| 12  | 1402,3   | 10,7 |
| 13  | 1519,6   | 11,4 |
| 14  | 1598,3   | 12,1 |
| 15  | 1704,9   | 12,8 |
| 16  | 1816,9   | 13,6 |
| 17  | 1936,8   | 14,5 |
| 18  | 2063,5   | 15,4 |
| 19  | 2196,8   | 16,3 |
| 20  | 2338,1   | 17,3 |
| 21  | 2486,0   | 18,3 |
| 22  | 2643,3   | 19,4 |
| 23  | 2808,6   | 20,6 |
| 24  | 2983,3   | 21,8 |
| 25  | 3167,2   | 23,0 |
| 26  | 3360,5   | 24,4 |
| 27  | 3567,1   | 25,8 |
| 28  | 3779,1   | 27,2 |
| 29  | 4004,3   | 28,7 |
| 30  | 4241,6   | 30,3 |
| 31  | 4603,2   | 31,9 |
| 32  | 4753,6   | 33,9 |
| 33  | 5029,4   | 35,7 |
| 34  | 5316,7   | 37,6 |
| 35  | 5622,6   | 39,6 |
| 36  | 5939,8   | 41,8 |
| 37  | 6274,4   | 44,0 |
| 38  | 6623,7   | 46,3 |
| 39  | 6990,3   | 48,7 |
| 40  | 7374,2   | 51,2 |
| 50  | 12330,3  | 83,0 |
| 60  | 19915,0  | 130  |
| 70  | 31152,2  | 198  |
| 80  | 47334,8  | 293  |
| 90  | 70089,1  | 424  |
| 100 | 101380,0 | 598  |

KOEFICIJENT TERMIČKE PROVODNOSTI NEKIH SUPSTANCIJA, W/(m·K)

Tablica 39

| Čvrste supstancije |      |
|--------------------|------|
| Aluminijum         | 209  |
| Bakar              | 385  |
| Beton              | 0,21 |
| Bronza             | 58,6 |
| Volfram            | 146  |
| Gvožđe             | 58,6 |
| Ebonit             | 0,18 |
| Zlato              | 293  |
| Magnezijum         | 2,10 |
| Olovo              | 34,8 |
| Opeka              | 0,42 |
| Staklo             | 0,44 |
| Srebro             | 420  |

| Tečnosti  |      |
|-----------|------|
| Aceton    | 0,18 |
| Voda      | 0,59 |
| Petroleum | 0,28 |
| Ziva      | 7,95 |

| Gasovi (na standardnim uslovima) |       |
|----------------------------------|-------|
| Azot                             | 0,023 |
| Vodonik                          | 0,157 |
| Vazduh                           | 0,024 |
| Vodena para                      | 0,019 |
| Kiseonik                         | 0,024 |
| Helijum                          | 0,141 |
| Hlor                             | 0,008 |

RELATIVNA PERMITIVNOST NEKIH SUPSTANCIJA

Tablica 40

| Čvrste i tečne supstancije |       |
|----------------------------|-------|
| Vosak                      | 7,8   |
| Voda                       | 81    |
| Ebonit                     | 2,6   |
| Kvarc (amorfni)            | 3,7   |
| Led                        | 3,2   |
| Mermer                     | 8,3   |
| Nafta (petroleum)          | 2,1   |
| Parafin                    | 2-2,5 |
| Celuloid                   | 4,1   |
| Hartija                    | 2-2,5 |
| Tefton                     | 2     |
| Pleksiglas                 | 3,5   |
| Polietilen                 | 2,3   |
| PVC (polivinilhlodid)      | 3,5   |

| Gasovi (na standardnim uslovima) |           |
|----------------------------------|-----------|
| Azot                             | 1,000 606 |
| Vazduh                           | 1,000 581 |
| Vodonik                          | 1,000 264 |
| Metan                            | 1,000 950 |
| Helijum                          | 1,000 070 |
| Kiseonik                         | 1,000 552 |

SPECIFIČNA ELEKTRIČNA OTPORNOST NEKIH SUPSTANCIJA

Tablica 41

| Metali     |                                  |
|------------|----------------------------------|
| Aluminijum | 0,028 $\mu\Omega \cdot \text{m}$ |
| Bakar      | 0,017                            |
| Volfram    | 0,055                            |
| Gvožđe     | 0,120                            |
| Ziva       | 0,958                            |
| Zlato      | 0,023                            |
| Manganin   | 0,450                            |
| Nikelin    | 0,420                            |
| Platina    | 0,100                            |
| Olovo      | 0,210                            |
| Srebro     | 0,016                            |
| Cink       | 0,060                            |

| Rastvori                           |                               |
|------------------------------------|-------------------------------|
| 10% H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> | 0,391 $\Omega \cdot \text{m}$ |
| 30%                                | 0,739                         |
| 10% NaOH                           | 0,312                         |
| 30%                                | 0,202                         |
| 10% KOH                            | 0,314                         |
| 30%                                | 0,539                         |
| 10% KCl                            | 0,136                         |
| 10% NaCl                           | 0,121                         |
| 25%                                | 0,214                         |
| 10% ZnSO <sub>4</sub>              | 0,032                         |
| 10% CuSO <sub>4</sub>              | 0,032                         |
| 15%                                | 0,042                         |

TEMPERATURNI KOEFICIJENT ELEKTRIČNE OTPORNOSTI NEKIH SUPSTANCIJA, 1/K

Tablica 42

| Metali     |         |
|------------|---------|
| Aluminijum | 0,004   |
| Bakar      | 0,004   |
| Volfram    | 0,005   |
| Gvožđe     | 0,006   |
| Ziva       | 0,001   |
| Zlato      | 0,0038  |
| Manganin   | 0,00003 |
| Nikelin    | 0,0001  |
| Platina    | 0,004   |
| Olovo      | 0,004   |
| Srebro     | 0,004   |
| Cink       | 0,0004  |

| Rastvori                           |       |
|------------------------------------|-------|
| 10% H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> | 0,013 |
| 30%                                | 0,016 |
| 10% NaOH                           | 0,022 |
| 30%                                | 0,045 |
| 10% KOH                            | 0,019 |
| 30%                                | 0,024 |
| 10% KCl                            | 0,019 |
| 10% NaCl                           | 0,021 |
| 25%                                | 0,021 |
| 5% CuSO <sub>4</sub>               | 0,022 |
| 10%                                | 0,022 |
| 15%                                | 0,023 |

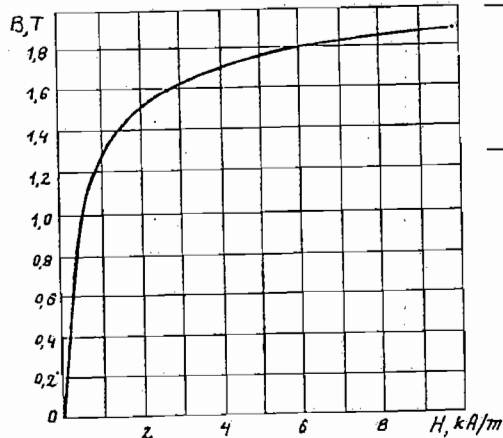
**ELEKTROHEMIJSKI EKVIVALENT NEKIH SUPSTANCIJA**

Tablica 43

| Element    | Valeuca | k, mg/C |
|------------|---------|---------|
| Aluminijum | 1       | 0,0932  |
| Bakar      | 1       | 0,6588  |
|            | 2       | 0,3294  |
| Vodonik    | 1       | 0,0104  |
| Gvožđe     | 2       | 0,2893  |
|            | 3       | 0,1929  |
| Nikl       | 2       | 0,3041  |
|            | 3       | 0,2027  |
| Srebro     | 1       | 1,1180  |
| Cink       | 2       | 0,6151  |

ZAVISNOST MAGNETNE INDUKCIJE OD JAČINE MAGNETNOG POLJA ZA MEKO GVOŽĐE PROSEČNIH MAGNETNIH SVOJSTAVA

Dijagram 44



RELATIVNA PERMEABILNOST NEKIH SUPSTANCIJA

Tablica 45

**Paramagnetne supstancije**

|            |            |
|------------|------------|
| Aluminijum | 1,000 023  |
| Vanadžum   | 1,000 343  |
| Vazduh     | 1,000 0004 |
| Volfram    | 1,000 176  |
| Kalijum    | 1,000 021  |
| Kiseonik   | 1,000 002  |
| Mangan     | 1,000 017  |
| Natrijum   | 1,000 008  |
| Kalaj      | 1,000 002  |
| Platina    | 1,000 250  |
| Hrom       | 1,000 33   |
| Ebonit     | 1,000 014  |

**Dijamagnetne supstancije**

|                 |            |
|-----------------|------------|
| Anilin          | 0,999 9906 |
| Aceton          | 0,999 9942 |
| Benzol          | 0,999 9925 |
| Bizmut          | 0,999 824  |
| Vodonik         | 0,999 999  |
| Glicerin        | 0,999 990  |
| Bakar           | 0,999 989  |
| Naftalin        | 0,999 989  |
| Olovo           | 0,999 984  |
| Staklo          | 0,999 987  |
| Alkohol — metil | 0,999 993  |
| — etil          | 0,999 993  |

**Feromagnetne supstancije (maksimalne vrednosti)**

|                                    |           |
|------------------------------------|-----------|
| Kobalt                             | 175       |
| Nikl                               | 1 120     |
| Pervinmar (23% Co, 43% Ni, 34% Fe) | 115 000   |
| Transformatorski lim               | 8 000     |
| Gvožđe, čisto                      | 7 000     |
| Permaloj                           | 300 000   |
| Supermaloj                         | 1 000 000 |

**SVETLOSNA JAČINA NEKIH IZVORA, cd**

Tablica 46

|                      |                                  |
|----------------------|----------------------------------|
| Sunce                | 3 · 10 <sup>27</sup>             |
| Vojni projektor      | 10 <sup>10</sup>                 |
| Morski svetionik     | 10 <sup>6</sup>                  |
| Svetlosna bomba      | 10 <sup>5</sup>                  |
| Električni luk       | 10 <sup>3</sup> —10 <sup>5</sup> |
| Far automobila       |                                  |
| — duga svetla        | 12 000                           |
| — kratka svetla      | 5 000                            |
| Far bicikla          | 60                               |
| Sijalica snage 25 W  | 22                               |
| 40                   | 35                               |
| 60                   | 60                               |
| 75                   | 85                               |
| 100                  | 120                              |
| 150                  | 210                              |
| Petrolejska lampa    | 1—10                             |
| Sveća, plamen šibice | 0,5—2                            |
| Svitac               | 0,01—0,001                       |

**TALASNI I FREKVENTNI OPSEZI BOJA SVETLOSTI**

Tablica 47

|             |            |             |
|-------------|------------|-------------|
| Crvena      | 760—620 nm | 395—483 THz |
| Narandžasta | 620—590    | 483—508     |
| Žuta        | 590—560    | 508—536     |
| Zelena      | 560—500    | 536—600     |
| Plava       | 500—480    | 600—625     |
| Indigo      | 480—450    | 625—666     |
| Ljubičasta  | 450—380    | 666—789     |

**INDEKS PRELAMANJA NEKIH SUPSTANCIJA**

za žutu natrijumovu svetlost (589,3 nm)

Tablica 48

|                                  |        |
|----------------------------------|--------|
| Alkohol                          | 1,41   |
| Benzol                           | 1,5    |
| Voda (10 °C)                     | 1,3337 |
| (15 °C)                          | 1,3334 |
| (20 °C)                          | 1,3330 |
| (25 °C)                          | 1,3325 |
| (50 °C)                          | 1,3289 |
| (80 °C)                          | 1,3289 |
| (100 °C)                         | 1,3178 |
| Glicerin                         | 1,47   |
| Led                              | 1,31   |
| Staklo (kron)                    |        |
| lako                             | 1,615  |
| teško                            | 1,615  |
| Staklo (flint)                   |        |
| lako                             | 1,608  |
| teško                            | 1,752  |
| najteže                          | 1,9    |
| Dijamant                         | 2,42   |
| Vazduh (na standardnim uslovima) | 1,0003 |

**IZLAZNI RAD ELEKTRONA IZ NEKIH METALA, eV**

Tablica 49

|    |      |       |      |
|----|------|-------|------|
| Ag | 4,28 | Mg    | 3,69 |
| Al | 3,74 | Mo    | 4,27 |
| Au | 4,58 | Na    | 2,27 |
| Ba | 2,29 | Ni    | 4,84 |
| Be | 3,92 | Pb    | 4,15 |
| Bi | 4,62 | Pt    | 5,29 |
| Ca | 2,76 | Rb    | 2,13 |
| Co | 4,25 | Sn    | 4,51 |
| Cs | 1,89 | V     | 3,78 |
| Cu | 4,47 | W     | 4,50 |
| Fe | 4,36 | Ti    | 3,92 |
| Hg | 4,52 | Zn    | 3,74 |
| K  | 2,15 | U     | 3,74 |
| Li | 2,39 | Pt+Cs | 1,40 |

**POKRETLJIVOST JONA NEKIH ELEKTROLITA, m<sup>2</sup>/(V·s)**

Tablica 50

|                               |                        |
|-------------------------------|------------------------|
| NO <sub>3</sub> <sup>-</sup>  | 6,4 · 10 <sup>-8</sup> |
| H <sup>+</sup>                | 3,3 · 10 <sup>-7</sup> |
| K <sup>+</sup>                | 6,7 · 10 <sup>-8</sup> |
| Cl <sup>-</sup>               | 6,8 · 10 <sup>-8</sup> |
| Ag <sup>+</sup>               | 5,6 · 10 <sup>-8</sup> |
| Na <sup>+</sup>               | 4,5 · 10 <sup>-8</sup> |
| OH <sup>-</sup>               | 1,8 · 10 <sup>-7</sup> |
| SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup> | 6,8 · 10 <sup>-8</sup> |
| CO <sub>3</sub> <sup>2-</sup> | 6,2 · 10 <sup>-8</sup> |

**GRANIČNE TALASNE DUŽINE K-SERIJE RENDGENSKOG ZRAČENJA ZA NEKE METALE OD KOJIH JE NAČINJENA ANODA, pm**

Tablica 51

|    |        |
|----|--------|
| W  | 17,85  |
| Au | 15,35  |
| Pt | 15,85  |
| Ag | 48,60  |
| Pb | 14,05  |
| Mo | 61,90  |
| Pb | 14,20  |
| Fe | 174,07 |
| Co | 160,55 |
| Mn | 189,33 |
| Cu | 137,81 |
| Ni | 148,55 |
| Cr | 206,70 |

**TALASNE DUŽINE LINIJA NEKIH KARAKTERISTIČNIH SPEKTARA, nm**

Tablica 52

|       |       |       |
|-------|-------|-------|
| Al    | Ne    | K     |
| 396,2 | 724,5 | 769,9 |
| 394,4 | 693,0 | 766,5 |
|       | 650,7 | 694,0 |
| H     | 640,2 | 691,1 |
| 656,3 | 626,6 | 404,7 |
| 486,1 | 614,3 | 404,4 |
| 434,1 | 696,6 |       |
| 410,2 | 588,2 | Cd    |
|       | 585,2 | 643,9 |
| Hg    | 540,1 | 508,6 |
| 690,8 | 535,8 | 480,0 |
| 579,1 | 534,1 | 467,8 |
| 577,0 | 533,1 |       |
| 546,1 |       | Li    |
| 491,6 |       | 670,8 |
| 435,8 | He    | 610,4 |
| 434,8 | 706,5 | 460,2 |
| 434,0 | 667,8 |       |
| 407,8 | 587,7 |       |
| 404,7 | 447,2 | Na    |
| 390,2 | 388,7 | 589,6 |
| 366,5 |       | 589,0 |
| 365,5 |       | 568,8 |
| 365,0 |       | 568,3 |
| 253,7 |       |       |

\* Atomska jedinica mase (u) definiše se kao 1/12 mase atoma ugljenika <sup>12</sup>C i iznosi:

$$1 \text{ u} = 1,660\,565\,5 \pm 0,000\,0086 \text{ kg}$$

MASENI KOEFICIJENT APSORPCIJE RENDGENSKOG ZRAČENJA  
NEKIH SUPSTANCIJA

Tablica 53

| $\lambda$ , pm | Vazduh | H <sub>2</sub> O | Al    | Cu    | Pb   |
|----------------|--------|------------------|-------|-------|------|
| 10             |        | 0,016            | 0,016 | 0,036 | 0,38 |
| 20             |        | 0,018            | 0,028 | 0,15  | 0,49 |
| 30             |        | 0,029            | 0,047 | 0,43  | 1,4  |
| 40             |        | 0,044            | 0,11  | 0,98  | 3,1  |
| 50             | 0,048  | 0,066            | 0,20  | 1,9   | 5,4  |
| 60             | 0,075  | 0,10             | 0,34  | 3,2   | 9,0  |
| 70             | 0,13   | 0,15             | 0,51  | 4,8   | 13,9 |
| 80             | 0,16   | 0,21             | 0,74  | 7,0   |      |
| 90             | 0,21   | 0,28             | 1,1   | 9,8   |      |
| 100            | 0,26   | 0,38             | 1,5   | 13,1  |      |
| 150            | 0,87   | 1,2              | 4,6   | 4,9   |      |
| 200            | 2,1    | 2,8              | 10,2  | 10,8  |      |
| 250            | 3,9    | 5,1              | 19,4  | 19,8  |      |

MASA NEKIH IZOTOPA, u  
Tablica 54

|                           |                            |                              |
|---------------------------|----------------------------|------------------------------|
| <sup>1</sup> H 1,008 14   | <sup>9</sup> Be 9,015 05   | <sup>28</sup> Si 29,983 25   |
| <sup>2</sup> H 2,014 74   | <sup>10</sup> B 10,016 12  | <sup>40</sup> Ca 39,975 42   |
| <sup>3</sup> H 3,017 00   | <sup>12</sup> C 12,003 80  | <sup>56</sup> Co 55,957 69   |
| <sup>4</sup> He 3,016 99  | <sup>14</sup> N 14,007 52  | <sup>63</sup> Cu 62,949 62   |
| <sup>6</sup> He 4,003 88  | <sup>16</sup> O 16,003 53  | <sup>112</sup> Cd 112,942 06 |
| <sup>7</sup> Li 6,017 03  | <sup>17</sup> F 17,003 53  | <sup>200</sup> Hg 200,028 00 |
| <sup>9</sup> Li 7,018 23  | <sup>24</sup> Mg 23,003 45 | <sup>232</sup> U 232,037 72  |
| <sup>9</sup> Be 7,019 16  | <sup>24</sup> Mg 23,992 67 | <sup>235</sup> U 235,043 93  |
| <sup>10</sup> Be 8,007 85 | <sup>27</sup> Al 26,981 54 | <sup>238</sup> U 238,028 91  |

PERIOD POLURASPADA NEKIH  
RADIOAKTIVNIH ELEMENATA

Tablica 55

|                   |                              |
|-------------------|------------------------------|
| <sup>45</sup> Ca  | 164 dana                     |
| <sup>90</sup> Sr  | 28 godina                    |
| <sup>210</sup> Po | 138 dana                     |
| <sup>222</sup> Rn | 3,82 dana                    |
| <sup>233</sup> U  | 7,1 · 10 <sup>8</sup> godina |
| <sup>243</sup> Bk | 4,5 h                        |
| <sup>244</sup> Cf | 44 min                       |
| <sup>253</sup> Es | 20 dana                      |

RADIOAKTIVNI NIZ URANA

Tablica 56

|                 | Z  | A   | Raspad                               | Period poluraspada           | Energija čestica, MeV |
|-----------------|----|-----|--------------------------------------|------------------------------|-----------------------|
| Uran            | 92 | 238 | $\alpha$                             | 4,5 · 10 <sup>9</sup> godina | 4,25                  |
| UX <sub>1</sub> | 90 | 234 | $\beta$                              | 24 dana                      | 0,13                  |
| UX <sub>2</sub> | 91 | 234 | $\beta$                              | 1,14 min                     | 2,32                  |
| Uran            | 92 | 234 | $\alpha$                             | 2,7 · 10 <sup>5</sup> godina | 4,75                  |
| Io              | 90 | 230 | $\alpha$                             | 8,3 · 10 <sup>4</sup> godina | 4,66                  |
| Radijum         | 88 | 226 | $\alpha$                             | 1590 godina                  | 4,79                  |
| Radon           | 86 | 222 | $\alpha$                             | 3,82 dana                    | 5,49                  |
| RaA             | 84 | 218 | $\alpha$                             | 3 min                        | 6,00                  |
| RaB             | 82 | 214 | $\beta$                              | 26,8 min                     | 0,65                  |
| RaC             | 83 | 214 | $\beta$ (99,96%)<br>$\alpha$ (0,04%) | 19,7 min                     | 3,2<br>5,5            |
| RaC'            | 84 | 214 | $\alpha$                             | 0,00015 s                    | 7,68                  |
| RaC''           | 81 | 210 | $\beta$                              | 1,3 min                      | 1,80                  |
| RaD             | 82 | 210 | $\beta$                              | 22 godine                    | 0,025                 |
| RaE             | 83 | 210 | $\beta$                              | 5 dana                       | 1,17                  |
| Potnijum        | 84 | 210 | $\alpha$                             | 140 dana                     | 5,30                  |
| Olovo           | 82 | 206 | —                                    | stabilan                     | —                     |

LITERATURA

1. Б.М. Яворский, А.А. Пинский: ОСНОВЫ ФИЗИКИ I, II Наука, Москва, 1981.
2. А.Н. Ремизов: КУРС ФИЗИКИ I, II, Высшая школа, Москва, 1976.
3. Р.Г. Геворкян: КУРС ФИЗИКИ, Высшая школа, Москва, 1979.
4. Н.Н. Еаграфова, В.П. Каган: КУРС ФИЗИКИ, Высшая школа, Москва, 1978.
5. Р.И. Грабовский: КУРС ФИЗИКИ, Высшая школа, Москва, 1980.
6. В.В. Pavlović: PREDAVANJA IZ FIZIKE I, II, TMF, Beograd, 1978.
7. Г.А. Зисман, О.М. Тодес: КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ I, II, III, Наука, Москва, 1965.
8. Н.М. Ливенцев: КУРС ФИЗИКИ, Высшая школа, Москва, 1978.
9. А.А. Деллаф, Б.М. Яворский, Л.Б. Милковская: КУРС ФИЗИКИ I, II, III, Высшая школа, Москва, 1973.
10. Ф.Е. Фарбер: ФИЗИКА, Высшая школа, Москва, 1979.
11. Н.М. Годжаев: ОПТИКА, Высшая школа, Москва, 1977.
12. Б.М. Яворский, Ю.А. Селезнев: СПРАВОЧНОЕ РУКОВОДСТВО ПО ФИЗИКЕ, Наука, Москва, 1979.
13. И.В. Лаврова: КУРС ФИЗИКИ, Просвещение, Москва, 1981.
14. А.В. Астахов: КУРС ФИЗИКИ I, II, III, Наука, Москва, 1977.
15. П.А. Рымкевич: КУРС ФИЗИКИ, Высшая школа, Москва, 1975.
16. Н.И. Каржики и др.: КРАТКИЙ СПРАВОЧНИК ПО ФИЗИКЕ, Высшая школа, Москва, 1964.
17. Е.М. Гершензон и др.: КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ, Просвещение, Москва, 1981.
18. R. Resnick, D. Halliday: PHYSICS, J. Wiley and Sons, New York, London, Sydney, 1966.
19. J. K. Vennard, R. L. Street: ELEMENTARY FLUID MECHANICS, John Wiley and Sons New York, London, Sidney, Toronto, 1976.
20. W. T. Scott: THE PHYSICS OF ELECTRICITY AND MAGNETISM, John Wiley and Sons, New York, London, Sydney, 1966.
21. K.R. Atkins: PHYSICS, John Wiley and Sons, New York, London, Sydney, Toronto, 1970.
22. A. R. Vergman: THE PHYSICAL PRINCIPLES OF ASTRONAUTICS, John Wiley and Sons, New York, 1963.
23. H. S. Seiter: SPACE TECHNOLOGY, John Wiley and Sons, New York, 1959.
24. И.В. Савельев: КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ I, II, III, Наука, Москва, 1978.
25. F. P. Beer, E. R. Johnston: MECHANICS FOR ENGINEERS, STATICS AND DYNAMICS, Mc Graw-Hill Book Company, New York, San Francisco, Toronto, London, 1957.
26. W. A. Rachinger: ELEKTRICITET IZOBILJE IZOBILJE, (diagnostic test), John Wiley and Sons Australasia Ptp Ltd, Sidney, New York, London, Thronto, 1973.
27. И.Е. Иродов, ЗАДАЧИ ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ, Наука, Москва, 1979.
28. О.Я. Савченко, и др.: ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ, Наука, Москва, 1981.
29. И.В. Савельев, СБОРНИК ВОПРОСОВ И ЗАДАЧ ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ, Наука, Москва, 1982.
30. А.Г. Чертов, А.А. Воробьев, ЗАДАЧНИК ПО ФИЗИКЕ, Высшая школа, Москва, 1981.
31. И.Е. Иродов, СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АТОМНОЙ И ЯДЕРНОЙ ФИЗИКЕ, Атомиздат, Москва, 1976.
32. Б.Ю. Коган, СТО ЗАДАЧ ПО ЭЛЕКТРИЧЕСТВУ, Наука, Москва, 1976.
33. О.И. Горбунов и др. ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ, Просвещение, Москва, 1978.
34. С.М. Козел и др. СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ, Наука, Москва, 1973.
35. В.И. Константинов и др. СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ, энергия, Москва, 1975.
36. В.Л. Гинзбург и др. СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОБЩЕМ КУРСУ ФИЗИКИ. I, II, III, IV, Наука, Москва, 1976.
37. Н.М. Шахмаев: ФИЗИКА I, II, Высшая школа, 1977.
38. Н.П. Грушински, Н.Б. Сажина: ГРАВИТАЦИОННА РАЗВЕТКА, Недра, Москва, 1972.
39. К. Магнус: КОЛЕБАНИЯ, Мир, Москва, 1982.



40. И. В. Голфман: ЗАКОНЫ ФОРМУЛЫ ЗАДАЧИ ФИЗИКИ, Наукова думка, Киев, 1977.
41. В. А. Лободюк и др.: СПРАВОЧНИК ПО ЕЛЕМЕНТАРНОЙ ФИЗИКЕ, Наукова думка, Киев, 1975.
42. Н. И. Гольфарб: СБОРНИК ВОПРОСОВ И ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ, Высшая школа, Москва, 1973.
43. А. А. Пияский: ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ Наука, Москва, 1977.
44. И. Ш. Слободецкий, Л. Г. Асламзлов: ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ (Библиотечка-Квант), Наука, Москва, 1980.
45. G. Dimić: ZBIRKA ZADATAKA IZ FIZIKE I, TMF, 1974.
46. G. Dimić, J. Georgijević, M. Mitrinović: ZBIRKA ZADATAKA IZ FIZIKE I, TMF, 1978.
47. G. Dimić, M. Mitrinović, J. Georgijević, ZBIRKA ZADATAKA IZ FIZIKE II, TMF, 1976.
48. G. Dimić, P. Todorović: RENTGENSKO I NUKLEARNO ZRAČENJE I MERENJE. K. Kolarov, Zrenjanin, 1981.
49. G. Dimić, M. Sekulić, P. Todorović: OPTIČKI MERNI UREDAJI. K. Kolarov, Zrenjanin, 1980.
50. S. T. Handerson, A. M. Marsden: LAMPS AND LIGHTING, Edvard Arnauld, 1975.
51. А. З. Румицкий: МАТЕМАТИЧКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЕСКЕПРИМЕНТА, Наука, Москва, 1971.
52. А. В. Римский-Корсаков: ЭЛЕКТРОАКУСТИКА, Связь, Москва, 1973.
53. М. Milosavljević: METEOROLOGIJA, Naučna knjiga, Beograd, 1977.
54. F. Klinger: LA FISICA, Marcombo, S.A. Barcelona, 1970.
55. R. Faucher: PHYSIQUE, Hatier, Paris, 1967.
56. G. L. Dimić: JEDINICE I KONSTANTE U FIZICI. Građevinska knjiga, Beograd, 1964.
57. G. L. Dimić, F. Virag: OSVETLJENJE I. Građevinska knjiga, Beograd, 1974.
58. G. Dimić, P. Todorović, D. Šepa: MEĐUNARODNI SISTEM JEDINICA, TMF, Beograd, 1978.
59. E. R. Cohen, B. N. Taylor: FUNDAMENTAL CONSTANTS. Codata Bulletin № 11, 1973.
60. D. Ž. Prokić: ZAKONSKE MERNE JEDINICE U SFRJ, Savezni zavod za mere i dragocene metale, Beograd, 1979.
61. ŠESNAESTA GENERALNA KONFERENCIJA ZA TEGOVE I MERE, Savezni zavod za mere i dragocene metale, Beograd, 1979.
62. SEDAMNAESTA GENERALNA KONFERENCIJA ZA TEGOVE I MERE, Savezni zavod za mere i dragocene metale, Beograd, 1983.
63. М. М. Гуревич: ВВЕДЕНИЕ В ФОТОМЕТРИЮ, Энергия, Москва, 1968.
64. D. Ž. Prokić: МАТЕМАТИЧКА ОБРАДА РЕЗУЛЬТАТА МЕРЕНЈА ФИЗИЧКИХ ВЕЛИЧИНА. Savezni zavod za mere i dragocene metale, Beograd, 1980.
65. G. Dimić, M. Mirjanić, S. Žegarac, PRIRUČNIK IZ FIZIKE ZA SREDNJOŠKOLSKA TAKMIČENJA I PRIJEMNE ISPITE NA FAKULTETIMA. Naučna knjiga, Beograd, 1968.

