

Једначина са тоталним диференцијалом

Ако је у једначини $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ лијева страна диференцијал функције $U(x, y)$ тј. ако је $dU = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ тада је решење $U(x, y) = C$. Услов који треба да буде задовољен да би једначина била са тоталним диференцијалом је $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Ако је услов задовољен треба одредити непознату функцију $U(x, y)$ када су

$$\begin{aligned} \text{познати њени парцијални изводи: } \quad \frac{\partial U}{\partial x} &= P(x, y) \quad \Rightarrow \quad U = \int P(x, y)dx + \varphi(y) \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= Q(x, y) \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y)dx + \varphi'(y) \\ Q(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y)dx + \varphi'(y) ; \quad \varphi'(y) = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y)dx ; \\ \varphi(y) &= \int (Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y)dx) dy \\ U &= \int P(x, y)dx + \int (Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y)dx) dy \end{aligned}$$

опште решење је: $U(x, y) = C$.

примјер: Ријешити диф. ј-ну: $y' = \frac{(a - x^2 - y^2)x}{(a + x^2 + y^2)y}$.

решење: Једначина се може записати у облику:

$(x^2 + y^2 - a)xdx + (a + x^2 + y^2)ydy = 0$, тј. $Pdx + Qdy = 0$ Како је задовољен услов

$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial Q}{\partial x}$ имамо једначину са тоталним диференцијалом чиме се задатак своди

на налажење функције $U = U(x, y)$ када су познати њени парцијални изводи. Из

$\frac{\partial U}{\partial x} = x^3 + xy^2 - ax$ имамо $U = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} - \frac{ax^2}{2} + \varphi(y)$. Како је $\frac{\partial U}{\partial y} = x^2y + \varphi'(y)$ и

истовремено из једначине $\frac{\partial U}{\partial y} = y^3 + x^2y + ay$ то је $\varphi'(y) = y^3 + ay$; $\varphi(y) = \frac{y^4}{4} + \frac{ay^2}{2}$;

$U = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} - \frac{ax^2}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{ay^2}{2}$. Опште решење је $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} - \frac{ax^2}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{ay^2}{2} = \frac{C}{4}$ тј

$(x^2 + y^2)^2 - 2a(x^2 - y^2) = C$.

примјер: $(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0$

решење: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(x^3 + xy^2)}{\partial y} = 2xy$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(x^2y + y^3)}{\partial x} = 2xy$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = (x^3 + xy^2) \Rightarrow U = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \varphi(y) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = x^2y + \varphi'(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = (x^2y + y^3) \wedge \frac{\partial U}{\partial y} = x^2y + \varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y) = y^3 \Rightarrow \varphi(y) = \frac{y^4}{4}$$

$$U = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4} \text{ па је опште решење: } \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4} = C.$$

Интеграциони множител

Ако код једначине $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ није задовољен услов $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ можемо

покушати да множењем једначине неком функцијом $\lambda = \lambda(x, y)$ добијемо једначину $\lambda P(x, y)dx + \lambda Q(x, y)dy = 0$ код које ће услов бити задовољен. Овдје ћемо размотрити само најједноставније облике функције $\lambda = \lambda(x, y)$, коју називамо интеграциони множител, који дозвољавају њено лако налажење.

Нека је $\lambda = \lambda(x)$. Тада из $\frac{\partial \lambda P}{\partial y} = \frac{\partial \lambda Q}{\partial x}$ добијамо $\lambda \frac{\partial P}{\partial y} = Q \frac{d\lambda}{dx} + \lambda \frac{\partial Q}{\partial x}$ то јест

$$\lambda \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = Q \frac{d\lambda}{dx}. \text{ Добијену једнакост } \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx = \frac{d\lambda}{\lambda}$$

члан уз dx функција која зависи само од x . То представља услов за постојање интеграционог множитеља $\lambda = \lambda(x)$ и истовремено даје начин за његово одређивање.

Слично се из једнакости $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy = \frac{d\lambda}{\lambda}$ може добити интеграциони множител

$\lambda = \lambda(y)$ ако је члан уз dy функција која зависи само од y .

примјер: $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$

решење: Једначина није једначина са тоталним диференцијалом јер је $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$ и

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2y. \text{ Како је } \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{2y + 2y}{-2xy} = -\frac{2}{x} \text{ то из } \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx \text{ можемо одредити}$$

функцију $\lambda = \lambda(x)$ као интеграциони множител која ј-ну своди на ј-ну са тоталним диференцијалом. $\frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{2}{x} dx \Rightarrow \ln \lambda = -2 \ln x \Rightarrow \lambda = \frac{1}{x^2}$. Послије множења:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2} \right) dx - 2 \frac{y}{x} dy = 0 \text{ па је } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2y}{x^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ чиме се задатак своди на налажење}$$

функције $U = U(x, y)$ када су познати њени парцијални изводи. Из $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2}$

имамо $U = \ln x - \frac{y^2}{x} + \varphi(y)$. Како је $\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{2y}{x} + \varphi'(y)$ и истовремено из једначине

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{2y}{x} \text{ то је } \varphi'(y) = 0. U = \ln x - \frac{y^2}{x} \text{ Опште решење је } \ln x - \frac{y^2}{x} = C.$$

примјер: Ријешити диф. ј-ну: $y' = \frac{xy}{y^3 + x^2y + x^2}$.

решење: $xydx - (y^3 + x^2y + x^2)dy = 0$. Како је $\frac{\partial P}{\partial y} = x$ и $\frac{\partial Q}{\partial x} = -2xy - 2x$ тада је

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \frac{-2xy - 2x - x}{xy} = \frac{-2y - 3}{y} \text{ па из } \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy \text{ можемо одредити функцију}$$

$\lambda = \lambda(y)$ као интеграциони множител која ј-ну своди на ј-ну са тоталним

диференцијалом. $\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{-2y-3}{y} dy \Rightarrow \ln \lambda = -2y - 3 \ln y \Rightarrow \lambda = \frac{e^{-2y}}{y^3}$. Послије множења:

$$\frac{x}{e^{2y} y^2} dx - \frac{y^3 + x^2 y + x^2}{e^{2y} y^3} dy = 0 \text{ па је } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2x(y+1)}{e^{2y} y^3} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

чиме се задатак своди на налажење функције $U = U(x, y)$ када су познати њени парцијални изводи. Из

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{e^{2y} y^2} \text{ имамо } U = \frac{x^2}{2e^{2y} y^2} + \varphi(y). \text{ Како је } \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 \frac{-4y^2 - 4y}{4e^{2y} y^4} + \varphi'(y) \text{ и}$$

истовремено из једначине $\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{y^3 + x^2 y + x^2}{e^{2y} y^3}$ то је $\varphi'(y) = -e^{-2y}$ па је $\varphi(y) = \frac{e^{-2y}}{2}$.

$U = \frac{x^2}{2e^{2y} y^2} + \frac{1}{2e^{2y}}$. Опште решење је $\frac{x^2 + y^2}{2e^{2y} y^2} = C$. Због множења са $\lambda = \frac{e^{-2y}}{y^3}$ вршимо

провјеру да ли је $y = 0$ решење. Очигледно јесте, и не може се добити ни за једну вриједност константе из општег решења па представља сингуларно решење.

примјери за вјежбање:

$$(2x^2 y + 2y + 5)dx + (2x^3 + 2x)dy = 0; \quad 2xy + 5 \arctg x = C.$$

У ситуацијама када се не може одредити интеграциони множитељ као функција само једне промјенљиве можемо покушати, зависно од облика функција $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ да одредимо множитељ у облику $\lambda = \lambda(x+y)$ или $\lambda = \lambda(x^2 + y^2) \dots$

примјер: $x(xy-3)y' + (xy^2 - y) = 0$.

решење: Из $y(xy-1)dx + x(xy-3)dy = 0$ имамо $\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy - 1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy - 3$. Како не

постоји интеграциони множитељ као функција само једне промјенљиве тражимо, обзиром на облик функција $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ функцију $\lambda = \lambda(xy)$. Ако означимо $t = xy$

тада је $\lambda = \lambda(t) = \lambda(t(x, y))$. Из $\frac{\partial \lambda P}{\partial y} = \frac{\partial \lambda Q}{\partial x}$ добијамо $\lambda \frac{\partial P}{\partial y} + P \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \lambda \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial \lambda}{\partial x}$. Како је

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{d\lambda}{dt} y \text{ и } \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{d\lambda}{dt} x \text{ то је } \lambda \frac{\partial P}{\partial y} + P \frac{d\lambda}{dt} x = \lambda \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{d\lambda}{dt} y.$$

$$P \frac{d\lambda}{dt} x - Q \frac{d\lambda}{dt} y = \lambda \frac{\partial Q}{\partial x} - \lambda \frac{\partial P}{\partial y} \text{ тј. } \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Px - Qy} dt \text{ закључујемо да ако је } \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Px - Qy} = F(t)$$

онда постоји интеграциони множитељ $\lambda = \lambda(xy)$. Овдје је

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Px - Qy} = \frac{2xy - 3 - 2xy + 1}{xy(xy-1) - xy(xy-3)} \text{ па имамо } \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{-2}{2xy} dt \text{ тј. } \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{-dt}{t}.$$

Послије одређивања множитеља $\lambda = \frac{1}{t}$ тј. $\lambda = \frac{1}{xy}$ добија се једначина $\frac{xy-1}{x} dx + \frac{xy-3}{y} dy = 0$

код које је $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$. Опште решење једначине се може записати у облику

$$xy - \ln xy^3 = C. \text{ Осим тога, због множења са } \lambda = \frac{1}{xy} \text{ имамо и сингуларно решење } y = 0.$$

(Задатак се може ријешити и смјеном $y = z^\alpha$)

примјер: ријешити $(3x + 2y + y^2)dx + (x + 4xy + 5y^2)dy = 0$ знајући да је интеграциони множитељ облика $\lambda = \lambda(x + y^2)$.

решење: смјена $z = x + y^2$ даје $\lambda = \lambda(z)$ па из $\frac{\partial \lambda P}{\partial y} = \frac{\partial \lambda Q}{\partial x}$ добијамо

$$\lambda \frac{\partial P}{\partial y} + P \frac{\partial \lambda}{\partial y} = Q \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \lambda \frac{\partial Q}{\partial x}. \text{ Како је } \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{d\lambda}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d\lambda}{dz} \text{ и } \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{d\lambda}{dz} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{d\lambda}{dz} 2y \text{ то је}$$

$$\lambda(2 + 2y) + (3x + 2y + y^2) \frac{d\lambda}{dz} 2y = (x + 4xy + 5y^2) \frac{d\lambda}{dz} + \lambda(1 + 4y)$$

$$\frac{d\lambda}{dz} (6xy + 4y^2 + 2y^3 - x - 4xy - 5y^2) = \lambda(1 + 4y - 2 - 2y); \frac{d\lambda}{dz} (2xy - y^2 + 2y^3 - x) = \lambda(-1 + 2y)$$

$$\frac{d\lambda}{dz} (x + y^2)(-1 + 2y) = \lambda(-1 + 2y); \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dz}{x + y^2}; \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dz}{z} \text{ интеграцијом добијамо } \lambda = z \text{ то}$$

јест $\lambda = x + y^2$. Послије множења добијамо

$$(3x^2 + 2xy + 4xy^2 + 2y^3 + y^4)dx + (x^2 + 4x^2y + 6xy^2 + 4xy^3 + 5y^4)dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + 8xy + 6y^2 + 4y^3 = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ па добијена једначина јесте са тоталним}$$

диференцијалом. Из $\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + 2xy + 4xy^2 + 2y^3 + y^4$ имамо

$$U = x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + \varphi(y). \text{ Како је } \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + 4x^2y + 6xy^2 + 4xy^3 + \varphi'(y) \text{ и}$$

истовремено из једначине $\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + 4x^2y + 6xy^2 + 4xy^3 + 5y^4$ то је $\varphi'(y) = 5y^4$,

$$\varphi(y) = y^5, U = x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + y^5 \text{ Опште решење је } x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + y^5 = C.$$