Једначине облика $F(x, y^{(n)}) = 0$

Ако се може ријешити по $y^{(n)}$ тј. довести на облик $y^{(n)} = f(x)$ до решења се долази узастопним интеграцијама : $y = \int\int ...\int f(x)dxdx...dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + ... + C_{n-1}x + C_n$.

<u>примјер</u>:
Наћи решење једначине $y'' = xe^x$ које задовољава услове $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$
<u>решење</u>:
$y'' = xe^x$ Првом интеграцијом добијамо :
$y' = \int xe^x dx + C_1 = (x-1)e^x + C_1$; Још једном интегралимо
$y = \int (x-1)e^x dx + C_1 x + C_2 = (x-2)e^x + C_1 x + C_2$ је опште решење.
Из $y'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 1$ и $y(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 3$ па је тражено партикуларно решење:
$y = (x-2)e^x + x + 3$.

Једначине облика $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$

Ако се може ријешити по $y^{(n)}$ тј. довести на облик $y^{(n)} = f(y^{(n-1)})$ решавамо је смјеном $y^{(n-1)} = z(x)$. Послије смјене добијамо добија се $z' = f(z)$. Решење те једначине је $\alpha(x, z, C_1) = 0$ тј. $\alpha(x, y^{(n-1)}, C_1) = 0$ чиме се једначина своди на претходни тип.
<u>примјер</u>:
$y'''' = \sqrt{y'''}$
<u>решење</u>:
смјена $y''' = z(x)$ доводи до једначине облика $z' = \sqrt{z}$ тј $z^{-1/2}dz = dx$ која има решење $2z^{1/2} = x + 2C_1$ тј. $z = (\frac{x}{2} + C_1)^2$. Тиме се добија једначина $y''' = (\frac{x}{2} + C_1)^2$ од које узастопним интеграцијама добијамо

$y'' = \int (\frac{x}{2} + C_1)^2 dx + C_2$ тј. $y'' = \frac{2}{3}(\frac{x}{2} + C_1)^3 + C_2$

$y' = \int \left[\frac{2}{3}(\frac{x}{2} + C_1)^3 + C_2\right] dx + C_3$ тј. $y' = \frac{1}{3}(\frac{x}{2} + C_1)^4 + C_2 x + C_3$

$y = \int \left[\frac{1}{3}(\frac{x}{2} + C_1)^4 + C_2 x + C_3\right] dx + C_4$ тј.

$y = \frac{2}{15}(\frac{x}{2} + C_1)^5 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3 x + C_4$;

Једначине облика $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$

Код једначине која не садржи непознату функцију и првих неколико њених извода користимо смјену $y^{(k)} = p(x)$. Изводи вишег реда функције y се у једначини замјењују на следећи начин: $y^{(k+1)} = p'(x)$, $y^{(k+2)} = p''(x)$, ... , $y^{(n)} = p^{(n-k)}(x)$. Очигледно, оваква смјена снижава ред полазне једначине за k. Решавање добијене једначине настављамо неком од метода зависно од облика добијене једначине. Из решења $\Phi(x, p, C_1, ..., C_{n-k}) = 0$ добијамо $\Phi(x, y^{(k)}, C_1, ..., C_{n-k}) = 0$ што послије још k интеграција даје опште решење.

примјер:

$xy^{(5)} - y^{(4)} = 0$

решење:

Послије смјене $y^{(4)} = p(x)$, $y^{(5)} = p'(x)$ једначина добија облик

$xp' - p = 0$,

$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$,

$p = C_1 x$. Из $y^{(4)} = C_1 x$ узастопним интеграцијама добијамо

$y''' = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2$,

$y'' = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 x + C_3$,

$y' = C_1 \frac{x^4}{24} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$.

Опште решење $y = C_1 \frac{x^5}{120} + C_2 \frac{x^3}{6} + C_3 \frac{x^2}{2} + C_4 x + C_5$ се може записати и у облику

$y' = Ax^5 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$.

примјер:

$y'' - xy''' + y''^2 = 0$

решење:

Смјена $y'' = z(x)$ нам даје $z - xz' + z^2 = 0$ тј. $z' - \frac{1}{x} z - \frac{1}{x} z^2 = 0$.

Добијену Бернулијеву ј-ну послије дијељења са $z^2 \neq 0$ пишемо у облику

$\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{x}\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = 0$ и решавамо смјеном $\frac{1}{z} = u(x)$. $\frac{-z'}{z^2} = u'(x)$

$u' + \frac{1}{x} u + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow u = \frac{1}{x}[C_1 - x] \Rightarrow z = \frac{x}{C_1 - x} \Rightarrow y'' = \frac{x}{C_1 - x} \Rightarrow y' = \int \frac{x}{C_1 - x} dx + C_2 \Rightarrow$

$y' = -x - C_1 \ln(C_1 - x) + C_2 \Rightarrow y = \int (-x - C_1 \ln(C_1 - x) + C_2) dx + C_3 \Rightarrow$

$y = -\frac{x^2}{2} - C_1[x \ln(C_1 - x) - x - C_1 \ln(C_1 - x)] + C_2 x + C_3$ Провјером услова $z^2 = 0$ добијамо $y = ax + b$ што очигледно представља сингуларно решење јер задовољава једначину и не може се добити из општег решења ни за једну вриједност константи C_1, C_2, C_3.

Линеарне хомогене једначине са константним кофицијентима

Једначини облика $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0$ придружујемо карактеристичну једначину $k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + ... + a_{n-1} k + a_n = 0$. Та алгебарска једначина има укључујући вишеструкост, и коњуговано комплексна решења тачно n решења. При томе

- Сваком реалном простом (једноструком) коријену k_i одговара једно партикуларно решење $y_i = e^{k_i x}$.

- Сваком реалном $m-$тоструком коријену $k_1 = k_2 = \ldots = k_m$ одговара m партикуларних решења $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = xe^{k_1 x}$, $y_3 = x^2 e^{k_1 x}$,..., $y_m = x^{m-1} e^{k_1 x}$.
- Сваком пару простих комплексних коријена $k_{1/2} = \alpha \pm i\beta$ одговарају два партикуларна решења $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$.
- Сваком пару $m-$тоструких комплексних коријена $k_{1/2} = k_{3/4} = \ldots = k_{2m-1/2m} = \alpha + i\beta$ одговара $2m$ партикуларних решења $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$, $y_3 = xe^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_4 = xe^{\alpha x}\sin\beta x$,..., $y_{2m-1} = x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_{2m} = x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Опште решење је линеарна комбинација n независних партикуларних решења.

примјер:

$y''' - 5y'' + 6y' = 0$

решење:

Карактеристична једначина има облик $k^3 - 5k^2 + 6k = 0$ тј. $k(k-2)(k-3) = 0$.
Решењима $k_1 = 0, k_2 = 2, k_3 = 3$ одговарају партикуларна решења $y_1 = e^{0x}$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = e^{3x}$. Опште решење једначине је $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$ тј. $y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$.

примјер:

$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$

решење:

Карактеристична једначина има облик $k^3 - 5k^2 + 8k - 4 = 0$ тј. $(k-1)(k-2)^2 = 0$.
Решењима $k_1 = 1, k_2 = k_3 = 2$ одговарају партикуларна решења $y_1 = e^{1x}$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = xe^{2x}$. Опште решење једначине је $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$ тј.
$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 xe^{2x}$.

примјер:

$y''' + 3y'' + 9y' - 13y = 0$

решење:

Карактеристична једначина има облик $k^3 + 3k^2 + 9k - 13 = 0$. Решењима $k_1 = 1$, $k_{2/3} = -2 \pm 3i$ одговарају партикуларна решења $y_1 = e^{1x}$, $y_2 = e^{-2x}\cos 3x$, $y_3 = e^{-2x}\sin 3x$.
Опште решење једначине је $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$ тј.
$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}\cos 3x + C_3 e^{-2x}\sin 3x$.

примјер:

$y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0$

решење:

Карактеристична једначина има облик $k^3 - 2k^2 + 4k - 8 = 0$. Решењима $k_1 = 2$, $k_{2/3} = \pm 2i$ одговарају партикуларна решења $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = \cos 2x$, $y_3 = \sin 2x$. Опште решење једначине је $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$ тј. $y = C_1 e^{2x} + C_2\cos 2x + C_3 \sin 2x$.

примјер:

$y'''' + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$

решење:

Карактеристична једначина има облик $k^4 + 4k^3 + 8k^2 + 8k + 4 = 0$ тј. $(k^2 + 2k + 2)^2 = 0$.
Решењима $k_{1/2} = k_{3/4} = -1 \pm i$ одговарају партикуларна решења $y_1 = e^{-x}\cos x$, $y_2 = e^{-x}\sin x$, $y_3 = xe^{-x}\cos x$, $y_4 = xe^{-x}\sin x$. Опште решење једначине је $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4$ тј. $y = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x + C_3 xe^{-x}\cos x + C_4 xe^{-x}\sin x$.

примјер:

$y'''' + 2y'' + y = 0$

решење:

Карактеристична једначина има облик $k^4 + 2k^2 + 1 = 0$ тј. $(k^2+1)^2 = 0$. Решењима $k_{1/2} = k_{3/4} = \pm i$ одговарају партикуларна решења $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, $y_3 = x\cos x$, $y_4 = x\sin x$. Опште решење једначине је $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4$ тј. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x$.

Линеарне нехомогене једначине са константним кофицијентима

Једначину облика $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$ решавамо тако што у првом кораку нађемо решење одговарајуће хомогене једначине. У другом кораку до решења нехомогене можемо доћи на два начина. Први начин је примјена Лагранжовог метода варијације константи. Други начин, који ће овдје бити описан заснован је на томе да се опште решење нехомогене једначине може представити као збир општег решења хомогене и једног партикуларног решења нехомогене. Ако можемо да пронађемо једно партикуларно решење нехомогене једначине тиме у потпуности решавамо полазну једначину. Метод покушаја налажења једног решења је овдје олакшан тиме што за неке облике функције $f(x)$ тачно знамо како треба да изгледа тражено партикуларно решење. Ако се функција може представити у облику $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$ тада постоји партикуларно решење облика $y_p = x^s e^{\alpha x}(R_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x)$ гдје је број s вишеструкост броја $\alpha \pm i\beta$ као коријена карактеристичне једначине, и $k = \max\{m,n\}$. У следећој табели можемо видјети неке типове функција и одговарајућа партикуларна решења:

$f(x)$	Коријен карактеристичне једначине	y_p
$P_n(x)$	0 није коријен	$R_n(x)$
	0 јесте коријен реда s	$x^s R_n(x)$
$e^{\alpha x} P_n(x)$	α није коријен	$e^{\alpha x} R_n(x)$
	α јесте коријен реда s	$x^s e^{\alpha x} R_n(x)$
$P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x$	$\pm i\beta$ није коријен	$R_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x$
	$\pm i\beta$ јесте коријен реда s	$x^s(R_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x)$
$e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$	$\alpha \pm i\beta$ није коријен	$e^{\alpha x}(R_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x)$
	$\alpha \pm i\beta$ јесте кор. реда s	$x^s e^{\alpha x}(R_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x)$

примјер:

$y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$

решење:

Одговарајућа хомогена има карактеристичну једначину $k^3 - k^2 + k - 1 = 0$ са решењима $k_1 = 1, k_2 = i, k_3 = -i$. Опште решење хомогене једначине је $y_h = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x$. За одређивање партикуларног решења битно је то да је функција $f(x)$ у облику полинома. Како 0 није коријен карактеристичне једначине партикуларно решење ће бити полином истог степена као $f(x)$. Када функцију $y_p = Ax^2 + Bx + C$ и њене изводе $y_p' = 2Ax + B$, $y_p'' = 2A$, $y_p''' = 0$ замијенимо у

једначини добијамо идентитет $0-2A+2Ax+B-Ax^2-Bx-C\equiv x^2+x$ тј.
$-Ax^2+(2A-B)x+(-2A+B-C)\equiv x^2+x$.
Из њега добијамо $A=-1, B=-3, C=-1$.
Партикуларно решење је $y_p=-x^2-3x-1$. Опште решење је
$y=y_h+y_p=C_1e^x+C_2\cos x+C_3\sin x-x^2-3x-1$.

<u>примјер</u>:
$y'''-y''=12x^2+6x$

<u>решење</u>:
Одговарајућа хомогена има карактеристичну једначину $k^3-k^2=0$ са решењима $k_1=k_2=0$, $k_3=1$. Опште решење хомогене једначине је $y_h=C_1+C_2x+C_3e^x$.
Функција $f(x)$ је у облику полинома. Како је 0 двоструки коријен карактеристичне једначине партикуларно решење ће бити облика $y_p=x^2(Ax^2+Bx+C)$. Замјеном у једначини добијамо идентитет из кога одређујемо $A=-1, B=-5, C=-15$.
Партикуларно решење је $y_p=-x^4-5x^3-15x^2$. Опште решење је
$y=y_h+y_p=C_1+C_2x+C_3e^x-x^4-5x^3-15x^2$.

<u>примјер</u>:
$y''-y'=e^x+e^{2x}+x$

<u>решење</u>:
Одговарајућа хомогена има карактеристичну једначину $k^2-k=0$ са решењима $k_1=0$, $k_2=1$. Опште решење хомогене једначине је $y_h=C_1+C_2e^x$. Функција $f(x)$ је састављена од три дијела $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$. Сваком од њих одговара један дио партикуларног решења $y_p=y_1(x)+y_2(x)+y_3(x)$.
Како је $f_1(x)=e^x$ и број 1 јесте коријен карактеристичне једначине то је $y_1=xAe^x$.
Како је $f_2(x)=e^{2x}$ и број 2 није коријен карактеристичне једначине то је $y_2=Be^{2x}$.
Како је $f_3(x)=x$ и број 0 јесте коријен карактеристичне једначине то је
$y_3=x(Cx+D)$.
Замјеном $y_p=xAe^x+Be^{2x}+x(Cx+D)$ у једначини добијамо идентитет из кога одређујемо $A=1, B=\frac{1}{2}, C=-\frac{1}{2}, D=-1$.
Партикуларно решење је $y_p=xe^x+\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}x^2-x$.
Опште решење је $y=y_h+y_p=C_1+C_2e^x+xe^x+\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}x^2-x$.

<u>примјер</u>:
$y''+y'-2y=(x^2-1)e^{2x}$

<u>решење</u>:
Одговарајућа хомогена има карактеристичну једначину $k^2+k-2=0$ са решењима $k_1=1$, $k_2=-2$. Опште решење хомогене једначине је $y_h=C_1e^x+C_2e^{-2x}$. Функција $f(x)=(x^2-1)e^{2x}$ и број 2 није коријен карактеристичне једначине па је $y_p=(Ax^2+Bx+C)e^{2x}$.... Опште решење је
$y=y_h+y_p=C_1e^x+C_2e^{-2x}+(\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{8}x+\frac{13}{32})e^{2x}$.

<u>примјер</u>:

$y''' - y'' = xe^x$

<u>решење</u>:

Одговарајућа хомогена има карактеристичну једначину $k^3 - k^2 = 0$ са решењима $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = 1$. Опште решење хомогене једначине је $y_h = C_1 + C_2 x + C_3 e^x$. Функција $f(x) = xe^x$ и број 1 јесте коријен карактеристичне једначине па је $y_p = x(Ax + B)e^x$.... Опште решење је $y = y_h + y_p = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + (\frac{1}{2}x^2 - 2x)e^x$.

<u>примјер</u>:

$y'' + y = \sin 2x$

<u>решење</u>:

Одговарајућа хомогена има карактеристичну једначину $k^2 + 1 = 0$ са решењима $k_1 = i$, $k_2 = -i$. Опште решење хомогене једначине је $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Функција $f(x) = \sin 2x$ и број $\pm 2i$ није коријен карактеристичне једначине па је $y_p = A\cos 2x + B\sin 2x$.... Опште решење је $y = y_h + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{3}\sin 2x$.

<u>примјер</u>:

$y'' + y = \sin x$

<u>решење</u>:

Одговарајућа хомогена има карактеристичну једначину $k^2 + 1 = 0$ са решењима $k_1 = i$, $k_2 = -i$. Опште решење хомогене једначине је $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Функција $f(x) = \sin x$ и број $\pm i$ јесте коријен карактеристичне једначине па је $y_p = x(A\cos x + B\sin x)$ .... Опште решење је $y = y_h + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x}{2}\cos x$.

<u>примјер</u>:

$y'' - 6y' + 9y = 25e^x \sin x$

<u>решење</u>:

Одговарајућа хомогена има карактеристичну једначину $k^2 - 6k + 9 = 0$ са решењима $k_1 = k_2 = 3$. Опште решење хомогене једначине је $y_h = C_1 e^{3x} + C_2 xe^{3x}$. Функција $f(x) = 25e^x \sin x$ и број $1 \pm i$ није коријен карактеристичне једначине па је $y_p = e^x(A\cos x + B\sin x)$.... Опште решење је $y = y_h + y_p = C_1 e^{3x} + C_2 xe^{3x} + e^x(4\cos x + 3\sin x)$.