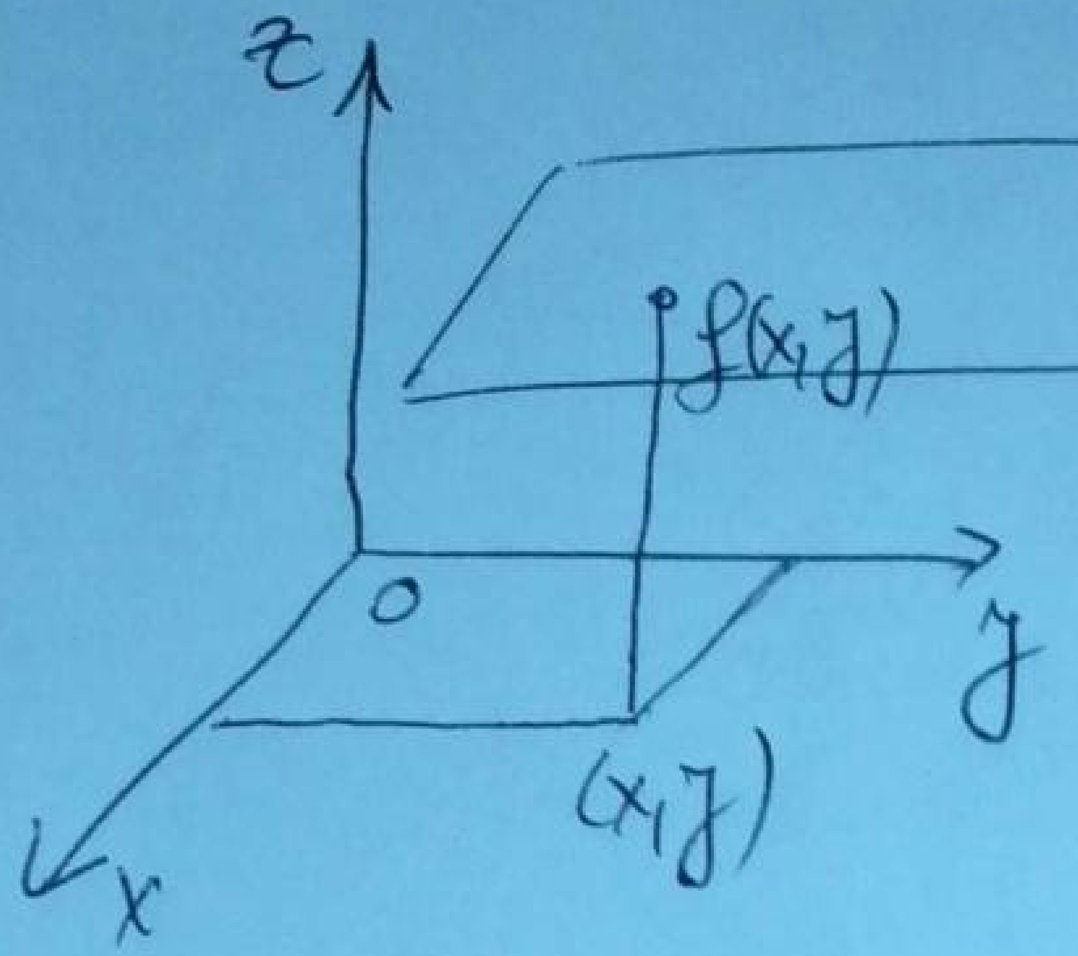
Тангентна раван на површ



$S=\{(x,y,z) \mid z=f(x,y)\}$

$z=f(x,y)$ – експлицитни облик

$F(x,y,z)=0$ – имплицитни

График ове ф-је је <u>површ</u>.

Нека је ф-ја $z=f(x,y)$ диференцијабилна. Онда је:

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=$$

$$=\underset{\overset{\parallel}{f'_x(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}}{A}\cdot\Delta x+\underset{\overset{\parallel}{f'_y(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}}{B}\cdot\Delta y+\underbrace{\varepsilon(\Delta x,\Delta y)\cdot\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}_{\alpha(\Delta x,\Delta y)\to 0,\ \text{кад } \begin{cases}\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\end{cases}}$$

$$\left.\begin{aligned}x_0+\Delta x&=x\\ y_0+\Delta y&=y\\ z_0+\Delta z&=z\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}\Delta x&=x-x_0\\ \Delta y&=y-y_0\\ \Delta z&=z-z_0\end{aligned}\right\}$$

$$z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)\longrightarrow$$ Ово z је из површи S

$$z=\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)+z_0+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$$

$$z=\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)+z_0$$ Ово z је из тангентне равни:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)-(z-z_0)=0}$$

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ ј-на равни кроз једну тачку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ са нормалним вектором $\vec{N}(A,B,C)$

$\vec{N}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},-1\right)$ нормални вектор тангентне рав.

$$\boxed{\frac{x-x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{-1}}$$

ј-на нормале са паралелним вектором $\vec{p}\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},-1\right)$

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

ј-на праве кроз једну т. M_0 са парал. векто (l,m,n)

Локални екстремуми ф-је више пром.

Деф: Ф-ја $y=f(x^1,\dots,x^n)$ има лок. мин (лок мах) у некој т. $M_0(x_0^1,\dots,x_0^n)$, ако постоји околина т. M_0, таква да је за $\forall$ т. $M(x^1,\dots,x^n)\in O_{M_0}$

$$f(x^1,\dots,x^n)\geq f(x_0^1,\dots,x_0^n)\quad \left(f(x^1,\dots,x^n)\leq f(x_0^1,\dots,x_0^n)\right)$$

Уколико су обе неједнакости строго $>$ (строго $<$), онда се такав мин (мах) назива строги лок. мин (строги лок. мах.).

Вредности ф-је у тачкама локалних екстр. се називају локалне екстремне вредности ф-је.

Т. Да би т. $M_0(x_0^1,\dots,x_0^n)$ била тач. лок. екс. ф-је $y=f(x^1,\dots,x^n)$ потребно је, али не и довољно да први парц. изв. ф-је y у т. M_0 постоје и буду једнаки нули, тј.

$$\boxed{\frac{\partial f(x_0^1,\dots,x_0^n)}{\partial x^i}=0,\quad i=1,2,\dots,n}\quad \text{односно}\quad \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_{M_0}=0$$

Обрат не важи у општем случају.

Последица: Ако ф-ја $y=f(x^1,\dots,x^n)$ има у т. M_0 лок. екстр. и диф. је у њој, онда је:

$$dy\big|_{M_0}=\frac{\partial f}{\partial x^1}\Big|_{M_0}dx^1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x^n}\Big|_{M_0}dx^n=0$$

Деф: Тачке у којима је први диф. ф-је $=0$ наз. се тачкама могућег екстр. те ф-је. За налажење тих тачака потребно је решити систем ј-на:

$$f'_{x^1}(x^1,\dots,x^n)=0,\ \dots,\ f'_{x^n}(x^1,\dots,x^n)=0$$

систем од n-јна са n-непозн.

Деф: Фја облика $Q(x^1, \dots, x^n) =$

$$= a_{11}x^1x^1 + a_{12}x^1x^2 + \dots + a_{1n}x^1x^n +$$
$$+ a_{21}x^2x^1 + a_{22}x^2x^2 + \dots + a_{2n}x^2x^n + \dots +$$
$$+ a_{n1}x^nx^1 + a_{n2}x^nx^2 + \dots + a_{nn}x^nx^n$$

тј. $$Q = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x^ix^j$$

се наз. квадратном формом, где су бр. a_{ij} – коеф. квадр. форме и за њих важи $a_{ij} = a_{ji}$. Матрица састављена из њих

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

је матрица квад. форме. Детерминанте

$\Delta_1 = |a_{11}| = a_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ - & - & - \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

су минори матрице A на главној дијаг. у гор. левом углу.

Квад. фор. Q се наз. поз. одр. (поз. деф.) одн. нег. одр. (нег. деф.) ако за све вредности пром. $x^1, \dots, x^n$, које нису истовремено $= 0$, добија поз. одн. нег. вредности.

Квад. фор. Q је одређеног знака, ако је она или поз. одр. или нег. одр.

Квад. фор. Q је знакопроменљива, ако она има и поз. и нег. вредности.

а

<u>Силвестрово правило</u>

Квад. фор. $Q=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x^ix^j>0$ је поз. деф. ако:

$$\Delta_1>0,\ \Delta_2>0,\ \dots,\ \Delta_n>0.$$

Кв. фор. $Q=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x^ix^j<0$ је нег. деф. ако:

$$\Delta_1=a_{11}<0,\ \Delta_2>0,\ \Delta_3<0,\ \dots$$

(тј. главни минори наизм. мењају знак

<u>Т. (Силвестров крит.)</u>

Други диф.

је: $d^2f=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\Delta x^i\Delta x^j$, $a_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\Big|_{M_0}$)

1) поз. деф. квад. фор. ако су минори на главној дијагонали поз. тј.

$$\Delta_1=a_{11}>0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}>0,\ \dots,\ \Delta_n=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ -&&-\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

У том случају ф-ја f има <u>min</u>.

2) нег. деф. квад. фор. ако минори на главној диј. наизм. мењ. знак, тј.

$$\Delta_1<0,\ \Delta_2>0,\ \Delta_3<0,\ \dots$$

У том случају ф-ја f има <u>max</u>.

Т. (дов. усл.) Нека је $y=f(x^1,\dots,x^n)$ фја која има непр. прве и друге парц. изводе у некој околини т. $M_0(x_0^1,\dots,x_0^n)$ и нека је

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_{M_0}=0,\quad i=1,2,\dots,n$$

Онда је:

$$f(x_0^1+\Delta x^1, x_0^2+\Delta x^2,\dots,x_0^n+\Delta x^n)-f(x_0^1,x_0^2,\dots,x_0^n)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x_0^1,\dots,x_0^n)}{\partial x^i\partial x^j}\Delta x^i\Delta x^j+o\left(\sqrt{(\Delta x^1)^2+\dots+(\Delta x^n)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\Delta x^i\Delta x^j}_{d^2f|_{M_0}}+o\left(\sqrt{(\Delta x^1)^2+\dots+(\Delta x^n)^2}\right)$$

Дов. усл. да т. M_0 буде:

1) лок. мин. за фју $y=f(x^1,\dots,x^n)$ је да квад. фор. $\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\Delta x^i\Delta x^j}_{Q>0}$ буде поз. деф.

2) лок. макс. је да квад. фор. буде нег. деф. $(Q<0)$

Уколико је квад. фор. знакопроменљива (узима знак "+" и знак "−" у зависности од $\Delta x^1,\Delta x^2,\dots,\Delta x^n$), онда т. M_0 није т. лок. екстр.

$$\boxed{\Delta f\approx df}$$

$\Delta f\approx\frac{1}{2}d^2f(M_0)$ (јер је $df(M_0)=0$)

Случај двеју променљивих:

Нека је ф-ја $z=f(x,y)$ диф. у околини т. $M_0(x_0,y_0)$ и два пута диф. у самој т. M_0, где је M_0 – стац. тачка, екстр. вред. ф-је, тј:

$$dz\big|_{M_0}=0.$$

Нека је:

$$a_{11}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_{M_0},\quad a_{12}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\bigg|_{M_0},\quad a_{22}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\bigg|_{M_0}$$

Тада, према Т. (дов. усл.) и Силв. кр. (о квад. фор. одр. знака) следи, ако

1) $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$,

онда ф-ја $z=f(x,y)$ има лок. екс. у т. M_0: max, за $a_{11}<0$
min, за $a_{11}>0$

2) $D<0$, онда ф-ја $z=f(x,y)$ нема лок. екс. у т. M_0.

3) $D=0$, онда ф-ја $z=f(x,y)$ може да има и да нема екс. у т. M_0.

Везани (условни) екстремум

Нека је $z=f(x,y)$ ф-ја двеју променљивих.
Потребан услов за егзистенцију екстремума

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0 \quad \cdots\cdots (1)$$

Ако су променљиве x и y везане условом
$g(x,y)=0$, онда:

$$\frac{\partial g}{\partial x}dx+\frac{\partial g}{\partial y}dy=0 \quad \cdots\cdots (2)$$

(dy зависи од dx). Помножимо јну (2) са λ и саберимо са (1)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial g}{\partial y}\right)dy=0 \quad \cdots\cdots (3)$$

Да би се елиминисао dy (које зависи од dx), треба одредити λ из услова да је:

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial g}{\partial y}=0 \quad \cdots\cdots (4).$$

Онда, из (3) следи: $\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x}=0 \quad \cdots\cdots (5)$

Из јна (4) и (5) и $g(x,y)=0$, одређују се x,y и λ за које ф-ја $z=f(x,y)$ има екстремум (условни, односно везани), а ј-не (4) и (5) представљају услов да ф-ја, тзв. Лагранжова ф-ја

$$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\cdot g(x,y) \quad \cdots\cdots (6)$$

где су x и y независно променљиве, а λ константа, има обичан екстремум
↓
(Лагранжеова).

Уопште, за ф-ју $y = f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ од n-променљивих, са m-услова:

$$\left.\begin{aligned} g_1(x^1, \ldots, x^n) &= 0 \\ &\vdots \\ g_m(x^1, \ldots, x^n) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ где је } m < n,$$

Лагранжеова ф-ја:

$$F(x^1, \ldots, x^n) = f(x^1, \ldots, x^n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x^1, \ldots, x^n)$$

λ_i – Лагранжеови мултипликатори.

Тејлорова формула за ф-је двеју променљивих

Т. Ако у околини неке тачке $M_0(x_0, y_0)$ ф-ја $z = f(x, y)$ има непрекидне парцијалне изводе свих редова до $n+1$. реда закључно, онда за све тачке $M(\underbrace{x_0 + \Delta x}_{x}, \underbrace{y_0 + \Delta y}_{y})$, тј. $M(x, y)$ из те околине

без док.

$$\boxed{\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= f(x_0, y_0) + d f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0) + \\ &+ \cdots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y), \end{aligned}}$$

$$0 < \theta < 1, \quad \Delta x = dx, \quad \Delta y = dy$$

Т. ф. за ф-ју $f(x)$ једне променљиве, која је $n+1$. пут диференцијабилна

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad c \in (x_0, x)$$

Стављамо:

$$x - x_0 = \Delta x = dx \Rightarrow x = x_0 + \Delta x:$$

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + d\,f(x_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(c), \quad c = x_0 + \theta \Delta x, \quad 0 < \theta < 1.$$

Scanned by TapScanner