Glava I. ELEMENTI LINEARNE ALGEBRE

1. 1. MATRICE

a) Definicija matrice

Uvedimo pojam matrice.

Definicija 1. Matricom A formata (tipa ili reda) $m \times n$ nazivamo pravougaonu tablicu (šemu) od m redaka i n stupaca sastavljenu od brojeva ili drugih matematičkih izraza a_{ij} $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$ (a_{ij} su elementi matrice).

Matricu A sa elementima a_{ij} označavamo sa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

ili (a_{ij}). Elementi $a_{i1}, a_{i2},..., a_{in}$ sačinjavaju i –ti redak matrice (1), a elementi $a_{1j}, a_{2j},...,$ a_{nj} j-ti stubac matrice (1). Specijalno, matrica prvog reda ima oblik (a_{11}).

Primjer 1. Matrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ x & 0 & 11 \\ -x^2 & xy & 2 \\ -4 & y & 7 \end{pmatrix}$ je formata 4×3 sa elementima: $a_{11}=1$, $a_{12}=3$, $a_{13}=-2$, $a_{21}=x$, $a_{22}=0$, $a_{23}=11$, $a_{31}=-x^2$, $a_{32}=xy$, $a_{33}=2$, $a_{41}=-4$, $a_{42}=y$, $a_{43}=7$. Prvi redak matrice A sačinjavaju elementi: 1, 3 i –2, drugi: x, 0 i 11; treći: $-x^2$, xy, 2; četvrti: –4, y, 7.

Primjer 2. Matrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 5 & 0 & 4 \\ -6 & 12 & 0 \end{pmatrix}$ je formata 3×3, njen drugi stubac sačinjavaju elementi: 7, 0, 12..

Primjer 3. Matrica $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$ je formata 3×1, a matrica $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ je formata 1×4. Elementi: 2, −7, 4 sačinjavaju (jedini) stubac matrice A, dok elementi: 2, 3, −1, −3 sačinjavaju (jedini) redak matrice B.

> **Definicija 2.** Neka je $A = (a_{ij})$ data matrica. Matricu čiji su elementi $(-a_{ij})$ označavamo sa $-A$ i nazivamo matricom suprotnom matrici A.

Primjer 4. Za matricu $A = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$ imamo da je $-A = \begin{pmatrix} -\sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{pmatrix}$.

Zapazimo da je $-(-A) = A$ za proizvoljnu matricu A.

Navodimo neke **tipove matrica:**

- Kvadratnom matricom n-tog reda nazivamo matricu formata $n\times n$.
- Dijagonalnom matricom nazivamo kvadratnu matricu u kojoj su svi elementi izvan dijagonale (tj. elementi kod kojih je $i\neq j$) jednaki nuli.
- Jediničnom matricom (oznaka E) nazivamo dijagonalnu matricu sa jedinicama na glavnoj dijagonali.
- Nula matricom nazivamo matricu kod koje su svi elementi jednaki nuli.

Primjer 5. a) Matrica $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ -2 & 6 & 4 \\ 0 & 7 & 12 \end{pmatrix}$ je kvadratna. Matrica $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ je dijagonalna.

Matrica $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ je jedinična 3. –eg reda. Matrica $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ je nula matrica tipa 2×3.

> **Definicija 3.** Matrice A i B su jednake ako su: istog formata i ako su im jednaki odgovarajući elementi.

Primjer 6. Iz jednakosti $\begin{pmatrix} 3 & a \\ b & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 4 \\ 7 & -d \end{pmatrix}$ slijedi da je a=4, b=7, c=3 i d=−2.

b) Operacije sa matricama

Od operacija sa matricama navodimo: sabiranje matrica, množenje matrica brojem i oduzimanje matrica.

Definicija 4. Sumom matrica $A=(a_{ij})$ i $B=(b_{ij})$ jednakih formata nazivamo matricu $C=(c_{ij})$ istog tog formata, pri čemu je $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ za svako i,j.

Primjer 7. Za matrice $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ 9 & 11 & 5\end{pmatrix}$ imamo da je C=A+B=

$\begin{pmatrix}7 & -1 & 3\\ 12 & 10 & 5\end{pmatrix}$.

Svojstva operacije sabiranja matrica:

Označimo sa M skup matrica formata m×n. Tada je (M,+) Abelova grupa, tj. važi:

- $\forall A,B\in M$: A+B=B+A (zakon komutacije),
- $\forall A,B,C\in M$: (A+B)+C=A+(B+C) (zakon asocijacije),
- $\exists N\in M\forall A\in M$:A+N=N+A=A (neutralni elemenat, N je nula matrica),
- $\forall A\in M\exists A'\in M$:A+A'=A'+A=N (suprotni elemenat, A' je suprotna matrica matrice A, tj. A'=−A).

Uvedimo pojam množenja matrice brojem.

Definicija 5. Proizvod matrice $A=(a_{ij})$ i broja λ nazivamo matricu $B=(b_{ij})$ istog formata kao i matrica A, pri čemu je $b_{ij}=\lambda\cdot a_{ij}$ za svako i,j.

Primjer 8. Za matricu $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\\ 4 & 0\end{pmatrix}$ i $\lambda=2$ imamo da je $2\cdot A=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 2 & -4\\ 8 & 0\end{pmatrix}$.

Svojstva operacije množenja matrice brojem:

- $1\cdot A=A$,
- $(\lambda+\mu)\cdot A=\lambda\cdot A+\mu\cdot A$,
- $\lambda\cdot(A+B)=\lambda\cdot A+\lambda\cdot B$ (zakon distribucije u odnosu na sabiranje matrica),
- $\lambda(\mu\cdot A)=\mu(\lambda\cdot A)=(\lambda\mu)\cdot A$.

Definicija 6. Razlikom matrica A i B, oznaka A−B, nazivamo matricu A+(−1)·B.

Primjer 9. Za matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 4 & 8\\ -2 & 7 & 3\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 5\\ -8 & 9 & 1\\ 7 & -6 & 2\end{pmatrix}$ imamo da je

$$A-B=A+(-1)\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 4 & 8\\ -2 & 7 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & 0 & -5\\ 8 & -9 & -1\\ -7 & 6 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -6\\ 8 & -5 & 7\\ -9 & 13 & 1\end{pmatrix}.$$

Definicija 7. Linearnom kombinacijom matrica A i B jednakih formata nazivamo izraz oblika $\alpha\cdot A+\beta\cdot B$, gdje su α i β proizvoljni brojevi.

Primjer 10. Za matrice $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -3 & 2\\ 7 & -1\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & 7\\ -6 & 3\end{pmatrix}$ i brojeve $\alpha=3$ i $\beta=-2$ imamo da

je $3A-2B=3\cdot\begin{pmatrix}4 & 1\\ -3 & 2\\ 7 & -1\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & 7\\ -6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 3\\ -9 & 6\\ 21 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 4\\ 2 & -14\\ 12 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 7\\ -7 & -8\\ 33 & -9\end{pmatrix}.$

Uvedimo pojam proizvoda dvije matrice.

Definicija 8. Proizvodom matrica A i B (formata, redom, $m\times n$ i $n\times r$) nazivamo matricu C formata $m\times r$ takvu da je $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{in}b_{nj}$ $\quad(=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj})$ za svako i,j.

Saglasno prethodnoj definiciji, svaki elemenat c_{ij}, koji se nalazi u i-om retku i j –om stupcu matrice C, jednak je sumi proizvoda odgovarajućih elemenata i-og retka matrice A i j-og stupca matrice B. Proizvod $A\cdot B$ postoji samo onda kada matrica A ima onoliko stupaca koliko ima redaka matrica B.

Primjer 11. Za matrice $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ -4 & 5 & 0\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}-7 & 1\\ 6 & -2\\ 0 & 9\end{pmatrix}$ naći $A\cdot B$. Zapazimo da se matrice A i B mogu množiti, jer matica A ima 3 stupca a toliko ima matrica B redaka. Saglasno definiciji 8, proizvod matrica A i B će biti matrica C formata 2×2, čiji se elementi izračunavaju na sljedeći način: $c_{11}=3\cdot(-7)+1\cdot6+2\cdot0=-15$, $c_{12}=3\cdot1+1\cdot(-2)+2\cdot9=19$, $c_{21}=-4\cdot(-7)+5\cdot6+0\cdot0=58$, $c_{22}=-4\cdot1+5\cdot(-2)+0\cdot9=-14$. Dakle, $C=A\cdot B=\begin{pmatrix}-15 & 19\\ 58 & -14\end{pmatrix}$.

Svojstva operacije množenja matrica:

- $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$ (zakon asocijacije),
- $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$, $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$ (zakoni distribucije),
- U opštem slučaju ne važi zkon komutacije, tj. u opštem slučaju je $A\cdot B \neq B\cdot A$.

Definicija 9. Matrice A i B nazivamo komutativnim ako je $A\cdot B = B\cdot A$

Primjer 12. Da li su matrice:

a) $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 2\end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}-5 & 0 & 0\\ 0 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$,

komutativne? U slučaju a) nijesu, jer je $A\cdot B=\begin{pmatrix}4 & 22\\ 3 & 28\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}22 & 29\\ 6 & 10\end{pmatrix}=B\cdot A$. U slučaju b) su

komutativne, jer je $A\cdot B=\begin{pmatrix}-10 & 0 & 0\\ 0 & 21 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}=B\cdot A$.

Ako je zadat polinom $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x + a_0$, tada matričnim polinomom nazivamo izraz $a_n\cdot A^n + a_{n-1}\cdot A^{n-1}+\ldots+a_1\cdot A + a_0\cdot E$, gdje je E jedinična matrica formata kao i matrica A i $A^n = \underbrace{A\cdot A\cdots A}_{\text{n puta}}$ za svako n. Vrijednost matričnog polinoma f(A) je matrica istog formata kao i matrica A.

Primjer 13. Naći vrijednost matričnog polinoma f(A), ako je $f(x)=-2x^2+5x+9$ i $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$. Kako je $A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}$, to je $f(A)=-2\cdot A^2+5\cdot A+9\cdot E=$
$-2\cdot\begin{pmatrix}7 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}+9\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 6\\ 9 & -3\end{pmatrix}$.

Uvedimo pojam transponovane matrice.

Definicija 10. Transponovanom matricom matrice $A=(a_{ij})$ nazivamo matricu $A^T=(a_{ij}^T)$ takvu da je $a_{ij}^T = a_{ji}$ za svako i,j.

Saglasno prethodnoj definiciji imamo: za matricu $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

transponovana matrica je $A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Zapazimo, ako je matrica A formata $m\times n$, tada je transponovana matrica A^T formata $n\times m$. Uočimo i to da je $\left(A^T\right)^T=A$, $(A+B)^T=A^T+B^T$.

Primjer 14. Za matricu $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ imamo da je $A^T=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 7 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Elementarnim transformacijama matrice nazivamo sljedeće operacije:

- Zamjena mjesta dva retka (stupca),
- Množenje retka (stupca) brojem različitim od nule,
- Dodavanje elementima jednog retka (stupca) odgovarajućih elemenata drugog retka (stupca).

Definicija 11. Matricu B, koja se dobija iz matrice A pomoću elementarnih transformacija, nazivamo ekvivalentnom matrici A (oznaka A~B).

Koristeći elementarne transformacije matrice matrica A se može svesti na tzv. trougaoni oblik, tj. na matricu B u kojoj su svi elementi ispod ili iznad dijagonale jednaki nuli. Naravno, ovdje se ne radi o jednakosti matrica A i B već o njihovoj ekvivalenciji.

Primjer 15. Svesti na trougaoni oblik matricu $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ pomoću elementarnih transformacija.

Rješenje. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ II-3\cdot I \\ III+5\cdot I \end{matrix} \sim A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ 2\cdot III+3\cdot II \end{matrix}$

$\sim A_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ 2\cdot III+3\cdot II \end{matrix}$. Matrica A_2 je trougaonog oblika i $A\sim A_2$.

Primjer 16. Svesti na trougaoni oblik matricu $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1 & -3\\ 1 & 2 & 4 & 7\\ 5 & 0 & 10 & 5\end{pmatrix}$ pomoću elementarnih transformacija.

Rješenje. $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1 & -3\\ 1 & 2 & 4 & 7\\ 5 & 0 & 10 & 5\end{pmatrix}_{I\leftrightarrow II} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 7\\ 0 & -1 & -1 & -3\\ 5 & 0 & 10 & 5\end{pmatrix}_{III-5\cdot I} \sim$

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 7\\ 0 & -1 & -1 & -3\\ 0 & -10 & -10 & -30\end{pmatrix}_{III-10\cdot II} \sim B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 7\\ 0 & -1 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Matrica B je trougaonog oblika i $A\sim B$.

Zadaci za vježbu

1. Naći matricu:

a) $2\cdot A+3\cdot B$, ako je $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$,

b) $4\cdot A-5\cdot B$, ako je $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 4 & 1\\ -2 & 1 & 5\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ -2 & 9 & 0\\ 3 & 4 & -1\end{pmatrix}$.

Rješenje. a) $\begin{pmatrix}-4 & 13 & 6\\ 6 & 5 & 1\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}-7 & -9 & -10\\ 22 & -29 & 4\\ -23 & -16 & 25\end{pmatrix}$.

2. Naći proizvod matrica $A\cdot B$ i $B\cdot A$ (ako postoji):

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -4\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 6 & 1\end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ -2 & 4 & -3\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 5 & 2 & 6\\ 0 & -3 & 3\end{pmatrix}$.

Rješenje. a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}21 & 1\\ -18 & -8\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 17\\ 8 & 14\end{pmatrix}$. b) $A\cdot B$ ne postoji, $B\cdot A=\begin{pmatrix}10 & 14\\ 4 & 4\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

c) $A\cdot B=\begin{pmatrix}16 & -2 & 24\\ 18 & 21 & 15\end{pmatrix}$, $B\cdot A$ ne postoji.

1.2. DETERMINANTE

a) Determinante prvog, drugog i trećeg reda

Uvedimo pojam determinante prvog, drugog i trećeg reda.

Definicija 1. Neka je $A = (a_{11})$ matrica 1. reda. Determinanta matrice A, oznaka det A, je broj a_{11}.

Definicija 2. Neka je $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ matrica 2. reda. Determinanta matrice A, oznaka detA ili $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, je broj $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Primjer 1. Ako je $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, tada je $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 17$.

Primjer 2. Ako je $A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$, tada je $\det A = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Neka je $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ matrica 3. reda. Svakom elementu a_{ij} matrice A pridružićemo po jedan broj na sljedeći način. Označimo sa B_{ij} matricu 2. reda koja nastaje iz matrice A tako što se u ovoj isključi i -ti redak i j -ti stubac. Elementu a_{ij} matrice A pridružimo $\det B_{ij}$. Determinantu $\det B_{ij}$ nazivamo minorom elementa a_{ij} i označavamo sa M_{ij}. Kako matrica A ima 9 elemenata, to postoji 9 odgovarajućih minora. Navedimo ih.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\ M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},\ M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},\ M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},\ M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix},\ M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Definicija 3. Algebarski kofaktor (komplement) elementa a_{ij} matrice A je broj $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, gdje je M_{ij} minor elementa a_{ij} za svako i,j.

Zapazimo da se algebarski kofaktor A_{ij} i minor M_{ij} mogu razlikovati samo u predznaku.

Definicija 4. Neka je A matrica 3. reda. Determinanta matrice A, oznaka detA ili $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, je broj $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$, gdje su A_{11}, A_{12}, A_{13}, redom, algebarski kofaktori elemenata a_{11}, a_{12}, a_{13}.

Saglasno prethodnoj definiciji imamo da je

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}3a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \qquad (1)$$

Transformišući izraz na desnoj strani formule (1) može se dokazati tvrđenje:

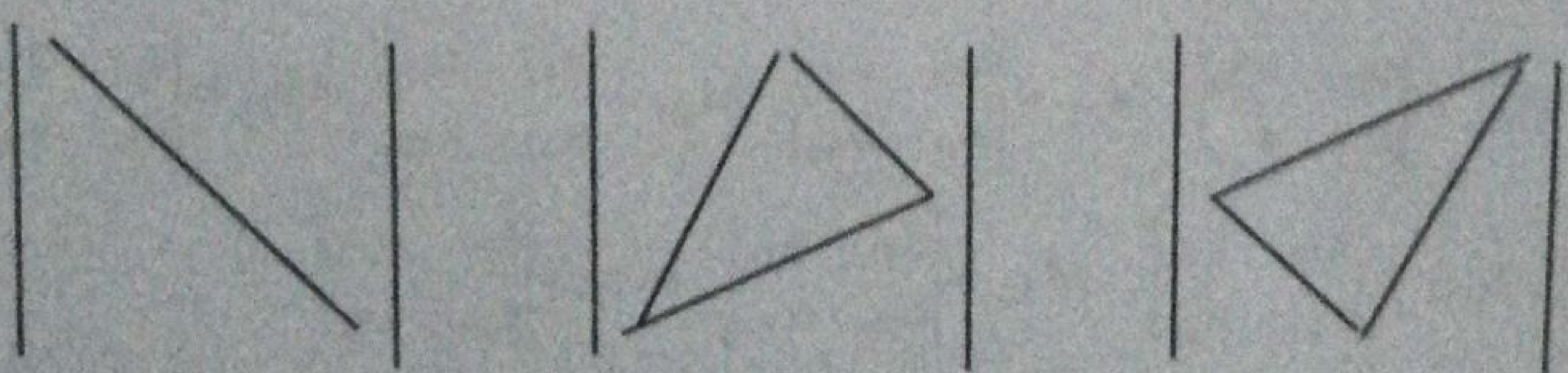
Teorema 1 (Laplas). Determinanta trećeg reda je jednaka sumi proizvoda elemenata jednog retka (stupca) i njihovih algebarskih kofaktora, tj.

$$\det A = a_{i1}A_{i2} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} \quad \text{za } i,j=1,2,3.$$

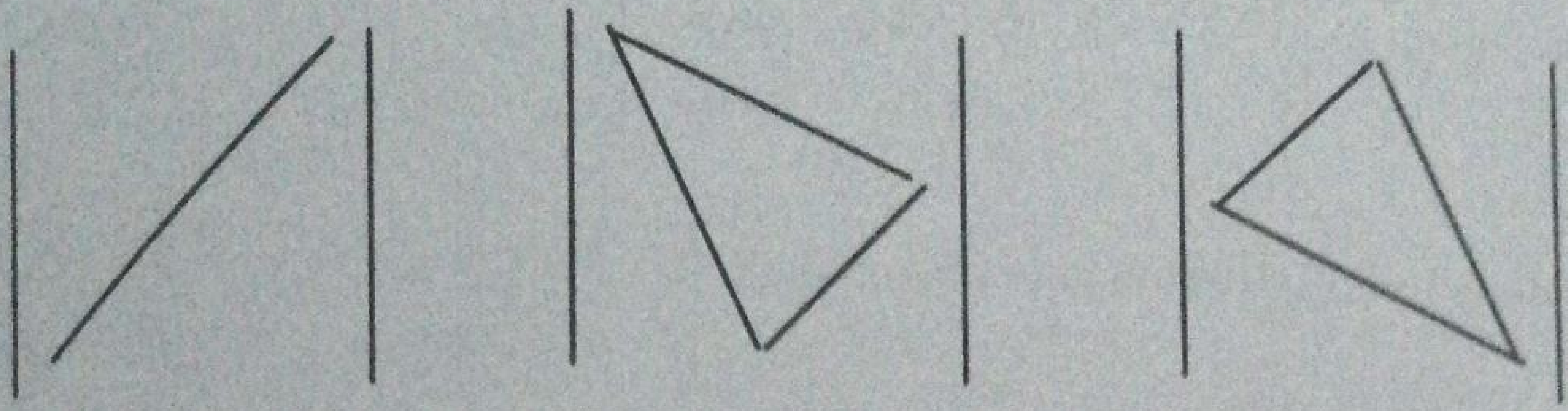
Da bi se lakše zapamtili proizvodi i njhovi predznaci u desnoj strani formule (1) koristi se sljedeće pravilo (Sarusovo pravilo ili "pravilo trouglova"):

- Jedan od tri člana determinante sa predznakom + je proizvod elemenata na glavnoj dijagonali a druga dva člana su proizvodi elemenata koji se nalaze paralelno sa glavnom dijagonalom i elementa u suprotnom uglu.
- Jedan od tri člana determinante sa predznakom – je proizvod elemenata na drugoj (bočnoj) dijagonali a druga dva člana su proizvodi elemenata koji se nalaze paralelno sa drugom dijagonalom i elementa u suprotnom uglu.

Ova pravila su shematski predstavljena na slikama 1, 2 i 3.



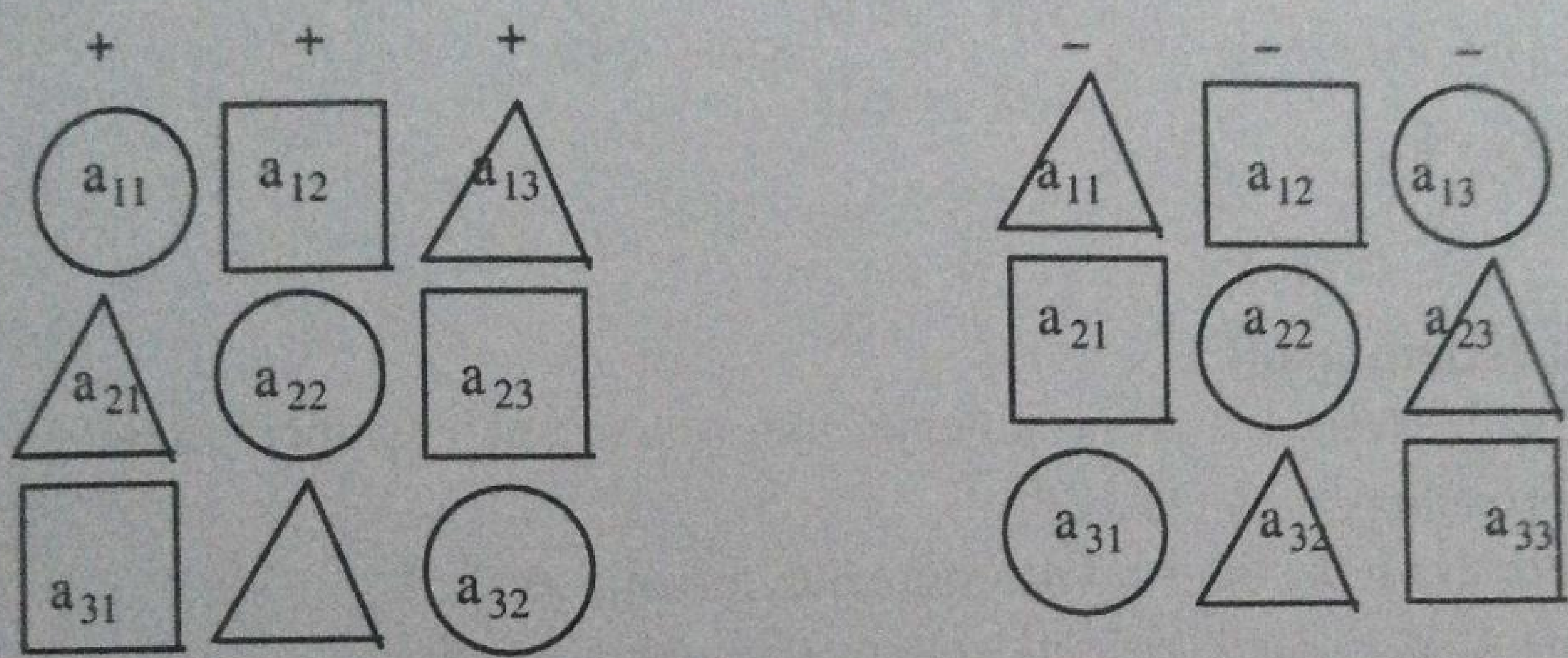
sa znakom "+"



sa znakom "–"

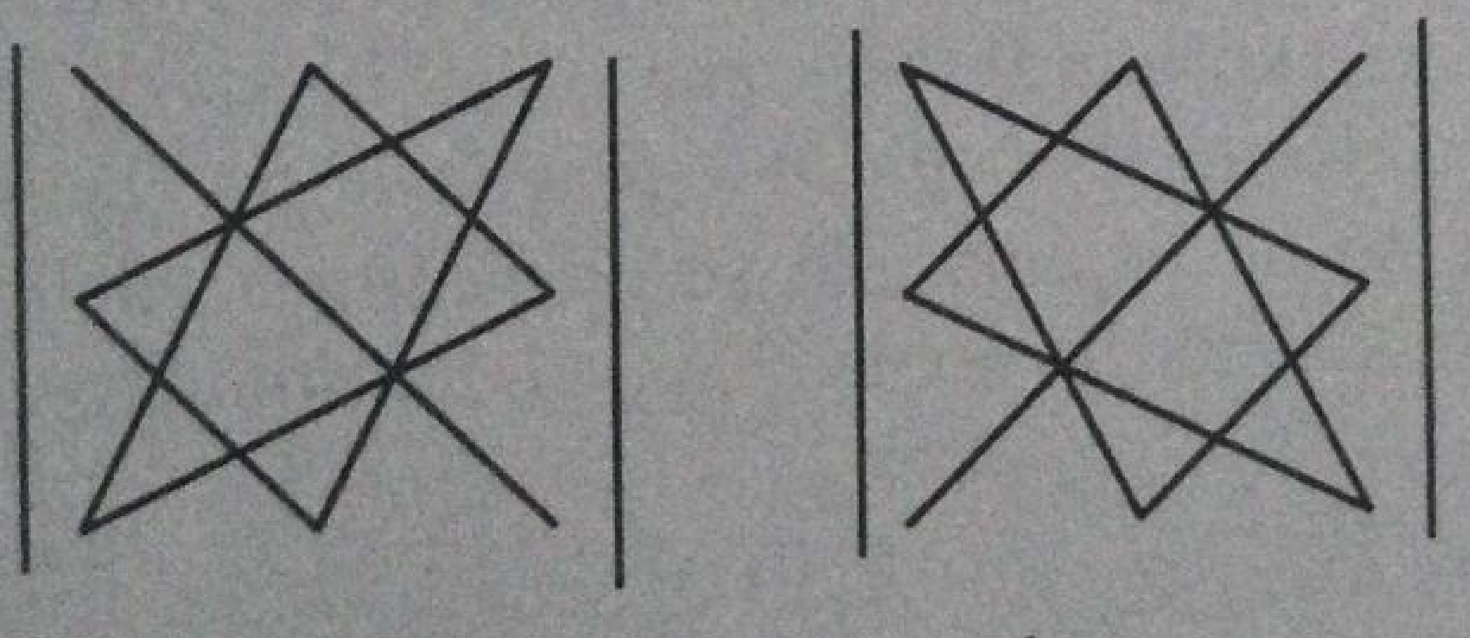
sl 1

ili



sl 2

ili objedinjeno:



sa znakom + sa znakom –

sl 3

Postoji još jedan način za lakše pamćenje izračunavanja determinante trećeg reda (metoda dopisivanja stupaca). Determinati se dopišu prvi i drugi stubac, zatim se vrše tri množenja: a) sa znakom "+" (glavna dijagonala i paralelno glavnoj dijagonali); b) sa znakom "–" (druga dijagonala i paralelno drugoj dijagonali).

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Primjer 3. Izračunati: a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 5 & 7 & -3 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\alpha & \sin\beta & 1 \\ \sin\alpha & \cos\beta & 1 \end{vmatrix}$.

Rješenje. a) Saglasno definiciji determinante imamo da je $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 5 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}+$

$2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}=3\cdot5-2\cdot10+1\cdot15=10.$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\alpha & \sin\beta & 1 \\ \sin\alpha & \cos\beta & 1 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\beta \\ \sin\alpha & \cos\beta \end{vmatrix}=\cos(\alpha+\beta).$

Svojstva determinanti:

- Vrijednost determinante se ne mijenja, ako se svi redci (stupci) zamijene odgovarajućim stupcima (recima), tj. $\det A = \det A^T$.
- Pri zamjeni dva retka (stupca) determinanta mijenja znak.
- Determinanta sa dva jednaka retka (stupca) je jednaka nuli.
- Zajednički množilac elemenata jednog retka (stupca) u determinanti se može iznijeti ispred determinante.
- Determinanta je jednaka nuli ako su svi elementi jednog retka (stupca) jednaki nuli.
- Vrijednost determinante kod koje su svi elementi iznad, ili ispod, glavne dijagonale jednaki nuli jednaka je proizvodu elemenata na glavnoj dijagonali (trougaona determinanta).
- Vrijednost determinante se ne mijenja ako se elementima jednog retka (stupca) dodaju elementi nekog drugog retka (stupca) pomnoženi jednim istim brojem.

Primjer 4. Izračunati $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix}$.

Rješenje. Označimo sa D datu determinantu.

Prvi način (po definiciji): $D=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=1.$

Drugi način (Sarusovo pravilo). $D=1\cdot3\cdot7+1\cdot3\cdot4+1\cdot6\cdot2\cdot-1\cdot3\cdot4-3\cdot6\cdot1-7\cdot2\cdot1=1.$

Treći način (dopisivanje stubaca):

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{matrix}\Bigg|=1\cdot3\cdot7+1\cdot3\cdot4+1\cdot2\cdot6\cdot-1\cdot3\cdot4-1\cdot3\cdot6-1\cdot2\cdot7=21+12+12-12-18-14=1.$$

četvrti način (svođenje na trougaonu determinantu): Oduzmimo prvi stubac od drugog i trećeg stupca, dobijamo $D=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 3\end{vmatrix}$. Sada oduzmimo drugi stubac od trećeg stupca, imamo da je

$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & 2 & 1\end{vmatrix}$. Dobili smo trougaonu determinantu. Njena vrijednost je jednaka proizvodu elemenata na glavnoj dijagonali, a to je 1.

Zadaci za vježbu

9. Izračunati: a) $\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ -1 & 2 & 0\\ -3 & 4 & 2\end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix}-1 & 4 & 7\\ 3 & 8 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 8 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix}6 & -10 & 3\\ 4 & 2 & 1\\ 2 & -12 & 2\end{vmatrix}$.

Rješenje. a) 18, b) −142, c) 27, d) 0.

10. Izračunati: a) $\begin{vmatrix}1 & a & b+c\\ 1 & b & c+a\\ 1 & c & a+b\end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix}\sin^2\alpha & \cos^2\alpha & 1\\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & 1\\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & 1\end{vmatrix}$.

Rješenje. a) 0, b) 0.

b) Determinanta proizvoljnog reda

Neka je $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$. Minorom elementa a_{ij} matrice A nazovimo determinantu matrice koja nastaje iz matrice A kada se u ovoj isključi i -ti redak i j -ti stupac. Neka je $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ -algebarski kofaktor (komplement) elementa a_{ij}.

Definicija 5. Determinanta matrice A , oznaka detA ili $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$, je broj $a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\dots+a_{1n}A_{1n}$.

Može se dokazati da je

Teorema 2(Laplasova teorema).
$\det A = a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} + \ldots + a_{in}\cdot A_{in} = a_{1j}\cdot A_{1j} + a_{2j}\cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj}\cdot A_{nj}$, za svako i,j.

Za proizvoljnu determinantu važe ranija navedena svojstva determinanti.

Primjer 5. Izračunati a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -2 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Rješenje. a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -2 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2\cdot \mathrm{I} + \mathrm{II} \\ \\ 2\cdot \mathrm{I} + \mathrm{IV} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 18 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 54.$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2\cdot \mathrm{I} + \mathrm{II} \\ -3\cdot \mathrm{I} + \mathrm{III} \\ -4\cdot \mathrm{I} + \mathrm{IV} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & -4 & -8 & -10 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \end{vmatrix} = 10\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$

$10\cdot \begin{vmatrix} -3 & -4 & -5 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10\cdot \begin{vmatrix} -3 & -4 & -5 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3\cdot \mathrm{III} + \mathrm{I} \\ -2\cdot \mathrm{III} + \mathrm{II} \\ \\ \end{matrix} = 10\cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10\cdot(-1)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -20.$

Primjer 6. Izračunati $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$.

Rješenje. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2\cdot \mathrm{I} + \mathrm{II} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} =$

$-2(-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = -2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = -2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 12 \end{vmatrix} = -2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = -4.$