b) Metode rješavanja sistema linearnih jednačina

Kada se ustanovi egzistencija rješenja sistema jednačina (1), tada se pristupa nalaženju njegovih rješenja. Postoje brojne metode za rješavanje sistema. U srednjoj školi ste upoznali metode zamjene, suprotnih koeficijenata i sl. Ovdje ćemo razmotriti tri metode: Matričnu metodu, Kramerovo pravilo i Gausov metod eliminacije. Prve dvije metode se koriste u slučaju da je sistem saglasan i određen, a treća u sluačju kada je sistem saglasan.

Matrična metoda

Neka je zadat sistem od n jednačina sa n nepoznatih:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \tag{6}$$

koji se može zapisati u matričnom obliku

$$AX=B, \tag{7}$$

gdje je $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ -matica sistema, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ -stubac nepoznatih i $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$ - stubac slobodnih članova.

Pretpostavimo da je D=detA≠0. Tada je, saglasno Kroneker-Kapelijevoj teoremi, r(A)=r(A,B)=n, tj. sistem (8) je saglasan i određen. Osim toga, postoji i inverzna matrica A^{-1}. Poslije množenja matrične jednačine (8), sa lijeve strane, matricom A^{-1}, dobijamo $A^{-1}(AX) = A^{-1} \cdot B$, odnosno $(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$, tj. $X = A^{-1} \cdot B$, jer je $A^{-1} \cdot A = E$, gdje je E jedinična matrica. Dakle važi tvrđenje

> **Teorema 2.** Ako je detA≠0, tada je rješenje sistema jednačina (7) dato formulom
> $$X = A^{-1} \cdot B.$$

Navodimo algoritam za rješavanje sistema linearnih algebarskih jednačina (8) matričnom metodom.

1. Napisati matricu sistema A.
2. Naći detA.
3. Ako je detA≠0 tada naći matricu A^{-1} i preći na 4. -ti korak. U suprotnom konstatovati da se dati sistem ne može riješiti matričnom metodom.
4. Izvršiti množenje matrica A^{-1} i B. Rezultat množenja označiti sa X.
5. Stubac X je rješenje sistema (7).

Primjer 11. Matričnom metodom riješiti sistem jednačina:

a) $\begin{cases} x_1 - x_2 = -4 \\ 2x_1 + x_2 = -5 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 8 \\ 7x_1 + 8x_2 = 2 \end{cases}$, c) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -2 \\ -5x_1 + 7x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -2 \\ 8x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 6x_4 = -5 \end{cases}$.

Rješenje. a) Matrica datog sistema je $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, stubac slobodnih članova je $B = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Kako je $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, to je $X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dakle, rješenje je $x_1 = -3$ i $x_2 = 1$.

b) Ovdje je $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$. Kako je $A^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$, to je

$$X = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) $(-2,0,1,-1)$.

Kramerovo pravilo

Ako je sistem linearnih jednačina (8) saglasan i određen (uslov za ovo je $\det A \neq 0$), tada se njegovo rješenje može izraziti pomoću determinanti na sljedeći način.

Teorema 3 (Kramerovo pravilo). Ako je $D = \det A \neq 0$, tada je rješenje sistema jednačina (7) dato formulama

$$x_i = \frac{D_i}{D} \quad (i=1,2,\dots,n)$$

gdje je D_i determinanta koja nastaje iz determinante D kada se u ovoj i –ti stubac zamijeni stubcem slobodnih članova sistema (8).

Navodimo algoritam nalaženja rješenja sistema linearnih algebarskih jednačina (7) pomoću Kramerovog pravila:

1. Napisati matricu sistema A.
2. Naći $D = \det A$.
3. Ako je $D \neq 0$ tada preći na 4. -ti korak. U suprotnom konstatovati da se dati sistem ne može riješiti Kramerovim pravilom.
4. Izračunati matrice D_i za $i=1,2,\dots,n$.
5. Vrijednosti $x_i = \frac{D_i}{D}$ $(i=1,2,\dots,n)$ su rješenja sistema (7).

Primjer 12. Riješiti sisteme jednačina:

a) $\begin{cases} x_1+2x_2=4 \\ 4x_1-5x_2=-23 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=2 \\ 2x_1+6x_2+4x_3=-6 \\ 3x_1+10x_2+8x_3=-8 \end{cases}$, c) $\begin{cases} 3x_1+8x_2+3x_3-x_4=4 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=-4 \\ x_1-3x_2-2x_3-2x_4=3 \\ 5x_1-8x_2+4x_3+2x_4=-8 \end{cases}$.

Rješenje. a) Nađimo deteminantu sistema. $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}=-13$. Kako je $D\neq 0$, to se dati sistem može riješiti Kramerovim pravilom. Nađimo determinante D_i za i=1,2. Imamo $D_1=\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -23 & -5 \end{vmatrix}=26$ i $D_2=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -23 \end{vmatrix}=-39$. Slijedi, $x_1=\frac{D_1}{D}=-2$ i $x_2=\frac{D_2}{D}=3$.

b) Determinanta sistema je $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 8 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=6$. Dakle, dati sistem se može riješiti Kramerovim pravilom. Nađimo determinante D_i za i=1,2,3:

$$D_1=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -6 & 6 & 4 \\ -8 & 10 & 8 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 12 & 13 \\ 0 & 18 & 20 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 12 & 13 \\ 18 & 20 \end{vmatrix}=12,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -8 & 8 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -2 \\ 0 & -14 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -10 & -2 \\ -14 & -1 \end{vmatrix}=-18,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & -6 \\ 3 & 10 & -8 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -10 \\ 0 & 4 & -14 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -10 \\ 4 & -14 \end{vmatrix}=12.$$

Slijedi, $x_1=\frac{D_1}{D}=2$, $x_2=\frac{D_2}{D}=-3$, $x_3=\frac{D_3}{D}=2$.

c) $D=\begin{vmatrix} 3 & 8 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & -2 \\ 5 & -8 & 4 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 17 & 9 & 5 \\ 0 & 9 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 7 & 14 & 12 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 17 & 9 & 5 \\ 9 & 8 & 5 \\ 7 & 14 & 12 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 5 \\ 7 & 14 & 12 \end{vmatrix}=8\cdot\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 14 & 12 \end{vmatrix}-$

$-\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 12 \end{vmatrix}=135$. Nađimo, na primjer, D_4: $D_4=\begin{vmatrix} 3 & 8 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & -4 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \\ 5 & -8 & 4 & -8 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 17 & 9 & -5 \\ 2 & 9 & 8 & -10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 14 & -23 \end{vmatrix}=$

$$\begin{vmatrix}17 & 9 & -5\\ 9 & 8 & -10\\ 7 & 14 & -23\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}17 & 9 & -5\\ -25 & -10 & 0\\ 7 & 14 & -23\end{vmatrix}=-5\cdot\begin{vmatrix}-25 & -10\\ 7 & 14\end{vmatrix}-23\cdot\begin{vmatrix}17 & 9\\ -25 & -10\end{vmatrix}=135.$$ Preostale determinante se slično izračunavaju. Dobija se $D_1=270$, $D_2=135$, $D_3=-405$. Slijedi, rješenje je $(2,1,-3,1)$.

Gausova metoda eliminacije

Neka je zadat sistem jednačina

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}. \tag{8}$$

U osnovi Gausove metode je svođenje sistema (8) na njemu ekvivalentan sistem koji ima "trougaoni" ili "trapezni" oblik. Pretpostavimo da je $a_{11}\neq 0$. Podijelimo prvu jednačinu sa a_{11}, zatim je pomnožimo sa $-a_{21}$ i saberimo sa drugom jednačinom. Ako je $a_{11}=0$ tada za prvu jednačinu sistema uzeti neku drugu jednačinu toga sistema u kojoj je koeficijenat uz x_1 različit od nule. Sada pomnožimo prvu jednačinu sa $-a_{31}$ i saberimo je sa trećom jednačinom. Nastavimo ovaj postupak sve dok na kraju prvu jednačinu ne pomnožimo sa $-a_{m1}$ i saberemo je sa zadnjom jednačinom u sistemu (8). Na ovaj način dobijamo sistem jednačina

$$\begin{cases} x_1+c_{12}x_2+\ldots+c_{1n}x_n=d_1\\ \quad a_{22}^{(1)}x_2+\ldots+a_{2n}^{(2)}x_n=b_2^{(1)}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \quad a_{m2}^{(1)}x_2+\ldots+a_{mn}^{(2)}x_n=b_m^{(1)}\end{cases} \tag{9}$$

koji je ekvivalentan sa sistemom jednačina (8). Zapazimo da su u sistemu (9), počev od druge jednačine, koeficijenti uz x_1 jednaki nuli. Sada pretpostavimo da je $a_{22}^{(1)}\neq 0$. Ako je $a_{22}^{(1)}=0$ tada drugu jednačinu zamijenimo sa nekom od jednačina koje se nalaze ispod nje a u kojoj je koeficijenat uz x_2 različiti od nule. Isto ono što smo uradili sa sistemom (8) uradimo i sa dijelom sistema (9) kojeg grade druga, treća,..., i zadnja jednačina. To znači da drugu jednačinu treba podijeliti sa $a_{22}^{(1)}$, zatim je pomnožimo sa $-a_{32}^{(1)}$ i sabrati sa trećom jednačinom sistema (9),.... Rezultat ovih radnji će dovesti do sistema u kojem su svi koeficijenti uz nepoznatu x_2, počev od treće jednačine pa na dalje, jednaki nuli. Ako se ovaj postupak nastavi sa trećom, červrtom,... jednačinom na kraju se dobija sistem jednačina koji ima "trougaoni" ili "trapezni" oblik:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad x_k + c_{k,k+1}x_{2k+1} + \ldots + c_{kn}x_n = d_k \\ \qquad\qquad 0 \cdot x_n = d_{k+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad 0 \cdot x_n = d_m \end{cases} . \tag{10}$$

Lako se dokazuje da je: (8)⇔(9)⇔.... ⇔ (10). Kod sistema (10) moguća su tri slučaja:

1) Ako je k=m=n, tada sistem (10) ima "trougaoni" oblik

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_n = d_n \end{cases} . \tag{11}$$

i jedinstveno rješenje. Sistem (11) se lako rješava. U zadnjoj jednačini imamo izračunato x_n, iz predzadnje jednačine se izračunava x_{n-1} itd, iz prve jednačine sistema se izračunava x_1.

2) Ako je k<m i $d_{k+1} = d_{k+2} = \ldots = d_m$, tada je sistem (10) saglasan i neodređen. Sistem ima "trapezni" oblik:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k + c_{k,k+1}x_{k+1} + \ldots + c_{kn}x_n = d_k \end{cases} . \tag{12}$$

U njemu ima n–k promjenljivih koje mogu imati proizvoljne vrijednosti. Kada se za njih uzmu proizvoljne vrijednosti iz preostalog sistema se na jednoznačan način izračinavaju vrijednosti preostalih k promjenljivih.

3) Ako je k<m i ($d_{k+1} \neq 0$ ili $d_{k+2} \neq 0$ ili ....ili $d_m \neq 0$) tada je sistem (10) nesaglasan.

Gausova metoda eliminacije može se, slikovito, prikazati pomoću matrica. Polazimo od proširene matrice sistema i nizom elementarnih transformacija je svedemo na trougaoni oblik (oblik u kojem su nule ispod ili iznad dijagonale).

$$
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{2n} & b_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{kn} & b_k \\
a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & a_{k+3,3} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{k+1,n} & b_{k+1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & b_m
\end{array}\right) \sim
$$

$$
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & c_{12} & c_{13} & \dots & \dots & \dots & \dots & c_{1n} & d_1 \\
0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(2)} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & a_{k2}^{(1)} & a_{k3}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{kn}^{(1)} & b_k^{(1)} \\
0 & a_{k+1,2}^{(1)} & a_{k+1,3}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{k+1,n}^{(1)} & b_{k+1}^{(1)} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & a_{m2}^{(1)} & a_{m3}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{mn}^{(1)} & b_m^{(1)}
\end{array}\right) \sim \dots
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & c_{12} & c_{13} & \dots & \dots & \dots & \dots & c_{1n} & d_1 \\
0 & 1 & c_{23} & \dots & \dots & \dots & \dots & c_{2n} & d_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & c_{k,k+1} & \dots & c_{kn} & d_k \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{k+1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & d_m
\end{array}\right).
$$

Iz zadnje matrice, saglasno Kroneker-Kapelijevoj teoremi, imamo da je dati sistem saglasan ako je $d_k = d_{k+1} = \dots = d_m = 0$ i nesaglasan u svakom drugom slučaju. Osim toga iz nje se lako "čita" i sistem jednačina na koji se sveo polazni sistem jednačina. Radi se o sistemu (10).

Primjer 13. Gausovom metodom riješiti sisteme jednačina:

a) $\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 5x_1 - 8x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -8 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -2 \\ -5x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 12x_4 = -4 \\ 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 12x_4 = -1 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}$.

Rješenje. a) (2,1,-3,1). Uputstvo. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 8 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & -2 & -2 & 3 \\ 5 & -8 & 4 & 2 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & -4 \\ 3 & 8 & 3 & -1 & 4 \\ 5 & -8 & 4 & 2 & -8 \end{array}\right) \sim$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 9 & 8 & 5 & -10 \\ 0 & 17 & 9 & 5 & -5 \\ 0 & 7 & 14 & 12 & -23 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 9 & 8 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 55 & 40 & -125 \\ 0 & 0 & -70 & -73 & -137 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 17\cdot II - 9\cdot III \\ 7\cdot II - 9\cdot III \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 9 & 8 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 55 & 40 & -125 \\ 0 & 0 & 0 & -243 & -243 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ 70\cdot III + 11\cdot IV \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 9 & 8 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 55 & 40 & -125 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$ Dobija se "trougaoni"

sistem jednačina $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 9x_2 + 8x_3 + 5x_4 = -10 \\ 55x_3 + 40x_4 = -125 \\ x_4 = 1 \end{cases}$.

b) $(4\alpha-4\beta+12,\ 3\alpha-4\beta+7, \alpha, \beta)$, gdje $\alpha,\beta \in R$. Uputstvo. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -4 & -2 \\ -5 & 8 & -4 & 12 & -4 \\ 4 & -7 & 5 & -12 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 4 & -3 \end{array}\right) \sim$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & 6 & -8 & -14 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & 6 & -8 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$ Dati sistem je ekvivalentan sistemu

jednačina: $x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -2$, $x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7$ (dvije jednačine sa 4 nepoznate, dvije nepoznate mogu uzeti proizvoljne vrijednosti, na primjer: $x_3 = \alpha$ i $x_4 = \beta$, gdje su $\alpha,\beta \in R$.

Primjer 14. Gausovom metodom riješiti sisteme jednačina:

a) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_1 \quad - x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$, c) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \quad = -3 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \\ 8x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 7x_1 \quad - x_4 = 3 \end{cases}$.

Rješenje.

a) $\left(\frac{5\alpha-1}{2}, \frac{1-3\alpha}{2}, \alpha\right)$, $\alpha\in R$.

Uputstvo. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & -6 & -9 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

b) $\left(\frac{-5\alpha+6}{4}, 4\alpha+1, \frac{11\alpha-2}{4}, \alpha\right)$, $\alpha\in R$.

Uputstvo. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 6 & 8 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 11 & -2 \end{array}\right)$.

c) Nema rješenja, jer je r(A)=3, r(A,B)=4.

Uputstvo. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 8 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 6 & -2 & 18 \\ 0 & 7 & 7 & -1 & 25 \\ 0 & 7 & 7 & -1 & 24 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 6 & -2 & 18 \\ 0 & 7 & 7 & -1 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$. Lako se zaključuje da je r(A)=3 i r(A,B)=4.

Primjer 15. U zavisnosti od vrijednosti parametra λ riješiti sistem jednačina:

a) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6 \\ 2x_1+5x_2-3x_3=\lambda \end{cases}$, b) $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=3 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=3 \end{cases}$, c) $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3+x_4=4 \\ x_1+\lambda x_2+x_3+x_4=4 \\ x_1+x_2+\lambda x_3+x_4=4 \\ x_1+x_2+x_3+\lambda x_4=4 \end{cases}$.

Rješenje. a) Za svako $\lambda\in R$ sistem je saglasan i neodređen: $(30-2\lambda-21\alpha, 9\alpha+\lambda-12, \alpha)$, $\alpha\in R$.
b) Za $\lambda=-2$ sistem je nesaglasan. Za $\lambda=1$ sistem je saglasan i neodređen: $(3-\alpha-\beta, \alpha, \beta)$, $\alpha,\beta\in R$.
Za $\lambda\neq-2$ i $\lambda\neq1$ sistem je saglasan i određen: $\left(\frac{3}{2+\lambda}, \frac{3}{2+\lambda}, \frac{3}{2+\lambda}\right)$.

c) Za $\lambda=-3$ sistem je nesaglasan. Za $\lambda=1$ sistem je saglasan i neodređen: $(4-\alpha-\beta-\gamma, \alpha, \beta, \gamma)$, $\alpha,\beta,\gamma\in R$. Za $\lambda\neq-3$ i $\lambda\neq1$ sistem je saglasan i određen: $\left(\frac{4}{3+\lambda}, \frac{4}{3+\lambda}, \frac{4}{3+\lambda}, \frac{4}{3+\lambda}\right)$.