UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA

Tatjana Grbić
Silvia Likavec
Tibor Lukić
Jovanka Pantović
Nataša Sladoje
Ljiljana Teofanov

Zbirka rešenih zadataka iz Matematike I

Novi Sad, 2009. god.

Naslov: Zbirka rešenih zadataka iz Matematike I

Autori: dr Tatjana Grbić, docent FTN u Novom Sadu
dr Silvia Likavec, docent Univerziteta u Torinu (Universitá di Torino)
mr Tibor Lukić, asistent FTN u Novom Sadu
dr Jovanka Pantović, vanredni profesor FTN u Novom Sadu
dr Nataša Sladoje, docent FTN u Novom Sadu
dr Ljiljana Teofanov, docent FTN u Novom Sadu

Recenzenti: dr Jovanka Nikić,
redovni profesor FTN u Novom Sadu

dr Silvia Gilezan,
redovni profesor FTN u Novom Sadu

dr Mirjana Borisavljević,
redovni profesor Saobraćajnog fakulteta Univerziteta u Beogradu

Tiraž: 300

Sadržaj

Predgovor

Treće izdanje *Zbirke rešenih zadataka iz Matematike I* je rasprodato u veoma kratkom roku, a interesovanje za *Zbirku* i dalje postoji, pre svega među studentima prve godine različitih odseka Fakulteta tehničkih nauka Univerziteta u Novom Sadu, ali i među studentima drugih fakulteta koji se u okviru kurseva matematike na svojim studijama susreću sa temama i sadržajima koji su obuhvaćeni *Zbirkom.* Četvrto izdanje *Zbirke* smo pripremili sa željom da njen prepoznatljiv sadržaj bude od pomoći u savladavanju oblasti iz Matematike I i narednim generacijama studenata. Zahvaljujemo se svima koji su nam ukazali na postojeće štamparske greške, koje smo u ovom izdanju otklonili.

Štampanje Četvrtog izdanja *Zbirke rešenih zadataka iz Matematike I* realizovano je uz finansijsku podršku Tempus projekta JEP - 41099 - 2006, "Doctoral School Towards European Knowledge Society – DEUKS'. Veoma nam je drago što smo, zahvaljujući ovoj podršci, u mogućnosti da veći deo tiraža ustupimo Biblioteci Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu i da na taj način ovo izdanje *Zbirke* učinimo pristupačnim veoma velikom broju studenata.

U Novom Sadu, 10. avgust 2009. godine

Autori

1

Slobodni vektori

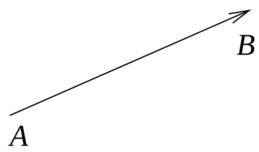
- U skupu E^2 uređenih parova tačaka prostora E definišemo relaciju ρ na sledeći način

  a) Ako je $A = B$ ili $C = D$, tada je $(A, B)\rho(C, D) \Leftrightarrow A = B$ i $C = D$.

  b) Ako je $A \neq B$ i $C \neq D$, tada je $(A, B)\rho(C, D) \Leftrightarrow$ (duž AB je paralelna, podudarna i isto orijentisana kao duž CD).

  Relacija ρ je relacija ekvivalencije. Klase ekvivalencije u odnosu na relaciju ρ zovu se **slobodni vektori**. Skup svih slobodnih vektora označavaćemo sa V.

- Vektor čiji je predstavnik (A, B) označavaćemo sa $\overrightarrow{AB}$, ili kraće sa $\vec{a}$.

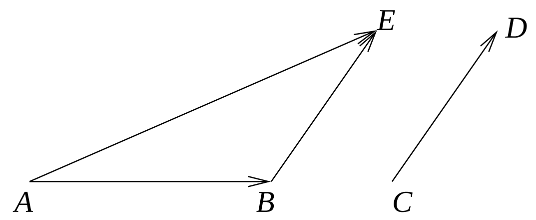


- **Intenzitet vektora** $\overrightarrow{AB}$ je merni broj duži AB i označava se sa $|\overrightarrow{AB}|$.
- **Pravac vektora** $\overrightarrow{AB}$ je pravac određen tačkama A i B.
- **Smer vektora** $\overrightarrow{AB}$, $(A \neq B)$ je od tačke A do tačke B.
- Vektor čiji je intenzitet jednak 1 naziva se **jedinični vektor**.
- Vektori su **jednaki** ako su im jednaki pravac, smer i intenzitet.
- Vektor kod kojeg je $A = B$ zvaćemo **nula vektor** i označavati sa $\vec{0}$ ili 0. Intenzitet nula vektora je 0, a pravac i smer se ne definišu.
- Vektor koji ima isti pravac i intenzitet kao vektor $\overrightarrow{AB}$, a suprotan smer, je vektor $\overrightarrow{BA}$ i naziva se **suprotan vektor** vektora $\overrightarrow{AB}$.

- U skupu V definišemo operaciju **sabiranja vektora** $+$ na sledeći način:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE}$$

gde je $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$.



- Ugao φ između vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ je ugao $\angle AOB$ pri čemu se dogovorno uzima da je $0 \leq \varphi \leq \pi$.

- **Proizvod vektora** $\vec{a} \neq 0$ **i skalara** $\lambda \neq 0,\ \ \lambda \in \mathbf{R}$ je vektor $\lambda \cdot \vec{a}$ koji ima

  a) isti pravac kao i vektor $\vec{a}$,

  b) intenzitet $|\lambda||\vec{a}|$ i

  c) isti smer kao i vektor $\vec{a}$ ako je $\lambda > 0$, a suprotan ako je $\lambda < 0$.

  Ako je $\vec{a} = 0$ ili $\lambda = 0$, tada je $\lambda \cdot \vec{a} = 0$.

- Vektor $\vec{s} = \alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n$, gde su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}$ skalari, se naziva **linearna kombinacija** vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$.

- Dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su **kolinearna** ako i samo ako imaju isti pravac.
  Nula vektor je kolinearan sa svakim vektorom.

- Nula vektor je normalan na svaki vektor.

- Za tri ne nula vektora kažemo da su **koplanarni** ako i samo ako su paralelni sa jednom ravni.

- **Skalarni proizvod vektora** $\vec{a}$ i $\vec{b}$, u oznaci $\vec{a} \cdot \vec{b}$ definiše se

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

  Osobine skalarnog proizvoda:

  a) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$,

  b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$,

  c) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, (**uslov normalnosti, ortogonalnosti**),

  d) $\forall \alpha \in \mathbf{R}\ \ \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\alpha\vec{b})$,

  e) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Na osnovu definicije skalarnog proizvoda imamo da se ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ može računati na sledeći način

$$\angle(\vec{a},\vec{b}) = \arccos\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|},\quad 0 \le \angle(\vec{a},\vec{b}) \le \pi.$$

- Neka je $\vec{a} \neq 0$. Tada je **projekcija vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$** definisana sa:

$$pr_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\ \cos\angle(\vec{a},\vec{b}).$$

- **Vektorski proizvod vektora** $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor, u oznaci $\vec{a}\times\vec{b}$, određen na sledeći način:

  a) $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\ |\vec{b}|\ |\sin\angle(\vec{a},\vec{b})|$,

  b) $(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{a}$ i $(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{b}$,

  c) vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{a}\times\vec{b}$ čine desni sistem vektora.

  Osobine vektorskog proizvoda:

  a) $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$,

  b) $(\forall\alpha\in\mathbf{R})\ \alpha(\vec{a}\times\vec{b}) = (\alpha\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\alpha\vec{b})$,

  c) $\vec{a}\|\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} = 0$ (**uslov paralelnosti**),

  d) $\vec{a}\times\vec{a} = 0$,

  e) Intenzitet vektorskog proizvoda dva nekolinearna vektora jednak je površini paralelograma koji je konstruisan nad tim vektorima.

- **Mešoviti proizvod vektora** $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ je skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}\times\vec{c}$, tj.

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$$

  Osobine mešovitog proizvoda:

  a) Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su koplanarni $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$ (**uslov koplanarnosti**),

  b) Apsolutna vrednost mešovitog proizvoda tri nekoplanarna vektora jednaka je zapremini paralelepipeda koji je konstruisan nad vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ kao ivicama.

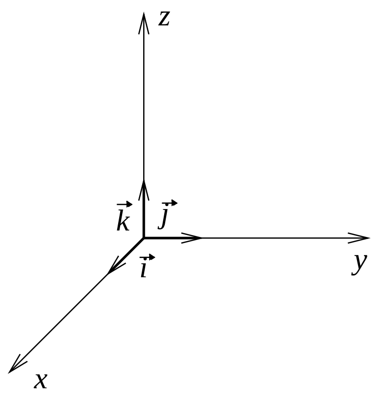
- **Dekartov** (pravougli) koordinatni sistem u prostoru je određen, ako su

  - Date tri prave koje se obično nazivaju x, y i z i svake dve se seku pod pravim uglom u tački $O(0,0,0)$.
  - Na svakoj od datih pravih izabran je jedan smer i nazvan pozitivan.
  - Na pozitivnim smerovima pravih x, y i z izabrane su tačke $E_1(1,0,0)$, $E_2(0,1,0)$ i $E_3(0,0,1)$ redom.

Prava x se naziva x-osa ili **apscisa**. Prava y se naziva y-osa ili **ordinata**. Prava z se naziva z-osa ili **aplikata**. Tačka O se naziva **koordinatni početak**.

Uvedimo oznake $\vec{\imath} = \overrightarrow{OE_1}$, $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OE_2}$ i $\vec{k} = \overrightarrow{OE_3}$.

Vektori $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, sa koordinatnim početkom O, čine **desni sistem vektora**, što znači da rotacija vektora $\vec{\imath}$, ka vektoru $\vec{\jmath}$, oko tačke O, u ravni određenoj vektorima $\vec{\imath}$ i $\vec{\jmath}$, ima najkraći put u smeru suprotnom kretanju kazaljke na satu, gledano sa krajnje tačke vektora $\vec{k}$.



Svakoj tački $M(x, y, z)$ u prostoru odgovara vektor $\overrightarrow{OM}$ koji se zove **vektor položaja** tačke M i on ima oblik $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$. U daljem tekstu vektor položaja tačke M označavaćemo sa $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$.
Vektor $\overrightarrow{AB}$, određen tačkama $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$ ima oblik

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

- Za proizvoljne vektore $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ i $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ i skalar $\lambda \in \mathbf{R}$ važi:

  a) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3$,

  b) $\lambda(a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$,

  c) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$,

  d) $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$,

  e) $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$,

  f) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{\imath} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\vec{\jmath} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k}$,

g) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$.

Zadaci

1. **Naći intenzitet vektora $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$ ako je $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = \sqrt{3}$ i $\angle(\vec{p},\vec{q}) = \frac{\pi}{6}$.**

   Rešenje:

   Intenzitet vektora $\vec{a}$ izračunavamo koristeći osobine skalarnog proizvoda.

   $$|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = (\vec{p}-2\vec{q})\cdot(\vec{p}-2\vec{q}) =$$

   $$= \vec{p}\cdot\vec{p} - 2\vec{p}\cdot\vec{q} - 2\vec{q}\cdot\vec{p} + 4\vec{q}\cdot\vec{q}.$$

   Koristeći poznate osobine skalarnog proizvoda $\vec{p}\cdot\vec{q} = \vec{q}\cdot\vec{p}$, $|\vec{p}|^2 = \vec{p}\cdot\vec{p}$, kao i definiciju skalarnog proizvoda $\vec{p}\cdot\vec{q} = |\vec{p}||\vec{q}|\cos\angle(\vec{p},\vec{q})$ imamo da je

   $$|\vec{a}|^2 = |\vec{p}|^2 - 4\vec{p}\cdot\vec{q} + 4|\vec{q}|^2 = |\vec{p}|^2 - 4|\vec{p}||\vec{q}|\cos\angle(\vec{p},\vec{q}) + 4|\vec{q}|^2 =$$

   $$= 2^2 - 4\cdot 2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + 4(\sqrt{3})^2 = 4,$$

   odakle sledi da je

   $$|\vec{a}| = 2.$$

2. **Neka su $\vec{p} = \alpha\vec{m} + 2\vec{n}$ i $\vec{q} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$ ortogonalni vektori, gde su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ jedinični vektori.**

   a) Ako su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ ortogonalni vektori odrediti α.

   b) Za $\alpha = 1$ naći ugao između vektora $\vec{m}$ i $\vec{n}$.

   Rešenje:

   Kako su $\vec{p}$ i $\vec{q}$ ortogonalni vektori njihov skalarni proizvod je jednak nuli ($\vec{p}\cdot\vec{q} = 0$). Koristeći osobine skalarnog proizvoda, dobijamo da važi:

   $$\vec{p}\cdot\vec{q} = (\alpha\vec{m} + 2\vec{n})(5\vec{m} - 4\vec{n}) = 5\alpha|\vec{m}|^2 + (10-4\alpha)\vec{m}\cdot\vec{n} - 8|\vec{n}|^2 = 0.$$

   Kako je $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, važi

   $$5\alpha + (10-4\alpha)\vec{m}\cdot\vec{n} - 8 = 0.$$

a) Na osnovu uslova zadatka $\vec{m}$ i $\vec{n}$ su ortogonalni vektori, tako da je $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$. Uvrštavanjem u prethodnu jednakost dobijamo da je

$$\alpha = \frac{8}{5}.$$

b) Za $\alpha = 1$ imamo

$$5|\vec{m}|^2 + 6|\vec{m}||\vec{n}| \cos\angle(\vec{m}, \vec{n}) - 8|\vec{n}|^2 = 0,$$

$$5 + 6\cos\angle(\vec{m}, \vec{n}) - 8 = 0,$$

odakle sledi $\cos\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{1}{2}$, pa je traženi ugao

$$\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}.$$

3. **Dati su nekolinearni vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Neka je $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 5\vec{b}$ i $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$. Odrediti parametar α tako da su vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$ kolinearni.**

Rešenje:

Da bi vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$ bili kolinearni, njihov vektorski proizvod treba da bude jednak nuli, tj.

$$(\alpha\vec{a} + 5\vec{b}) \times (3\vec{a} - \vec{b}) = 0.$$

Koristeći osobine vektorskog proizvoda imamo da je

$$3\alpha\vec{a} \times \vec{a} - \alpha\vec{a} \times \vec{b} + 15\vec{b} \times \vec{a} - 5\vec{b} \times \vec{b} = 0,$$

a kako je $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{b} = 0$ i $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ sledi

$$(15 + \alpha)(\vec{b} \times \vec{a}) = 0.$$

Kako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni vektori to znači da $\vec{b} \times \vec{a} \neq 0$, pa sledi da je

$$\alpha = -15.$$

4. **Data su tri uzastopna temena paralelograma $ABCD$: $A(-3, -2, 0)$, $B(3, -3, 1)$ i $C(5, 0, 2)$. Odrediti koordinate četvrtog temena.**

Rešenje:

Neka je $D(x, y, z)$ traženo teme. Koristeći osobine paralelograma, imamo da važi

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.$$

Kako je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$, sledi

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}, \quad \text{tj.}$$

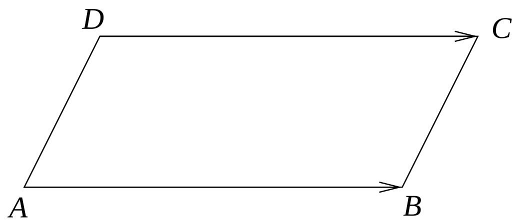
$$(3-(-3),\ -3-(-2),\ 1-0)=(5-x,\ 0-y,\ 2-z)$$
$$(6,\ -1,\ 1)=(5-x,\ -y,\ 2-z).$$

Izjednačavanjem odgovarajućih koordinata dobijamo sistem jednačina

$$5-x=6,\ \ -y=-1,\ \ 2-z=1,$$

čije rešenje je $x=-1,\ y=1,\ z=1$, pa je traženo teme paralelograma

$$D(-1,1,1).$$



5. **Dokazati da je linija koja spaja sredine dve stranice trougla paralelna trećoj stranici i jednaka njenoj polovini (takva linija se naziva srednja linija trougla).**

Rešenje:

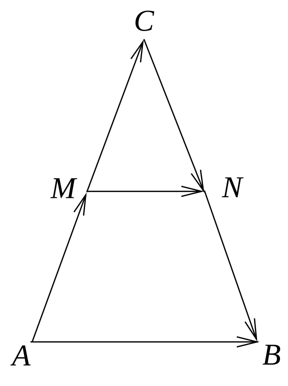
Neka su N i M sredine stranica BC i AC trougla ABC redom. Tada važi

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\ \text{ i }\ \overrightarrow{CN}=\overrightarrow{NB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB},$$

odakle je

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

što je i trebalo dokazati.



6. **Dati su vektori** $\vec{a} = (4, -3, 1)$, $\vec{b} = (5, -2, -3)$, $\vec{c} = (1, 3, -1)$ **i** $\vec{d} = (-2, -4, 3)$. **Odrediti skalarni proizvod vektora**

   a) $\vec{a}$ **i** $\vec{b}$.

   b) $\vec{c}$ **i** $\vec{d}$.

   c) $\vec{a} + \vec{b}$ **i** $\vec{a} - \vec{b}$.

   d) $2\vec{c} + \vec{d}$ **i** $\vec{c} - 3\vec{d}$.

   Rešenje:

   a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 5 + (-3) \cdot (-2) + 1 \cdot (-3) = 23.$

   b) $\vec{c} \cdot \vec{d} = -2 - 12 - 3 = -17.$

   c) $\vec{a} + \vec{b} = (4 + 5, -3 + (-2), 1 + (-3)) = (9, -5, -2)$
   $\vec{a} - \vec{b} = (4 - 5, -3 - (-2), 1 - (-3)) = (-1, -1, 4)$
   $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = -9 + 5 - 8 = -12.$

   d) $2\vec{c} = (2 \cdot 1,\ 2 \cdot 3,\ 2 \cdot (-1)) = (2,\ 6,\ -2)$
   $2\vec{c} + \vec{d} = (2 - 2,\ 6 - 4,\ -2 + 3) = (0, 2, 1)$
   $3\vec{d} = (3 \cdot (-2),\ 3 \cdot (-4),\ 3 \cdot 3) = (-6,\ -12,\ 9)$
   $\vec{c} - 3\vec{d} = (1 + 6,\ 3 + 12,\ -1 - 9) = (7, 15, -10)$
   $(2\vec{c} + \vec{d}) \cdot (\vec{c} - 3\vec{d}) = 0 + 30 - 10 = 20.$

7. **Dati su vektori** $\vec{a} = (4, -3, 1)$ **i** $\vec{b} = (5, -2, -3)$. **Odrediti intenzitet vektora**

   a) $\vec{a}$.

   b) $\vec{b}$.

   c) $\vec{a} + \vec{b}$.

   d) $\vec{a} - \vec{b}$.

   Rešenje:

   a) $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{26}.$

   b) $|\vec{b}| = \sqrt{25 + 4 + 9} = \sqrt{38}.$

   c) $\vec{a} + \vec{b} = (9, -5, -2)$, tako da je $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{81 + 25 + 4} = \sqrt{110}.$

   d) $\vec{a} - \vec{b} = (-1, -1, 4)$, tako da je $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{1 + 1 + 16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$

8. **Odrediti ugao** φ **između vektora**

   a) $\vec{a} = (8, 2, 2)$ **i** $\vec{b} = (4, -4, 0)$.

   b) $\vec{a} = (-2, 2, -1)$ **i** $\vec{b} = (-6, 3, 6)$.

Rešenje:

Iskoristićemo definiciju skalarnog proizvoda da bismo izračunali traženi ugao φ.

a) Kako je $\vec{a}\cdot\vec{b}=(8,2,2)\cdot(4,-4,0)=24$, $|\vec{a}|=\sqrt{64+4+4}=6\sqrt{2}$ i $|\vec{b}|=\sqrt{16+16+0}=4\sqrt{2}$, imamo da je

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{24}{6\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}}=\frac{1}{2}.$$

Na osnovu definicije ugla između dva vektora imamo da $0\leq\varphi\leq\pi$ pa dobijamo da je traženi ugao

$$\varphi=\frac{\pi}{3}.$$

b) Računajući skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, kao i njihove intenzitete ($\vec{a}\cdot\vec{b}=12$, $|\vec{a}|=3$ i $|\vec{b}|=9$) dobijamo da je $\cos\varphi=\frac{12}{3\cdot 9}=\frac{4}{9}$. Odavde sledi da je

$$\varphi=\arccos\frac{4}{9}.$$

9. **Odrediti projekciju vektora $\vec{a}=(2,3,-1)$ na vektor $\vec{b}=(-3,-1,1)$, kao i projekciju vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$.**

Rešenje:

Nađimo prvo skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, kao i njihove intenzitete:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-10,\quad |\vec{a}|=\sqrt{14}\quad\text{i}\quad |\vec{b}|=\sqrt{11}.$$

Odavde je

$$\cos\varphi=-\frac{10}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{11}},$$

gde je φ ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
Dalje,

$$pr_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\varphi=-\frac{10\sqrt{11}}{11}\quad\text{i}\quad pr_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\cos\varphi=-\frac{5\sqrt{14}}{7}.$$

10. **Dati su vektori**

a) $\vec{a}=(4,-3,1)$ **i** $\vec{b}=(5,-2,-3)$.

b) $\vec{a}=(3,-2,1)$ **i** $\vec{b}=(4,-7,-3)$.

Naći vektorski proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Rešenje:

a)

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 4 & -3 & 1\\ 5 & -2 & -3\end{vmatrix}=11\vec{\imath}+17\vec{\jmath}+7\vec{k}=(11,17,7).$$

b)

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 1\\ 4 & -7 & -3\end{vmatrix}=13\vec{\imath}+13\vec{\jmath}-13\vec{k}=(13,13,-13).$$

11. **Odrediti mešoviti proizvod vektora $\vec{a}=(-1,3,2)$, $\vec{b}=(2,-3,4)$ i** $\vec{c}=(-3,12,6)$.

Rešenje:

S obzirom da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ zadati svojim koordinatama u Dekartovom koordinatnom sistemu, njihov mešoviti proizvod određujemo na sledeći način:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & -3 & 4\\ -3 & 12 & 6\end{vmatrix}=24.$$

12. **Pokazati da vektori $\vec{a}=(7,6,-6)$ i $\vec{b}=(6,2,9)$ mogu biti ivice kocke, a zatim odrediti vektor $\vec{c}$ treće ivice kocke.**

Rešenje:

Nađimo skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kao i njihove intenzitete:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\quad |\vec{a}|=11\quad \text{i}\quad |\vec{b}|=11.$$

Kako je $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ i $|\vec{a}|=|\vec{b}|\neq 0$ znači da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ normalni. Pošto je $|\vec{a}|=|\vec{b}|=11$, znači da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ mogu biti ivice kocke. Neka je $\vec{c}=(x,y,z)$ traženi vektor. Da bi $\vec{c}$ bila tražena ivica kocke treba da važi

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=0,\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=0\quad \text{i}\quad |\vec{c}|=11.$$

Dalje,

$$(7,6,-6)\cdot(x,y,z)=0,\quad (6,2,9)\cdot(x,y,z)=0\quad \text{i}\quad \sqrt{x^2+y^2+z^2}=11.$$

Dobijamo sistem jednačina

$$7x+6y-6z=0,\quad 6x+2y+9z=0,\quad x^2+y^2+z^2=121$$

čijim rešavanjem dobijamo dva vektora koji zadovoljavaju navedene uslove

$$\vec{c_1} = (6, -9, -2) \quad \text{i} \quad \vec{c_2} = (-6, 9, 2).$$

13. **Ispitati da li su vektori $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (1, 0, -1)$ i $\vec{c} = (0, 2, 4)$ koplanarni. Ako jesu izraziti vektor $\vec{a}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$.**

Rešenje:

Mešoviti proizvod vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ jednak je nuli ($\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$), tako da su vektori koplanarni. Dalje, treba odrediti skalare α i β tako da je

$$\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c},$$

odnosno

$$(1, 2, 3) = (\alpha, 2\beta, -\alpha + 4\beta).$$

Izjednačavanjem odgovarajućih koordinata dobijamo sistem jednačina

$$\alpha = 1, \quad 2\beta = 2, \quad -\alpha + 4\beta = 3,$$

čije rešenje je $\alpha = 1$ i $\beta = 1$, tako je

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}.$$

14. **Odrediti vektor $\vec{v}$ ako je $\vec{v} \cdot \vec{a} = 1$, $\vec{v} \cdot \vec{b} = 2$ i $\vec{v} \cdot \vec{c} = 3$, gde je $\vec{a} = (2, -4, 3)$, $\vec{b} = (3, -1, 5)$ i $\vec{c} = (1, -2, 4)$.**

Rešenje:

Neka je $\vec{v} = (x, y, z)$. Koristeći navedene uslove imamo:

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = 1 \Leftrightarrow 2x - 4y + 3z = 1,$$

$$\vec{v} \cdot \vec{b} = 2 \Leftrightarrow 3x - y + 5z = 2,$$

$$\vec{v} \cdot \vec{c} = 3 \Leftrightarrow x - 2y + 4z = 3.$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo $x = -1, y = 0, z = 1$, tako da je traženi vektor

$$\vec{v} = (-1, 0, 1).$$

15. **Dati su vektori $\vec{a} = (0, 2p, p)$, $\vec{b} = (2, 2, 1)$ i $\vec{c} = (-1, -2, -1)$.**

   a) **Odrediti vektor $\vec{d}$ tako da je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$ i $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$.**

   b) **Dokazati da su vektori $\vec{a} - \vec{d}$ i $\vec{b} - \vec{c}$ kolinearni.**

   c) **Dokazati da su vektori $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$ i $\vec{d}$ koplanarni.**

   d) **Odrediti realan broj p tako da je $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + p$.**

Rešenje:

Neka je $\vec{d} = (x, y, z)$ traženi vektor.

a) Na osnovu uslova zadatka imamo da je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$ i $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$. Tako je

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2p & p \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

i

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2p & p \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

odnosno,

$$(0, 2p, -4p) = (y - 2z, -x + z, 2x - y) \quad \text{i}$$
$$(0, -p, 2p) = (2z - y, x - 2z, 2y - 2x).$$

Izjednačavanjem odgovarajućih koordinata dobijamo da je

$$x = -3p, \quad y = -2p \ \text{ i } \ z = -p,$$

odakle sledi da je traženi vektor:

$$\vec{d} = (-3p, -2p, -p).$$

b) Kako je $\vec{b} - \vec{c} = (3, 4, 2)$ i $\vec{a} - \vec{d} = (3p, 4p, 2p)$, očigledno je da je $\vec{a} - \vec{d} = p(\vec{b} - \vec{c})$, što znači da su da vektori kolinearni.

c) Nađimo mešoviti proizvod vektora $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$ i $\vec{d}$:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot ((\vec{a} \times \vec{c}) \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} 0 & 2p & -4p \\ 0 & -p & 2p \\ -3p & -2p & -p \end{vmatrix} = 0,$$

što znači da su vektori koplanarni.

d) $\vec{a} - \vec{b} = (-2, 2p - 2, p - 1)$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = -5p$, $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = -5p + 7$. Iz uslova zadatka $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + p$ dobijamo da je

$$p = 7.$$

16. **Dati su vektori $\vec{a} = (1,1,1)$, $\vec{b} = (0,2,0)$, $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 5\vec{b}$ i $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$. Odrediti parametar α tako da vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$ budu normalni.**

    Rešenje:

    Kako je $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 5\vec{b} = (\alpha, \alpha+10, \alpha)$ i $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b} = (3,1,3)$ i kako vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$ treba da budu normalni, njihov skalarni proizvod jednak je nuli tj.,

    $$3\alpha + \alpha + 10 + 3\alpha = 0,$$

    tako da je

    $$\alpha = -\frac{10}{7}.$$

17. **Odrediti površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a} = (2,1,2)$ i $\vec{b} = (3,2,2)$.**

    Rešenje:

    Površina datog paralelograma jednaka je intenzitetu vektorskog proizvoda vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

    $$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-2, 2, 1).$$

    $$P = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3.$$

18. **Izračunati površinu trougla ABC ako je $A(2,-3,4)$, $B(1,2,-1)$ i $C(3,-2,1)$.**

    Rešenje:

    Kako je površina trougla ABC jednaka jednoj polovini površine paralelograma konstruisanog nad vektorima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$, dobijamo

    $$P = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

    S obzirom da je

    $$\overrightarrow{AB} = (-1,5,-5), \quad \overrightarrow{AC} = (1,1,-3) \quad \text{i}$$
    $$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-10, 8, -6),$$

    imamo

    $$P = \frac{1}{2}\sqrt{100 + 64 + 36} = 5\sqrt{2}.$$

19. **Naći zapreminu paralelepipeda konstruisanog nad vektorima** $\vec{a} = (0, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 0, 1)$ **i** $\vec{c} = (1, 1, 0)$.

Rešenje:

Zapremina paralelepipeda konstruisanog nad tri vektora jednaka je apsolutnoj vrednosti mešovitog proizvoda ta tri vektora tj., $V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Znači, $V = 2$.

20. **Izračunati visinu prizme čije su ivice određene vektorima** $\vec{a} = (1, 0, -2)$, $\vec{b} = (0, 1, -2)$ **i** $\vec{c} = (-1, 3, 5)$, **ako je njena osnova paralelogram konstruisan nad vektorima** $\vec{a}$ **i** $\vec{b}$.

Rešenje:

Zapremina V tražene prizme je $V = B \cdot H$, gde je B površina baze, a H visina prizme. Kako je

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = 9, \quad B = |\vec{a} \times \vec{b}| = 3$$

imamo da je

$$H = \frac{9}{3} = 3.$$

Zadaci za samostalni rad

1. U trouglu ABC dati su vektori koji odgovaraju težišnim dužima $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ i $\overrightarrow{CF}$. Naći $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$.

   Rezultat:
   $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$.

2. Dokazati da je četvorougao čije se dijagonale polove paralelogram.

   Rezultat:
   Treba pokazati da je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

3. Dati su vektori $\vec{a} = (3, -2, 1)$ i $\vec{b} = (4, -7, -3)$. Odrediti skalarni proizvod vektora:

   a) $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

   b) $\vec{a} - \vec{b}$ i $\vec{a} - 2\vec{b}$.

   c) $\vec{a} + \vec{b}$ i $3\vec{a} - \vec{b}$.

   Rezultat:

   a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 23$.

   b) $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = 93$.

   c) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b}) = 14$.

4. Izračunati intenzitet vektora

   a) $\vec{a} = (3, -2, 1)$.

   b) $\vec{b} = (4, -7, -3)$.

   Rezultat:

   a) $|\vec{a}| = \sqrt{14}$.

   b) $|\vec{b}| = \sqrt{74}$.

5. Odrediti ugao φ između vektora $\vec{a} = (3, 4, 2)$ i $\vec{b} = (-2, 2, -1)$.

   Rezultat:
   $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

6. Odrediti projekciju vektora $\vec{a} = (5, 2, 5)$ na vektor $\vec{b} = (2, -1, 2)$, kao i projekciju vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$.

   Rezultat:
   $pr_{\vec{b}}\vec{a} = 6$ i $pr_{\vec{a}}\vec{b} = \sqrt{6}$.

7. Naći vektorski proizvod vektora

   a) $\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{c}$, gde je $\vec{a} = (1, 3, -1)$, $\vec{b} = (-2, -4, 3)$ i $\vec{c} = (4, -2, -3)$.

   b) $\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{a} - \vec{b}$, gde je $\vec{a} = (-2, 2, -1)$ i $\vec{b} = (-6, 3, 6)$.

   Rezultat:

   a) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (7, 5, 6)$.

   b) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = (-30, -36, -12)$.

8. Odrediti mešoviti proizvod vektora $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (2, 1, 0)$ i $\vec{c} = (3, 2, 1)$.

   Rezultat:
   $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$.

9. Odrediti kosinuse uglova koje vektor $\vec{a} = (1, -2, 2)$ obrazuje sa koordinatnim osama.

   Rezultat:
   $\cos\angle(\vec{a}, \vec{\imath}) = \frac{1}{3}$, $\cos\angle(\vec{a}, \vec{\jmath}) = -\frac{2}{3}$, $\cos\angle(\vec{a}, \vec{k}) = \frac{2}{3}$.

10. Pokazati da su vektori $\vec{a} = (2, 1, 3)$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$ i $\vec{c} = (7, 5, 9)$ koplanarni i izraziti vektor $\vec{c}$ preko vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

    Rezultat:
    $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$, $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

11. Odrediti realan parametar p tako da vektor $\vec{a} = (2p, 1, 1-p)$ gradi jednake uglove sa vektorima $\vec{b} = (-1, 3, 0)$ i $\vec{c} = (5, -1, 8)$.

    Rezultat:
    $p = \frac{1}{4}$.

12. Naći projekciju vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$, ako je $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$, $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$ i $\vec{b} = \vec{p} + \vec{q}$.

    Rezultat:
    $pr_{\vec{b}}\vec{a} = -\frac{22}{\sqrt{19}}$.

13. Odrediti površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a} = (3, 1, 1)$ i $\vec{b} = (1, 3, 1)$.

    Rezultat:
    $P = 6\sqrt{2}$.

14. Izračunati površinu trougla ABC ako je $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$ i $C(-1, 2, 1)$.

    Rezultat:
    $P = 3\sqrt{3}$.

15. Naći zapreminu paralelepipeda konstruisanog nad vektorima $\vec{a} = (2, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 2, 1)$ i $\vec{c} = (1, 1, 2)$.

    Rezultat:
    $V = 4$.

2

Analitička geometrija u prostoru

Tačka, rastojanje dve tačke, deoba duži u datoj razmeri

- **Rastojanje tačaka** $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i $M_2(x_2, y_2, z_2)$ je intenzitet vektora $\overrightarrow{M_1M_2}$ tj.

$$d(M_1, M_2) = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

- Koordinate tačke M takve da je $\overrightarrow{M_1M} = \lambda \cdot \overrightarrow{MM_2}$ $(\lambda \neq -1)$, date su sa

$$M(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}).$$

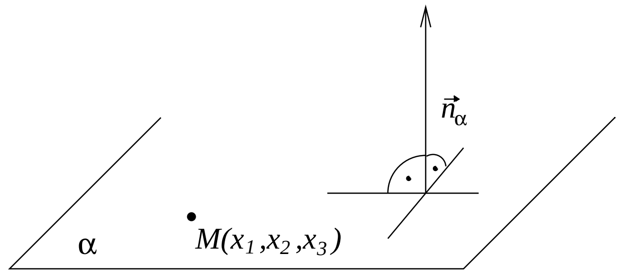
  Specijalno, za $\lambda = 1$ dobijamo **središte duži** M_1M_2

$$S(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}).$$

Ravan

- **Skalarna jednačina ravni** α kojoj pripada tačka $M(x_1, x_2, x_3)$ i koja je normalna na ne nula vektor $\vec{n}_\alpha = (A, B, C)$ je

$$A(x - x_1) + B(y - x_2) + C(z - x_3) = 0.$$



Vektor $\vec{n}_\alpha$ se zove **vektor normale** ravni α.

- **Opšti oblik jednačine ravni** je

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Međusobni položaj dve ravni

Date su ravni $\alpha : A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0$ i $\beta : A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0$.

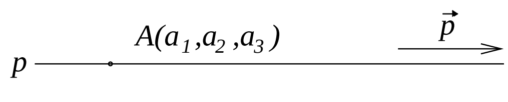
- Ravni su **paralelne** ako su im vektori normala kolinearni $\vec{n}_\alpha = \lambda\vec{n}_\beta$, $(\lambda \in \mathbf{R},\ \ \lambda \neq 0)$ i ako je $D_1 \neq \lambda\, D_2$.
  Ravni se **poklapaju** ako su im vektori normala kolinearni $\vec{n}_\alpha = \lambda\vec{n}_\beta$, $(\lambda \in \mathbf{R},\ \ \lambda \neq 0)$ i ako je $D_1 = \lambda\, D_2$.

- Ako vektori $\vec{n}_\alpha$ i $\vec{n}_\beta$ nisu kolinearni ($\vec{n}_\alpha \neq \lambda\vec{n}_\beta$) ravni α i β se **seku.** Ugao φ između ravni α i β je ugao između vektora $\vec{n}_\alpha$ i $\vec{n}_\beta$ pri čemu ako $\frac{\pi}{2} < \angle(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta) \leq \pi$, onda je $\varphi = \pi - \angle(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta)$. Znači ugao φ možemo određivati iz
$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|}.$$

Prava

- **Kanonički oblik jednačine prave** p koja sadrži tačku $A(a_1, a_2, a_3)$ i koja je paralelna vektoru $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ je

$$p : \frac{x - a_1}{p_1} = \frac{y - a_2}{p_2} = \frac{z - a_3}{p_3}$$



Vektor $\vec{p}$ se naziva **vektor pravca** prave p.

- **Parametarski oblik jednačine prave** p je

$$p: \quad x = a_1 + tp_1, \quad y = a_2 + tp_2, \quad z = a_3 + tp_3,$$

gde je t realan parametar.

Međusobni položaj dve prave

Neka je prava p određena tačkom $A(a_1, a_2, a_3)$ i vektorom pravca $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$, a prava q tačkom $B(b_1, b_2, b_3)$ i vektorom pravca $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$.

- Ako je $\vec{q} = \lambda\vec{p}$ za neko $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$ i ako tačka A prave p ne pripada pravoj q, onda se prave p i q su **paralelne.**
  Ako je $\vec{q} = \lambda\vec{p}$ za neko $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$ i ako tačka A prave p pripada pravoj $q, ondase$ prave p i q se **poklapaju**.

- Ako vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$ nisu kolinearni ($\vec{q} \neq \lambda\vec{p}$) i $\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) = 0$, tada se prave p i q **seku**.
  Ugao φ između pravih p i q je ugao između njihovih vektora pravaca, pri čemu je $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, što znači da je

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{q}|}{|\vec{p}||\vec{q}|}.$$

- Ako je $\vec{q} \neq \lambda\vec{p}$ i $\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) \neq 0$, tada su prave p i q **mimoilazne**.

Uzajamni odnos prave i ravni

Neka je $\vec{n}_\alpha = (A, B, C)$ vektor normale ravni α i $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ vektor pravca prave p. Neka je $A(a_1, a_2, a_3)$ tačka prave p.

- Ako je $\vec{p} \cdot \vec{n}_\alpha = 0$ i ako tačka A pripada ravni α, tada prava p **pripada** ravni α.

- Ako je $\vec{p} \cdot \vec{n}_\alpha = 0$ i ako tačka A ne pripada ravni α, tada je prava p **paralelna** ravni α.

- Ako je $\vec{p} \cdot \vec{n}_\alpha \neq 0$, tada prava p **seče** ravan α.
  Ugao φ između prave p i ravni α je ugao koji prava p zaklapa sa svojom projekcijom na ravan α i tada je

$$\sin\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = |\cos\angle(\vec{p}, \vec{n}_\alpha)| = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{p}||\vec{n}_\alpha|}.$$

Zadaci

1. **Napisati jednačinu ravni α koja sadrži tačku $A(2,3,0)$ i normalna je na vektor $\overrightarrow{BC}$, gde je $B(1,1,-1)$ i $C(0,0,3)$.**

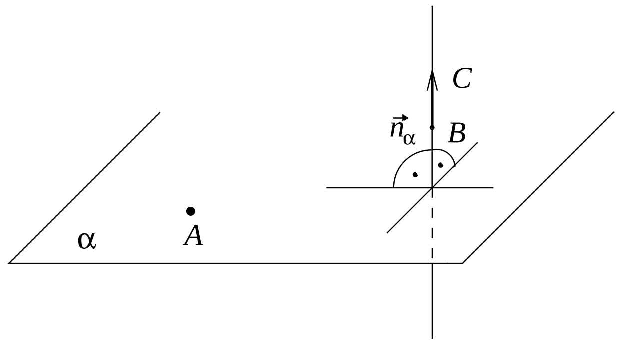
Rešenje:

Vektor normale ravni α je kolinearan vektoru $\overrightarrow{BC} = (-1,-1,4) = -(1,1,-4)$. Znači, možemo uzeti da je vektor normale ravni α vektor

$$\vec{n}_\alpha = (1,1,-4).$$

Jednačina ravni α koja sadrži tačku A i normalna je na vektor $\vec{n}_\alpha$ je $1(x-2)+1(y-3)-4(z-0)=0$, tj.

$$\alpha : x + y - 4z - 5 = 0.$$



2. **a) Napisati jednačinu ravni α koja sadrži tačke $A(-1,6,3)$, $B(3,-2,-5)$ i $C(0,1,0)$.**

   b) Ispitati da li tačke $D(1,1,3)$ i $E(1,5,0)$ pripadaju ravni α.

   c) Odrediti realan parametar p tako da tačka $F(1,p,3)$ pripada ravni α.

Rešenje:

a) Kako tačke A, B i C pripadaju ravni α, vektor normale ravni α je normalan na vektore $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$, gde je $\overrightarrow{AB} = (4,-8,-8)$ i $\overrightarrow{AC} =$

$(1,-5,-3)$. Vektor normale ravni α je kolinearan sa vektorom

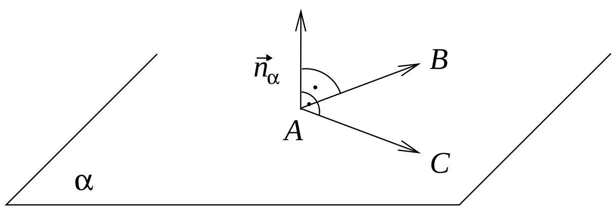
$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 4 & -8 & -8\\ 1 & -5 & -3\end{vmatrix}=(-16,4,-12)=-4(4,-1,3).$$

Možemo uzeti da je vektor normale ravni α

$$\vec{n}_\alpha=(4,-1,3).$$

Jednačina ravni α koja sadrži tačku A i ima vektor normale $\vec{n}_\alpha$ je $4(x+1)-1(y-6)+3(z-3)=0$, tj.

$$\alpha: 4x-y+3z+1=0.$$



b) Uvrštavajući koordinate tačke D u jednačinu ravni α imamo da je

$$4-1+9+1=13\neq 0,$$

tako da tačka D ne pripada ravni α. Analogno, za tačku E imamo da je $4-5+0+1=0$ i tačka E pripada ravni α.

c) Kako tačka F treba da pripada ravni α, koordinate tačke F treba da zadovoljavaju jednačinu ravni, tj. treba da važi

$$4-p+9+1=0.$$

Rešavanjem navedene jednačine dobijamo da je $p=14$, tj. tražena tačka je

$$F(1,14,3).$$

3. **Date su ravni $\beta: 4x-y+3z-1=0$ i $\gamma: x-5y-z-2=0$. Napisati jednačinu ravni α koja sadrži koordinatni početak i presek ravni β i γ.**

Rešenje:

Prvo ćemo pronaći dve tačke koje se nalaze u ravni β i ravni γ. Tražene tačke dobijamo rešavanjem sistema

$$\begin{array}{rcrcrcrl}4x & - & y & + & 3z & - & 1 & =0\\ x & - & 5y & - & z & - & 2 & =0.\end{array}$$

Uzimajući npr. da je $y = 0$ i uvrštavanjem u sistem dobijamo da je $x = 1$ i $z = -1$, tj. jedna zajednička tačka je

$$A(1, 0, -1).$$

Ako uzmemo da je $y = 7$, dobijamo drugu tačku

$$B(17, 7, -20).$$

Sad treba odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačke A, B i koordinatni početak O. Vektor normale ravni α je kolinearan vektorskom proizvodu vektora $\overrightarrow{OA}$ i vektora $\overrightarrow{OB}$, gde je $\overrightarrow{OA} = (1, 0, -1)$ i $\overrightarrow{OB} = (17, 7, -20)$

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 17 & 7 & -20 \end{vmatrix} = (7, 3, 7).$$

Znači, vektor normale ravni α je $\vec{n}_\alpha = (7, 3, 7)$, a tražena jednačina ravni koja sadrži koordinatni početak i presek ravni β i γ je

$$\alpha : 7x + 3y + 7z = 0.$$

4. **Napisati jednačinu ravni koja**

   a) sadrži tačku $M(-2, 7, 3)$ i paralelna je sa ravni $\alpha : x - 4y + 5z - 1 = 0$.

   b) sadrži koordinatni početak i normalna je na ravni $\beta : 2x - y + 5z + 3 = 0$ i $\gamma : x + 3y - z - 7 = 0$.

   c) sadrži tačke $M(0, 0, 1)$ i $N(3, 0, 0)$ i obrazuje ugao $\frac{\pi}{3}$ sa xOy ravni.

Rešenje:

a) Kako tražena ravan δ treba da bude paralelna sa datom ravni α, vektori normala su im kolinearni, tako da možemo uzeti da je

$$\vec{n}_\delta = \vec{n}_\alpha = (1, -4, 5).$$

Jednačina ravni δ, koja sadrži tačku $M(-2, 7, 3)$ i ima vektor normale $\vec{n}_\delta$, je:

$$\delta : x - 4y + 5z + 15 = 0.$$

b) Ravan ϵ je normalna na ravni β i γ, tako da je vektor normale ravni ϵ kolinearan vektorskom proizvodu vektora $\vec{n}_\beta = (2, -1, 5)$ i $\vec{n}_\gamma = (1, 3, -1)$:

$$\vec{n}_\beta \times \vec{n}_\gamma = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-14, 7, 7) = -7(2, -1, -1).$$

Znači, vektor normale ravni ϵ je

$$\vec{n}_\epsilon = (2, -1, -1).$$

Tražena jednačina ravni ϵ, sa vektorom normale $\vec{n}_\epsilon$, koja sadrži koordinatni početak je

$$\epsilon : 2x - y - z = 0.$$

c) Neka je $\eta : Ax + By + Cz + D = 0$ tražena ravan.Vektor normale ravni η je $\vec{n}_\eta = (A, B, C)$.
Kako tačka $M(0, 0, 1)$ pripada traženoj ravni η, M zadovoljava njenu jednačinu tj.

$$C + D = 0.$$

Analogno, uvrštavajući u jednačinu ravni η tačku $N(3, 0, 0)$, dobijamo da važi

$$3A + D = 0.$$

Odavde sledi da je $D = -3A$ i $C = 3A$ tako da je $\vec{n}_\eta = (A, B, 3A)$. Ravan η zaklapa ugao $\frac{\pi}{3}$ sa xOy ravni tako da je ugao između odgovarajućih vektora normala jednak $\frac{\pi}{3}$. Vektor normale xOy ravni je $\vec{k} = (0, 0, 1)$, znači,

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\vec{n}_\eta \cdot \vec{k}}{|\vec{n}_\eta||\vec{k}|}.$$

Kako je $\vec{n}_\eta \cdot \vec{k} = (A, B, 3A) \cdot (0, 0, 1) = 3A$, $|\vec{n}_\eta| = \sqrt{A^2 + B^2 + 9A^2} = \sqrt{10A^2 + B^2}$, $|\vec{k}| = 1$ i $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ uvrštavanjem u gornju jednakost dobijamo da je $B^2 = 26A^2$, tj.

$$B = \pm\sqrt{26}A.$$

Dakle, $C = 3A$, $D = -3A$ i $B = \pm\sqrt{26}A$. Uvrštavanjem u jednačinu ravni η, dobijamo da je tražena ravan

$$\eta : Ax \pm \sqrt{26}Ay + 3Az - 3A = 0.$$

Kako je vektor normale ravni ne nula vektor imamo da je $A \neq 0$ i dobijamo dve ravni koje zadovoljavaju navedene uslove

$$\eta_1 : x + \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0 \quad \text{i} \quad \eta_2 : x - \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0.$$

5. **Date su ravni $\alpha : 2x + py + z = 3$ i $\beta : 6x + 8y + 3z = 15$. Odrediti realan parametar p tako da**

   a) **ravan α bude paralelna sa ravni β.**

b) ravan α bude normalna na ravan β.

Rešenje:

a) S obzirom da ravan α treba da bude paralelna sa ravni β, odgovarajući vektori normala treba da budu kolinearni, tj. postoji $m \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ tako da je

$$\vec{n}_\beta = m \cdot \vec{n}_\alpha$$

$$(6,8,3) = m(2,p,1) \Leftrightarrow (6,8,3) = (2m, mp, m).$$

Na osnovu definicije jednakosti dva vektora dobijamo sistem jednačina

$$6 = 2m, \quad 8 = mp, \quad 3 = m$$

čijim rešavanjem dobijamo da je

$$p = \frac{8}{3}.$$

b) S obzirom da ravan α treba da bude normalna na ravan β, vektori njihovih normala treba da budu normalni, tj.

$$\vec{n}_\beta \cdot \vec{n}_\alpha = 0, \text{ odnosno } 12 + 8p + 3 = 0.$$

Rešavajući navedenu jednačinu dobijamo da je

$$p = -\frac{15}{8}.$$

6. **Diskutovati međusobni položaj ravni $\alpha : 2x + 3y - z = 6$, $\beta : ax - 3y + 2z = 5$ i $\gamma : 4x - 3y + 3z = b$ u zavisnosti od vrednosti realnih parametara a i b.**

Rešenje:

Tri date ravni posmatramo kao sistem jednačina:

$$\begin{array}{rrrcr} 2x & +3y & -z & = & 6 \\ ax & -3y & +2z & = & 5 \\ 4x & -3y & +3z & = & b. \end{array}$$

Posmatrajmo determinantu datog sistema:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ a & -3 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 6(1-a).$$

Za $a \neq 1$ i svako $b \in \mathbf{R}$ sistem jednačina ima jedinstveno rešenje tako da ravni α, β i γ imaju jednu zajedničku tačku.

Za $a = 1$ elementarnim transformacijama sistem svodimo na ekvivalentan sistem:

$$\begin{array}{rrrcr} x & -3y & +2z & = & 5 \\ & 9y & -5z & = & -4 \\ & & 0 & = & b-16. \end{array}$$

Za $b \neq 16$ sistem jednačina je nemoguć, tako da ravni nemaju zajedničkih tačaka. Pošto je $a = 1$ imamo da je

$$\vec{n}_\alpha = (2,3,-1),\ \vec{n}_\beta = (1,-3,2) \text{ i } \vec{n}_\gamma = (4,-3,3),$$

i parovi vektora $\vec{n}_\alpha$ i $\vec{n}_\beta$, $\vec{n}_\alpha$ i $\vec{n}_\gamma$, $\vec{n}_\beta$ i $\vec{n}_\gamma$ nisu kolinearni tako da se svake dve ravni seku duž prave i te tri prave su paralelne.

Za $b = 16$ sistem je jednostruko neodređen tako da se ove tri ravni seku duž jedne prave i pripadaju jednom pramenu.

7. **a) Napisati jednačinu prave koja sadrži tačku $A(2,-1,4)$ i ima vektor pravca $\vec{p} = (1,4,-5)$.**

   b) Napisati jednačinu prave koja sadrži tačke $A(1,2,-1)$ i $B(0,1,1)$.

   c) Napisati jednačine koordinatnih osa.

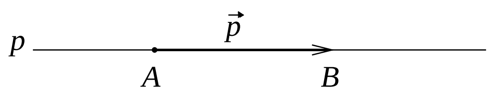
Rešenje:

a) Kanonički oblik jednačine prave koja sadrži datu tačku $A(2,-1,4)$ i ima dati vektor pravca $\vec{p} = (1,4,-5)$ je

$$p: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-4}{-5}.$$

b) Vektor pravca prave p je kolinearan vektoru $\overrightarrow{AB} = (-1,-1,2)$. Kako npr. tačka $A(1,2,-1)$ pripada traženoj pravi, dobijamo da je tražena jednačina prave

$$p: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}.$$



c) Vektor pravca x-ose je $\vec{\imath} = (1,0,0)$. Koordinatni početak pripada x-osi tako da je tražena jednačina

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}.$$

Analogno, vektor pravca y-ose je $\vec{\jmath} = (0,1,0)$, a vektor pravca z-ose je $\vec{k} = (0,0,1)$. Kako koordinatni početak pripada y-osi i z-osi jednačine y-ose i $z-$ose, redom su:

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}, \qquad \frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}.$$

8. **a) Napisati jednačinu prave p koja sadrži tačku A i paralelna je vektoru $\overrightarrow{BC}$, gde je $A(1,1,1)$, $B(1,2,3)$ i $C(5,0,2)$.**

b) Odrediti realan parametar a, tako da tačka $D(-3, a+2, 2)$ pripada pravoj p određenoj u zadatku pod a).

Rešenje:

a) Vektor pravca prave p je kolinearan vektoru $\overrightarrow{BC} = (4,-2,-1)$. Znači, za vektor pravca prave p možemo uzeti vektor

$$\vec{p} = (4,-2,-1).$$

Jednačina prave koja sadrži tačku $A(1,1,1)$ i ima vektor pravca $\vec{p} = (4,-2,-2)$ je

$$p: \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}.$$

b) Parametarski oblik jednačine prave p je

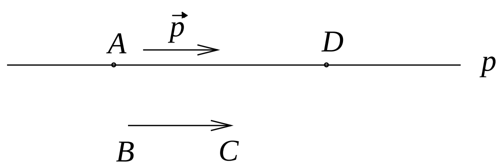
$$p: \ x = 4t+1, \ y = -2t+1, \ z = -t+1.$$

Kako tačka D treba da pripada pravoj p, njene koordinate moraju da zadovoljavaju jednačinu prave p, tj. treba da važi

$$-3 = 4t+1, \ \ a+2 = -2t+1, \ \ 2 = -t+1.$$

Rešavanjem sistema dobijamo da je $t = -1$ i $a = 1$, pa je tražena tačka

$$D(-3,3,2).$$



9. **Ispitati međusobni položaj pravih. Ako se seku naći tačku preseka, a ako su mimoilazne, naći njihovu zajedničku normalu.**

a) $p : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{6}$, $\quad q : \frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-6}{12}$.

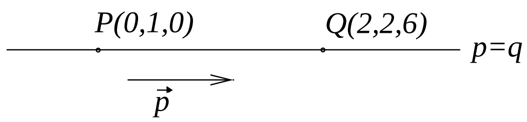
b) $p : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{6}$, $\quad q : \frac{x-2}{-4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+5}{-12}$.

c) $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$, $\quad q : \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2}$.

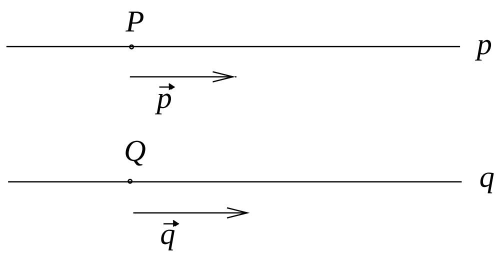
d) $p : \frac{x-3}{4} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-1}$, $\quad q : \frac{x}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z+2}{1}$.

Rešenje:

a) Vektor pravca prave p je $\vec{p} = (2, 1, 6)$, a vektor pravca prave q je $\vec{q} = (4, 2, 12)$. Očigledno je $\vec{q} = 2\vec{p}$, tako da su prave p i q ili paralelne ili se poklapaju. Zamenjujući koordinate tačke $P(0, 1, 0)$ prave p u jednačinu prave q dobijamo da tačka P pripada i pravoj q, pa se prave p i q poklapaju.



b) Vektori pravaca pravih p i q su: $\vec{p} = (2, 1, 6)$ i $\vec{q} = (-4, -2, -12)$. Kako je $\vec{q} = -2\vec{p}$, prave p i q su ili paralelne ili se poklapaju. Uvrštavanjem koordinata tačke $P(0, 1, 0)$ u jednačinu prave q dobijamo $\frac{1}{2} = \frac{1}{1} = -\frac{5}{12}$, što očigledno nije tačno, tako da se prave p i q ne poklapaju, već su paralelne.

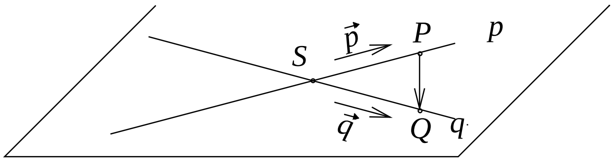


c) Vektori pravca pravih p i q su $\vec{p} = (1, 3, 1)$ i $\vec{q} = (1, 4, 2)$. Kako $\vec{p}$ i $\vec{q}$ nisu kolinearni prave p i q nisu paralelne, niti se poklapaju. Posmatrajmo vektor $\overrightarrow{PQ} = (0, 1, 1)$, određen tačkom $P(2, 2, 3)$ prave p i tačkom $Q(2, 3, 4)$ prave q. Mešoviti proizvod vektora $\vec{p}$, $\vec{q}$ i $\overrightarrow{PQ}$ jednak je nuli, što znači da se prave p i q seku.
Nađimo sada zajedničku tačku $S(x, y, z)$ pravih p i q. Tačka S zadovoljava jednačinu prave p i prave q, tj. važi:

$$x = 2 + t = 2 + k, \;\; y = 2 + 3t = 3 + 4k, \;\; z = 3 + t = 4 + 2k.$$

Rešenje ovog sistema je $k = t = -1$, $x = 1$, $y = -1$ i $z = 2$, tj. tražena tačka preseka je

$$S(1, -1, 2).$$



d) Vektori pravaca navedenih pravih p i q, $\vec{p} = (4, 1, -1)$ i $\vec{q} = (2, 0, 1)$, nisu kolinearni, tako da se prave p i q ili seku, ili su mimoilazne. Posmatrajmo vektor $\overrightarrow{PQ} = (-3, -3, -1)$, određen tačkom $P(3, 3, -1)$ prave p i tačkom $Q(0, 0, -2)$ prave q. Kako je mešoviti proizvod vektora $\vec{p}$, $\vec{q}$ i $\overrightarrow{PQ}$ različit od 0, prave p i q ne pripadaju jednoj ravni, tj. one su mimoilazne.
Nađimo zajedničku normalu n za prave p i q. Kako prava n treba da bude normalna na pravu p i pravu q, vektor pravca prave n kolinearan je vektorskom proizvodu vektora $\vec{p}$ i $\vec{q}$

$$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -6, -2).$$

Dakle, vektor pravca zajedničke normale je $\vec{n} = (1, -6, -2)$.

Kako zajednička normala seče pravu p i pravu q, postavićemo ravni α i β koje sadrže prave n i p, odnosno n i q, redom. Vektor normale ravni α kolinearan je vektoru $\vec{n} \times \vec{p}$, a vektor normale ravni β kolinearan je vektoru $\vec{n} \times \vec{q}$.

$$\vec{n} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -6 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (8, -7, 25).$$

$$\vec{n} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -6 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-6, -5, 12).$$

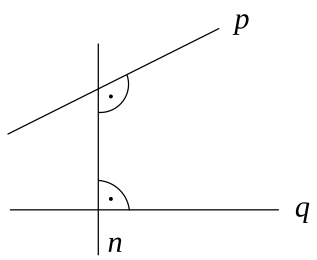
Znači, $\vec{n}_\alpha = (8, -7, 25)$ i $\vec{n}_\beta = (-6, -5, 12)$.

Tačka $P(3, 3, -1)$ pripada pravoj p, a kako prava p leži u ravni α, tačka P pripada ravni α. Na isti način dobijamo da tačka $Q(0, 0, -2)$ pripada ravni β. Jednačine ravni α i β su

$$\alpha : 8x - 7y + 25z + 22 = 0 \ \text{ i } \ \beta : -6x - 5y + 12z + 24 = 0.$$

Kako je prava n presek ravni α i β, jednu tačku N prave n dobijamo rešavanjem navedenog sistema. Jedno rešenje tog sistema je $x = \frac{29}{41}$, $y = \frac{162}{41}$ i $z = 0$, tj. tražena tačka prave n je $N(\frac{29}{41}, \frac{162}{41}, 0)$. Znači, tražena normala sadrži tačku N i ima vektor pravca $\vec{n}$, pa je njena jednačina

$$n : \frac{x - \frac{29}{41}}{1} = \frac{y - \frac{162}{41}}{-6} = \frac{z}{-2}.$$



10. **Ispitati međusobni položaj ravni** $\alpha : 2x - y + z - 6 = 0$ **i prave** p, **ako je**

a) $p : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{1}$.

b) $p : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-6}{-1}$.

c) $p : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{1}$.

d) $p : \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$.

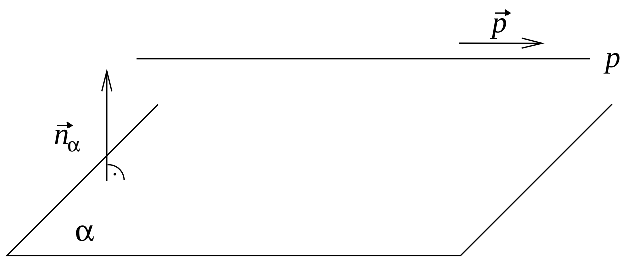
Rešenje:

Vektor normale ravni α je $\vec{n}_\alpha = (2, -1, 1)$.

a) Vektor pravca prave p je $\vec{p} = (-1, -1, 1)$. Prema tome,

$$\vec{n}_\alpha \cdot \vec{p} = -2 + 1 + 1 = 0.$$

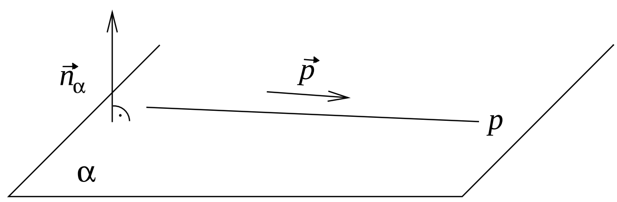
Znači, prava p je ili paralelna sa ravni α ili pripada ravni α. Uvrštavanjem koordinata tačke $A(1, -1, 4)$ prave p u jednačinu ravni α dobijamo $2 + 1 - 1 - 6 \neq 0$, tako da tačka A ne pripada ravni α, što znači da je prava p paralelna sa ravni α.



b) Vektor pravca prave p je $\vec{p} = (1, 1, -1)$. S obzirom da je

$$\vec{n}_\alpha \cdot \vec{p} = 2 - 1 - 1 = 0$$

i da tačka $A(0, 0, 6)$ prave p pripada ravni α, sledi da prava p pripada ravni α.

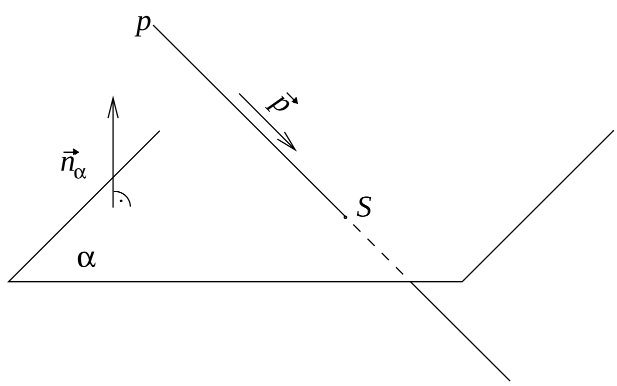


c) Vektor pravca prave p je $\vec{p} = (2, 3, 1)$. Skalarni proizvod vektora $\vec{p}$ i $\vec{n}_\alpha$ jednak je 2, što znači da prava p seče ravan α. Zamenom parametarskog oblika jednačine prave p

$$p : x = 2t, \;\; y = 1 + 3t, \;\; z = -1 + t$$

u jednačinu ravni α, dobijamo da je $t = 4$, odnosno da je zajednička tačka prave p i ravni α

$$S(8, 13, 3).$$

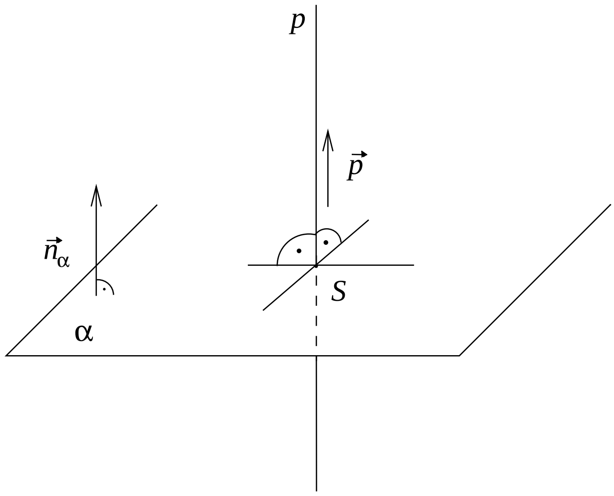


d) Vektor pravca prave p je kolinearan vektoru normale ravni α ($\vec{p} = -\vec{n}_\alpha$). Prema tome, prava p je normalna na ravan α. Parametarski oblik jednačine prave p je

$$x = -2 - 2t, \;\; y = 1 + t, \;\; z = -1 - t.$$

Uvrštavanjem u jednačinu ravni α, dobijamo zajedničku tačku

$$S(2, -1, 1).$$



11. **Data je tačka $A(-1,-4,4)$ i ravan $\alpha : 2x+5y-3z=4$.**

   a) **Odrediti jednačinu prave n koja sadrži tačku A i normalna je na ravan α.**
   b) **Odrediti presek prave n i ravni α.**
   c) **Izračunati rastojanje tačke A od ravni α.**
   d) **Odrediti tačku A_1 simetričnu tački A u odnosu na ravan α.**

Rešenje:

a) Uvrštavanjem koordinata tačke $A(-1,-4,4)$ u jednačinu ravni α jednostavno se proverava da $A \notin \alpha$. Vektor pravca prave n je kolinearan vektoru normale ravni α, tj. $\vec{n} = \vec{n}_\alpha = (2,5,-3)$. Jednačina prave n koja sadrži tačku A i ima vektor pravca $\vec{n}$ je

$$n : \frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-4}{-3}.$$

b) Neka je $T(x,y,z)$ tačka koja pripada ravni α i pravoj n. Uvrštavanjem parametarskog oblika jednačine prave n

$$n : x = 2t-1, \quad y = 5t-4, \quad z = -3t+4$$

u jednačinu ravni α, dobijamo

$$2(2t-1)+5(5t-4)-3(-3t+4) = 4.$$

Rešenje date jednačine je $t = 1$. Uvrštavanjem parametra $t = 1$ u parametarski oblik jednačine prave p dobijamo da je $x = 1, y = 1, z = 1$. Znači, tražena tačka je

$$T(1, 1, 1).$$

c) Rastojanje tačke A od ravni α jednako je intenzitetu vektora $\overrightarrow{AT}$ tj.

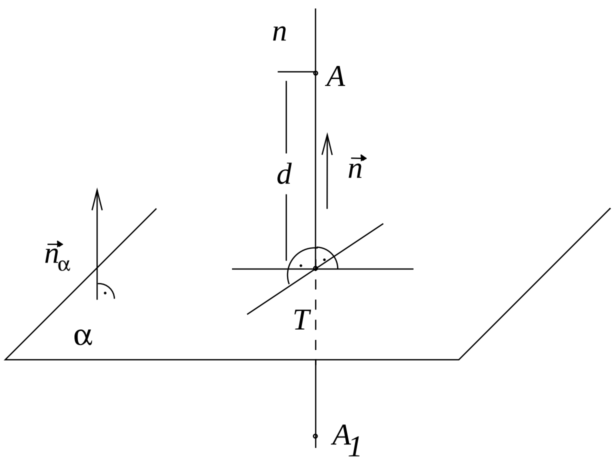
$$d(A, \alpha) = |\overrightarrow{AT}| = \sqrt{(-1-1)^2 + (-4-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{38}.$$

d) Kako tačka $A_1(a, b, c)$ treba da bude simetrična tački A i kako je T projekcija tačke A na ravan α, imamo da je tačka T sredina duži AA_1. Koordinate tačke T zadovoljavaju:

$$1 = \frac{-1+a}{2}, \quad 1 = \frac{-4+b}{2}, \quad 1 = \frac{4+c}{2}.$$

Rešavanjem navedenog sistema dobijamo $a = 3, b = 6$ i $c = -2$, tako da je tražena tačka

$$A_1(3, 6, -2).$$



12. **Date su prave** $p : \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{0}$ **i** $q : \frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{-1}$.

a) **Pokazati da se prave p i q seku i naći njihovu zajedničku tačku.**

b) **Napisati jednačinu ravni koju određuju prave p i q.**

Rešenje:

a) Prava p sadrži tačku $P(0,2,-1)$ i ima vektor pravca $\vec{p}=(1,-1,0)$. Prava q sadrži tačku $Q(-2,2,0)$ i ima vektor pravca $\vec{q}=(3,-1,-1)$. Posmatrajmo vektor $\overrightarrow{PQ}=(-2,0,1)$. Kako je mešoviti proizvod vektora $\vec{p}$, $\vec{q}$ i $\overrightarrow{PQ}$ jednak 0, prave p i q leže u jednoj ravni. Vektori pravaca $\vec{p}$ i $\vec{q}$ nisu kolinearni, tako da se prave p i q seku.

Parametarski oblik jednačine prave p je

$$p:\ x=t,\ \ y=2-t,\ \ z=-1.$$

Parametarski oblik jednačine prave q je

$$q:\ x=-2+3s,\ y=2-s,\ z=-s.$$

Neka je $S(x,y,z)$ tačka preseka pravih p i q. Koordinate tačke S moraju da zadovoljavaju jednačine pravih p i q, tako da je

$$t=-2+3s,\ \ 2-t=2-s,\ \ -1=-s.$$

Rešavanjem navedenog sistema dobijamo da je $s=1$ i $t=1$, tj. tražena tačka je

$$S(1,1,-1).$$

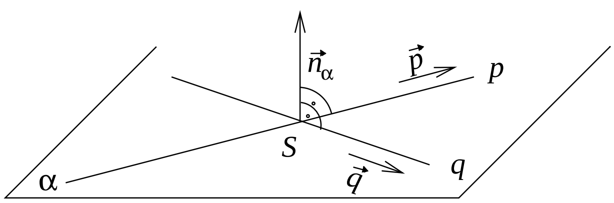
b) Vektor normale ravni α koja sadrži prave p i q kolinearan je vektorskom proizvodu njihovih vektora pravaca

$$\vec{p}\times\vec{q}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & -1 & -1\end{vmatrix}=(1,1,2).$$

Znači, $\vec{n}_\alpha=(1,1,2)$.

Kako prava p treba da pripada traženoj ravni, sve tačke te prave se nalaze u ravni α. Jedna tačka prave p je npr. $P(0,2,-1)$. Jednačina ravni koja ima vektor normale $\vec{n}_\alpha$ i sadrži tačku P je:

$$\alpha: x+y+2z=0.$$



(*Napomena:* Umesto tačke P mogli smo uzeti zajedničku tačku S pravih p i q ili tačku $Q(-2,2,0)$ prave q, ili bilo koju drugu tačku prave p ili prave q.)

13. **Date su prave** $p : \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{0}$ **i** $q : \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{0}$**. Napisati jednačinu ravni** α **koju određuju prave** p **i** q**.**

Rešenje:

Vektori pravaca pravih p i q su $\vec{p} = (1, -1, 0)$ i $\vec{q} = (2, -2, 0)$, redom. Kako je $\vec{q} = 2\vec{p}$ i tačka $P(0, 2, -1)$ prave p ne pripada pravoj q, prave p i q su paralelne. Da bi pronašli vektor normale ravni α, treba pronaći još jedan vektor koji se nalazi u toj ravni a koji nije paralelan sa vektorom $\vec{p}$. Traženi vektor je $\overrightarrow{PQ} = (-2, 0, 1)$, gde je $P(0, 2, -1) \in p$ i $Q(-2, 2, 0) \in q$. Vektor normale ravni α kolinearan je vektorskom proizvodu vektora $\vec{p}$ i $\overrightarrow{PQ}$

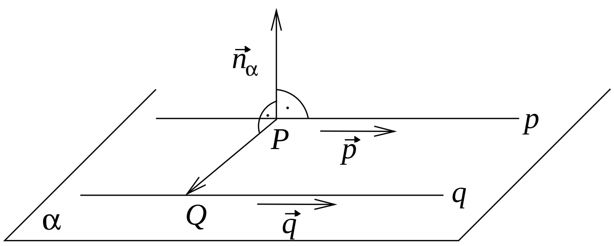
$$\vec{p} \times \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, -2).$$

Znači, vektor normale ravni α je

$$\vec{n}_\alpha = (1, 1, 2).$$

Kako prava p pripada traženoj ravni α i kako je $P(0, 2, -1)$ tačka prave p, tačka P se nalazi i u ravni α. Znači, tražena ravan sadrži tačku P i ima vektor normale $\vec{n}_\alpha$, pa je njena jednačina

$$\alpha : x + y + 2z = 0.$$



14. **Odrediti projekciju tačke** $T(1, 12, 3)$ **na ravan** $\alpha : 2x - y = 0$.

Rešenje:

Zamenjujući koordinate tačke T u jednačinu ravni α dobijamo $2 - 12 = -10 \neq 0$, tako da tačka T ne pripada ravni α.
Nađimo prvo jednačinu prave n koja sadrži tačku $T(1, 12, 3)$ i normalna je na ravan α. Vektor pravca prave n kolinearan je vektoru normale ravni α, tj. $\vec{n} = \vec{n}_\alpha = (2, -1, 0)$. Jednačina prave n koja ima vektor pravca $\vec{n}$ i sadrži tačku T je

$$n : \frac{x-1}{2} = \frac{y-12}{-1} = \frac{z-3}{0}.$$

Parametarski oblik jednačine prave n je

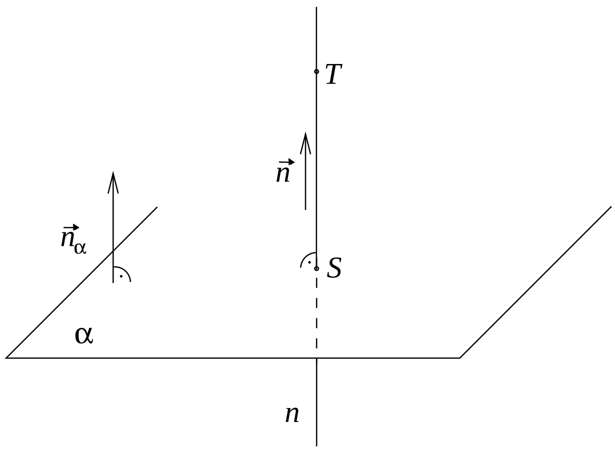
$$n : x = 2t + 1, \quad y = -t + 12, \quad z = 3.$$

Projekcija tačke T na ravan α je presek prave n i ravni α. Zamenjujući parametarski oblik jednačine prave n u jednačinu ravni α dobijamo

$$2(2t + 1) + t - 12 = 0.$$

Rešenje date jednačine je $t = 2$. Iz parametarskog oblika jednačine prave n dobijamo $x = 5, \ y = 10, \ z = 3$. Znači, tražena projekcija tačke T na ravan α je

$$S(5, 10, 3).$$



15. **Odrediti projekciju tačke** $T(2, 1, 5)$ **na pravu** $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-6}{3} = \frac{z+2}{-1}$.

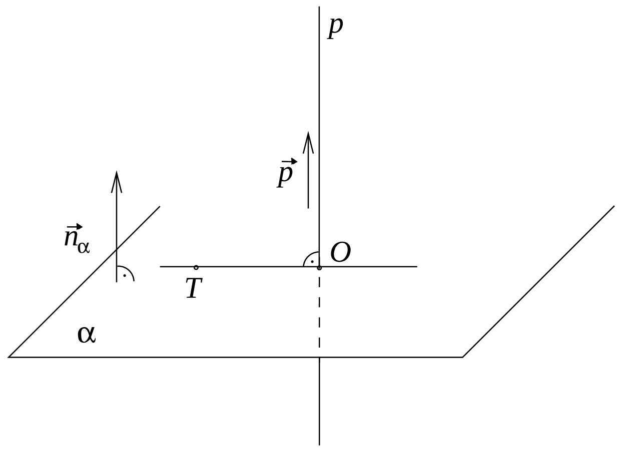
Rešenje:

Zamenjujući koordinate tačke T u jednačinu prave p dobijamo da tačka T ne pripada pravoj p.
Nađimo prvo jednačinu ravni α koja sadrži tačku $T(2, 1, 5)$ i normalna je na pravu p. Vektor normale ravni α je kolinearan sa vektorom pravca prave p, tj. $\vec{n}_\alpha = \vec{p} = (1, 3, -1)$. Tražena jednačina ravni α je

$$\alpha : x + 3y - z = 0.$$

Projekcija tačke T na pravu p je presek ravni α i prave p. Zamenjujući parametarski oblik jednačine prave $p : x = t + 2, \ y = 3t + 6, \ z = -t - 2$ u jednačinu ravni α dobijamo $t + 2 + 3(3t + 6) - (-t - 2) = 0$. Rešenje ove jednačine je $t = -2$, a njegovom zamenom u parametarski oblik jednačine prave p dobijamo $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$. Dakle, projekcija tačke T na pravu p je tačka koordinatnog početka

$$O(0, 0, 0).$$



16. **a) Kroz tačku $Q(1, -1, 0)$ postaviti pravu q tako da bude paralelna ravni $\alpha : 2x - y + z - 2 = 0$ i da seče pravu $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$.**

    b) Odrediti zapreminu piramide $QABC$ ako su A, B, C redom preseci x, y i z-ose sa ravni α.

Rešenje:

a) Jednostavno se proverava da tačka Q ne pripada ravni α i ne pripada pravoj p.
Najpre ćemo naći jednačinu ravni β koja je paralelna ravni α i sadrži tačku Q. Za vektor normale $\vec{n}_\beta$ ravni β možemo uzeti vektor $\vec{n}_\alpha$, jer ove dve ravni imaju kolinearne vektore normala. Iz jednačine ravni α imamo

$$\vec{n}_\alpha = \vec{n}_\beta = (2, -1, 1).$$

Dakle, jednačina ravni β je

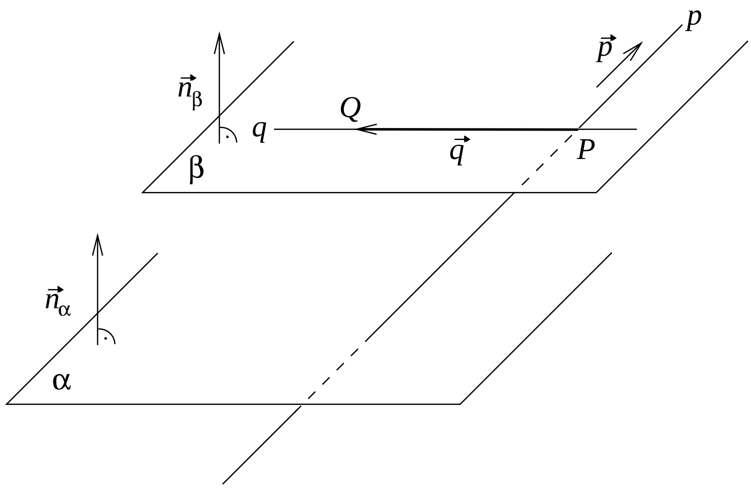
$$\beta : 2x - y + z - 3 = 0.$$

Zatim ćemo naći presek prave p i ravni β i označiti ga sa P. Parametarski oblik jednačine prave p je:

$$p : \ x = t + 1, \ \ y = 2t, \ \ z = -t - 1.$$

Zamenjivanjem parametarskog oblika jednačine prave u jednačinu ravni β dobijamo $t = -2$. Za ovu vrednost parametra t dobijamo

tačku
$$P(-1,-4,1).$$
Tražena prava q je određena tačkama P i Q. Za vektor pravca $\vec{q}$ prave q možemo uzeti vektor $\overrightarrow{PQ} = (2,3,-1)$. Jednačina prave q je
$$q : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}.$$



b) Tačke A, B, C pripadaju x, y i $z-$osi redom, tako da je
$$A(x_A, 0, 0),\ \ B(0, y_B, 0),\ \ C(0, 0, z_C).$$
Pored toga, one pripadaju ravni α, tako da njihove koordinate zadovoljavaju i jednačinu ravni α. Zamenjivanjem u jednačinu ravni α dobijamo
$$A(1,0,0),\ \ B(0,-2,0),\ \ C(0,0,2).$$
Zapremina piramide je $V = \frac{1}{3}BH$, gde je sa B označena površina osnove, a sa H visina piramide.
Da bi pronašli visinu H piramide $QABC$, konstruisaćemo normalu n kroz tačku Q na ravan α određenu tačkama $A, B,$ i C . Zatim ćemo naći presek ravni α i prave n i označiti ga sa S.
Kako je prava n normalna na ravan α, za vektor pravca $\vec{n}$ prave n uzimamo vektor $\vec{n}_\alpha = (2,-1,1)$ i dobijamo jednačinu prave n
$$n : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}.$$
Parametarski oblik jednačine prave n je
$$n :\ x = 2t+1,\ y = -t-1,\ z = t.$$

Zamenjivanjem parametarskog oblika jednačine prave n u jednačinu ravni α dobijamo da je $t = -\frac{1}{6}$, pa je tačka preseka ravni α i prave n tačka

$$S(\frac{2}{3}, -\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}).$$

Visinu dobijamo kao intenzitet vektora $\overrightarrow{QS}$

$$H = |\overrightarrow{QS}| = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(-\frac{5}{6} + 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{6} - 0\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Površina osnove B je površina trougla ABC :

$$B = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|,$$

za $\overrightarrow{AB} = (-1, -2, 0)$ i $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 2)$. Znači,

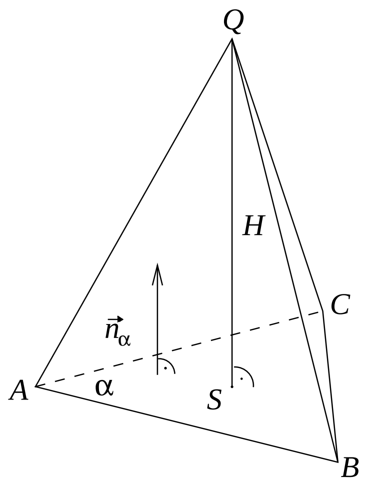
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 2\vec{k} = (-4, 2, -2),$$

tako da je

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{6},$$

odnosno

$$V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}\sqrt{6}\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3}.$$



17. **Data je prava** $p : \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$.

a) **Odrediti tačku T koja je presek prave p i ravni $\gamma : x + 3y - z + 4 = 0$.**

b) **Napisati jednačinu prave q koja sadrži tačku T, leži u ravni γ i normalna je na pravu p.**

Rešenje:

a) Prava p zadata je presekom dve ravni. Vektor pravca prave p je kolinearan vektorskom proizvodu vektora normala ravni koje sadrže pravu p. Kako prava p pripada ravni $x - 2z - 3 = 0$ koja ima vektor normale $\vec{n}_1 = (1, 0, -2)$, i ravni $y - 2z = 0$ koja ima vektor normale $\vec{n}_2 = (0, 1, -2)$, vektor pravca prave p kolinearan je vektoru

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (2, 2, 1).$$

Znači, za vektor pravca prave p možemo uzeti vektor $\vec{p} = (2, 2, 1)$. Treba još pronaći jednu tačku prave p. Posmatrajmo jednačine ravni kojima pripada tražena prava: $x - 2z - 3 = 0$, $y - 2z = 0$. Stavljajući u te jednačine npr. $y = 0$ i dobijamo $x = 3$ i $z = 0$, tako da je $P(3, 0, 0)$ tačka prave p. Parametarski oblik jednačine prave p je

$$p\ : x = 3 + 2t,\ y = 2t,\ z = t.$$

Tačka $T(3 + 2t, 2t, t)$ prave p pripada ravni γ pa mora da važi $3 + 2t + 3 \cdot 2t - t + 4 = 0$. Rešenje navedene jednačine je $t = -1$, tako da je tražena tačka

$$T(1, -2, -1).$$

(*Napomena:* Kako je prava p prikazana kao presek dve ravni, prodor prave p kroz ravan γ mogao se naći i rešavanjem sistema jednačina : $x - 2z - 3 = 0$, $y - 2z = 0$, $x + 3y - z + 4 = 0$.)

b) Kako prava q pripada ravni γ imamo da je $\vec{q} \perp \vec{n}_\gamma$, a iz $q \perp p$, sledi $\vec{q} \perp \vec{p}$, tako da je vektor pravca prave q kolinearan vektorskom proizvodu vektora $\vec{n}_\gamma$ i $\vec{p}$

$$\vec{n}_\gamma \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (5, -3, -4).$$

Znači, vektor pravca prave q je $\vec{q} = (5, -3, -4)$.
Jednačina prave q koja sadrži tačku T i ima vektor pravca $\vec{q}$ je

$$q : \frac{x - 1}{5} = \frac{y + 2}{-3} = \frac{z + 1}{-4}.$$

18. **Data je ravan** $\alpha : 2x - y - 5z + 1 = 0$.

    a) **Naći jednačinu ravni** β **koja je paralelna sa osama** x **i** y **i koja** z**-osu seče u tački koja pripada ravni** α.

    b) **Naći jednačinu prave** p **koja pripada ravni** α **i koja seče ose** x **i** y**.**

Rešenje:

a) Presek z-ose i ravni α je tačka $C(0,0,c)$. Znači mora da važi $2 \cdot 0 - 0 - 5 \cdot c + 1 = 0$, odnosano $c = \frac{1}{5}$, pa je tražena tačka

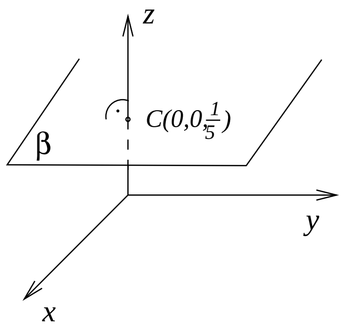
$$C(0,0,\frac{1}{5}).$$

Kako je ravan β paralelna sa x i y osom, važi da je $\vec{n}_\beta \perp \vec{\imath}$ i $\vec{n}_\beta \perp \vec{\jmath}$ iz čega sledi

$$\vec{n}_\beta = \vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} = (0,0,1).$$

Jednačina ravni β data je sa $\beta : z - \frac{1}{5} = 0$, tj.

$$\beta : 5z - 1 = 0.$$



b) Pošto prava p seče x i y osu, ona sadrži tačke $A(a,0,0)$ i $B(0,b,0)$. Iz $p \subset \alpha$ sledi $A, B \in \alpha$. Zamenjivanjem koordinata tačaka A i B u jednačinu ravni α dobijamo da je $A(-\frac{1}{2},0,0)$ i $B(0,1,0)$. Vektor pravca prave p kolinearan je sa vektorom $\overrightarrow{AB} = (\frac{1}{2},1,0) = \frac{1}{2}(1,2,0)$ tako da imamo da je

$$\vec{p} = (1,2,0)$$

tj. tražena prava je

$$p : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{0}.$$

19. **Date su ravni** $\alpha : x - y - 2z = -3$ **i** $\beta : x - 3y = 1$, **prava** $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ **i tačka** $P(2,2,-3)$.

a) Odrediti jednačinu prave q koja je presek ravni α i β.

b) Odrediti jednačinu ravni γ koja sadrži pravu p i tačku P.

c) Naći projekciju q' prave q na ravan γ.

Rešenje:

a) Kako prava q pripada ravnima α i β, vektor pravca $\vec{q}$ prave q je normalan na vektore normala $\vec{n}_\alpha$ i $\vec{n}_\beta$ datih ravni, a samim tim je kolinearan sa vektorom $\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$. Iz jednačina ravni α i β imamo $\vec{n_\alpha} = (1, -1, -2)$ i $\vec{n_\beta} = (1, -3, 0)$. Izračunajmo njihov vektorski proizvod:

$$\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (-6, -2, -2) = -2(3, 1, 1).$$

Ako se u jednačine ravni α i β uvrsti npr. $y = 0$, dobija se $x = 1$ i $z = 2$. Na taj način se dobija tačka $Q(1, 0, 2)$ koja pripada traženoj pravoj q.

Znači, jednačina prave q je

$$q : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}.$$

b) Vektor normale $\vec{n}_\gamma$ ravni γ normalan je na vektor pravca $\vec{p} = (1, -1, 1)$ prave p i na vektor $\overrightarrow{TP} = (0, 1, -2)$, gde je $T(2, 1, -1) \in p$. Vektorski proizvod $\vec{p} \times \overrightarrow{TP}$ je kolinearan sa vektorom $\vec{n}_\gamma$. Imamo da je

$$\vec{p} \times \overrightarrow{TP} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (1, 2, 1).$$

Jednačina ravni γ koja sadrži tačku P i normalna je na $\vec{n}_\gamma = (1, 2, 1)$ je

$$\gamma : x + 2y + z - 3 = 0.$$

c) Lako se proverava da tačka $Q(1, 0, 2) \in q$ pripada i ravni γ. Znači, prava q' sadrži tačku Q i projekciju proizvoljne tačke Q_1 sa prave q na ravan γ. Parametarski oblik jednačine prave q je

$$q : x = 3s + 1, \quad y = s, \quad z = s + 2.$$

Za npr. $s = -1$ dobija se tačka $Q_1(-2, -1, 1)$. Projekciju tačke Q_1 na ravan γ dobićemo kao presek prave n koja sadrži tačku Q_1 i normalna je na γ. Vektor pravca $\vec{n}$ prave n, kolinearan je sa $\vec{n}_\gamma$. Znači, jednačina prave n je

$$n : \frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1},$$

a njen parametarski oblik je

$$n : x = t - 2, \quad y = 2t - 1, \quad z = t + 1.$$

Presek prave n i ravni γ je tačka Q_1' koju dobijamo rešavanjem sistema jednačina

$$x = t - 2, \quad y = 2t - 1, \quad z = t + 1, \quad x + 2y + z - 3 = 0.$$

Rešenje ovog sistema je $t = 1, \ x = -1, \ y = 1, \ z = 2$, tako da je tražena tačka

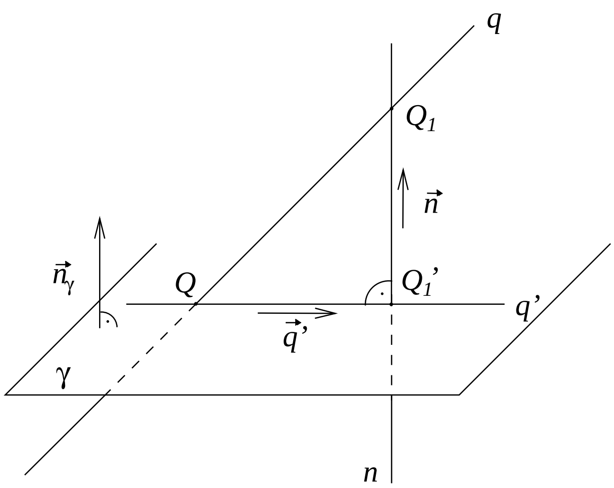
$$Q_1'(-1, 1, 2).$$

Kako $Q_1'(-1, 1, 2) \in q', \ Q(1, 0, 2) \in q'$, imamo da je

$$\vec{q'} = \overrightarrow{QQ_1'} = (-2, 1, 0),$$

a jednačina prave kroz tačke Q i Q_1' je

$$q' : \frac{x - 1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z - 2}{0}.$$



20. **Date su ravni $\alpha : x + 2y + 3z + 2 = 0$ i $\beta : x - y - z = 0$ i prave $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$ i $q : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{0}$.**

   a) **Ako je tačka A presek prave p i ravni α, a tačka B presek prave q i ravni β, odrediti jednačinu prave određene tačkama A i B.**

   b) **Odrediti vrednost parametra m, tako da ravan β bude normalna na ravan $\gamma : mx + y + 2z - 1 = 0$.**

Rešenje:

a) Kako tačka A pripada pravoj p i ravni α, njene koordinate $x = t+1$, $y = 2t$ i $z = t-1$ zadovoljavaju jednačinu ravni α pa važi $t+1+4t+3t-3+2=0$. Tražena tačka je

$$A(1,0,-1).$$

Kako je B presek prave q i ravni β, koordinate tačke B dobijaju se analognim postupkom iz parametarskog oblika jednačine prave q

$$q : x = 2k, \quad y = 3k+1, \quad z = 0$$

i jednačine ravni β

$$\beta : x - y - z = 0.$$

Tačka preseka je

$$B(-2,-2,0).$$

Vektor pravca prave l je kolinearan vektoru $\overrightarrow{AB} = (-3,-2,1)$. Jednačina prave koja sadrži tačke A i B je

$$l : \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{1}.$$

b) Kako ravan β treba da bude normalna na ravan γ, odgovarajući vektori normala treba da budu normalni. Iz jednačine ravni γ je $\vec{n}_\gamma = (m,1,2)$, a iz jednačine ravni β je $\vec{n}_\beta = (1,-1,-1)$. Na osnovu osobina skalarnog proizvoda

$$\vec{n}_\gamma \perp \vec{n}_\beta \;\Leftrightarrow\; \vec{n}_\gamma \cdot \vec{n}_\beta = 0 \;\Leftrightarrow\; m-1-2=0$$

dobijamo da je tražena vrednost parametra

$$m = 3.$$

21. **Date su ravni $\alpha : 2x+y+z-2=0$ i $\beta : x-y+2z-1=0$.**

a) Odrediti vrednost parametra m tako da tačka $M(1,1,m)$ pripada ravni α, a zatim naći rastojanje tačke M od ravni β.

b) Odrediti realne brojeve s i t tako da prava $l : \frac{x-s}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{t}$ pripada ravni β.

Rešenje:

a) Kako $M \in \alpha$, koordinate tačke M zadovoljavaju jednačinu ravni α, tj. mora da važi $2+1+m-2=0$. Rešenje date jednačine je $m=-1$, odnosno koordinate tačke M su

$$M(1,1,-1).$$

Da bismo odredili udaljenost tačke M od ravni β, naći ćemo pravu b normalnu na ravan β koja sadrži tačku M. Za vektor pravca $\vec{b}$, prave b možemo uzeti vektor $\vec{n}_\beta = (1, -1, 2)$, tako da je jednačina prave b

$$b : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}.$$

Neka je $B(t+1, -t+1, 2t-1)$ tačka preseka prave b i ravni β. Kako tačka B pripada ravni β, njene koordinate zadovoljavaju njenu jednačinu tako da dobijamo da je $t = \frac{1}{2}$. Zamenjivanjem dobijene vrednosti parametra t dobijamo traženu tačku

$$B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right).$$

Udaljenost tačke M od ravni β je jednaka intenzitetu vektora $\overrightarrow{MB}$

$$d(M,\beta) = |\overrightarrow{MB}| = \sqrt{\left(1-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-1-0\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

b) Iz jednačine prave l vidimo da prava prolazi kroz tačku $L(s, 0, -1)$ i da ima vektor pravca $\vec{l} = (0, 2, t)$. Da bi prava l pripadala ravni β, mora i tačka L pripadati ravni β, a vektor pravca $\vec{l}$ prave l mora biti normalan na vektor normale $\vec{n}_\beta$ ravni β. Zamenom koordinata tačke L u jednačinu ravni β dobija se

$$s = 3.$$

Primenom osobina skalarnog proizvoda imamo da je

$$\vec{n}_\beta \perp \vec{l} \Leftrightarrow \vec{n}_\beta \cdot \vec{l} = 0 \Leftrightarrow 0 - 2 + 2t = 0,$$

tako da je tražena vrednost parametra

$$t = 1.$$

22. **Date su prave** $a : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{0}$, $b : \frac{x}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{1}$ **i** $c : \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-3}{2}$, **ravan** $\alpha : 4x + y - z - 1 = 0$ **i tačka** $P(-1, 1, 5)$**. Odrediti koordinate temena trougla** ABC **ako je tačka** A **presek prave** a **i ravni** α**, tačka** B **presek prave** a **i prave** b**, a tačka** C **pripada pravoj** c**, ima celobrojne koordinate i njeno rastojanje od tačke** P **je** 5.

Rešenje:

Iz parametarskog oblika jednačine prave

$$a : x = t+1, \quad y = -t, \quad z = 0$$

i jednačine ravni
$$\alpha : 4x + y - z - 1 = 0,$$
za $t = -1$ dobijamo tačku
$$A(0, 1, 0).$$

Da bismo pronašli koordinate tačke B, potreban nam je i parametarski oblik jednačine prave b koji glasi

$$b : x = -2k, \quad y = k + 2, \quad z = k - 1.$$

Izjednačavanjem odgovarajućih koordinata iz parametarskog oblika jednačine prave a i parametarskog oblika jednačine prave b, dobijamo $k = 1$. Zamenom ove vrednosti u jednačinu prave b dobijamo koordinate tačke

$$B(-2, 3, 0).$$

Da bismo pronašli koordinate tačke C, napisaćemo i pravu c u parametarskom obliku

$$c : x = -m + 1, \quad y = 1, \quad z = 2m + 3.$$

Intenzitet vektora $\overrightarrow{PC}$ tj. rastojanje tačke C od tačke P jednako je 5, odnosno

$$|\overrightarrow{PC}| = \sqrt{(-m + 1 + 1)^2 + (1 - 1)^2 + (2m + 3 - 5)^2} =$$

$$= \sqrt{5m^2 - 12m + 8} = 5.$$

Kvadriranjem navedene jednakosti dobija se jednačina $5m^2 - 12m + 8 = 25$, čija su rešenja $m_1 = \frac{32}{10}$ i $m_2 = -1$. Na osnovu uslova zadatka, koordinate tačke C su celobrojne, tako da uzimamo da je $m = -1$. Zamenom ove vrednost u parametarski oblik jednačine prave c, dobijamo tačku

$$C(2, 1, 1).$$

23. **Date su prave** $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{3}$ **i** $q : \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$.

   a) **Naći jednačinu ravni α koja sadrži pravu p i paralelna je sa pravom q.**

   b) **Naći rastojanje koordinatnog početka od prave p.**

Rešenje:

a) Na osnovu uslova zadatka prava p treba da leži u ravni α, tako da je $\vec{n}_\alpha \perp \vec{p}$, a iz uslova da su ravan α i prava q paralelne sledi da je

$\vec{n}_\alpha \perp \vec{q}$. Znači da je vektor normale ravni α kolinearan vektorskom proizvodu vektora $\vec{p}$ i $\vec{q}$

$$\vec{p}\times\vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (3,0,-1).$$

Kako prava p pripada traženoj ravni, imamo da i tačka $P(1,2,-3)$ prave p pripada ravni α, tako da je jednačina ravni

$$\alpha : 3x - z - 6 = 0.$$

b) Prvo ćemo napisati jednačinu ravni β koja sadrži koordinatni početak O i normalna je na pravu p. Dakle, $O \in \beta$, $\vec{n}_\beta = \vec{p}$ pa je jednačina ravni β

$$\beta : x + 2y + 3z = 0.$$

U preseku prave p i ravni β dobićemo tačku O_1 - projekciju tačke O na pravu p. Pošto $O_1 \in p$ njene koordinate su oblika

$$p : x = 1 + t, \quad y = 2 + 2t, \quad z = -3 + 3t.$$

Zamenom u jednačinu ravni β dobijamo da je $t = \frac{2}{7}$, pa je tražena tačka

$$O_1\left(\frac{9}{7}, \frac{18}{7}, -\frac{15}{7}\right).$$

Rastojanje koordinatnog početka od prave p je jednako intenzitetu vektora $\overrightarrow{OO_1}$

$$|\overrightarrow{OO_1}| = \sqrt{\left(\frac{9}{7}\right)^2 + \left(\frac{18}{7}\right)^2 + \left(-\frac{15}{7}\right)^2} = 3\sqrt{\frac{10}{7}}.$$

24. **Neka su date ravan $\alpha : 3x - 4y + 2z = 1$ i prava $p : \frac{1-x}{2} = -\frac{3y}{2} = \frac{z+2}{3}$.**

a) Odrediti jednačinu prave q koja pripada ravni α, prolazi kroz presečnu tačku T prave p i ravni α, i normalna je na pravu p.

b) Odrediti jednačinu ravni β koja sadrži pravu p i normalna je na ravan α.

Rešenje:

a) Zamenom x, y i z iz parametarskog oblika jednačine prave p

$$x = -2t + 1, \quad y = -\frac{2}{3}t, \quad z = 3t - 2$$

u jednačinu ravni α,

$$\alpha : 3x - 4y + 2z = 1$$

dobija se jednačina $\frac{8}{3}t - 1 = 1$, čije je rešenje $t = \frac{3}{4}$, tako da tražena tačka ima koordinate

$$T(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}).$$

Vektor pravca prave q je normalan na vektor pravca prave p i na vektor normale ravni α, tako da je vektor $\vec{q}$ kolinearan sa njihovim vektorskim proizvodom. Kako je $\vec{p} \times \vec{n}_\alpha = \frac{1}{3}(32, 15, 18)$ dobijamo

$$\vec{q} = (32, 15, 18).$$

Konačno, jednačina prave q, koja prolazi kroz tačku T i ima vektor pravca $\vec{q}$, je : $\frac{x+\frac{1}{2}}{32} = \frac{y+\frac{1}{2}}{15} = \frac{z-\frac{1}{4}}{18}$, odnosno

$$q : \frac{2x+1}{64} = \frac{2y+1}{30} = \frac{4z-1}{72}.$$

b) Neka je $\vec{n}_\beta$ vektor normale tražene ravni β. Kako je $p \subset \beta$ i $\beta \perp \alpha$, sledi da se za vektor normale ravni β može uzeti vektor pravca prave q, tj.

$$\vec{n}_\beta = (32, 15, 18).$$

Kako prava p leži u traženoj ravni β, tačka $P(-1, 0, -2)$ prave p pripada i ravni β. Jednačina ravni β koja sadrži tačku P i ima vektor normale $\vec{n}_\beta$ je

$$32x + 15y + 18z + 68 = 0.$$

25. **Data je ravan $\alpha : 5x - y - z = 2$ i prave $p : \frac{x+1}{2} = \frac{y-a}{3} = \frac{z+1}{b}$ i $q : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$.**

a) Odrediti parametre a i b tako da prava p pripada ravni α.

b) Naći jednačinu ravni β koja sadrži pravu q i koja je ortogonalna na ravan α.

Rešenje:

a) Prava p leži u ravni α ako sve tačke prave p pripadaju ravni α. Tačka prave p je $P(-1, a, -1)$ i ona pripada ravni α ako važi: $5(-1) - a - (-1) = 2$, odnosno

$$a = -6.$$

Prava p leži u ravni α ako je vektor pravca te prave, $\vec{p} = (2, 3, b)$ normalan na vektor normale ravni α, $\vec{n}_\alpha = (5, -1, -1)$ i ako imaju zajedničku tačku. Na osnovu osobina skalarnog proizvoda imamo da su dva vektora normalna ako je njihov skalarni proizvod jednak nuli: $\vec{p}\cdot\vec{n}_\alpha = 10-3-b=0$. Rešenje navedene jednačine predstavlja traženu vrednost parametra, tako da je

$$b=7.$$

b) Iz $q\subset\beta$ sledi da mora biti $\vec{q}\perp\vec{n}_\beta$, gde je $\vec{q}=(1,2,2)$, a iz $\alpha\perp\beta$ sledi $\vec{n}_\alpha\perp\vec{n}_\beta$, gde je $\vec{n}_\alpha=(5,-1,-1.)$ Vektor normale ravni β, $\vec{n}_\beta$ kolinearan je vektorskom proizvodu vektora $\vec{q}$ i $\vec{n}_\alpha$

$$\vec{q}\times\vec{n}_\alpha = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (0,11,-11) = 11(0,1,-1),$$

tako da možemo uzeti da je $\vec{n}_\beta=(0,1,-1)$.
Kako je $q\subset\beta$, svaka tačka prave q je i tačka ravni β. Uzmimo, na primer, tačku $Q(0,0,-1)\in q$. Tada je jednačina ravni

$$\beta: y-z-1=0.$$

26. **Neka su date ravan $\alpha: 5x-y+2z=3$ i prava $p: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{1}$.**

a) Odrediti jednačinu prave q koja sadrži koordinatni početak i presečnu tačku T prave p i ravni α.

b) Odrediti jednačinu ravni β koja sadrži pravu p i normalna je na ravan α.

Rešenje:

a) Jednačina p u parametarskom obliku je $p: x=1+2t,\ \ y=-2t,\ \ z=-1+t$. Tačku T dobijamo rešavajući sistem koji čine parametarska jednačina prave p i jednačina ravni α. Tražena tačka je

$$T(1,0,-1).$$

Kako prava q sadrži i koordinatni početak $O(0,0,0)$, imamo da je $\vec{q}=\vec{OT}=(1,0,-1)$ i jednačina prave q je

$$q: \frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{-1}.$$

b) Iz $p\subset\beta$ sledi $\vec{n_\beta}\perp\vec{p}$, a iz $\alpha\perp\beta$ sledi $\vec{n_\beta}\perp\vec{n_\alpha}$, tako da ćemo $\vec{n_\beta}$ dobiti kao vektorski proizvod $\vec{p}$ i $\vec{n_\alpha}$:

$$\vec{p}\times\vec{n_\alpha} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-3,1,8).$$

Kako je $p\subset\beta$ onda i $T\in\beta$, tako da je jednačina tražene ravni

$$\beta: -3x+y+8z+11=0.$$

27. **Date su prave** $a : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{1}$ **i** $b : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{0}$ **i ravan** $\alpha : 2x + y + z + 1 = 0$**.**

    a) **Odrediti jednačinu prave** p **koja sadrži tačke** A **i** B**, ako je tačka** A **presek prave** a **i ravni** α**, a tačka** B **je presek prave** a **i prave** b**.**

    b) **Napisati jednačinu ravni** γ **koja sadrži središte duži** AB **i paralelna je ravni** α**.**

Rešenje:

a) Da bismo našli jednačinu prave p moramo prvo odrediti koordinate tačaka A i B. Za to je potrebno napisati jednačine pravih a i b u parametarskom obliku

$$a : x = t + 1,\ \ y = -t,\ \ z = t - 1,$$

$$b : x = 2k + 1,\ \ y = k - 3,\ \ z = 1.$$

Kako je $\{A\} = a \cap \alpha$, koordinate tačke A se dobijaju zamenjivanjem parametarskog oblika jednačine prave a u jednačinu ravni α. Za $t = -1$ tačka A ima koordinate

$$A(0, 1, -2).$$

Koordinate tačke B se dobijaju rešavanjem sistema jednačina koji čine parametarski oblik jednačine prave a i parametarski oblik jednačine prave b. Za $t = 2$, odnosno $k = 1$, koordinate tačke B su

$$B(3, -2, 1).$$

Vektor pravca $\vec{p}$ prave p je kolinearan vektoru $\overrightarrow{AB} = (3, -3, 3)$. Odavde vidimo da se može uzeti da je

$$\vec{p} = (1, -1, 1).$$

Dakle, jednačina prave p je

$$p : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}.$$

b) Obeležimo sa S središte duži AB. Koordinate tačke S su

$$x = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2},\ \ y = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2},\ \ z = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2},$$

tj.

$$S\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Kako je ravan γ paralelna sa ravni α, vektor normale ravni γ je kolinearan vektoru normale ravni α, tako da možemo uzeti da je

$$\vec{n}_\gamma = \vec{n}_\alpha = (2,1,1).$$

Dalje, jednačina ravni γ je

$$\gamma : 2x + y + z - 2 = 0.$$

28. **Date su tačke** $A(2,2,3), B(0,0,5)$ **i** $C(1,4,4)$.

a) Odrediti jednačinu ravni α **koja je njima određena.**

b) U ravni α **naći tačku** T **koja je podjednako udaljena od tačaka** A, B **i** C. **(Tačka** T **je centar opisane kružnice za trougao** ABC.**)**

Rešenje:

a) Kako tačke A, B i C pripadaju ravni α, vektor normale ravni α je normalan na vektore $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{CA}$, gde je $\overrightarrow{BA} = 2(1,1,-1)$, i $\overrightarrow{CA} = (1,-2,-1)$. Vektor normale ravni α je kolinearan sa vektorom

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{CA} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -3(1,0,1).$$

Jednačina ravni α koja sadrži tačku B i normalna je na vektor $\vec{n}_\alpha = (1,0,1)$ je

$$\alpha : x + z - 5 = 0.$$

b) Za tačku $T(x,y,z)$ na osnovu uslova zadatka važi

$$|\overrightarrow{AT}| = |\overrightarrow{TB}|, \quad |\overrightarrow{TB}| = |\overrightarrow{TC}|, \quad T \in \alpha.$$

Odnosno,

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-5)^2},$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z-5)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2},$$

$$x + z - 5 = 0.$$

Kvadriranjem i zamenom $x = 5 - z$ dobijamo sistem jednačina:

$$(3-z)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = (5-z)^2 + y^2 + (z-5)^2$$

$$(5-z)^2 + y^2 + (z-5)^2 = (4-z)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2.$$

Nakon sređivanja ovog sistema, dobijamo linearan sistem od dve jednačine sa dve nepoznate $(-4y + 8z = 28, \quad 4y - 2z = -1) \Leftrightarrow (x = \frac{1}{2}, \ \ y = 2 \wedge z = \frac{9}{2})$, tako da je tražena tačka

$$T\Big(\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{2}\Big).$$

Drugi način: Neka su S_1, S_2 i S_3 sredine duži AB, BC i AC, redom. Tada je

$$\begin{aligned} x_{S_1} &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+0}{2} = 1, \\ y_{S_1} &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+0}{2} = 1, \\ z_{S_1} &= \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{3+5}{2} = 4. \end{aligned}$$

Dakle, tražena tačka je

$$S_1(1, 1, 4).$$

Analogno dobijamo $S_2\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{2}\right)$ i $S_3(\frac{3}{2}, 3, \frac{7}{2})$.
Posmatrajmo ravan α_1, koja sadrži tačku S_1 i normalna je na vektor $\overrightarrow{AB} = -2(1, 1, -1)$. Kako je vektor normale ravni α_1 kolinearan vektoru $\overrightarrow{AB}$, možemo uzeti da je $\vec{n}_{\alpha_1} = (1, 1, -1)$, tako da je jednačina ravni

$$\alpha_1 : x + y - z + 2 = 0.$$

Nađimo sad jednačinu ravni α_2, koja sadrži tačku S_2 i normalna je na vektor $\overrightarrow{BC} = (1, 4, -1)$. Znači, imamo da je $\vec{n}_{\alpha_2} = (1, 4, -1)$, tako da je

$$\alpha_2 : x + 4y - z - 4 = 0.$$

Analogno dobijamo jednačinu ravni α_3 koja sadrži tačku S_3 i normalana je vektor $\overrightarrow{AC} = (-1, 2, 1)$. Vektor normale ravni α_3 je $\vec{n}_{\alpha_3} = (-1, 2, 1)$ i ravan je

$$\alpha_3 : -x + 2y + z - 8 = 0.$$

Tražena tačka $T(x, y, z)$ pripada ravnima α_1, α_2, α_3 i α tako da njene koordinate zadovoljavaju sistem jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & - & z & + & 2 & = & 0 \\ x & + & 4y & - & z & - & 4 & = & 0 \\ -x & + & 2y & + & z & - & 8 & = & 0 \\ x & & & + & z & - & 5 & = & 0. \end{array}$$

Rešenje navedenog sistema je $x = \frac{1}{2}, \ y = 2, \ z = \frac{9}{2}$, tako da je tražena tačka

$$T\Big(\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{2}\Big).$$

(*Napomena:* Ravan α_1 koja sadrži sredinu duži AB i normalna je na vektor $\overrightarrow{AB}$ je simetralna ravan duži AB. Analogno imamo da je α_2 simetralna ravan duži BC i α_3 simetralna ravan duži AC.)

29. **Data je prava** $q: \frac{x}{-2} = \frac{y-5}{4} = \frac{z-6}{5}$ **i tačka** $M(2,6,-3)$. **Naći:**

a) Jednačinu prave p **koja sadrži tačku** M **i paralelna je sa pravom** q.

b) Jednačinu ravni α **koja sadrži prave** p **i** q.

c) Rastojanje između pravih p **i** q.

Rešenje:

a) Kako je $p \| q$, imamo da je $\vec{p} = \vec{q} = (-2,4,5)$. Prava p sadrži tačku M i ima vektor pravca $\vec{p}$, tako da je tražena jednačina

$$p: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-6}{4} = \frac{z+3}{5}.$$

b) Vektor normale ravni α kolinearan je sa vektorskim proizvodom vektora $\vec{p}$ i $\overrightarrow{QM} = (2,1,-9)$, gde je $Q(0,5,6) \in q$. Dakle, $\vec{n}_\alpha = (41,8,10)$. Kako tačka $Q \in \alpha$, sledi da je tražena ravan

$$\alpha: 41x + 8y + 10z - 100 = 0.$$

c) Neka je β ravan koja sadrži tačku M i normalna je na pravu p. Tada je $\vec{n}_\beta = \vec{p}$, i tražena jednačina ravni je

$$\beta: -2x + 4y + 5z - 5 = 0.$$

Nađimo tačku M' koja je presek ravni β i prave q. Parametarski oblik jednačine prave q je

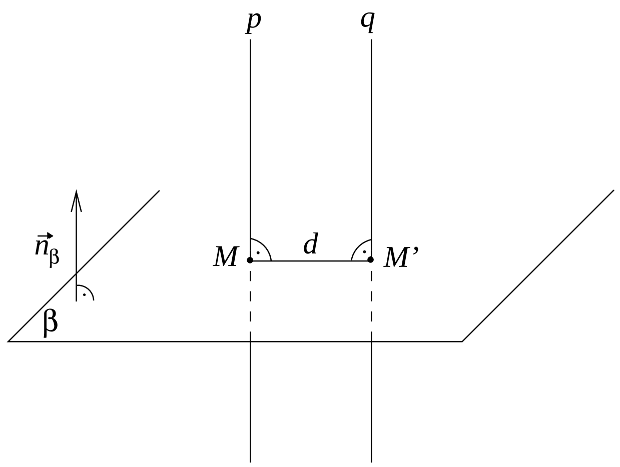
$$q: x = -2t, \quad y = 5 + 4t, \quad z = 6 + 5t.$$

Zamenjivanjem u jednačinu ravni β dobijamo jednačinu $4t+20+16t+30+25t-5=0$, čije rešenje je $t=-1$. Uvrštavanjem parametra t u parametarski oblik jednačine prave q dobijamo $x=2,\ y=1,\ z=1$, tj. presek prave q i ravni β je

$$M'(2,1,1).$$

Dakle,

$$d(p,q) = |\overrightarrow{M'M}| = \sqrt{(2-2)^2 + (6-1)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{41}.$$



Zadaci za samostalni rad

1. Izračunati visinu piramide iz vrha S ako su temena piramide $A(3,5,3)$, $B(-2,11,-5)$, $C(1,-1,4)$ i $S(0,6,4)$.

   Rezultat:
   $H_S = 3$.

2. Date su tri ravni. Ravan α je normalna na vektor $(\lambda+3, 1, 3\lambda+3)$ i sadrži tačku $A(-1,0,1)$. Ravan β je normalna na vektor $(2,\lambda,2)$ i sadrži tačku $B(0,2,0)$. Ravan γ je normalna na vektor $(3,1,\lambda+3)$ i sadrži tačku $C(1,-1,0)$.

   a) Napisati jednačine ravni α, β i γ.

   b) Za koju vrednost parametra λ će se te tri ravni seći u jednoj tački?

   c) Naći tačku D tako da četvorougao $ABCD$ bude paralelogram.

   Rezultat:

   a) $\alpha : (\lambda+3)x + y + (3\lambda+3)z - 2\lambda = 0$.
   $\beta : 2x + \lambda y + 2z - 2\lambda = 0$.
   $\gamma : 3x + y + (\lambda+3)z - 2 = 0$.

   b) $\lambda \neq 0,\ \lambda \neq 1,\ \lambda \neq 2$.

   c) $D(0,-3,1)$.

3. Napisati jednačinu ravni α koja sadrži koordinatni početak $O(0,0,0)$ i pravu preseka ravni $\beta : 4x - y + 3z - 1 = 0$ i $\gamma : x - 5y - z - 2 = 0$.

   Rezultat:

   $\alpha : 7x + 3y + 7z = 0.$

4. Date su tačke $A(2,2,3)$, $B(2,-1,0)$ i $P(1,2,2)$. Naći udaljenost tačke P od prave određene tačkama A i B.

   Rezultat:
   $d(P,p) = \frac{\sqrt{6}}{2}.$

5. Odrediti parametar a tako da prava $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{a}$ bude paralelna sa ravni $\alpha : x - 2y + z - 5 = 0$ i naći njihovo rastojanje.

   Rezultat:
   $a = 4, \quad d(p,\alpha) = \frac{\sqrt{6}}{2}.$

6. Prava p je data presekom ravni $\alpha : x - 2z - 3 = 0$ i $\beta : y - 2z = 0$.

   a) Odrediti tačku T koja je presek prave p i ravni $\gamma : x + 3y - z + 4 = 0$.

   b) Naći jednačinu prave q koja sadrži tačku T, leži u ravni γ i normalna je na pravu p.

   Rezultat:
   a) $T(1,-2,-1)$.
   b) $q : \frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+1}{-4}$.

7. Kroz tačku $Q(2,-3,0)$ postaviti pravu q koja je paralelna sa ravni $\alpha : 2x + y - z + 5 = 0$ i koja seče pravu $p : \frac{x}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-5}{-1}$.

   Rezultat:
   $q : \frac{x-2}{0} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{1}.$

8. Date su ravni $\alpha : Ax + 3y + 4z - 4 = 0$, $\beta : x + By + Cz = 0$ i $\gamma : 2x - y + z = D$.

   a) Odrediti A, B, C i D tako da se ravni α, β i γ seku u tački $T(1,0,1)$ i da je ravan β normalna na ravan γ.

   b) Naći pravu p koja je presek ravni β i γ.

   Rezultat:
   a) $A = 0,\ B = 1,\ C = -1,\ D = 3.$
   b) $p : \frac{x-1}{0} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{-3}$.

9. Date su ravan $\alpha : 2x - y - z = 0$, prava $b : \frac{x-p}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{q}$ i tačke $A(a,2,4)$ i $B(0,0,2)$.

a) Odrediti parametar a tako da tačka A pripada ravni α.
b) Odrediti parametre p i q tako da prava b leži u ravni α.
c) Odrediti jednačinu ravni β koja sadrži tačku B i pravu b.
d) Odrediti tačku C koja pripada ravni β i čija je projekcija na ravan α tačka A.

Rezultat:
a) $a = 3$.
b) $p = 1,\ q = 0$.
c) $z - 2 = 0$.
d) $C(7, 0, 2)$.

10. Data je prava $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-s}{3}$ i ravan $\alpha : mx + 2y + z - 7 = 0$.

a) Odrediti parametre s i m tako da prava p pripada ravni α.
b) Kroz pravu p postaviti ravan β normalnu na ravan α.

Rezultat:
a) $s = 2;\ m = -1$.
b) $\beta : 7x + 4y - z - 17 = 0$.

11. Date su tačka $B(2, 13, -9)$, i prava $p : \frac{x-3}{0} = \frac{y-12}{4} = \frac{z+2}{-3}$. Ako je $A(a, 8, c)$ tačka prave p odrediti tačku C te prave tako da trougao ABC bude jednakokraki sa osnovicom AC.

Rezultat:
$A(3, 8, 1),\ C(3, 24, -11)$.

12. Napisati jednačinu prave p koja prolazi kroz tačku $A(1, -5, 3)$ i sa $x-$osom i $y-$osom zaklapa redom uglove $\frac{\pi}{3}$ i $\frac{\pi}{4}$.

Rezultat:
$p : \frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{\sqrt{2}} = \frac{z-3}{\pm 1}$.

13. Naći zajedničku normalu n za mimoilazne prave $p : \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-3}$ i $q : \frac{x-1}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z-3}{-1}$.

Rezultat:
$n : \frac{x+3}{8} = \frac{y+\frac{3}{31}}{9} = \frac{z-\frac{44}{31}}{14}$.

14. Date su prave $p : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z}{-1}$ i $q : \frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{-2}$. Naći vrednost parametra m tako da prave p i q pripadaju istoj ravni α, a zatim naći tačku T_1 simetričnu tački $T(3, 4, 11)$ u odnosu na ravan α.

Rezultat:
$m = 0,\ \alpha : 3x + 5y + 9z - 13 = 0,\ T_1(-3, -6, -7)$.

3

Kompleksni brojevi

- **Kompleksan broj** je izraz oblika $x + yi$, gde je $x, y \in \mathbf{R}$, a i je **imaginarna jedinica** za koju važi

$$i^2 = -1.$$

  Ako je $z = x + yi$, tada je x **realni deo** kompleksnog broja z, što označavamo $Re(z) = x$, a y je **imaginarni deo** kompleksnog broja z, u oznaci $Im(z) = y$.

- Na osnovu definicije imaginarne jedinice, za $k \in \mathbf{Z}$ sledi

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i.$$

- Dva kompleksna broja z_1 i z_2 su **jednaka** ako i samo ako je $Re(z_1) = Re(z_2)$ i $Im(z_1) = Im(z_2)$.

- Kompleksan broj $\bar{z} = x - yi$ je **konjugovan** kompleksnom broju $z = x + yi$.

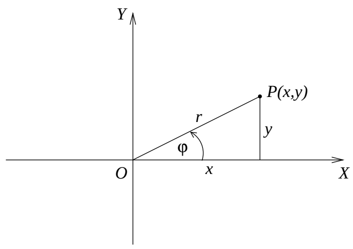
  Primetimo da važi

$$Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad \bar{\bar{z}} = z.$$

- Kompleksan broj $x + yi$ određen je parom realnih brojeva (x, y) i na taj način se svakom kompleksnom broju može jednoznačno dodeliti jedna tačka $P(x, y)$ ravni i obrnuto, svakoj tački kompleksan broj. Ta ravan se zove kompleksna ravan ili Gausova ravan ili z-ravan, x-osa se zove realna osa, a y-osa imaginarna osa.

  Ako je $P(x, y)$ tačka kompleksne ravni koja odgovara kompleksnom broju $x + yi$, onda se intenzitet radijus vektora tačke $P(x, y)$ naziva **moduo kompleksnog broja** z (u oznaci $|z|$), a ugao koji OP zaklapa sa pozitivnim smerom x-ose se naziva **argument kompleksnog broja** z (u oznaci $arg(z) = \varphi$).

Svakom kompleksnom broju $z \neq 0$ odgovara samo jedna vrednost φ iz intervala $(-\pi, \pi]$ i tu vrednost nazivamo **glavna vrednost argumenta**.



Ako je $z = x + yi$, $r = |z|$ i $\arg(z) = \varphi$, onda očigledno važi

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

pa kompleksan broj z možemo zapisati

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

što zovemo **trigonometrijskim oblikom kompleksnog broja** z.

Napomenimo da za argument kompleksnog broja $z = x+yi$ važi i jednačina

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x},$$

pri čemu ona ima dva rešenja na intervalu $(-\pi, \pi]$. Argument $\arg(z) = \varphi$ biramo u zavisnosti od znaka x i y, odnosno od toga u kom kvadrantu se nalazi tačka $P(x, y)$ koja odgovara kompleksnom broju z.

- Na osnovu Ojlerove (Euler) formule $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{\varphi i}$, dobijamo **eksponencijalni oblik kompleksnog broja**

$$z = re^{\varphi i}.$$

Eksponencijalni oblik konjugovano kompleksnog broja je $\bar{z} = re^{-\varphi i}$.

Na osnovu Ojlerove formule važi

$$\cos\varphi = \frac{e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}}{2i}.$$

Operacije u skupu kompleksnih brojeva

Neka su dati kompleksni brojevi

$$z = x + yi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{\varphi i},$$

$$z_k = x_k + y_k i = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k) = r_k e^{\varphi_k i}, \quad k = 1, 2.$$

- Tada je

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + (x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)i =$$

$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 e^{(\varphi_1+\varphi_2)i},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} \cdot \frac{x_2 - y_2 i}{x_2 - y_2 i} = \frac{(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2) + (y_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2)i}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\,(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2}\,e^{(\varphi_1-\varphi_2)i},$$

- Za proizvod i količnik kompleksnih brojeva z_1 i z_2 važi

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad arg(z_1 \cdot z_2) = arg(z_1) + arg(z_2) = \varphi_1 + \varphi_2,$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2) = \varphi_1 - \varphi_2.$$

- Sabiranje komleksnog broja $z_1 = x_1 + y_1 i$ sa kompleksnim brojem $z_2 = x_2 + y_2 i$ predstavlja translaciju vektora z_1 za radijus vektor tačke koja odgovara broju z_2.

  Množenje kompleksnog broja z sa realnim brojem $a \neq 0 \quad (arg(a) = 0)$ geometrijski predstavlja homotetiju sa centrom u koordinatnom početku i koeficijentom a.

  Množenje kompleksnog broja z kompleksnim brojem čiji je moduo jednak jedinici (broj oblika $e^{\varphi i}$), geometrijski predstavlja rotaciju oko koordinatnog početka za ugao φ.

- Za stepenovanje kompleksnih brojeva koristimo binomnu formulu

$$z^n = (x + yi)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, x^{n-k}\,(yi)^k,$$

a za kompleksan broj zapisan u trigonometrijskom ili eksponencijalnom obliku Moavrovu (Moivre) formulu:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n e^{n\varphi i}.$$

- Neka je $n \in \mathbf{N}$. Broj w je n-ti koren kompleksnog broja z ako je $w^n = z$. Tada je $w = \sqrt[n]{z}$. Na osnovu Moavrove formule važi

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\, e^{\frac{\varphi+2k\pi}{n}i},$$
$$k = 0, 1, \ldots n-1,$$

što znači da n-ti koren kompleksnog broja z ($z \neq 0$) ima n različitih vrednosti. Geometrijski, predstavljeni u kompleksnoj ravni, n vrednosti n-tog korena kompleksnog broja z, obrazuju temena pravilnog n-tougla koji je upisan u kružnicu sa centrom u koordinatnom početku, poluprečnika $\sqrt[n]{r}$.

Zadaci

1. **Ako je** $z_1 = 2 + i,\ z_2 = 3 - 2i$ **i** $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, **izračunati**

a) $|3z_1 - 4z_2|$. **b)** $z_1^3 - 3z_1^2 + 4z_1 - 8$.

c) $(\bar{z}_3)^4$. **d)** $\left|\frac{2z_2 + z_1 - 5 - i}{2\bar{z}_1 - z_2 + 3 - i}\right|^2$.

Rešenje:
a)
$$|3z_1 - 4z_2| = |3(2+i) - 4(3-2i)| = |6 + 3i - 12 + 8i| =$$
$$= |-6 + 11i| = \sqrt{(-6)^2 + (11)^2} = \sqrt{157}.$$

b)
$$z_1^3 - 3z_1^2 + 4z_1 - 8 = (2+i)^3 - 3(2+i)^2 + 4(2+i) - 8 =$$
$$= 2^3 + 3\cdot(2)^2 i + 3\cdot 2i^2 + i^3 - 3(4 + 4i + i^2) + 8 + 4i - 8 =$$
$$= 8 + 12i - 6 - i - 12 - 12i + 3 + 8 + 4i - 8 = -7 + 3i.$$

c)
$$(\bar{z}_3)^4 = \left(\overline{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)^4 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4 = \left[\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2\right]^2 =$$
$$= \left[\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2\right]^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

d)

$$\left|\frac{2z_2+z_1-5-i}{2\bar{z}_1-z_2+3-i}\right|^2=\left|\frac{2(3-2i)+(2+i)-5-i}{2(2-i)-(3-2i)+3-i}\right|^2=\left|\frac{3-4i}{4-i}\right|^2=$$

$$=\frac{|3-4i|^2}{|4-i|^2}=\frac{(\sqrt{3^2+(-4)^2})^2}{(\sqrt{4^2+(-1)^2})^2}=\frac{25}{17}.$$

2. **Predstaviti u trigonometrijskom i eksponencijalnom obliku kompleksne brojeve**

$$z_1=1+\sqrt{3}i,\quad z_2=-2+2i,\quad z_3=-1-\sqrt{3}i,\quad z_4=\sqrt{3}-i,$$

$$z_5=2,\quad z_6=-3,\quad z_7=2i,\quad z_8=-i,$$

a zatim izračunati z_1+z_2 i z_1-z_2. Brojeve $z_1\cdot z_2$ i $\frac{z_1}{z_2}$ predstaviti u trigonometrijskom i eksponencijalnom obliku.

Rešenje:

Kako je $r_1=|z_1|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2,$ imamo

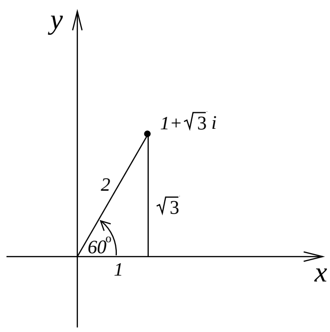
$$z_1=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=$$

$$=2(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\ \text{ tj.}$$

$$\cos\varphi_1=\frac{1}{2},\quad \sin\varphi_1=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

znači

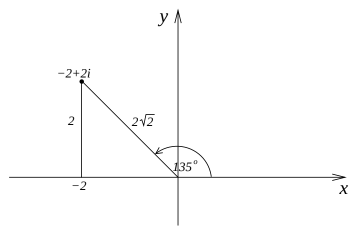
$$\varphi_1=\frac{\pi}{3},$$



pa je $z_1=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=2e^{\frac{\pi}{3}i}$.

Moduo kompleksnog broja $z_2=-2+2i$ je $r_2=|z_2|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$. Kako je

$$\cos\varphi_2 = -\frac{2}{2\sqrt{2}}, \quad \sin\varphi_2 = \frac{2}{2\sqrt{2}},$$



sledi $\quad \varphi_2 = \dfrac{3\pi}{4}$, tj.

$$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4}i}.$$

Analogno rezonujući i vodeći računa da se glavni argument $arg(z)$ kompleksnog broja nalazi u intervalu $(-\pi, \pi]$, dobijamo

$$\begin{aligned}
z_3 = &\quad -1-\sqrt{3}i = 2(\cos(-\tfrac{2\pi}{3}) + i\sin(-\tfrac{2\pi}{3})) = 2\, e^{-\frac{2\pi}{3}i},\\
z_4 = &\quad \sqrt{3}-i = 2(\cos(-\tfrac{\pi}{6}) + i\sin(-\tfrac{\pi}{6})) = 2\, e^{-\frac{\pi}{6}i},\\
z_5 = &\quad 2 = 2(\cos 0 + i\sin 0) = 2\, e^{0\cdot i},\\
z_6 = &\quad -3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi) = 3\, e^{\pi i},\\
z_7 = &\quad 2i = 2(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}) = 2\, e^{\frac{\pi}{2}i},\\
z_8 = &\quad -i = \cos(-\tfrac{\pi}{2}) + i\sin(-\tfrac{\pi}{2})) = \ e^{-\frac{\pi}{2}i}.
\end{aligned}$$

Zbir i razlika kompleksnih brojeva z_1 i z_2 dati su sa

$$z_1 + z_2 = (1+\sqrt{3}i) + (-2+2i) = (1-2) + (2+\sqrt{3})i = -1 + (2+\sqrt{3})i,$$

$$z_1 - z_2 = (1+\sqrt{3}i) - (-2+2i) = (1+2) + (\sqrt{3}-2)i = 3 + (\sqrt{3}-2)i.$$

Proizvod i količnik kompleksnih brojeva z_1 i z_2 su dati sa

$$\begin{aligned}
z_1\cdot z_2 &= (1+\sqrt{3}i)\cdot(-2+2i) = -2-2\sqrt{3} + (2-2\sqrt{3})i,\\
z_1\cdot z_2 &= 2\cdot 2\sqrt{2}(\cos(\tfrac{\pi}{3}+\tfrac{3\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{\pi}{3}+\tfrac{3\pi}{4})) =\\
&= 4\sqrt{2}(\cos\tfrac{13\pi}{12} + i\sin\tfrac{13\pi}{12}) =\\
&= 4\sqrt{2}(\cos(-\tfrac{11\pi}{12}) + i\sin(-\tfrac{11\pi}{12})) = 4\sqrt{2}\, e^{-\frac{11\pi}{12}i},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{1+\sqrt{3}i}{-2+2i}\cdot\frac{-2-2i}{-2-2i} = \frac{1}{8}(-2+2\sqrt{3} + (-2\sqrt{3}-2)i) =\\
&= \frac{1}{4}(\sqrt{3}-1-(\sqrt{3}+1)i),\\
\frac{z_1}{z_2} &= \tfrac{2}{2\sqrt{2}}(\cos(\tfrac{\pi}{3}-\tfrac{3\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{\pi}{3}-\tfrac{3\pi}{4})) =\\
&= \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos(-\tfrac{5\pi}{12}) + i\sin(-\tfrac{5\pi}{12})) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\, e^{-\frac{5\pi}{12}i}.
\end{aligned}$$

3. **Izračunati vrednost izraza** $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ **ako je** $z_1 = i$ **i** $z_2 = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Rešenje:

Zamenjujući z_1 i z_2 i primenjujući pravila za množenje i deljenje kompleksnih brojeva, dobijamo

$$\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} = \frac{i+\frac{1+i}{\sqrt{2}}}{1+i\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}} = \frac{1+(\sqrt{2}+1)i}{\sqrt{2}-1+i} =$$

$$= \frac{1+(\sqrt{2}+1)i}{\sqrt{2}-1+i}\cdot\frac{\sqrt{2}-1-i}{\sqrt{2}-1-i} = \frac{2\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1.$$

4. **Odrediti kompleksan broj** z **koji se nalazi u prvom kvadrantu i zadovoljava uslove** $|z| = 5$ **i** $Im(z) = Re(z) - 1$.

Rešenje:

Neka je traženi kompleksni broj z oblika $z = x + yi$. Iz uslova zadatka dobijamo dve jednačine

$$\sqrt{x^2+y^2} = 5, \quad y = x - 1.$$

Kvadriranjem prve jednačine i zamenom y iz druge jednačine, dobijamo kvadratnu jednačinu

$$x^2 + (x-1)^2 = 25,$$

čija su rešenja $x = 4$ i $x = -3$. Po uslovu zadatka, traženi broj se nalazi u prvom kvadrantu, tako da je $x = 4$, tj. $z = 4 + 3i$.

5. **Odrediti kompleksan broj** z **iz uslova**

$$(2+i)^3 + 2Re\left(\frac{\bar{z}+1}{2}\right) - iIm\left(\frac{2+z}{1-i}\right) + \bar{z} = 5 + 5i.$$

Rešenje:

Neka je $z = x + yi$. Tada sledi

$$\begin{aligned}
Re\left(\frac{\bar{z}+1}{2}\right) &= Re\left(\frac{x-yi+1}{2}\right) = \frac{x+1}{2}, \\
Im\left(\frac{2+z}{1-i}\right) &= Im\left(\frac{2+x+yi}{1-i}\right) = Im\left(\frac{(2+x+yi)(1+i)}{2}\right) = \\
&= \frac{2+x+y}{2}, \\
(2+i)^3 &= 2^3 + 3\cdot 2^2 i + 3\cdot 2i^2 + i^3 = 2 + 11i.
\end{aligned}$$

Kada ove vrednosti zamenimo u uslov zadatka, dobijamo

$$2 + 11i + 2\,\frac{x+1}{2} - i\,\frac{2+x+y}{2} + x - iy = 5 + 5i,$$

tj.

$$3 + 2x + \left(10 - \frac{x+3y}{2}\right) i = 5 + 5i.$$

Izjednačavanjem realnog dela kompleksnog broja na levoj strani jednakosti sa realnim delom kompleksnog broja na desnoj strani jednakosti, i izjednačavanjem njihovih imaginarnih delova dobijaju se jednačine

$$3 + 2x = 5, \qquad x + 3y = 10,$$

čijim rešavanjem dobijamo $x = 1$ i $y = 3$. Dakle,

$$z = 1 + 3i.$$

6. **U skupu kompleksnih brojeva rešiti jednačinu**

$$z\, Re(z-1) - 2\, Im\left(\frac{\bar{z}-1}{1+i}\right) = -i.$$

Rešenje:

Neka je $z = x + yi$. Onda je njemu konjugovano kompleksni broj dat sa $\bar{z} = x - yi$ i važi

$$\begin{aligned}
z - 1 &= x - 1 + yi, \\
\frac{\bar{z}-1}{1+i} &= \frac{\bar{z}-1}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{\bar{z}-\bar{z}i-1+i}{2} = \\
&= \frac{x-yi-(x-yi)i-1+i}{2} = \frac{x-y-1}{2} + \frac{1-x-y}{2}i.
\end{aligned}$$

Tako smo dobili da je $Re(z-1) = x-1$ i $Im\Big(\dfrac{\bar{z}-1}{1+i}\Big) = \dfrac{1-x-y}{2}$.
Kada to zamenimo u datu jednačinu, imamo

$$(x+yi)(x-1) - (1-x-y) = -i, \quad \text{tj.}$$

$$x^2 + y - 1 + (xy-y)i = -i.$$

Izjednačavajući odgovarajuće realne delove i odgovarajuće imaginarne delove dobijamo jednačine

$$x^2 + y - 1 = 0, \qquad xy - y = -1.$$

Iz druge jednačine sledi

$$y(x-1) = -1 \quad \text{tj.} \quad y = -\frac{1}{x-1}, \quad (x \neq 1).$$

Zamenom u prvu jednačinu dobijamo

$$x^2 - \frac{1}{x-1} - 1 = 0, \quad \text{odnosno} \quad x(x^2 - x - 1) = 0.$$

Rešenja ove jednačine su

$$x_1 = 0, \;\; x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \;\; x_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Odatle je

$$y_1 = 1, \quad y_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \quad y_3 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

i tako smo dobili da polazna jednačina ima tri rešenja

$$z_1 = i, \qquad z_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}(1-i), \qquad z_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}(1-i).$$

7. **U polju kompleksnih brojeva rešiti jednačinu**

$$|z - 5i + 1| + i \cdot Im\Big(\frac{2(z-3\bar{z})}{3i}\Big) = 9 - 8i.$$

Rešenje:

Predstavimo kompleksan broj z u obliku $z = x + yi$. Tada sledi

$$|z - 5i + 1| = |x + 1 + (y-5)i| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-5)^2}.$$

Kako je $\frac{1}{i} = -i$, važi

$$Im\Big(\frac{2(z-3\bar{z})}{3i}\Big) = Im\Big(-i\frac{2(-2x+4yi)}{3}\Big) = Im\Big(\frac{4}{3}(2y+xi)\Big) = \frac{4}{3}x,$$

pa se polazna jednačina može napisati u obliku

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-5)^2} + \frac{4}{3}xi = 9-8i.$$

Na osnovu jednakosti kompleksnih brojeva imamo

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-5)^2} = 9, \qquad \frac{4}{3}x = -8.$$

Rešavajući ovaj sistem jednačina dobijamo

$$x=-6, \qquad y_1 = 5+2\sqrt{14}, \qquad y_2 = 5-2\sqrt{14}.$$

Dakle, rešenja polazne jednačine su kompleksni brojevi

$$z_1 = -6+(5+2\sqrt{14})i \quad \text{i} \quad z_2 = -6+(5-2\sqrt{14})i.$$

8. **Naći sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju uslov**

$$\bar{z} = z^3.$$

Rešenje:

Kada kompleksan broj z predstavimo u obliku $z = x+yi$, uslov $\bar{z} = z^3$ glasi

$$x - yi = (x+yi)^3,$$

tj.

$$x - yi = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i.$$

Na osnovu jednakosti kompleksnih brojeva dobijamo sistem jednačina

$$x(x^2-3y^2-1) = 0, \qquad y(y^2-3x^2-1) = 0,$$

čijim rešavanjem dobijamo tražene kompleksne brojeve

$$z=0, \quad z=1, \quad z=-1, \quad z=i, \quad z=-i.$$

Zadatak se može rešiti i na drugi način.
Kako je $|z| = |\bar{z}|$, iz uslova zadatka imamo $|\bar{z}| = |z|^3$, iz čega sledi $|z| = |z|^3$, pa je $|z| = 0$ ili $|z| = 1$. Iz $|z| = 0$ sledi $z = 0$, a iz $|z| = 1$, na osnovu Moavrove formule imamo da važi $\bar{z} = z^{-1}$. Sada uslov zadatka glasi $\frac{1}{z} = z^3$, tj. $z = \sqrt[4]{1}$ i odatle dobijamo ostala četiri rešenja.

9. **a) Odrediti brojeve z_1 i z_2 iz uslova**

$$z_1 + \bar{z}_2 = 6 + 3i, \qquad i\bar{z}_1 + \frac{z_2}{i} = 11 - 4i.$$

b) Na pravoj koju određuju brojevi z_1 i z_2 naći tačku z_3 koja se nalazi sa one strane tačke z_1 sa koje je z_2, tako da rastojanje tačke z_3 od z_1 bude 15.

Rešenje:

a) Neka je $z_1 = x_1 + y_1 i$ i $z_2 = x_2 + y_2 i$. Kako je $\dfrac{1}{i} = -i$, uslovi postavljeni u zadatku imaju oblik:

$$x_1 + y_1 i + x_2 - y_2 i = 6 + 3i, \qquad i(x_1 - y_1 i) - i(x_2 + y_2 i) = 11 - 4i,$$

tj.

$$x_1 + x_2 + (y_1 - y_2)i = 6 + 3i, \qquad y_1 + y_2 + (x_1 - x_2)i = 11 - 4i.$$

Odatle sledi

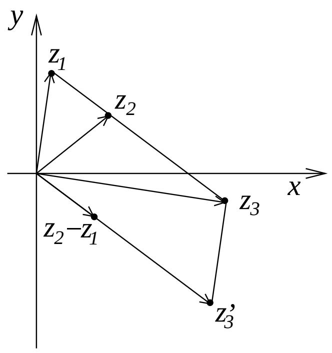
$$x_1 + x_2 = 6, \qquad y_1 - y_2 = 3, \qquad y_1 + y_2 = 11, \qquad x_1 - x_2 = -4.$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina dobijamo tražene kompleksne brojeve:

$$z_1 = 1 + 7i, \qquad z_2 = 5 + 4i.$$

b) Kako je $z_2 - z_1 = 4 - 3i$, sledi

$$|z_2 - z_1| = 5.$$



Da bi se dobila tačka z_3 koja se nalazi na rastojanju od tačke z_1 koje je 3 puta duže od rastojanja tačaka z_1 i z_2, potrebno je prvo translirati duž z_1z_2 za vektor $\overrightarrow{z_1O}$ tako da se tačka z_1 slika u koordinatni početak. Kompleksan broj koji smo na taj način dobili je $z_2 - z_1$. Tačku z_3', za koju treba da važi $|z_3'| = 15$, ćemo dobiti na sledeći način:

$$|z_3'| = 3 \cdot |z_2 - z_1|.$$

Iz toga sledi

$$z_3' = 3(z_2 - z_1) = 12 - 9i.$$

Traženu tačku z_3 dobijamo translirajući duž $\overrightarrow{Oz_3'}$ za vektor $\overrightarrow{Oz_1}$, tj.

$$z_3 = z_3' + z_1 = 13 - 2i.$$

10. **Kompleksan broj** z, $z \neq 0$ **zadovoljava jednačinu**

$$\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} + 4\Big(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}\Big) = 2.$$

a) **Naći vezu koja postoji između realnog i imaginarnog dela kompleksnog broja** z.

b) **Naći kompleksne brojeve** z_1 **i** z_2 **koji ispunjavaju uslov pod a) i** $Re(z) = 2$.

c) **Za** z_1 **i** z_2 **odredjene pod b) naći kompleksan broj** z_3 **takav da trougao** $z_1z_2z_3$ **bude jednakokraki sa osnovicom** z_1z_2**, površine 8 i** $Re(z_3) > 0$.

Rešenje:

a) Neka je $z = x + yi$. Tada imamo

$$\frac{x+yi}{x-yi} + \frac{x-yi}{x+yi} + 4\left(\frac{1}{x+yi} + \frac{1}{x-yi}\right) = 2 \quad / \cdot (x-yi)(x+yi)$$

tj.

$$(x+yi)^2 + (x-yi)^2 + 4(x - yi + x + yi) = 2(x^2 + y^2).$$

Iz prethodne jednakosti sledi veza realnog i imaginarnog dela kompleksnog broja z:

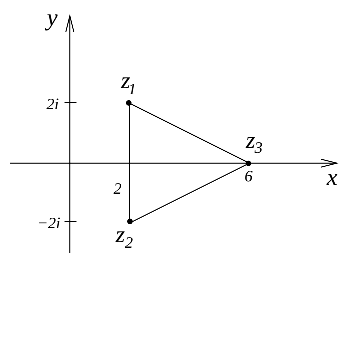
$$y^2 = 2x.$$

b) Kada je $Re(z) = x = 2$, na osnovu zadatka pod a) imamo $y^2 = 4$. Tako dobijamo dva rešenja: $y_1 = 2$, $y_2 = -2$, tj.

$$z_1 = 2 + 2i, \quad z_2 = 2 - 2i.$$

c) Dužina osnovice z_1z_2 je $a = 4$. Pošto je $P = \dfrac{ah}{2} = 8$, sledi $h = 4$, pa je

$$z_3 = 6.$$



11. **Odrediti** $\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2-2i}\right)^{2000}$.

Rešenje:

Označimo sa z_1 i z_2 kompleksne brojeve $z_1 = \sqrt{6}-\sqrt{2}i$ i $z_2 = 2-2i$. Tada je

$$z = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2000} = \frac{z_1^{2000}}{z_2^{2000}}.$$

Izračunaćemo prvo z_1^{2000} i z_2^{2000}. Moduo i argument kompleksnog broja z_1 su dati sa

$$r_1 = \sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{2})^2} = \sqrt{8},$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}}, \quad \sin\varphi_1 = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{8}} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = -\frac{\pi}{6},$$

tj.

$$z_1 = \sqrt{8}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Tada je

$$\begin{aligned}
z_1^{2000} &= (\sqrt{8})^{2000}\Big(\cos\Big(-\tfrac{2000\pi}{6}\Big) + i\sin\Big(-\tfrac{2000\pi}{6}\Big)\Big) = \\
&= 8^{1000}\Big(\cos\Big(-333\tfrac{2\pi}{6}\Big) + i\sin\Big(-333\tfrac{2\pi}{6}\Big)\Big) = \\
&= 8^{1000}\Big(\cos\Big(\tfrac{2\pi}{3}\Big) + i\sin\Big(\tfrac{2\pi}{3}\Big)\Big) = 8^{1000}\Big(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}i\Big).
\end{aligned}$$

Moduo i argument kompleksnog broja z_2 su dati sa

$$r_2 = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8},$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{2}{\sqrt{8}}, \quad \sin\varphi_2 = \frac{-2}{\sqrt{8}} \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = -\frac{\pi}{4},$$

pa sledi

$$z_2 = \sqrt{8}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Tada je

$$\begin{aligned}
z_2^{2000} &= (\sqrt{8})^{2000}\Big(\cos\Big(-\tfrac{2000\pi}{4}\Big) + i\sin\Big(-\tfrac{2000\pi}{4}\Big)\Big) = \\
&= 8^{1000}\Big(\cos(-500\pi) + i\sin(-500\pi)\Big) = \\
&= 8^{1000}\Big(\cos 0 + i\sin 0\Big) = 8^{1000}.
\end{aligned}$$

Konačno dobijamo

$$\frac{z_1^{2000}}{z_2^{2000}} = \frac{8^{1000}\Big(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\Big)}{8^{1000}} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

12. **Koristeći trigonometrijski oblik kompleksnog broja, izraziti** $\cos 4x$ **preko** $\cos x$, $\mathrm{tg}4x$ **preko** $\mathrm{tg}x$ **i pomoću dobijenih veza izračunati** $\cos\frac{\pi}{12}$ **i** $\sin\frac{\pi}{12}$.

Rešenje:

Da bismo izrazili $\cos 4x$ preko $\cos x$, koristićemo Moavrovu formulu za stepenovanje kompleksnog broja u trigonometrijskom obliku:

$$(\cos x + i\sin x)^4 = \cos 4x + i\sin 4x.$$

Stepenujući levu stranu jednakosti pomoću binomne formule, dobijamo

$$\cos^4 x + 4i\cos^3 x\sin x + 6i^2\cos^2 x\sin^2 x + 4i^3\cos x\sin^3 x + i^4\sin^4 x =$$
$$= \cos 4x + i\sin 4x. \tag{3.1}$$

Kada izjednačimo realne delove u (3.1), dobijamo

$$\cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x = \cos 4x, \tag{3.2}$$

tj.

$$\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x(1-\cos^2 x) + (1-\cos^2 x)^2 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1.$$

Za drugi deo zadatka, potrebno je izjednačiti i imaginarne delove u (3.1):

$$\sin 4x = 4\cos^3 x\sin x - 4\cos x\sin^3 x. \tag{3.3}$$

Iz (3.2) i (3.3) sledi

$$\mathrm{tg}4x = \frac{\sin 4x}{\cos 4x} = \frac{4\cos^3 x\sin x - 4\cos x\sin^3 x}{\cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x}.$$

Kada imenilac i brojilac prethodnog izraza podelimo sa $\cos^4 x$ dobijamo

$$\mathrm{tg}4x = \frac{4\mathrm{tg}x - 4\mathrm{tg}^3 x}{1 - 6\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^4 x}.$$

Za izračunavanje $\cos\frac{\pi}{12}$ koristićemo (3.2):

$$\cos\Big(4\cdot\frac{\pi}{12}\Big) = 8\cos^4\frac{\pi}{12} - 8\cos^2\frac{\pi}{12} + 1,$$

dok sa druge strane imamo

$$\cos\left(4\cdot\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$

Izjednačavanjem ova dva izraza dobijamo

$$8\cos^4\frac{\pi}{12}-8\cos^2\frac{\pi}{12}+1=\frac{1}{2}.$$

Uvođenjem smene $\cos^2\frac{\pi}{12}=t$, prethodna bikvadratna jednačina se svodi na kvadratnu jednačinu:

$$8t^2-8t+\frac{1}{2}=0.$$

Rešenja ove kvadratne jednačine su $t_{1/2}=\frac{2\pm\sqrt{3}}{4}$. Kako je $0<\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{3}$ i funkcija $\cos x$ opadajuća za $x\in[0,\pi/3]$, imamo $\cos 0>\cos\frac{\pi}{12}>\cos\frac{\pi}{3}$, odnosno $1>\cos\frac{\pi}{12}>\frac{1}{2}$. Kako je $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}<\frac{1}{2}$, sledi

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

Koristeći činjenicu da je $\sin\frac{\pi}{12}>0$ i osnovnu trigonometrijsku vezu, dobijamo

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{12}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

13. **Dokazati identitete**

a) $\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$, **b)** $\cos^4 x=\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}$.

Rešenje:

Za dokazivanje datih identiteta koristićemo Ojlerove veze.

a)

$$\sin^3 x=\left(\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}\right)^3=\frac{(e^{xi}-e^{-xi})^3}{8i^3}=$$

$$=-\frac{1}{8i}(e^{3xi}-3e^{2xi}e^{-xi}+3e^{xi}e^{-2xi}-e^{-3xi})=$$

$$=-\frac{1}{8i}(e^{3xi}-3e^{xi}+3e^{-xi}-e^{-3xi})=$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3xi} - e^{-3xi}}{2i}\right) = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x,$$

b)

$$\cos^4 x = \left(\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}\right)^4 = \frac{(e^{xi} + e^{-xi})^4}{16} =$$

$$= \frac{1}{16}(e^{4xi} + 4e^{3xi}e^{-xi} + 6e^{2xi}e^{-2xi} + 4e^{xi}e^{-3xi} + e^{-4xi}) =$$

$$= \frac{1}{16}(e^{4xi} + 4e^{2xi} + 6 + 4e^{-2xi} + e^{-4xi}) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{e^{4xi} + e^{-4xi}}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2xi} + e^{-2xi}}{2}\right) + \frac{3}{8} =$$

$$= \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}.$$

14. **Izračunati $\sqrt{z}$ ako se zna da je**

$$\frac{2}{i}\Big(z(2-i) + \frac{3\sqrt{3}}{2}\Big) = -3(1 + 2\sqrt{3} + 2i).$$

Rešenje:

Neka je $z = x + yi$. Znajući da je $\frac{1}{i} = -i$, imamo

$$-2i\Big(2x + y - xi + 2yi + \frac{3\sqrt{3}}{2}\Big) = -3(1 + 2\sqrt{3} + 2i),$$

tj.

$$-2x + 4y - (4x + 2y + 3\sqrt{3})i = -6\sqrt{3} - 3 - 6i.$$

Na osnovu jednakosti kompleksnih brojeva dobijamo sistem jednačina

$$2x - 4y = 6\sqrt{3} + 3, \quad 4x + 2y = 6 - 3\sqrt{3},$$

čije je rešenje $x = \frac{3}{2}$, $y = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Dakle,

$$z = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\, i$$

Eksponencijalni oblik broja z je $3e^{-\frac{\pi}{3}i}$, tako da je kvadratni koren kompleksnog broja z :

$$\sqrt{z} = \sqrt{3\, e^{-\frac{\pi}{3}i}} = \sqrt{3}\, e^{\frac{-\pi/3 + 2k\pi}{2}i} = \sqrt{3}\, e^{(-\frac{\pi}{6} + k\pi)i}, \;\; k = 0, 1.$$

Prema tome, tražena rešenja su

$$z_0 = \sqrt{3}\, e^{-\frac{\pi}{6} i} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i, \quad z_1 = \sqrt{3}\, e^{\frac{5\pi}{6} i} = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

15. **a) Odrediti kompleksan broj z_1 iz uslova**

$$\begin{vmatrix} z_1 & 1 & \bar{z}_1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2+i & i \end{vmatrix} = 2 - 8i.$$

b) Kompleksan broj z_1 odredjen pod a) napisati u eksponencijalnom i trigonometrijsko obliku, a zatim odrediti $\sqrt[5]{z_1}$.

c) Ako je z_2 rešenje jednačine

$$(1+i)^3(3-i) + iIm\Big(\frac{z_2 + 2i}{2}\Big) + z_2 = -2 + 12i,$$

predstaviti u kompleksnoj ravni skup tačaka z koji zadovoljava nejednakost

$$|z_1| < |z - \sqrt{2}\, i| < |z_2|.$$

Rešenje:

a) Neka je $z_1 = x + yi$. Tada (videti poglavlje 5)

$$\begin{vmatrix} z_1 & 1 & \bar{z}_1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2+i & i \end{vmatrix} = -z_1 i + 2 + \bar{z}_1 - 2z_1(2+i) =$$

$$= 2 - 3x + 3y - (3x + 5y)i.$$

Kako je po uslovu zadatka ova determinanta jednaka sa $2-8i$, izjednačavanjem realnih i imaginarnih delova dobija se sistem jednačina

$$2 - 3x + 3y = 2, \qquad -3x - 5y = -8,$$

čije je rešenje $x = 1,\ y = 1$. Dakle, traženi broj z_1 je

$$z_1 = 1 + i. \tag{3.4}$$

b) Da bismo broj z_1 mogli zapisati u eksponencijalnom i trigonometrijskom obliku, potreban nam je njegov moduo i argument:

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Kompleksan broj z_1, zapisan u trigonometrijskom obliku, dat je sa

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}),$$

a u eksponencijalnom

$$z_1 = |z_1|\,e^{\varphi i} = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}.$$

Označimo sa $\omega = \sqrt[5]{z_1}$. Tada je

$$\omega = \sqrt[5]{\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}} = \sqrt[10]{2}\,e^{\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{5}i}, \quad k = 0,1,2,3,4.$$

Za $k = 0,1,2,3,4$ dobijamo pet rešenja petog korena kompleksnog broja z_1 :

$$\begin{aligned}
k = 0 \quad &\Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt[10]{2}\,e^{\frac{\pi}{20}i},\\
k = 1 \quad &\Rightarrow \quad \omega_1 = \sqrt[10]{2}\,e^{\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{5}i} = \sqrt[10]{2}\,e^{\frac{9\pi}{20}i},\\
k = 2 \quad &\Rightarrow \quad \omega_2 = \sqrt[10]{2}\,e^{\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{5}i} = \sqrt[10]{2}\,e^{\frac{17\pi}{20}i},\\
k = 3 \quad &\Rightarrow \quad \omega_3 = \sqrt[10]{2}\,e^{\frac{\frac{\pi}{4}+6\pi}{5}i} = \sqrt[10]{2}\,e^{-\frac{15\pi}{20}i},\\
k = 4 \quad &\Rightarrow \quad \omega_4 = \sqrt[10]{2}\,e^{\frac{\frac{\pi}{4}+8\pi}{5}i} = \sqrt[10]{2}\,e^{-\frac{17\pi}{20}i}.
\end{aligned}$$

c) Kako je

$$\begin{aligned}
&(1+i)^3(3-i) + i\cdot Im\Big(\frac{z_2+2i}{2}\Big) + z_2 =\\
&= (1+3i-3-i)(3-i) + i\cdot Im\Big(\frac{x_2+(y_2+2)i}{2}\Big) + x_2 + y_2 i =\\
&= (-2+2i)(3-i) + \frac{y_2+2}{2}i + x_2 + y_2 i,
\end{aligned}$$

na osovu uslova datog u zadatku imamo

$$-4 + x_2 + \Big(9 + \frac{3}{2}y_2\Big)\,i = -2 + 12i.$$

Odatle sledi

$$-4 + x_2 = -2, \qquad 9 + \frac{3}{2}\,y_2 = 12.$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo $x_2 = 2$ i $y_2 = 2$, dakle

$$z_2 = 2 + 2i. \tag{3.5}$$

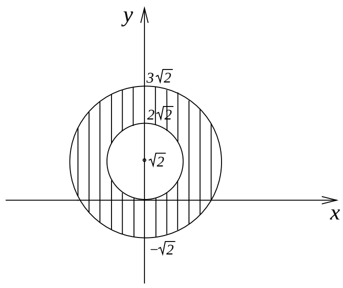
Na osnovu (8.2) i (3.5) sledi

$$|z_1| < |z - \sqrt{2}\,i| < |z_2|,$$

$$\sqrt{1^2+1^2} < \sqrt{x^2+(y-\sqrt{2})^2} < \sqrt{2^2+2^2},$$

$$2 < x^2+(y-\sqrt{2})^2 < 8.$$

Dakle, skup tačaka u kompleksnoj ravni koji zadovoljava polaznu nejednakost je koncentrični kružni prsten predstavljen na sledećoj slici.



16. **Naći kompleksne brojeve z za koje važi**

$$Im\Big(\frac{z+2}{2-i}\Big)=1 \ \ \mathbf{i} \ \ Re(z^2+1)=1,$$

a zatim za rešenje z_1 koje se nalazi u drugom kvadrantu naći $\sqrt[3]{z_1}$.

Rešenje:

Kada kompleksni broj z predstavimo u obliku $z=x+yi$, imamo

$$\begin{aligned}\frac{z+2}{2-i} &= \frac{x+yi+2}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i}=\frac{2x-y+4}{5}+\frac{x+2y+2}{5}i,\\ z^2+1 &= (x+yi)^2+1=x^2+2xyi-y^2+1, \quad \text{tj.}\\ Im\Big(\frac{z+2}{2-i}\Big) &= \frac{x+2y+2}{5} \quad \text{i} \quad Re(z^2+1)=x^2-y^2+1.\end{aligned}$$

Uslovi zadatka se svode na jednačine

$$\frac{x+2y+2}{5}=1, \qquad x^2-y^2+1=1,$$

koje su, redom, ekvivalentne jednačinama

$$x+2y=3, \qquad x^2-y^2=0.$$

Iz druge jednačine sledi $x = -y$ ili $x = y$. Zamenom u prvu jednačinu dobijamo $x = -y = -3$ ili $x = y = 1$, tako da su traženi kompleksni brojevi

$$z_1 = -3 + 3i \quad \text{i} \quad z_2 = 1 + i.$$

Kompleksni broj z_1 je u drugom, a z_2 u prvom kvadrantu. Za izračunavanje $\sqrt[3]{z_1}$, potrebno je predstaviti z_1 u trigonometrijskom obliku. Kako je

$$|z_1| = |-3 + 3i| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2},$$

$$\cos\varphi = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

sledi

$$\varphi = \frac{3\pi}{4}, \quad \text{tj.} \quad z_1 = 3\sqrt{2}\Big(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\Big).$$

Neka je $w = \sqrt[3]{z_1}$. Tada važi

$$w = \sqrt[3]{3\sqrt{2}}\Big(\cos\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3}\Big), \quad k = 0, 1, 2.$$

Prvo rešenje dobijamo za $k = 0$

$$w_0 = \sqrt[3]{3\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt[3]{3\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt[3]{12}}{2}(1+i).$$

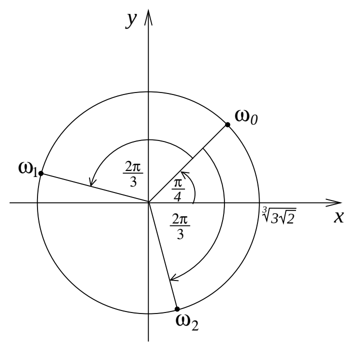
Kako tri rešenja trećeg korena kompleksnog broja z_1 čine temena jednakostraničnog trougla koji je upisan u kružnicu poluprečnika $\sqrt[3]{3\sqrt{2}}$ sa centrom u koordinatnom početku, onda w_1 i w_2 možemo dobiti rotacijom w_0 oko koordinatnog početka za ugao od $\frac{2\pi}{3}$, tj. $-\frac{2\pi}{3}$ redom

$$w_1 = w_0\, e^{\frac{2\pi}{3}i} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{12}}{2}(1+i)\Big(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) =$$

$$= -\frac{\sqrt[3]{12}}{4}(1 + \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3}));$$

$$w_2 = w_0\, e^{-\frac{2\pi}{3}i} =$$



$$= \frac{\sqrt[3]{12}}{2}(1+i)\Big(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\Big) = \frac{\sqrt[3]{12}}{4}(-1 + \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})).$$

17. **U kompleksnoj ravni date su tačke $z_1 = 2+i$ i $z_3 = -2+3i$. Odrediti preostala temena kvadrata $z_1z_2z_3z_4$ ako su mu z_1 i z_3 naspramna temena.**

Rešenje:

Teme z_2 se može dobiti rotacijom temena z_1 oko središta duži z_1z_3, tj. tačke $z_0 = \dfrac{z_1+z_3}{2} = 2i$, za ugao $\dfrac{\pi}{2}$. Ako označimo sa $z' = z_1 - z_0$, tj. transliramo z_0z_1 tako da se z_0 slika u O, onda je Oz' paralelno sa z_0z_1 i $|z'|$ je jednak dužini z_0z_1.

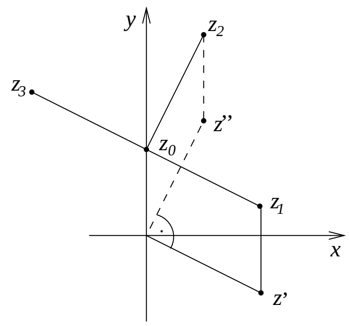
Sa z'' ćemo označiti tačku koja se dobija rotacijom Oz' za ugao $\dfrac{\pi}{2}$, tj. $z'' = z'e^{\frac{\pi}{2}i}$. Tada je Oz'' paralelno sa z_0z_2, a $|z''|$ je jednak dužini z_0z_2. Odavde sledi da z_2 dobijamo translacijom:

$$z_2 = z_0 + z'',$$

tj.

$$z_2 = z_0 + (z_1 - z_0)e^{\frac{\pi}{2}i} =$$

$$= 2i + (2 + i - 2i)i = 1 + 4i.$$



Teme z_4 se može dobiti npr. rotacijom temena z_1 oko tačke z_0 za ugao $-\dfrac{\pi}{2}$:

$$z_4 = z_0 + (z_1 - z_0)e^{-\frac{\pi}{2}i} = 2i + (2 + i - 2i)\cdot(-i) = -1,$$

ili koristeći činjenicu da je z_0 sredina duži z_2z_4:

$$z_0 = \frac{z_2 + z_4}{2} \quad \Rightarrow \quad z_4 = 2z_0 - z_2 = 4i - (1 + 4i) = -1.$$

18. **Kompleksni brojevi koji zadovoljavaju uslov**

$$Re\Big(\frac{(1+i)z^2 + 2 - 2i}{3+2i}\Big) = Im\Big(\frac{(1+i)z^2 + 2 - 2i}{3+2i}\Big) = 1$$

čine dva temena jednakostraničnog trougla. Odrediti treće teme koje se nalazi u četvrtom kvadrantu.

Rešenje:

Iz uslova zadatka imamo i realni i imaginarni deo kompleksnog broja $\dfrac{(1+i)z^2+2-2i}{3+2i}$, tj.

$$\frac{(1+i)z^2+2-2i}{3+2i}=1+i.$$

Iz ove veze izrazimo z^2 :

$$z^2=\frac{-1+7i}{1+i} \quad \text{tj.} \quad z^2=3+4i,$$

pa dobijamo $z=\sqrt{3+4i}$. Kvadratni koren kompleksnog broja se može izračunati i na sledeći način. Predstavimo kompleksan broj z u obliku:

$$\sqrt{3+4i}=x+yi.$$

Kvadrirajući levu i desnu stranu ove jednakosti dobijamo

$$3+4i=x^2+2xyi-y^2.$$

Odatle sledi

$$x^2-y^2=3, \quad 2xy=4.$$

Kada iz druge jednačine izrazimo jednu od nepoznatih, npr. $y=\dfrac{2}{x}$, i uvrstimo u prvu, dobijamo bikvadratnu jednačinu

$$x^4-3x^2-4=0,$$

koja se rešava uvođenjem smene $x^2=t$:

$$t^2-3t-4=0.$$

Kako je $x\in R$, sledi $t=x^2>0$, tj. jedino rešenje ove jednačine je $x^2=4$, odakle dobijamo $x_1=2$, $x_2=-2$. Na osnovu $y=\dfrac{2}{x}$ sledi $y_1=1$, $y_2=-1$. Tako smo izračunali dva rešenja kvadratnog korena kompleksnog broja $3+4i$:

$$z_1=2+i \quad \text{i} \quad z_2=-2-i.$$

Treće teme jednakostraničnog trougla $z_1z_2z_3$, koje se nalazi u četvrtom kvadrantu, može se dobiti rotacijom temena z_2 oko temena z_1 za ugao $\dfrac{\pi}{3}$:

$$z_3=z_1+(z_2-z_1)e^{\frac{\pi}{3}i}=2+i+(-2-i-2-i)\Big(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\Big)=$$

$$=\sqrt{3}(1-2i).$$

19. **a) Naći preostala temena jednakostraničnog trougla $z_1z_2z_3$ u kompleksnoj ravni ako se zna da je $z_1 = 3+4i$ i da je tačka $z_4 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$ središte duži z_2z_3.**

b) Odrediti kompleksne brojeve z_0 i a tako da z_1, z_2 i z_3 budu rešenja jednačine $(z-z_0)^3 = a$.

Rešenje:

a) Predstavićemo nepoznate kompleksne brojeve u obliku:

$$z_2 = x_2 + y_2 i, \quad z_3 = x_3 + y_3 i.$$

Kako je na osnovu uslova zadatka z_4 središte duži z_2z_3, imamo

$$\frac{x_2+x_3}{2} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{y_2+y_3}{2} = -\frac{1}{2},$$

tj.

$$x_2 + x_3 = 3, \qquad y_2 + y_3 = -1. \tag{3.6}$$

Još dve jednačine koje su nam potrebne da bismo mogli izračunati nepoznate x_1, x_2, y_1 i y_2 dobićemo na osnovu činjenice da z_1, z_2 i z_3 čine temena jednakostraničnog trougla. Tako se npr. teme z_3 može dobiti rotacijom temena z_2 oko z_1 za ugao $\frac{\pi}{3}$:

$$z_3 = z_1 + (z_2 - z_1)e^{\frac{\pi}{3}i},$$

tj.

$$x_3 + y_3 i = 3 + 4i + (x_2 + y_2 i - 3 - 4i)\Big(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\Big).$$

Iz ove veze, na osnovu jednakosti kompleksnih brojeva, dobijamo jednačine

$$x_3 = \frac{1}{2}(3 + x_2 - \sqrt{3}\,y_2) + 2\sqrt{3}, \quad y_3 = 2 + \frac{1}{2}(y_2 + \sqrt{3}\,x_2 - 3\sqrt{3}). \tag{3.7}$$

Rešavanjem sistema jednačina (3.6), (3.7) dobijamo tražena temena trougla:

$$z_2 = \frac{3}{2}(1-\sqrt{3}) + \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)i, \quad z_3 = \frac{3}{2}(1+\sqrt{3}) - \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)i.$$

Temena z_2 i z_3 smo mogli dobiti i na drugi način, koristeći činjenicu da u jednakostraničnom trouglu važi $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, gde je h visina, a a stranica trougla. Dakle, zadatak smo mogli rešavati primenom translacije, homotetije, rotacije i ponovo translacije:

$$z_3 = z_1 + (z_4 - z_1)\cdot \frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{\pi}{6}i},$$

$$z_2 = z_1 + (z_4 - z_1) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\pi}{6} i}.$$

b) Jednačina $(z - z_0)^3 = a$, za $z_0, a \in C$, ima 3 rešenja koja geometrijski predstavljaju temena jednakostraničnog trougla upisanog u kružnicu poluprečnika $\sqrt[3]{|a|}$ sa centrom u z_0 . Dakle, z_0 kao centar kružnice opisane oko jednakostraničnog trougla $z_1 z_2 z_3$ deli duž $z_1 z_4$ u odnosu $2:1$.

Da bismo mogli da odredimo z_0, prvo ćemo translirati duž $z_4 z_1$ za radijus vektor broja z_4 ($\overrightarrow{z_4 O}$) tako da se z_4 slika u koordinatni početak. Dobijamo radijus vektor nekog kompleksnog broja z', $\overrightarrow{Oz'}$. Zatim dobijeni kompleksani broj z' treba pomnožiti sa $\frac{1}{3}$ i ponovo translirati za $\overrightarrow{Oz_4}$ na pravu odredjenu tačkama z_1 i z_4. Vrh tog vektora se slika u traženu tačku z_0. Dakle,

$$z_0 = z_4 + \frac{1}{3}(z_1 - z_4) = 2 + i.$$

Kompleksni broj a ćemo dobiti iz jednačine $(z_1 - z_0)^3 = a$, tj.

$$(z_1 - z_0)^3 = (3 + 4i - 2 - i)^3 = (1 + 3i)^3 = -26 - 18i,$$

znači

$$a = -26 - 18i.$$

Zadaci za samostalni rad

1. Izračunati vrednost izraza

   a) $\dfrac{z - \bar{z}}{1 + z\bar{z}}$ ako je $z = 2 + i$. *b)* $\dfrac{z + \bar{z}}{2z + 3}$ ako je $z = \dfrac{i + 1}{2}$.

   Rezultat: *a)* $\dfrac{i}{3}$. *b)* $\dfrac{4 - i}{17}$.

2. Odrediti kompleksan broj z iz uslova

   $$Re\Big(\frac{z + 3i}{2 + i}\Big) = \frac{3}{5}, \quad Im\Big(\frac{\bar{z} + 3i}{3 + i}\Big) = \frac{7}{5}.$$

   Rezultat: $z = 1 - 2i$.

3. U skupu kompleksnih brojeva rešiti jednačinu

   $$|z - 5i + 1| + i \cdot Im\Big(\frac{2(z - 3\bar{z})}{3i}\Big) = 9 - 8i.$$

   Rezultat: $z_1 = -6 + (5 + 2\sqrt{14})\, i$, $z_2 = -6 + (5 - 2\sqrt{14})\, i$.

4. Odrediti kompleksan broj z iz uslova

$$i \cdot Re\Big(\frac{\bar{z}+2}{1+i}\Big) + Im\Big(\frac{2\bar{z}+z}{2}\Big) + z = 1+3i,$$

a zatim naći z^{100}.

Rezultat: $z = 2+2i,\ z^{100} = -8^{50}$.

5. Odrediti kompleksne brojeve z za koje važi $\left(\frac{i}{z}+1\right)^2 = -24-10i$.

Rezultat: $z = -\frac{1}{5}$ i $z = \frac{5-2i}{29}$
(uputstvo: posmatrati $\frac{i}{z}+1 = \sqrt{-24-10i}$).

6. a) Odrediti realan broj a tako da važi $Im(z) = 3$, ako je kompleksan broj z zadat pomoću sledeće determinante: $z = \begin{vmatrix} i & 2 & a \\ -2 & 4i & 3i \\ -1 & -i & -3 \end{vmatrix}$.

b) Naći $\sqrt{-4+z}$.

Rezultat:

a) $z = (6a-9)i,\ a = 2,\ z = 3i.$

b) $w = \sqrt{-4+3i},\ w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+3i),\ w_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+3i).$

7. a) Naći kompleksan broj z iz uslova $z - |z| + 2 = \frac{1+i}{1-i}$.

b) Odrediti realni i imaginarni deo kompleksnog broja $\Big(\frac{1+i}{1-i}\Big)^n$ gde je n prirodan broj.

Rezultat:

a) $z = -\frac{3}{4}+i.$

b) $\frac{1+i}{1-i} = i,$

$Re(i^{4k}) = 1,\ Im(i^{4k}) = 0; \quad Re(i^{4k+1}) = 0,\ Im(i^{4k+1}) = 1;$

$Re(i^{4k+2}) = -1,\ Im(i^{4k+2}) = 0; \quad Re(i^{4k+3}) = 0,\ Im(i^{4k+3}) = -1.$

8. Naći kompleksan broj z ako je $Re\Big(\dfrac{z+3i}{2+i}\Big) = \dfrac{3}{5}$, $Im\Big(\dfrac{z+3i}{2+i}\Big) = \dfrac{1}{5}$, a zatim naći $\sqrt[3]{z+3i}$.

Rezultat: $z = 1-2i$. Ako označimo $w = \sqrt[3]{z+3i}$ onda je

$$w_1 = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}(1+\sqrt{3}+(\sqrt{3}-1)i), \quad w_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}(-1+i),$$
$$w_3 = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}(1-\sqrt{3}-(\sqrt{3}+1)i).$$

9. a) Odrediti $|z_1|$ i $\sqrt{z_1}$ ako je

$$z_1 = (1+2i)^3(2+i)+(2-i)(4+2i)+13+19i.$$

b) Odrediti kompleksne brojeve z_2 i z_3 tako da je trougao $z_1z_2z_3$ jednakokraki sa osnovicom z_1z_2 površine 20 i

$$Re(z_2) = Re(z_1), \quad Im(z_2) = -Im(z_1), \quad Re(z_3) < 0.$$

Rezultat:

a) $z_1 = 3+4i$, $|z_1| = 5$; $w = \sqrt{z_1}$, $w_1 = 2+i$, $w_2 = -2-i$.
b) $z_2 = 3-4i$, $z_3 = -2$.

10. Neka je $z_1 = 1$ teme kvadrata. Ako je centar kružnice opisane oko kvadrata rešenje jednačine

$$z(3+i)+\bar{z}(1+i)+(zi+1)i = 6+6i,$$

naći ostala temena kvadrata.

Rezultat: Centar kružnice: $z = 2+i$.
Temena kvadrata: $z_2 = 3$, $z_3 = 3+2i$, $z_4 = 1+2i$.

11. U krugu čiji je centar $z_0 = -3+4i$ upisan je pravilni šestougao. Jedno teme je u tački $z_1 = -3+5i$. Odrediti ostala temena.

Rezultat: $z_2 = -3-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{9}{2}i$, $z_3 = -3-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{7}{2}i$, $z_4 = -3+3i$,
$z_5 = -3+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{7}{2}i$, $z_6 = -3+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{9}{2}i$.

12. a) Odrediti kompleksan broj z, ako je

$$Re\Big(\frac{\bar{z}(2+i)-5z}{1+i}\Big)=-11, \quad Im\Big(\frac{\bar{z}(2+i)-5z}{1+i}\Big)=-18.$$

b) Odrediti kompleksne brojeve z_1 i z_2 tako da je z_1 pozitivan realan broj, z_2 pripada trećem kvadrantu, a trougao zz_1z_2 je jednakostraničan stranice 5.

Rezultat:

a) $z=-1+4i$,

b) $z_1=2,\ z_2=\frac{1}{2}(1-4\sqrt{3}+(4-3\sqrt{3}i)$.

13. a) Odrediti kompleksan broj z_1 koji zadovoljava uslove

$$Re\Big(\frac{z_1+3i-1}{2+2i}\Big)=\frac{5}{4}, \quad Im\Big(\frac{(1+i)\bar{z}_1-5}{1-i}\Big)=-\frac{1}{2}.$$

b) Za tako nađeno z_1 odrediti preostala temena kvadrata $z_1z_2z_3z_4$ u prvom kvadrantu kompleksne ravni ako se zna da je $Re(z_2)=6$ i $Re(z_4)=1$.

Rezultat: $z_1=2+i,\ z_2=6+2i,\ z_3=5+6i,\ z_4=1+5i.$

14. Jedno rešenje jednačine $(z-\sqrt{3}+i)^6=a$ je $z_1=\sqrt{3}+i$. Odrediti a i ostala rešenja ove jednačine.

Rezultat: $a=-64,\quad z_0=2\sqrt{3},\ z_2=0,\ z_3=-2i,\ z_4=\sqrt{3}-3i,$
$z_5=2\sqrt{3}-2i.$

15. Data su dva suprotna temena kvadrata $z_2=2$ i $z_4=1+3i$. Naći ostala temena. Odrediti kompleksne brojeve a i b tako da temena kvadrata predstavljaju rešenja jednačine $(z-a)^4=b$.

Rezultat: Temena kvadrata: $z_1=i,\ z_3=3+2i.$
$a=z_0=\dfrac{z_2+z_4}{2}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i,\ \ b=\dfrac{7}{4}+6i.$

4

Polinomi i racionalne funkcije

Polinomi

- Funkcija $P : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, nad poljem kompleksnih brojeva, oblika

  $$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \; a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{C},$$

  je **polinom (polinomna funkcija)** nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$, a $a_0, \ldots, a_n$ su **koeficijenti** tog polinoma.

  Ako je $a_n \neq 0$ broj n se naziva **stepen polinoma** P, u oznaci $st(P) = n$, sabirak $a_n z^n$ se zove **vodeći**, a a_0 slobodan član polinoma P.

  Ako je koeficijent u vodećem članu polinoma P jednak jedinici, polinom P se naziva **normiran**.

  Polinom P čiji su svi koeficijenti jednaki nuli naziva se **nula polinom**, oznaka $P = 0$. Stepen nula polinoma se ne definiše.

  Polinom P čiji su svi koeficijenti realni brojevi naziva se **polinom sa realnim koeficijentima** ili **realan** polinom.

- Dva polinoma su jednaka ako su istog stepena i ako su im odgovarajući koeficijenti (koeficijenti uz iste stepene promenljive) jednaki.

- Za svaka dva polinoma P i Q, $(Q \neq 0)$ postoje jedinstveni polinomi S i R takvi da je

  $$\begin{aligned} P &= Q \cdot S + R, \text{ tj.} \\ \frac{P}{Q} &= S + \frac{R}{Q} \end{aligned}$$

  i važi da je ili $R = 0$ ili $st(R) < st(Q)$.

Kaže se da je S **količnik** a R **ostatak** pri deljenju polinoma P polinomom Q. Ako je $R=0$, kažemo da je polinom P **deljiv polinomom** Q ili da polinom Q **deli polinom** P i tada je $P=Q\cdot S$. Polinom Q je **delilac** ili **faktor** polinoma P.

- **Najveći zajednički delilac** polinoma P i Q, u oznaci $NZD(P,Q)$, je polinom najvećeg stepena koji deli i polinom P i polinom Q. Za svaka dva ne nula polinoma P i Q postoji jedinstven normiran polinom T takav da je $T=NZD(P,Q)$.
- **Euklidov algoritam** Neka su P i Q polinomi za koje važi $st(P)>st(Q)$. Postupak eksplicitnog određivanja $NZD(P,Q)$ daje niz jednakosti

$$\begin{array}{rcl}
P &=& Q\cdot Q_1+R_1 \text{ i } (R_1=0 \text{ ili } st(R_1)<st(Q))\\
Q &=& R_1\cdot Q_2+R_2 \text{ i } (R_2=0 \text{ ili } st(R_2)<st(R_1))\\
R_1 &=& R_2\cdot Q_3+R_3 \text{ i } (R_3=0 \text{ ili } st(R_3)<st(R_2))\\
&& \ldots\\
R_{k-2} &=& R_{k-1}\cdot Q_k+R_k \text{ i } (R_k=0 \text{ ili } st(R_k)<st(R_{k-1}))\\
R_{k-1} &=& R_k\cdot Q_{k+1}
\end{array}$$

$$NZD(P,Q)=R_k,$$

koji se zove Euklidov algoritam za polinome P i Q.

- **Bezuova teorema**
Ostatak pri deljenju polinoma P polinomom $z-z_0$ jednak je vrednosti polinoma P u tački z_0.

  Polinom P je deljiv polinomom $z-z_0$ ako i samo ako je $P(z_0)=0$.

- **Hornerova šema**
Pri deljenju polinoma P polinomom $z-z_0$ dobija se količnik

$$Q=b_{n-1}z^{n-1}+b_{n-2}z^{n-2}+\ldots+b_0$$

i ostatak

$$R=z_0b_0+a_0,$$

gde je $b_{n-1}=a_n,\ b_{n-2}=z_0b_{n-1}+a_{n-1},\ldots,b_0=z_0b_1+a_1$. To se zapisuje u obliku tablice

$$\begin{array}{c|ccccc}
z_0 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0\\
\hline
& a_n & z_0b_{n-1}+a_{n-1} & \ldots & z_0b_1+a_1 & z_0b_0+a_0\\
& \| & \| & \ldots & \| & \|\\
& b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_0 & R
\end{array}$$

koja se naziva Hornerova šema. Znači,

$$P(z)=(z-z_0)(b_{n-1}z^{n-1}+b_{n-2}z^{n-2}+\ldots+b_0)+R.$$

- **Koren (nula) polinoma** P je kompleksan(realan) broj z za koji je $P(z) = 0$.
  Ako je P deljiv sa $(z - z_0)^m$, kažemo da je z_0 **koren višestrukosti** m (**nula reda** m) polinoma P.

- Svaki polinom stepena n $(n \geq 1)$ nad poljem kompleksnih brojeva ima bar jedan, a najviše n različitih korena.

- Svaki polinom stepena n se na jedinstven način može faktorisati u obliku

$$P(z) = a_n(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \cdots (z - z_s)^{k_s},$$

  gde su $z_1, z_2, \ldots, z_s$ koreni polinoma, a $k_1, k_2, \ldots, k_s$ redom njihove višestrukosti ($k_1 + k_2 + \ldots + k_s$ je stepen polinoma P).

- **Vijetove formule**
  Ako su $z_1, z_2, \ldots, z_n$ koreni polinoma P stepena n, važi

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + \ldots + z_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ z_1z_2 + z_1z_3 + \ldots + z_{n-1}z_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ &\vdots \\ z_1z_2\ldots z_n &= (-1)^n\frac{a_0}{a_n}. \end{aligned}$$

- Neka je P polinom nad poljem kompleksnih brojeva sa realnim koeficijentima. Tada:
  Ako je z koren polinoma P, onda je i $\bar{z}$ koren polinoma P.
  Polinom P se na jedinstven način može faktorisati u obliku proizvoda svog vodećeg koeficijenta i realnih polinoma oblika $(x - x_0)$ i $(x^2 + px + q)$, gde je $p^2 - 4q < 0$.

- Neka je $P(z) = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1z + a_0$, $a_na_0 \neq 0$, polinom sa celobrojnim koeficijentima. Ako je $\frac{p}{q}$ racionalan koren polinoma P tada $p \mid a_0$ i $q \mid a_n$.

Racionalne funkcije

- Funkcija $R : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definisana sa $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, gde su P i $Q \neq 0$ polinomi nad poljem realnih brojeva naziva se **racionalna funkcija.** **Prava racionalna funkcija** je racionalna funkcija kod koje je $st(P) < st(Q)$.

- **Parcijalni razlomak** je funkcija oblika

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{ili} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}, \quad k=1,2,...,$$

gde su A, B, C, a, p, q realni brojevi i $p^2-4q<0$.

- Svaka (prava) racionalna funkcija može se predstaviti u obliku zbira parcijalnih razlomaka.

$$\frac{P(x)}{(x-a)^k(x^2+px+q)^n} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k} +$$
$$+ \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}.$$

Zadaci

1. **Određiti količnik i ostatak pri deljenju polinoma**

a) $P(x)=(x+1)(x-2)(x+3)$ **sa** $Q(x)=x^2+2$.
b) $P(x)=x^5-5x^4-x+5$ **sa** $Q(x)=x+1$.

Rešenje:

a) $P(x)=(x+1)(x-2)(x+3)=x^3+2x^2-5x-6$

$$\begin{array}{l} (x^3+2x^2-5x\ \ -6):(x^2+2)=x+2 \\ \underline{-x^3\qquad\quad -2x} \\ \qquad 2x^2-7x\ \ -6 \\ \quad \underline{-2x^2\qquad\quad -4} \\ \qquad\quad -7x-10 \end{array}$$

Količnik pri deljenju ova dva polinoma je $x+2$ a ostatak je $-7x-10$. Dakle, polinom P može se napisati u obliku

$$P(x)=(x+2)\cdot Q(x)-7x-10,$$

odnosno

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=x+2+\frac{-7x-10}{Q(x)}.$$

b) U ovom slučaju možemo koristiti Hornerovu šemu, jer delimo polinom P polinomom oblika $(x-x_0)$.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 1 & -5 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ \hline & 1 & -6 & 6 & -6 & 5 & 0 \end{array}$$

Znači, količnik je $x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 6x + 5$, a ostatak je 0, pa se polinom P može napisati kao

$$P(x) = Q(x) \cdot (x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 6x + 5).$$

(*Napomena:* Ostatak pri deljenju ova dva polinoma se takođe može odrediti korišćenjem Bezuovog stava. Kako je $Q(x) = x - (-1)$, znači da je ostatak $P(-1) = (-1)^5 - 5(-1)^4 - (-1) + 5 = 0$.)

2. **Naći racionalne korene polinoma**

a) $P(x) = 3x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x - 2.$

b) $P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1.$

i faktorisati polinome nad poljem realnih i nad poljem kompleksnih brojeva.

Rešenje:

a) Pretpostavimo da polinom P ima bar jedan racionalan koren i obeležimo ga sa $\frac{p}{q}$. Tada p deli slobodan član, a q deli vodeći koeficijent polinoma P. Dakle,

$$\begin{aligned} p \mid (-2) \quad &\Rightarrow \quad p \in \{1, -1, 2, -2\} \quad \text{i} \\ q \mid 3 \quad &\Rightarrow \quad q \in \{1, -1, 3, -3\}. \end{aligned}$$

Odavde sledi

$$\frac{p}{q} \in \left\{1, -1, 2, -2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\}.$$

Hornerovom šemom ćemo proveriti koji od elemenata datog skupa su koreni polinoma P (ostatak pri deljenju sa $\left(x - \frac{p}{q}\right)$ mora biti nula).

	3	5	1	5	-2
-2	3	-1	3	-1	0
$\frac{1}{3}$	3	0	3	0	

Dakle,

$$P(x) = (x+2) \cdot (3x^3 - x^2 + 3x - 1) = (x+2)\left(x - \frac{1}{3}\right)(3x^2 + 3),$$

odnosno

$$P(x) = (x+2)(3x-1)(x^2+1).$$

Ovo je faktorizacija polinoma P nad poljem realnih brojeva, s obzirom da polinom $(x^2 + 1)$ nema realnih korena. Nad poljem kompleksnih brojeva je

$$P(x) = (x+2)(3x-1)(x-i)(x+i).$$

b) Mogući racionalni koreni su ± 1. Iz Hornerove šeme

- 1	1	-2	2	-2	1
1	1	-3	5	-7	8
1	1	-1	1	-1	0
	1	0	1	0	

je faktorizacija nad poljem realnih brojeva data sa

$$P(x) = (x-1)^2(x^2+1)$$

($x = 1$ je dvostruki koren polinoma P). Faktorizacija nad poljem kompleksnih brojeva je

$$P(x) = (x-1)^2(x-i)(x+i).$$

3. **Odrediti polinom najmanjeg stepena tako da broj -1 bude dvostruki, a brojevi 2 i $(1-i)$ jednostruki koreni tog polinoma.**

Rešenje:

Ako je -1 dvostruki, a 2 jednostruki koren polinoma P, onda su $(x+1)^2$ i $(x-2)$ faktori polinoma P. Kako je $(1-i)$ koren polinoma P, to je i $(1+i)$ koren tog polinoma. Znači da je

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+1)^2(x-(1-i))(x-(1+i))(x-2) = \\ &= (x^2+2x+1)(x^2-2x+2)(x-2) = \\ &= x^5-2x^4-x^3+4x^2-2x-4. \end{aligned}$$

4. **Koristeći Hornerovu šemu, napisati polinom**

$$P(x) = x^5 + x^3 + 2x^2 - 12x + 8$$

po stepenima od $x+1$.

Rešenje:

Pomoću Hornerove šeme ćemo deliti polinom P polinomom $(x+1)^5$.

-1	1	0	1	2	-12	8
-1	1	-1	2	0	-12	$\boxed{20}$
-1	1	-2	4	-4	$\boxed{-8}$	
-1	1	-3	7	$\boxed{-11}$		
-1	1	-4	$\boxed{11}$			
-1	1	$\boxed{-5}$				
	$\boxed{1}$					

Na osnovu ovoga je
$P(x) = (x+1)\big(x^4 - x^3 + 2x^2 - 12\big) + 20 =$
$= (x+1)\Big((x+1)\big(x^3 - 2x^2 + 4x - 4\big) - 8\Big) + 20 =$
$= (x+1)\Big((x+1)\big((x+1)(x^2 - 3x + 7) - 11\big) - 8\Big) + 20 =$
$= (x+1)\Bigg((x+1)\Big((x+1)\big((x+1)(x-4) + 11\big) - 11\Big) - 8\Bigg) + 20 =$
$= (x+1)\Bigg((x+1)\Big((x+1)\big((x+1)((x+1) - 5) + 11)\big) - 11\Big) - 8\Bigg) + 20.$
Dakle,

$$P(x) = (x+1)^5 - 5(x+1)^4 + 11(x+1)^3 - 11(x+1)^2 - 8(x+1) + 20.$$

(*Napomena:* Treba uočiti da se koeficijenti polinoma po stepenima od $(x+1)$ mogu pročitati direktno iz Hornerove šeme.)

5. **Odrediti realne brojeve a i b tako da polinom**

$$P(x) = 2x^6 + ax^5 - 4x^4 - 5x^3 - bx^2 + 4x + 3$$

bude deljiv sa $(x-1)$ i $(x+3)$, a zatim za tako određene parametre faktorisati P nad poljem realnih brojeva.

Rešenje:

Ostatak pri deljenju P sa $(x-1)$ treba da bude jednak 0 (koristimo Hornerovu šemu):

$$\begin{array}{r|ccccccc} 1 & 2 & a & -4 & -5 & -b & 4 & 3 \\ \hline & 2 & 2+a & -2+a & -7+a & -7+a-b & -3+a-b & a-b \end{array}$$

Takođe i ostatak pri deljenju P sa $(x+3)$ treba da bude jednak nuli:

$$\begin{array}{r|ccccc} -3 & 2 & a & -4 & -5 & -b \\ \hline & 2 & -6+a & 14-3a & -47+9a & 141-27a-b \end{array} \cdots$$

$$\cdots \begin{array}{cc} 4 & 3 \\ \hline -419+81a+3b & 1260-243a-9b \end{array}$$

Nepoznate parametre dobijamo rešavajući sistem jednačina

$$\begin{array}{rcrcl} a & - & b & = & 0 \\ 243a & + & 9b & = & 1260, \end{array}$$

odakle je $a = b = 5$, pa je

$$P(x) = 2x^6 + 5x^5 - 4x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 3.$$

Racionalni koreni polinoma P, ako postoje, su elementi skupa $\Big\{\pm 1,\ \pm 3,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2}\Big\}$. Da bi smo faktorisali polinom P, takođe koristimo Hornerovu šemu.

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
1 & 2 & 5 & -4 & -5 & -5 & 4 & 3 \\
\hline
1 & 2 & 7 & 3 & -2 & -7 & -3 & 0 \\
-3 & 2 & 9 & 12 & 10 & 3 & 0 & \\
-\frac{1}{2} & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & & \\
 & 2 & 2 & 2 & 0 & & &
\end{array}$$

Tada je

$$\begin{aligned}
P(x) &= (x-1)^2(x+3)(x+\frac{1}{2})(2x^2+2x+2) = \\
&= (x-1)^2(x+3)(2x+1)(x^2+x+1)
\end{aligned}$$

faktorizacija polinoma P nad poljem realnih brojeva, jer polinom x^2+x+1 nema realnih korena.

6. **Ostatak pri deljenju polinoma P polinomom $(x-1)$ je 3, a polinomom $(x+2)$ je -3. Naći ostatak pri deljenju polinoma P polinomom $Q(x) = x^2+x-2$.**

Rešenje:

Ako sa S označimo količnik, a sa R ostatak pri deljenju polinoma P sa Q, onda polinom P možemo zapisati u sledećem obliku:

$$\begin{aligned}
P(x) &= Q(x)\cdot S(x) + R(x) = \\
&= (x^2+x-2)\cdot S(x) + R(x).
\end{aligned}$$

Kako je polinom $Q = x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$ drugog stepena, to znači da će stepen ostatka biti najviše jedan, odakle je $R(x) = ax+b$, tako da imamo

$$P(x) = (x-1)(x+2)\cdot S(x) + ax + b.$$

Na osnovu Bezuovog stava je $P(1) = 3$ i $P(-2) = -3$. Zamenom ovih vrednosti u poslednju jednačinu, dobijamo sistem jednačina

$$\begin{array}{rcrcr}
a & + & b & = & 3 \\
-2a & + & b & = & -3.
\end{array}$$

čije rešenje je $a = 2$ i $b = 1$, tako da je ostatak pri deljenju polinoma P polinomom Q, polinom

$$R(x) = 2x+1.$$

7. **Odrediti sve vrednosti realnog parametra a za koje jednačina $x^5 - 5x + a = 0$ ima dvostruke korene.**

Rešenje:

Obeležimo sa α koren jednačine $x^5 - 5x + a = 0$. Da bi α bio dvostruki koren date jednačine, polinom $x^5 - 5x + a$ mora biti deljiv sa $(x - \alpha)^2$. Iz Hornerove šeme dobijamo

$$\begin{array}{c|cccccc} \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & a \\ \hline \alpha & 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 - 5 & \alpha^5 - 5\alpha + a \\ & 1 & 2\alpha & 3\alpha^2 & 4\alpha^3 & 5\alpha^4 - 5 & \end{array}$$

Kako ostatak pri deljenju sa $(x - \alpha)$ u oba slučaja mora biti nula, dobijaju se dve jednačine:

$$\alpha^5 - 5\alpha + a = 0, \;\; 5\alpha^4 - 5 = 0.$$

Iz druge jednačine je $\alpha^4 = 1$ tj. $\alpha^2 = \pm 1$.
Dalje, na osnovu prve jednačine je

$$\alpha(\alpha^4 - 5) = -a, \;\; \text{odnosno} \;\; 4\alpha = a.$$

Iz uslova da je a realan broj sledi da je $\alpha^2 = 1$, odnosno $\alpha = \pm 1$.
Iz prve jednačine se za $\alpha = 1$ dobija $a = 4$, a za $\alpha = -1$ se dobija $a = -4$.

8. **Odrediti p tako da jedan koren jednačine $x^3 - 7x + p = 0$ bude jednak dvostrukom drugom korenu te jednačine.**

Rešenje:

Ako obeležimo korene polinoma trećeg stepena $P(x) = x^3 - 7x + p$ sa x_1, x_2 i x_3, na osnovu Vijetovih formula dobijamo

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 & = & -7 \quad \text{i} \\ x_1x_2x_3 & = & -p. \end{array}$$

Na osnovu uslova zadatka važi $x_1 = 2x_2$. Tada je

$$\begin{array}{rcl} 3x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_2^2 + 3x_2x_3 & = & -7 \\ 2x_2^2x_3 & = & -p. \end{array}$$

Iz prve jednačine je $x_3 = -3x_2$, tako da dobijamo jednačine

$$-6x_2^3 = -p \quad \text{i} \quad -7x_2^2 = -7.$$

Rešenje druge jednačine je $x_2 = 1$ ili $x_2 = -1$. Za $x_2 = 1$ vrednost parametra p je 6 ($x_1 = 2,\ x_3 = -3$), a za $x_2 = -1$ vrednost parametra p je -6 ($x_1 = -2,\ x_3 = 3$).

9. **Naći normiran polinom četvrtog stepena ako se zna da je zbir njegovih korena** 2, **proizvod** 1 **i važi** $P(2) = 5$ **i** $P(-1) = 8$.

Rešenje:

Neka su x_1, x_2, x_3 i x_4 koreni normiranog polinoma četvrtog stepena

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Na osnovu uslova zadatka i Vijetovih formula

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a \quad \text{i} \quad x_1x_2x_3x_4 = d,$$

sledi $a = -2$ i $d = 1$. Iz uslova $P(2) = 5$ i $P(-1) = 8$ sledi

$$\begin{aligned} P(2) &= 2^4 - 2 \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + 2c + 1 = 5, \\ P(-1) &= (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + 1 = 8, \end{aligned}$$

odnosno

$$2b + c = 2, \qquad b - c = 4.$$

Rešavanjem ovog sistema dobija se $b = 2$ i $c = -2$. Dakle,

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1.$$

10. **Odrediti realne koeficijente** a**,** b **i** c **polinoma**

$$P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 - 6x^2 + 5x + c$$

tako da je $P(-1) = -24$ **i da zajednički koren polinoma** $S(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 4$ **i** $R(x) = x^2 - 4x + 3$ **bude dvostruki koren polinoma** P.

Rešenje:

Odredićemo, prvo, zajednički koren polinoma R i S. Koreni polinoma $R(x) = x^2 - 4x + 3$ su $x = 1$ i $x = 3$. Kako je $S(1) = 0$, zaključujemo da je $x = 1$ koren polinoma S, a kako $S(3) \neq 0$, zaključujemo da $x = 3$

nije koren polinoma S. Odavde sledi da je $x = 1$ jedini zajednički koren polinoma S i R.
Da bi $x = 1$ bio dvostruki koren polinoma P, polinom P mora biti deljiv sa $(x-1)^2$. Hornerovom šemom dobijamo

1	1	a	b	-6	5	c
1	1	$a+1$	$a+b+1$	$a+b-5$	$a+b$	$a+b+c$
	1	$a+2$	$2a+b+3$	$3a+2b-2$	$4a+3b-2$	

Kako poslednji elemenat u svakoj vrsti predstavlja ostatak pri deljenju sa $x-1$, a taj ostatak mora biti jednak nuli, dobijaju se jednačine

$$a+b+c=0, \quad 4a+3b-2=0.$$

Iz uslova zadatka da je $P(-1) = -1+a-b-6-5+c = -24$, dobija se treća jednačina

$$a-b+c+12=0.$$

Rešavanjem ovog sistema dobija se $a=-4$, $b=6$ i $c=-2$. Znači da je traženi polinom

$$P(x) = x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 5x - 2.$$

11. **Naći najveći zajednički delilac za polinome**

a) $P(x) = x^6 + 3x^5 - 11x^4 - 27x^3 + 10x^2 + 24x$ **i** $Q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

b) $P(x) = x(x^2-1)$ **i** $Q(x) = x^4 + x^2 + x + 1$.

c) $P(x) = x^6 - 2x^5 - 2x^4 - 4x^3 + x^2 - 2x$ **i** $Q(x) = x^5 - 9x^3 + 4x^2 + 12x$.

Rešenje:

a) Da bismo našli najveći zajednički delilac dva polinoma, koristićemo Euklidov algoritam.

$$\begin{array}{l}
x^6+3x^5-11x^4-27x^3+10x^2+24x : x^3-2x^2-x+2 = x^3+5x^2-24 \\
\underline{-x^6+2x^5 \quad +x^4 \quad -2x^3} \\
\qquad 5x^5-10x^4-29x^3+10x^2+24x \\
\quad \underline{-5x^5+10x^4 \quad +5x^3-10x^2} \\
\qquad\qquad\qquad -24x^3 \qquad\quad +24x \\
\qquad\qquad\qquad \underline{+24x^3-48x^2-24x+48} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -48x^2 \qquad\quad +48
\end{array}$$

Zatim delimo polinom $Q(x)$ ostatkom $-48(x^2-1)$, odnosno sa x^2-1, s obzirom da je najveći zajednički delilac jedinstven do na multiplikativnu konstantu.

$$\begin{array}{l}
(x^3-2x^2-x+2) : (x^2-1) = x-2 \\
\underline{-x^3 \qquad\quad +x} \\
\quad -2x^2 \qquad +2 \\
\quad \underline{+2x^2 \qquad -2} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Dakle,

$$NZD(P,Q) = x^2 - 1.$$

b) $P(x) = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$.
Kako je $Q(0) = 1 \neq 0$, $Q(1) = 4 \neq 0$ i $Q(-1) = 2 \neq 0$, na osnovu Bezuovog stava sledi da polinomi x, $(x-1)$ i $(x+1)$ ne dele polinom $Q(x)$.

Dakle, polinomi P i Q nemaju zajedničkih korena, tako da je

$$NZD(P,Q) = 1.$$

c) Faktorišimo polinome P i Q.

$$Q(x) = x^5 - 9x^3 + 4x^2 + 12x = x(x^4 - 9x^2 + 4x + 12).$$

Ako polinom $x^4-9x^2+4x+12$ ima racionalnih korena, onda oni pripadaju skupu $\{1,-1,2,-2,3,-3,4,-4,6,-6,12,-12\}$. Iz Hornerove šeme

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 1 & 0 & -9 & 4 & 12 \\
\hline
-3 & 1 & -1 & -8 & 12 & 0 \\
2 & 1 & -4 & 4 & 0 & \\
2 & 1 & -2 & 0 & & \\
 & 1 & 0 & & &
\end{array}$$

sledi

$$Q(x) = x(x+1)(x+3)(x-2)^2.$$

Dalje je

$$P(x) = x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 4x^3 + x^2 - 2x = x(x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2).$$

Među mogućim korenima polinoma $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2$, koji su iz skupa $\{1,-1,2,-2\}$, jedini koji su istovremeno i koreni polinoma Q su $x = 2$ i $x = -1$. Hornerovom šemom

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
-1 & 1 & -2 & 2 & -4 & 1 & -2 \\
\hline
2 & 1 & -3 & 5 & -9 & 10 & -12 \\
2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
 & 1 & 2 & 6 & 12 & 25 &
\end{array}$$

utvrđujemo da je $x = -2$ jednostruka nula polinoma P i da je

$$P(x) = x(x-2)(x^4 + 2x^2 + 1).$$

Dakle, $NZD(P,Q) = x(x-2)$.

12. **Da li postoje realni brojevi a i b, takvi da je nad skupom realnih brojeva najveći zajednički delilac polinoma**

$$P(x) = x^5 - ax^3 + 2bx^2 + 4 \quad \textbf{i} \quad Q(x) = x^4 + 2x^3 - x - 2$$

polinom $R(x) = x^2 + x - 2$?

Rešenje:

Faktorizacije polinoma $Q(x)$ i $R(x)$ nad skupom realnih brojeva su:

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x^2 + x + 1)(x - 1)(x + 2), \\ R(x) &= (x - 1)(x + 2). \end{aligned}$$

Pošto je polinom R delilac polinoma Q, sledi da će polinom R biti najveći zajednički delilac za P i Q ukoliko $(x-1)(x+2)$ deli polinom P, a x^2+x+1 nije delilac polinoma P.
Da bi $(x - 1)$ i $(x + 2)$ bili delioci polinoma P, mora biti $P(1) = 0$ i $P(-2) = 0$, što znači da a i b zadovoljavaju sistem jednačina

$$\begin{array}{rcrcl} a & - & 2b & = & 5 \\ 2a & + & 2b & = & 7. \end{array}$$

Rešavanjem ovog sistema dobija se da je $a = 4$ i $b = -\frac{1}{2}$. Zamenjujući dobijene vrednosti za a i b u polinom P, a zatim deleći polinom P polinomom R, dobijamo

$P(x) = R(x)(x^3 - x^2 - x - 2) = (x - 1)(x + 2)(x^3 - x^2 - x - 2).$

Deleći $x^3 - x^2 - x - 2$ sa $x^2 + x + 1$, dobijamo količnik $x - 2$ i ostatak nula, odnosno dobijamo da je

$$P(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 2)(x^2 + x + 1).$$

Polinom R, znači, nije najveći zajednički delilac polinoma P i Q, već je to polinom $R(x)\cdot(x^2+x+1)$. Dakle, ne postoje brojevi a i b koji zadovoljavaju tražene uslove.

13. **Rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju**

a) $R(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 + x - 4}{(x - 1)(x - 2)(x^2 + 1)}$.

b) $R(x) = \dfrac{2x^4 - x^3 - 11x - 2}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$.

Rešenje:

a) $R = R(x)$ je prava racionalna funkcija.

$$R(x) = \frac{2x^3 - x^2 + x - 4}{(x-1)(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Množenjem ove jednakosti sa $(x-1)(x-2)(x^2+1)$, dobijamo

$2x^3 - x^2 + x - 4 =$
$= A(x-2)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x-2)$, odnosno

$2x^3 - x^2 + x - 4 =$
$= (A+B+C)x^3 + (-2A - B - 3C + D)x^2 + (A + B + 2C - 3D)x -$
$- 2A - B + 2D.$

Izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene od x dobija se sledeći sistem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
A & + & B & + & C & & & = & 2 \\
-2A & - & B & - & 3C & + & D & = & -1 \\
A & + & B & + & 2C & - & 3D & = & 1 \\
-2A & - & B & & & + & 2D & = & -4.
\end{array}$$

Rešavanjem ovog sistema dobija se $A = 1,\ B = 2,\ C = -1,\ D = 0$, pa je

$$R(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} - \frac{x}{x^2+1}.$$

b) R je neprava racionalna funkcija, pa je prvo potrebno predstaviti je u obliku zbira polinoma i prave racionalne funkcije. (U opštem slučaju to postižemo deljenjem brojioca imeniocem).

$$\begin{aligned}
R(x) &= \frac{2x^4 - x^3 - 11x - 2}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1} = \\
&= \frac{2(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1) - 5x^3 - 4x^2 - 15x - 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1} = \\
&= 2 + \frac{-5x^3 - 4x^2 - 15x - 4}{(x+1)^2(x^2+1)} = \\
&= 2 + \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \\
&= 2 + \frac{A(x+1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+1)}.
\end{aligned}$$

Analognim postupkom kao u zadatku pod a) dobijamo

$-5x^3 - 4x^2 - 15x - 4 =$
$= (A+C)x^3 + (A + B + 2C + D)x^2 + (A + C + 2D)x + A + B + D.$

Na osnovu uslova jednakosti dva polinoma dobijamo sledeći sistem:

$$\begin{array}{ccccccccccc} A & + & & & C & & & = & -5 \\ A & + & B & + & 2C & + & D & = & -4 \\ A & & & + & C & + & 2D & = & -15 \\ A & + & B & & & + & D & = & -4, \end{array}$$

čije rešenje je $A=-5$, $B=6$, $C=0$ i $D=-5$.
Zamenom ovih koeficijenata u polazni izraz dobijamo

$$R(x) = 2 - \frac{5}{x+1} + \frac{6}{(x+1)^2} - \frac{5}{x^2+1}.$$

14. **Neka je dat polinom**

$$P(x) = x^5 + ax^4 + 3x^3 + bx^2 + cx.$$

a) Odrediti realne koeficijente a, b, c polinoma P tako da bude deljiv sa x^2+1 i $x-1$.

b) Odrediti najveći zajednički delilac polinoma P i Q, ako je $Q(x) = x^3 - 3x - 2$.

c) Napisati u obliku zbira parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$.

Rešenje:

a) Polinom P je deljiv sa $x^2+1 = (x-i)(x+i)$, što znači da je deljiv sa $(x-i)$ i $(x+i)$. Na osnovu Bezuove teoreme imamo $P(i) = P(-i) = 0$. Kako je

$$P(i) = i^5 + ai^4 + 3i^3 + bi^2 + ci = i + a - 3i - b + ci = a - b + i(c-2),$$

dobijamo jednačine $a - b = 0$ i $c - 2 = 0$, odakle je $c = 2$ i $a = b$. Sada je

$$P(x) = x^5 + ax^4 + 3x^3 + ax^2 + 2x.$$

Na osnovu uslova zadatka je $P(1) = 0$, odnosno $6 + 2a = 0$, odakle je $a = -3$. Kako je $a = b$, sledi $b = -3$. Konačno,

$$P(x) = x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x.$$

b) Neka je $\frac{p}{q}$ racionalan koren polinoma Q. Tada $p|(-2)$ i $q|1$, odakle sledi da $p \in \{1,-1,2,-2\}$, $q \in \{1,-1\}$, te su mogući racionalni koreni polinoma Q iz skupa

$$\{1,-1,2,-2\}.$$

Hornerovom šemom

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ \hline -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

dobijamo

$$Q(x) = (x-2)(x^2+2x+1) = (x-2)(x+1)(x+1) = (x-2)(x+1)^2.$$

Faktorizacija polinoma P :

$$P(x) = x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2).$$

Mogući racionalni koreni polinoma P su takodje $\{1, -1, 2, -2\}$. Iz Hornerove šeme je

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & -3 & 3 & -3 & 2 \\ \hline 1 & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

tako da je

$$\begin{aligned} P(x) &= x(x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2) = \\ &= (x-1)(x^3 - 2x^2 + x - 2) = \\ &= x(x-1)(x-2)(x^2+1). \end{aligned}$$

Vidimo da je $x-2$ jedini zajednički faktor, za polinome P i Q, što znači da je

$$NZD(P, Q) = x - 2.$$

c)

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{x^3 - 3x - 2}{x(x-1)(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} + \frac{Dx+E}{x^2+1},$$

dakle treba da važi
$x^3 - 3x - 2 = x^4(A+B+C+D) + x^3(-3A-2B-C-3D+E) + x^2(3A+B+C+2D-3E) + x(-3A-2B-C+2E) + 2A.$

Izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene od x sa leve i desne strane jednakosti, dobija se sistem jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} A & + & B & + & C & + & D & & & = & 0 \\ -3A & - & 2B & - & C & - & 3D & + & E & = & 1 \\ 3A & + & B & + & C & + & 2D & - & 3E & = & 0 \\ -3A & - & 2B & - & C & + & & & 2E & = & -3 \\ 2A & & & & & & & & & = & -2. \end{array}$$

čije rešenje je

$$A = -1,\ B = 2,\ C = 0,\ D = -1,\ E = -1,$$

odakle je

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1}.$$

Zadaci za samostalni rad

1. Odrediti količnik i ostatak pri deljenju polinoma

   a) $P(x) = (x+1)(x+3)(x+4)$ sa $Q(x) = x^2 + 1$.

   b) $P(x) = x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 6x - 4$ sa $Q(x) = x - 2$.

   Rezultat:
   a) Količnik: $x + 8$, ostatak: $18x + 4$.
   b) Količnik: $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 2$, ostatak: 0.

2. Faktorisati nad poljem realnih i nad poljem kompleksnih brojeva polinom $P(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - x - 1$.

   Rezultat:
   $P(x) = (x-1)(2x+1)(x^2+1) = (x-1)(2x+1)(x-i)(x+i)$.

3. Koristeći Hornerovu šemu napisati polinom $P(x) = (x^2+1)(x+1)^2$ po stepenima od $x + 2$.

   Rezultat:
   $P(x) = (x+2)^4 - 6(x+2)^3 + 14(x+2)^2 - 14(x+2) + 5$.

4. Naći najveći zajednički delilac za polinome

   a) $P(x) = x^5 + x^4 - 7x^3 - x^2 + 6x$ i $Q(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$.

   b) $P(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$ i $Q(x) = x^6 + x^4 + 1$.

   Rezultat:
   a) $NZD(P(x), Q(x)) = x^2 - x - 2$.
   b) $NZD(P(x), Q(x)) = 1$.

5. Rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju

   a) $R(x) = \dfrac{x^2 + x}{(x-1)(x^2+1)}$.

   b) $R(x) = \dfrac{x+3}{(x-2)(x^2+2)}$.

   Rezultat:
   a) $R(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x^2+1}$. b) $R(x) = \dfrac{5}{6(x-2)} - \dfrac{5x+4}{6(x^2+2)}$.

6. a) Odrediti normiran realan polinom P najmanjeg stepena, ako su $2i$ i -2 jednostruki, a 1 je dvostruki koren polinoma P.

b) Odrediti $NZD(P, Q)$ ako je P polinom dobijen pod a), a $Q(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

c) Polinom P dobijen pod a) napisati po stepenima od $x + 1$.

Rezultat:
a) $P(x) = x^5 + x^3 + 2x^2 - 12x + 8 = (x^2 + 4)(x + 2)(x - 1)^2$.
b) $NZD(P(x), Q(x)) = (x + 2)(x - 1)$.
c) $P(x) = (x + 1)^5 - 5(x + 1)^4 + 11(x + 1)^3 - 11(x + 1)^2 - 8(x + 1) + 20$.

7. a) Odrediti realne koeficijente a, b i c polinoma

$$P(x) = x^5 + ax^4 - 2x^3 - 6x^2 + bx + c$$

ako je $P(-2) = 9$, proizvod korena polinoma P je -3, a zbir je -3.

b) Polinom P dobijen pod a) napisati po stepenima od $x + 2$.

Rezultat:
a) $P(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + x + 3$;
b) $P(x) = (x+2)^5 - 7(x+2)^4 + 14(x-2)^3 - 2(x+2)^2 - 15(x+2) + 9(x+2)$.

5

Matrice i determinante

Definicija matrice i operacije sa matricama

- Neka su a_{ij} elementi polja F i neka $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $m, n \in \mathbf{N}$. Pravougaona šema oblika

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

  je **matrica formata (tipa)** $m \times n$.

  Vrednosti a_{ij}, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ su **elementi matrice.** Takvu matricu označavamo sa $A = \left[\ a_{ij}\ \right]_{m\times n}$.

  Posmatraćemo matrice čiji su elementi kompleksni brojevi (drugim rečima, posmatramo slučaj kada je $F = \mathbf{C}$). Elementi $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ čine ***i*-tu vrstu** matrice A, a elementi a_{1j}, a_{2j}, $\ldots, a_{mj}$ čine njenu ***j*-tu kolonu**.

  Matrice $A = \left[\ a_{ij}\ \right]_{m\times n}$ i $B = \left[\ b_{ij}\ \right]_{p\times q}$ su **jednake** ako je $m = p$ i $n = q$ i $a_{ij} = b_{ij}$, odnosno ako su istog tipa i ako su im odgovarajući elementi jednaki.

- **Neke specijalne matrice**

  1. Matrica čiji su svi elementi jednaki nuli zove se **nula-matrica**.
  2. Matrica u kojoj je broj vrsta jednak broju kolona naziva se **kvadratna matrica**. **Red** kvadratne matrice jednak je broju njenih vrsta, odnosno kolona. Elementi $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ čine **glavnu dijagonalu** matrice $A = [a_{ij}]_{n\times n}$.
  3. Kvadratna matrica I (ili E) čiji su svi elementi van glavne dijagonale jednaki nuli, a svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki jedinici, zove se **jedinična matrica**.

4. Matrica A^T (ili A') tipa $n \times m$ dobijena od matrice A tipa $m \times n$ tako što se i-ta vrsta ($i \in \{1, 2, \ldots, m\}$) matrice A stavlja na mesto i-te kolone matrice A^T, naziva se **transponovana matrica** matrice A.

- **Operacije sa matricama**
Neka je $A = \left[\ a_{ij}\ \right]_{m\times n}$ i $B = \left[\ b_{ij}\ \right]_{p\times q}$.

1. Ako je $m = p$ i $n = q$, tada je $A + B = \left[\ a_{ij} + b_{ij}\ \right]_{m\times n}$.
2. Ako je α proizvoljan realan broj, onda je $\alpha\, A = \left[\ \alpha\, a_{ij}\ \right]_{m\times n}$.
3. Ako je $n = p$, onda postoji $AB = C$; tada je $C = \left[\ c_{ij}\ \right]_{m\times q}$ i $c_{ij}= \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

   Napomena: Množenje matrica je asocijativno, ali nije komutativno.

Determinante

- **Permutacija** p skupa $S = \{1, \ldots, n\}$ je bijektivno preslikavanje skupa S na samog sebe. Skup svih permutacija skupa $\{1, \ldots, n\}$ označićemo sa S_n. Ako je $i < j$ i $p(i) > p(j)$ kaže se da su elementi $p(i)$ i $p(j)$ u inverziji. Broj inverzija u permutaciji p označićemo sa $Inv(p)$.

Determinanta reda n je preslikavanje $D : M \to F$ definisano sa

$$D(A) = \sum_{p\in S_n} (-1)^{Inv(p)} a_{1p(1)}a_{2p(2)} \ldots a_{np(n)}, \tag{5.1}$$

gde je M skup svih kvadratnih matrica reda n, F je polje nad kojim su definisane te matrice (npr. polje realnih ili polje kompleksnih brojeva), a a_{ij} za $1 \le i \le n$ i $1 \le j \le n$ su elementi matrice A.

Često se za determinantu matrice A reda n koristi oznaka

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- Neke osobine determinanti:

1. Ako se u matrici zamene uloge vrsta i kolona, ne menjajući njihov poredak, vrednost determinante dobijene matrice jednaka je vrednosti determinante polazne matrice.

2. Ako u matrici dve vrste (kolone) zamene mesta, vrednost determinante dobijene matrice jednaka je negativnoj vrednosti determinante polazne matrice.
3. Ako se u matrici svi elementi jedne vrste (kolone) pomnože nekim brojem, vrednost determinante dobijene matrice jednaka je vrednosti determinante polazne matrice pomnoženoj tim brojem.
4. Ako su u matrici svi elementi jedne vrste (kolone) proporcionalni odgovarajućim elementima druge vrste (kolone), vrednost njene determinante je jednaka nuli.
5. Ako se u matrici elementima jedne vrste (kolone) dodaju odgovarajući elementi druge vrste (kolone), pomnoženi nekim brojem, vrednost determinante dobijene matrice jednaka je vrednosti determinante polazne matrice.
6. Vrednost determinante matrice u kojoj su svi elementi jedne vrste (kolone) jednaki nuli je jednaka nuli.
7. Ako su svi elementi ispod (iznad) glavne dijagonale matrice jednaki nuli, vrednost determinante je jednaka proizvodu elemenata na glavnoj dijagonali.
8. Ako su svi elementi ispod (iznad) sporedne dijagonale matrice jednaki nuli, vrednost determinante je jednaka proizvodu elemenata na sporednoj dijagonali pomnoženom sa $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

- Za proizvoljan element a_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, (kvadratne) matrice reda n, **minor** M_{ij} tog elementa je determinanta matrice reda $n-1$ dobijene izostavljanjem i-te vrste i j-te kolone polazne matrice. **Kofaktor** A_{ij} tog elementa je
$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$
Razvoj determinante po elementima j-te kolone je
$$D(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}\ .$$
Razvoj determinante po elementima i-te vrsteje
$$D(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}\ .$$

Inverzna matrica, rang matrice

- Neka je A kvadratna matrica reda n i I jedinična matrica reda n.

  Matrica A^{-1} za koju važi $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ je **inverzna matrica** matrice A.

  Kofaktor-matrica matrice A dobija se kada se u matrici A svaki element zameni odgovarajućim kofaktorom.

  Adjungovana matrica $adj(A)$ (ili A^*) matrice A je transponovana kofaktor-matrica matrice A.

  Ako je $D(A) = 0$, kažemo da je A **singularna matrica**. Matrica A za koju je $D(A) \neq 0$ zove se **regularna matrica**. Matrica A ima inverznu matricu ako je regularna. Tada je

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \cdot adj(A).$$

- Neka je A kvadratna matrica reda n, I jedinična matrica reda n, a λ neki kompleksan broj.

  Matrica $\lambda I - A$ je **karakteristična matrica** matrice A.
  Polinom $D(\lambda I - A)$ (po λ) je **karakteristični polinom** matrice A.
  Jednačina $D(\lambda I - A) = 0$ je **karakteristična jednačina** matrice A.
  Karakteristična vrednost (koren) matrice A je kompleksan broj λ_0 koji zadovoljava karakterističnu jednačinu matrice A.
  Karakteristični vektor matrice A je svaki ne-nula vektor $\mathbf{x} \in C^n$ koji zadovoljava uslov $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ (λ je karakteristična vrednost matrice A).

  Kejli - Hamiltonova teorema (Cayley-Hamilton): Ako je $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$ karakteristična jednačina matrice A, važi:

$$a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1A + a_0I = 0.$$

  (Za kvadratnu matricu A i za $n \geq 2$ je $A^n = A^{n-1} \cdot A = A \cdot A^{n-1}$).

- **Rang matrice**

  Podmatrica tipa $k \times k$ matrice A tipa $m \times n$ dobija se od matrice A izostavljanjem $m - k$ vrsta i $n - k$ kolona.

  Determinanta podmatrice tipa $k \times k$ matrice A tipa $m \times n$ naziva se **minor reda** k matrice A. (Ovo je uopštenje pojma minora reda $n - 1$ koji je definisan kao minor elementa determinante)

  Rang matrice A tipa $m \times n$ označava se sa $rang(A)$ i definiše na sledeći način:

  $rang(A) = 0$ ako je A nula-matrica.

  $rang(A) = r$ ako postoji minor reda r matrice A koji je različit od nule, a svi minori reda $r + 1$, ukoliko ih ima, su jednaki nuli.

- **Elementarne transformacije** matrice A su:
  a) međusobna zamena mesta dve vrste (kolone);
  b) množenje elemenata vrste (kolone) skalarom različitim od nule;
  c) dodavanje elemenata jedne vrste (kolone), prethodno pomnoženih nekim skalarom različitim od nule, odgovarajućim elementima neke druge vrste (kolone).

  Ako je matrica B dobijena primenom konačnog broja elementarnih transformacija na matricu A, kažemo da su matrice A i B **ekvivalentne** i to zapisujemo $A \sim B$. Ekvivalentne matrice imaju isti rang.

  Matrica B ima **stepenastu formu** ako je oblika

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

  pri čemu je $b_{11} \cdot b_{22} \cdot \ldots \cdot b_{rr} \neq 0$. Za ovakvu matricu važi da je $rang(B) = r$.

  Za svaku matricu A postoji matrica B koja ima stepenastu formu, a za koju važi da je $A \sim B$. (Uočimo da je tada i $rang(A) = rang(B)$, kao i da se matrica B dobija primenom konačnog broja elementarnih transformacija na matricu A).

  Ako je $A = \left[\ a_{ij}\ \right]_{n \times n}$ regularna (kvadratna) matrica reda n, onda je $rang(A) = n$.

Zadaci

Determinante

1. **Izračunati vrednost determinante**

   a) $D_1 = |a_{11}|$. **b)** $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. **c)** $D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

   Rešenje:

   Prema (5.1) je

   a) $D_1 = a_{11}$.

b) $D_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

c) $D_3 = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$
$+a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$.

2. **Izračunati vrednost determinante**

$$\textbf{a)}\quad D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}. \qquad \textbf{b)}\quad D_2 = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}.$$

Rešenje:

a) $D_1 = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = -2$.

b) $D_2 = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \sin\alpha = \cos(\alpha + \beta)$.

3. **Razvijajući po elementima jedne vrste, izračunati vrednost determinante**

$$\textbf{a)}\quad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & 1 \end{vmatrix}. \qquad \textbf{b)}\quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{6} \\ \mathrm{ctg}\frac{\pi}{6} & 0 & \sin\frac{\pi}{3} \\ \mathrm{tg}\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{6} & -\sqrt{3} \end{vmatrix}.$$

Rešenje:

a) Ako se determinanta razvije po elementima prve vrste, onda je

$$D_1 = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + 4(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} =$$
$$= (1 - 24) - 2(3 - 48) + 4(12 - 8) = 83.$$

b) Koristeći razvoj po elementima druge vrste, dobija se

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \sqrt{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} =$$
$$= \sqrt{3}(-1)^3\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} + 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}(-1)^5\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} =$$
$$= -\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4}.$$

4. **Koristeći razvoj po elementima jedne kolone, izračunati vrednost determinante**

$$\textbf{a)}\quad D_1 = \begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}. \qquad \textbf{b)}\quad D_2 = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 & 0 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Rešenje:

a) Ako se determinanta razvije po elementima prve kolone, onda je

$$\begin{aligned} D_1 &= 9(-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 6(-1)^3 \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)^4 \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 9(5-8) - 6(8-14) + 3(32-35) = 0. \end{aligned}$$

b) Razvijanjem po elementima prve kolone dobijamo da je polazna determinanta jednaka

$$\begin{aligned} D_2 &= a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -a - b - c + 2d. \end{aligned}$$

5. **Koristeći osobine determinanti, izračunati vrednost determinante**

a) $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$. **b)** $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}$. **c)** $D_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

Rešenje:

a) Ako se elementi treće kolone pomnože sa 2 i dodaju elementima prve kolone, onda je

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Razvijanjem po elementima druge vrste dobija se

$$D_1 = (-2) \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (12-5) = 14.$$

b) Ako se elementi prve vrste pomože sa (-2), odnosno (-3), i dodaju elementima druge, odnosno treće, vrste, onda je

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}.$$

Množenjem elemenata druge vrste sa (-2) i dodavanjem elementima treće vrste dobija se

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Kako su svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli, to je vrednost determinante jednaka proizvodu elemenata na glavnoj dijagonali, tj.

$$D_2 = -1.$$

c) Dodavanjem elemenata druge i treće kolone elementima prve kolone, dobija se

$$D_3 = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix}.$$

Kako je $a+b+c$ zajednički činilac za sve elemente u prvoj koloni, to je

$$D_3 = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}.$$

Ako se prva vrsta pomnoži sa (-1) i doda drugoj i trećoj vrsti, onda je

$$D_3 = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & c-b & a-c \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix}.$$

Razvijanjem po elementima prve kolone i izračunavanjem vrednosti determinante reda 2, dobija se

$$\begin{aligned} D_3 &= (a+b+c)\begin{vmatrix} c-b & a-c \\ a-b & b-c \end{vmatrix} = \\ &= (a+b+c)\Big((c-b)(b-c)-(a-b)(a-c)\Big) = \\ &= (a+b+c)(ab+ac+bc-a^2-b^2-c^2) = \\ &= -\frac{(a+b+c)}{2}\Big((a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\Big). \end{aligned}$$

6. **Izračunati vrednost determinante**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. **b)** $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$. **c)** $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{vmatrix}$.

Rešenje:

a) Kako je zbir elemenata u svakoj vrsti jednak $a+3$, dodavanjem elemenata druge, treće i četvrte kolone elementima prve kolone, dobija se determinanta čiji je svaki element u prvoj koloni jednak $a+3$.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 & a \\ a+3 & 1 & a & 1 \\ a+3 & a & 1 & 1 \\ a+3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ako se elementi prve kolone pomnože sa (-1) i dodaju elementima druge, treće i četvrte kolone, dobija se

$$\begin{aligned}
D_1 &= (a+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a-1 \\ 1 & 0 & a-1 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\
&= -(a+3)(a-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\
&= -(a+3)(a-1)^2\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3.
\end{aligned}$$

b)

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & c^3-a^3 \\ 0 & d-a & d^2-a^2 & d^3-a^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & (b-a)(b+a) & (b-a)(b^2+ab+a^2) \\ c-a & (c-a)(c+a) & (c-a)(c^2+ac+a^2) \\ d-a & (d-a)(d+a) & (d-a)(d^2+ad+a^2) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 1 & c+a & c^2+ac+a^2 \\ 1 & d+a & d^2+ad+a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & c-b & c^2-b^2+ac-ab \\ 0 & d-b & d^2-b^2+ad-ab \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & c-b & (c-b)(c+b)+a(c-b) \\ 0 & d-b & (d-b)(d+b)+a(d-b) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} c-b & (c-b)(c+b+a) \\ d-b & (d-b)(d+b+a) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & c+b+a \\ 1 & d+b+a \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

c)

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{vmatrix} = (1+a+a^2+a^3) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & a^2 & a^3 & 1 \\ 1 & a^3 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (1+a+a^2+a^3) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & a^2-a & a^3-a^2 & 1-a^3 \\ 0 & a^3-a & 1-a^2 & a-a^3 \\ 0 & 1-a & a-a^2 & a^2-a^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (1+a)(1+a^2) \begin{vmatrix} a(a-1) & a^2(a-1) & -(a-1)(1+a+a^2) \\ a(a^2-1) & -(a^2-1) & -a(a^2-1) \\ -(a-1) & -a(a-1) & -a^2(a-1) \end{vmatrix} =$$

$$= (1+a)(1+a^2)(a-1)^3(a+1) \begin{vmatrix} a & a^2 & -1-a-a^2 \\ a & -1 & -a \\ -1 & -a & -a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+1)^2(a-1)^3(a^2+1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1-a-a^2-a^3 \\ 0 & -1-a^2 & -a-a^3 \\ -1 & -a & -a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+1)^3(a-1)^3(a^2+1)^3 = (a^2-1)^3(a^2+1)^3 =$$

$$= (a^4-1)^3 = a^{12} - 3a^8 + 3a^4 - 1.$$

Matrice

1. **Ako je** $f(x) = -2 - 5x + 3x^2$ **i** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$**, izračunati** $f(A)$**.**

Rešenje:

Ako je I jedinična matrica reda 2, onda je

$$\begin{aligned} f(A) &= -2I - 5A + 3A^2 \\ &= -2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= -2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 & 1\cdot 2 + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 1 + 1\cdot 3 & 3\cdot 2 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= -2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2\cdot 1 & -2\cdot 0 \\ -2\cdot 0 & -2\cdot 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot 2 \\ 5\cdot 3 & 5\cdot 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\cdot 7 & 3\cdot 4 \\ 3\cdot 6 & 3\cdot 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} -2-5+21 & 0-10+12 \\ 0-15+18 & -2-5+21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}.$$

2. **Date su matrice**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}.$$

Izračunati $A \cdot B$, $B \cdot A$, $C \cdot D$, $D \cdot C$, $E \cdot F$ **i** $F \cdot E$.

Rešenje:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1+4\cdot 3 & 3\cdot 2+4\cdot 4 \\ 1\cdot 1+2\cdot 3 & 1\cdot 2+2\cdot 4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 15 & 22 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}. \\ B \cdot A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 3+2\cdot 1 & 1\cdot 4+2\cdot 2 \\ 3\cdot 3+4\cdot 1 & 3\cdot 4+4\cdot 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 13 & 20 \end{bmatrix}. \\ C \cdot D &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\cdot 1 & -1\cdot 2 & -1\cdot 3 \\ 0\cdot 1 & 0\cdot 2 & 0\cdot 3 \\ 1\cdot 1 & 1\cdot 2 & 1\cdot 3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \\ D \cdot C &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot(-1)+2\cdot 0+3\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}. \\ E \cdot F &= \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix}. \\ F \cdot E &= \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Prethodnim je ilustrovana činjenica da množenje matrica u opštem slučaju nije komutativno. Iako je $E \cdot F = F \cdot E$, komutativnost ne važi u slučaju množenja matrica A i B, odnosno C i D.

Takođe treba uočiti da u nekim slučajevima matrice ne mogu da se pomnože u oba poretka. Tako, na primer, možemo izračunati proizvod $C \cdot E$, ali proizvod $E \cdot C$ nije definisan (matrice nisu odgovarajućeg formata).

3. **Da li postoje takvi brojevi x, y, z, t za koje je proizvod**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & y \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ z & 0 \end{bmatrix}$$

jednak jediničnoj matrici?

Rešenje:
Izračunavajući dati proizvod, dobijamo da je

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & y \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ z & 0 \end{bmatrix} = \\ = &\begin{bmatrix} x+2 & 4 \\ -x+t & 2t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & y \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ z & 0 \end{bmatrix} = \\ = &\begin{bmatrix} 4 & y(x+2) \\ 2t & y(t-x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} yz(x+2) & 4 \\ yz(t-x) & 2t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Jednakost

$$\begin{bmatrix} yz(x+2) & 4 \\ yz(t-x) & 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se svodi na sistem jednačina

$$\begin{aligned} yz(x+2) &= 1 \\ 4 &= 0 \\ yz(t-x) &= 0 \\ 2t &= 1, \end{aligned}$$

koji, očigledno, nema rešenje, pa zaključujemo da tražene vrednosti za x, y, z, t ne postoje.

4. **Odrediti sve kvadratne matrice drugog reda čiji je kvadrat nula-matrica.**

Rešenje:

Ako su a, b, c, d proizvoljni (kompleksni) brojevi, tražena matrica treba da zadovoljava uslov

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

odakle sledi da a, b, c, d treba da zadovoljavaju sistem

$$\begin{aligned} a^2 + bc &= 0 \\ b(a+d) &= 0 \\ c(a+d) &= 0 \\ d^2 + bc &= 0. \end{aligned}$$

Iz prve i četvrte jednačine sledi da je $a^2 = d^2$. U slučaju kada je $a = d$, iz druge i treće jednačine sledi da je $b = c = 0$, a tada je i $a = d = 0$.
Ako je $a = -d$, onda b i c uzimaju proizvoljne vrednosti, uz uslov da je $a^2 + bc = 0$.
Zaključujemo da svaka matrica oblika

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix},$$

pri čemu je $a^2 + bc = 0$, zadovoljava uslov da joj je kvadrat jednak nula-matrici.

Uočimo da je ovim obuhvaćena i nula-matrica, koja takođe ispunjava traženi uslov, ali da to nije jedina matrica sa takvom osobinom.

5. **Izračunati** A^3 **ako je**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

$$\begin{aligned} A^3 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}^3 = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Uočavamo da matrica A ima osobinu da je $A^2 \neq 0$, a da je $A^3 = 0$.

6. **Izračunati** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$**,** $\quad n \in \mathbf{N}$**.**

Rešenje:

Za $n = 2$ je

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Za $n = 3$ je

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Koristeći matematičku indukciju, pokazaćemo da je

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pretpostavimo da je

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Tada je

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{k+1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dakle, tvrđenje očigledno važi za $n = 1$ a, na osnovu indukcijske pretpostavke da važi za neki prirodan broj k, dobijamo da važi i za sledbenika $k+1$ tog prirodnog broja. Konačno zaključujemo da je tvrđenje zadovoljeno za svaki prirodan broj n.

7. **Odrediti inverznu matricu za**

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

b) $B = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$.

Rešenje:

a) Kako je $D(A) = 5 - 4 = 1 \neq 0$, inverzna matrica matrice A postoji. Da bismo je odredili, izračunaćemo prvo adjungovanu matricu $adj(A)$ matrice A kao transponovanu kofaktor-matricu matrice A. Kofaktori $A_{ij},\ i,j \in \{1,2\}$ elemenata a_{ij} matrice A su

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 5 = 5, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1,$$

tako da je

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \cdot adj(A) = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Determinanta matrice B je $D(B) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \neq 0$. Prema tome, inverzna matrica matrice B postoji i važi:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} (-1)^2\cos\alpha & (-1)^3\sin\alpha \\ (-1)^3(-\sin\alpha) & (-1)^4\cos\alpha \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

c) Determinanta matrice C je

$$D(C) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8,$$

što znači da inverzna matrica postoji i

$$C^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T.$$

Dakle

$$C^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -4 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -4 & 0 & -4 \\ -1 & -2 & -1 \\ -5 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

d) Kako je

$$\begin{aligned} D(D) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -1, \end{aligned}$$

inverzna matrica matrice D postoji i

$$D^{-1}=-\begin{bmatrix}
\begin{vmatrix}3&1&2\\1&1&-1\\0&-2&-6\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2&3&4\\1&1&-1\\0&-2&-6\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2&3&4\\3&1&2\\0&-2&-6\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2&3&4\\3&1&2\\1&1&-1\end{vmatrix}\\
-\begin{vmatrix}2&1&2\\1&1&-1\\1&-2&-6\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&3&4\\1&1&-1\\1&-2&-6\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&3&4\\2&1&2\\1&-2&-6\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&3&4\\2&1&2\\1&1&-1\end{vmatrix}\\
\begin{vmatrix}2&3&2\\1&1&-1\\1&0&-6\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&2&4\\1&1&-1\\1&0&-6\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&2&4\\2&3&2\\1&0&-6\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&2&4\\2&3&2\\1&1&-1\end{vmatrix}\\
-\begin{vmatrix}2&3&1\\1&1&1\\1&0&-2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&2&3\\1&1&1\\1&0&-2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\1&0&-2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\1&1&1\end{vmatrix}
\end{bmatrix}$$

odnosno

$$D^{-1}=\begin{bmatrix}22&-6&-26&17\\-17&5&20&-13\\-1&0&2&-1\\4&-1&-5&3\end{bmatrix}.$$

8. **Rešiti matričnu jednačinu** $A\cdot X\cdot B=C$**, ako je**

$$A=\begin{bmatrix}3&-1\\5&-2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}14&16\\9&10\end{bmatrix}.$$

Rešenje:

Nepoznatu matricu X izračunaćemo tako što ćemo jednačinu pomnožiti sa leve strane matricom A^{-1}, a sa desne strane matricom B^{-1}, ukoliko navedene inverzne matrice postoje. Koristeći da je $A^{-1}\cdot A=I$ i $B\cdot B^{-1}=I$, dobijamo rešenje matrične jednačine

$$X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}.$$

Kako je

$$D(A)=\begin{vmatrix}3&-1\\5&-2\end{vmatrix}=-1(\neq 0)\qquad \text{i}\qquad D(B)=\begin{vmatrix}5&6\\7&8\end{vmatrix}=-2(\neq 0),$$

što implicira egzistenciju matrica A^{-1} i B^{-1}, dobijamo da je

$$X\ =\ \begin{bmatrix}3&-1\\5&-2\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}14&16\\9&10\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}^{-1}=$$

$$= \; -\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{(-2)} \cdot \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \; -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \; -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

(*Napomena:* S obzirom da množenje matrica nije komutativno, rezultat množenja matrične jednačine nekom matricom sa leve strane u opštem slučaju nije jednak rezultatu množenja te matrične jednačine istom matricom sa desne strane. Drugim rečima, u navedenom primeru se nepoznata matrica X izračunava kao proizvod tri matrice $A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$, pomnožene u navedenom, a ne proizvoljnom poretku.)

9. **Rešiti matričnu jednačinu** $ABX = 4X - 2C$, **ako je**

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = B^T, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

Za datu matričnu jednačinu važi

$$ABX = 4X - 2C \quad \Leftrightarrow \quad 4X - ABX = 2C \quad \Leftrightarrow \quad (4I - AB)\,X = 2C.$$

(*Napomena:* S obzirom da množenje matrica nije komutativno, poslednja jednačina je dobijena izdvajanjem matrice X kao zajedničkog faktora *sa desne strane*, i nije ekvivalentna jednačini $X(4I - AB) = 2C$.)

Kako je

$$4I - AB \;=\; \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & -6 \end{bmatrix},$$

i $D(4I-AB)=-16\neq 0$, zaključujemo da postoji $(4I-AB)^{-1}$, i važi

$$(4I-AB)^{-1} = -\frac{1}{16}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{16}\begin{bmatrix} -4 & -4 & 4 \\ -4 & -28 & 12 \\ 4 & 12 & -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 7 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje date matrične jednačine je

$$X = 2\,(4I-AB)^{-1}\cdot C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 7 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

10. **a) Rešiti matričnu jednačinu $AX + B = AC$, ako je**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 10 & 0 & 1 \\ -13 & 1 & -8 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Za dobijenu matricu X odrediti sve matrice M za koje važi $XM = MX$.

Rešenje:

a) Imamo da je

$$AX = AC - B \quad\Leftrightarrow\quad X = A^{-1}(AC-B) \quad\Leftrightarrow\quad X = C - A^{-1}B,$$

ukoliko A^{-1} postoji. Ovaj uslov je ispunjen, jer je

$$D(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$$

Dalje imamo

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)}\cdot adj(A) = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -6 & -4 \\ -3 & -3 & -2 \\ -4 & -4 & -5 \end{bmatrix},$$

odakle je

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -6 & -4 \\ -3 & -3 & -2 \\ -4 & -4 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 10 & 0 & 1 \\ -13 & 1 & -8 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -7 & -7 & 35 \\ -7 & 7 & -14 \\ 21 & 7 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

b) Format matrice M mora biti 3×3, da bi se ona mogla pomnožiti i sa leve i sa desne strane matricom X, formata 3×3.

Napišimo M u obliku

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Tada se matrična jednakost $XM = MX$ svodi na

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+2d+3g & b+2e+3h & c+2f+3i \\ d+2g & e+2h & f+2i \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2a+b & 3a+2b+c \\ d & 2d+e & 3d+2e+f \\ g & 2g+h & 3g+2h+i \end{bmatrix}.$$

Odavde se dobija sistem devet linearnih jednačina sa devet nepoznatih:

$$\begin{aligned} a+2d+3g &= a, & b+2e+3h &= 2a+b, & c+2f+3i &= 3a+2b+c, \\ d+2g &= d, & e+2h &= 2d+e, & f+2i &= 3d+2e+f, \\ g &= g, & h &= 2g+h, & i &= 3g+2h+i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2d+3g &= 0, & 2e+3h &= 2a, & 2f+3i &= 3a+2b, \\ g &= 0, & h &= d, & 2i &= 3d+2e, \\ & & & & 0 &= 3g+2h. \end{aligned}$$

Lako se utvrđuje da nepoznate $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ zadovoljavaju uslove

$$a = e = i, \quad b = f, \quad d = g = h = 0,$$

odakle sledi da je opšti oblik tražene matrice

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad \text{za } a, b, c \in \mathbf{R}.$$

11. **Rešiti matričnu jednačinu** $(X + 2I)^{-1} = \dfrac{1}{8}\, A$**, ako je**

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

Nakon množenja date jednačine sa desne strane sa $X + 2I$, dobijamo

$$I = \frac{1}{8}\, A \cdot (X + 2I) \qquad \Leftrightarrow \qquad I - \frac{1}{4}\, A = \frac{1}{8}\, A\, X,$$

a odatle, nakon množenja sa leve strane sa A^{-1} (ako postoji), imamo

$$A^{-1} - \frac{1}{4}\, I = \frac{1}{8}\, X \qquad \Leftrightarrow \qquad X = 8\, A^{-1} - 2\, I.$$

Kako je $D(A) = 8 \neq 0$, zaključujemo da matrica A^{-1} postoji i da se data matrična jednačina može rešiti na prethodno navedeni način.
S obzirom da je

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \cdot adj(A) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -11 & 29 & -2 \\ 7 & -17 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

dobijamo da je

$$X = \begin{bmatrix} -11 & 29 & -2 \\ 7 & -17 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 29 & -2 \\ 7 & -19 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

12. **Date su matrice** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ **i** $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ p & 1 \end{bmatrix}$**.**

Rešiti matričnu jednačinu $A \cdot X = B$ **za**

a) $p = -2$. **b)** $p = 2$.

Rešenje:

Odmah možemo utvrditi da je $D(A) = 0$, tako da matrica A^{-1} ne postoji. To znači da ne možemo primeniti postupak kojim smo rešavali matrične jednačine u prethodnim zadacima (8.-11.).

Matricu X, koja zadovoljava matričnu jednačinu $AX = B$, odredićemo polazeći od toga da ona mora biti formata 3×2 da bi se mogla pomnožiti sa leve strane matricom $A_{3\times3}$, i da bi rezultujuća matrica mogla biti matrica $B_{3\times2}$. Napomenimo da u ovom slučaju, kada A^{-1} ne postoji, matrična jednačina $AX = B$ ne može imati jedinstveno rešenje (ima beskonačno mnogo rešenja, ili ih uopšte nema).

a) Stavljajući da je $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$, za $p = -2$ dobijamo da se matrična jednačina

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

svodi na sistem jednačina

$$\begin{array}{rcrlrcr} a+c-e & = & 2, & \qquad & b+d-f & = & 1, \\ a & = & 0, & & b & = & 1, \\ a-c+e & = & -2, & & b-d+f & = & 1, \end{array}$$

koji možemo posmatrati kao dva nezavisna neodređena sistema po a, c, e, odnosno b, d, f, za čija rešenja važi:

$$a = 0, \qquad c = 2 + e, \qquad b = 1, \qquad d = f.$$

Zaključujemo da je, za $\alpha, \beta \in R$, opšte rešenje date matrične jednačine

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha + 2 & \beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}.$$

b) U ovom slučaju, matrična jednačina

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

se svodi na sistem jednačina

$$\begin{array}{rcrlrcr} a+c-e & = & 2, & \qquad & b+d-f & = & 1, \\ a & = & 0, & & b & = & 1, \\ a-c+e & = & 2, & & b-d+f & = & 1, \end{array}$$

za koji se lako može uočiti da nema rešenje (za podsistem jednačina po a, c, e važi da je $a = 0$, a tada su prva i treća jednačina,

$$c - e = 2 \quad \text{i} \quad c - e = -2$$

međusobno protivrečne). U ovom slučaju, dakle, data matrična jednačina nema rešenje.

13. **Matričnim računom rešiti sistem linearnih jednačina**

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & -1 \\ x & + & y & + & z & = & 6 \\ 3x & + & y & - & 2z & = & -1. \end{array}$$

Rešenje:

Dati sistem treba zameniti odgovarajućom matričnom jednačinom. Matrična jednačina $AX = B$ je ekvivalentna datom sistemu ako je A matrica sistema, matrica X sadrži kolonu promenljivih, a matricu B čini kolona slobodnih članova sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Očigledno, sistem linearnih jednačina ima smisla rešavati matričnim računom samo kada je matrica sistema regularna, tj. kada postoji A^{-1}. Kako je

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -23 \neq 0,$$

postoji A^{-1} i važi da je $X = A^{-1}B$. S obzirom da je

$$adj(A) = \begin{bmatrix} -3 & -5 & -4 \\ 5 & -7 & -1 \\ -2 & -11 & 5 \end{bmatrix},$$

sledi da je

$$X = -\frac{1}{23} \begin{bmatrix} -3 & -5 & -4 \\ 5 & -7 & -1 \\ -2 & -11 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{23} \begin{bmatrix} -23 \\ -46 \\ -69 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

odakle zaključujemo da je rešenje datog sistema jednačina

$$x = 1, \qquad y = 2, \qquad z = 3.$$

14. **Odrediti karakteristične korene i vektore matrice**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

Karakteristična matrica matrice A je

$$\lambda\, I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ -3 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom matrice A je

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= D(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ -3 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \\ &= \lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 1) = \lambda(\lambda - 1 - \sqrt{2})(\lambda - 1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Karakteristični koreni matrice A su koreni njenog karakterističnog polinoma, tj.

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{2} \quad \text{i} \quad \lambda_3 = 1 - \sqrt{2}.$$

Za svaki karakteristični koren određuju se karakteristični vektori kao rešenja matrične jednačine

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda I - A)\mathbf{x} = 0.$$

Za $\underline{\lambda = 0}$ odgovarajuća matrična jednačina je

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

a ona je ekvivalentna sistemu linearnih jednačina

$$\begin{array}{rrcl} -2x & +y & = & 0 \\ x & & = & 0 \\ -3x & & = & 0. \end{array}$$

Skup karakterističnih vektora (rešenje sistema) je u ovom slučaju

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Za $\underline{\lambda = 1+\sqrt{2}}$ matrična jednačina je data sa

$$\begin{bmatrix} -1+\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & 1+\sqrt{2} & 0 \\ -3 & 0 & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

a odgovarajući ekvivalentan sistem je

$$\begin{array}{rcccccl} (-1+\sqrt{2})x & + & y & & & = & 0 \\ x & + & (1+\sqrt{2})y & & & = & 0 \\ -3x & & & + & (1+\sqrt{2})z & = & 0, \end{array}$$

odakle sledi da skup karakterističnih vektora ima oblik

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ (1-\sqrt{2})\alpha \\ 3(\sqrt{2}-1)\alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Za $\underline{\lambda = 1-\sqrt{2}}$ imamo

$$\begin{bmatrix} -1-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & 1-\sqrt{2} & 0 \\ -3 & 0 & 1-\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

odakle je

$$\begin{array}{rcccccl} (-1-\sqrt{2})x & + & y & & & = & 0 \\ x & + & (1-\sqrt{2})y & & & = & 0 \\ -3x & & & + & (1-\sqrt{2})z & = & 0, \end{array}$$

a tada je skup karakterističnih vektora

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{bmatrix} (\sqrt{2}-1)\alpha \\ \alpha \\ -3\alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

15. **Data je matrica** $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$, $\quad a, b \in \mathbf{R}, \quad a \neq 0.$

a) Odrediti karakteristične korene matrice A.

b) Odrediti karakteristične vektore matrice A u zavisnosti od vrednosti realnog parametra b.

Rešenje:

a) Karakteristični koreni matrice A su koreni njenog karakterističnog polinoma. Kako je

$$p(\lambda) = D(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a-\lambda & -b & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^3,$$

i

$$(a-\lambda)^3 = 0 \quad \text{za} \quad \lambda = a,$$

zaključujemo da je $\lambda = a$ karakteristični koren date matrice.

b) Karakteristični vektori koji odgovaraju karakterističnom korenu λ matrice A su rešenja matrične jednačine $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Za $\lambda = a$ navedena matrična jednačina je

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

i ekvivalentna je sistemu linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcl} ax + by & = & ax \\ ay & = & ay \\ az & = & az \end{array},$$

odnosno

$$\begin{array}{rcl} by & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ 0 & = & 0. \end{array}$$

Odatle zaključujemo:

Za $\underline{b \neq 0}$ je $y = 0$, što znači da je skup karakterističnih vektora

$$\left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Za $\underline{b = 0}$ je skup karakterističnih vektora

$$\left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

16. **Koristeći Kejli-Hamiltonovu teoremu odrediti inverznu matricu matrice**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

Pre svega, treba proveriti da li inverzna matrica matrice A postoji. Kako je

$$D(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

matrica A je regularna. To znači da se A^{-1} može odrediti uz pomoć Kejli-Hamiltonove teoreme.

Karakteristični polinom $p(\lambda) = D(\lambda I - A)$ matrice A je

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda-2 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 \\ \lambda-2 & \lambda-2 & 1 \\ \lambda-2 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \\ &= (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \\ &= (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-3) = \\ &= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6. \end{aligned}$$

Na osnovu Kejli-Hamiltonove teoreme je $p(A) = 0$ (matrica zadovoljava svoju karakterističnu jednačinu), odakle je

$$A^3 - 6A^2 + 11A - 6I = 0.$$

Nakon množenja sa A^{-1}, prethodna jednačina postaje

$$A^2 - 6A + 11I - 6A^{-1} = 0,$$

odakle dobijamo da je tražena inverzna matrica matrice A data sa

$$A^{-1} = \frac{1}{6}(A^2 - 6A + 11I).$$

S obzirom da je

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -5 \\ 3 & 6 & -5 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix},$$

sledi

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\,(A^2 - 6A + 11I) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\begin{bmatrix} 4 & 5 & -5 \\ 3 & 6 & -5 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\begin{bmatrix} 4 & 5 & -5 \\ 3 & 6 & -5 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & 6 & -6 \\ 6 & 12 & -6 \\ 6 & -6 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4-12+11 & 5-6 & -5+6 \\ 3-6 & 6-12+11 & -5+6 \\ 3-6 & -3+6 & 4-12+11 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

17. **Primenom Kejli-Hamiltonove teoreme izračunati**

a) $f(A) = A^4 - 3A^3 - 3A^2 + 8A + 5I$, **ako je** $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

b) $f(B) = B^4 - 2B^3 + B^2 + 2B + 2I$, **ako je** $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

Rešenje:

a) Odredićemo prvo karakteristični polinom $p(\lambda)$ matrice A.

$$p(\lambda) = D(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda+1) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6.$$

Na osnovu Kejli-Hamiltonove teoreme važi da je $p(A) = 0$, odnosno

$$A^3 - 4A^2 + A + 6I = 0.$$

Poslednju jednakost iskoristićemo pri izračunavanju vrednosti $f(A)$:

$$\begin{aligned} f(A) &= A^4 - 3A^3 - 3A^2 + 8A + 5I = \\ &= A(A^3 - 4A^2 + A + 6I) + A^3 - 4A^2 + 2A + 5I = \\ &= A^3 - 4A^2 + 2A + 5I = \\ &= (A^3 - 4A^2 + A + 6I) + A - I = \\ &= A - I = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

b) Karakteristični polinom $p(\lambda)$ matrice B je

$$p(\lambda) = D(\lambda I - B) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & -3 \\ 1 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 + 2.$$

Ako sa $q(\lambda)$ označimo količnik pri deljenju polinoma

$$f(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

polinomom

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + 2,$$

a sa $r(\lambda)$ ostatak pri tom deljenju, onda je

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= p(\lambda) \cdot q(\lambda) + r(\lambda) \\ &= (\lambda^3 - \lambda^2 + 2) \cdot (\lambda - 1) + 4. \end{aligned}$$

Na osnovu Kejli - Hamiltonove teoreme je $p(B) = 0$, odakle sledi

$$f(B) = p(B) \cdot q(B) + r(B) = r(B) = 4I,$$

odnosno

$$f(B) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

18. **Odrediti rang matrice**

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. **b)** $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}$.

Rešenje:

a) Rang date matrice odredićemo kao rang njoj slične matrice koja ima stepenastu formu. Primenom elementarnih transformacija na datu matricu dobijamo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Na prvoj matrici izvršene su sledeće elementarne transformacije: elementi prve vrste pomnoženi su sa (-2), odnosno sa (-3), i sabrani sa odgovarajućim elementima druge, odnosno treće, vrste.

Na drugoj matrici izvršena je sledeća elementarna transformacija: elementi druge vrste pomnoženi su sa (-1) i sabrani sa odgovarajućim elementima treće vrste.

Treća matrica $C = [c_{ij}]_{3\times 4}$ ima stepenastu formu. Kako je $c_{11} \cdot c_{22} = 1 \neq 0$, a $c_{11} \cdot c_{22} \cdot c_{33} = 0$, rang matrice C jednak je 2, a tada je i

$$rang(A) = 2.$$

Ilustrujmo i postupak određivanja ranga matrice uz pomoć minora. Odredićemo minor date matrice koji je različit od nule, a da su pri tome svi minori većeg reda jednaki nuli. Tada je rang matrice A jednak redu uočenog ne-nula minora.

Matrica A je tipa 3×4, pa njen maksimalni minor može biti reda 3 (uočimo da je to i maksimalni mogući rang date matrice). Minor reda 3 date matrice je determinanta podmatrice matrice A, dobijene izostavljanjem jedne kolone. Izračunavajući ove minore, dobijamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

odakle zaključujemo da je $rang(A) < 3$, s obzirom da su svi njeni minori reda tri jednaki nuli.

Posmatrajući, dalje, minore reda dva, koje izračunavamo kao determinante podmatrica matrice A dobijenih izostavljanjem jedne vrste i dve kolone, dobijamo da je

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

odnosno da postoji minor reda dva različit od nule, odakle zaključujemo da je $rang(A) = 2$.

b) Elementarnim transformacijama svešćemo datu matricu na stepenastu formu:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & -12 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 4 & -5 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kako je rang poslednje matrice jednak 3, sledi da i za rang njoj ekvivalentne matrice B važi $rang(B) = 3$.

(U postupku određivanja ranga matrice B primenjene su, redom, sledeće elementarne transformacije: prva vrsta je pomnožena sa (-2), (-1), (-1), (-2) i dodata drugoj, trećoj, četvrtoj i petoj; druga vrsta je pomnožena sa 1, (-2), (-3), i dodata trećoj, četvrtoj i petoj; četvrta vrsta je pomnožena sa (-3) i dodata drugoj; četvrta i druga vrsta su zamenile mesta; četvrta i treća vrsta su zamenile mesta; druga i treća kolona su zamenile mesta; treća i peta kolona su zamenile mesta. Dobijena je stepenasta forma sa tri ne-nula elementa na glavnoj dijagonali.)

19. **U zavisnosti od realnog parametra a diskutovati rang matrice**

a) $A = \begin{bmatrix} a+1 & a^2+1 & a \\ 3a-1 & 3a^2-1 & a^2+3a \\ a-1 & a^2-1 & a \end{bmatrix}$.

b) $B = \begin{bmatrix} 3a+1 & a & 4a-1 \\ -a^2+1 & a-1 & -a^2+a \\ a^2+a+2 & a & a^2+2a \end{bmatrix}$.

Rešenje:

a) Matrica A je kvadratna, pa ćemo prvo izračunati njenu determinantu:

$$\begin{aligned} D(A) &= \begin{vmatrix} a+1 & a^2+1 & a \\ 3a-1 & 3a^2-1 & a^2+3a \\ a-1 & a^2-1 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a+1 & a^2+1 & 1 \\ 3a-1 & 3a^2-1 & a+3 \\ a-1 & a^2-1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= a \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & a \\ a-1 & a^2-1 & 1 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ a-1 & a^2-1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2\, a^3\, (a-1). \end{aligned}$$

Zaključujemo da je za $a \neq 0$ i $a \neq 1$ $D(A)$ različita od nule, što znači da je rang date matrice maksimalan, odnosno $rang(A) = 3$.

Za $\underline{a = 0}$ je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

odakle sledi da je u ovom slučaju $rang(A) = 1$.

Za $\underline{a = 1}$ je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

što znači da je, u ovom slučaju, $rang(A) = 2$.

b) Elementarnim transformacijama svešćemo datu matricu na stepenastu formu:

$$\begin{bmatrix} 3a+1 & a & 4a-1 \\ -a^2+1 & a-1 & -a^2+a \\ a^2+a+2 & a & a^2+2a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3a+1 & a & a-2 \\ -a^2+1 & a-1 & a-1 \\ a^2+a+2 & a & a-2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3a+1 & a & a-2 \\ -a^2+1 & a-1 & a-1 \\ a^2-2a+1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3a+1 & a & -2 \\ -a^2+1 & a-1 & 0 \\ a^2-2a+1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} -2 & a & 3a+1 \\ 0 & a-1 & -a^2+1 \\ 0 & 0 & (a-1)^2 \end{bmatrix}.$$

Do ovog oblika se dolazi primenom sledećih transformacija: prva kolona je pomnožena sa (-1) i sabrana sa trećom; prva vrsta je pomnožena sa (-1) i sabrana sa trećom; druga kolona je pomnožena sa (-1) i sabrana sa trećom; trećoj i prvoj koloni su razmenjena mesta.

Zaključujemo da poslednja matrica za $a \neq 1$ ima tri ne-nula elementa na glavnoj dijagonali, odnosno

za $\underline{a \neq 1}$ je $rang(B) = 3$.

za $\underline{a = 1}$ je

$$B \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

što znači da je tada $rang(B) = 1$.

20. **Diskutovati rang matrice**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

u zavisnosti od realnog parametra a. Da li matrica A ima inverznu matricu?

Rešenje:

Primenjujući elementarne transformacije na matricu A, dobijamo njoj ekvivalentne matrice:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & a & 10 & 1 \\ 7 & 1 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & a-12 & 6 & -15 \\ 0 & -20 & 10 & -25 \\ 0 & -4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & a & 6 & -15 \\ 0 & 0 & 10 & -25 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & a & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Redom su primenjene sledeće elementarne transformacije: zamenjena su mesta prvoj i drugoj koloni; elementi prve vrste pomnoženi su, redom, sa (-4), (-7), (-2) i sabrani, redom, sa elementima druge, treće, četvrte vrste; elementi treće kolone su pomnoženi sa 2 i sabrani sa odgovarajućim elementima druge kolone; zamenjena su mesta treće i četvrte vrste; elementi treće vrste su pomnoženi sa (-5) i sabrani sa odgovarajućim elementima četvrte vrste.)

Poslednja matrica ima stepenastu formu, na osnovu koje zaključujemo:

Za $\underline{a \neq 0}$, $\quad rang(A) = 3$

Za $\underline{a = 0}$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

odakle zaključujemo da je i u ovom slučaju $rang(A) = 3$.

S obzirom da je $rang(A) < 4$ (koliki je red ove kvadratne matrice), sledi da je $D(A) = 0$, što znači da matrica A nema inverznu matricu.

21. **U zavisnosti od realnog parametra a diskutovati rang matrice**

$$A = \begin{bmatrix} a & a & 2 & 0 \\ 2a & a & a-1 & 1 \\ -3a & -3a & -3-a & 1-a \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

Kako data matrica nije kvadratna, u postupku određivanja njenog ranga ne možemo koristiti njenu determinantu. Primenjujući elementarne transformacije, svešćemo matricu A na stepenastu formu:

$$A = \begin{bmatrix} a & a & 2 & 0 \\ 2a & a & a-1 & 1 \\ -3a & -3a & -3-a & 1-a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & a & 2 & 0 \\ 0 & -a & a-5 & 1 \\ 0 & 0 & 3-a & 1-a \end{bmatrix}.$$

Uočavamo da je za $\underline{a \neq 0}$ $rang(A) = 3$, jer u tom slučaju za poslednju matricu važi:

$a \neq 3$, odakle je $a \cdot (-a) \cdot (a-3) \neq 0$, ili

$a = 3$, što znači da je $a \neq 1$, odakle se nakon zamene mesta treće i četvrte kolone u poslednjoj matrici ponovo dobija da je $a \cdot (-a) \cdot (a-3) \neq 0$.

Za $\underline{a = 0}$ važi

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

odakle sledi da je u ovom slučaju $rang(A) = 2$.

Zadaci za samostalni rad

1. Izračunati vrednost determinante

$a)$ $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$. $\qquad$ $b)$ $\begin{vmatrix} i^{21} & i^{82} \\ i^{143} & i^{224} \end{vmatrix}$.

Rezultat:
a) $\cos 2\alpha$. b) 0.

2. Izračunati vrednost determinante $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

Rezultat:
$(b-a)(c-a)(c-b)$.

3. Izračunati z ako je $Re\{z\} > 0$ i $\begin{vmatrix} z & 1 & i \\ 0 & -1 & \bar{z} \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -8+2i$.

Rezultat:
$z = 2 - i$.

4. Izračunati vrednost determinante $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$.

Rezultat:
$(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$.

5. *a*) Izračunati vrednost determinante $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & a^2 & a^4 & a^6 \\ 1 & a^3 & a^6 & a^9 \end{vmatrix}$.
b) Izračunati vrednost determinante D za $a = i$.

Rezultat:
a) $D = a^4(a-1)^3(a^2-1)^2(a^3-1) = a^4(a-1)^6(a+1)^2(a^2+a+1)$.
b) Ako je $a = i$, vrednost determinante D je $-16i$.

6. Ako je $f(x) = x^2 - 5x + 3$ i $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, izračunati $f(A)$.

Rezultat:
$f(A) = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$.

7. Izračunati

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. b) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. d) $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$.

Rezultat:

a) $\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$. b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$. c) $\begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix}$. d) $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

8. Da li se parametri a i b mogu izabrati tako da matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} b & b & 5 \\ 9 & a & a \\ a & 8 & a \end{bmatrix}$$

budu komutativne?

Rezultat:

Da. ($a = 3, b = -6$.)

9. Odrediti inverznu matricu za

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}. \qquad \text{b) } B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{c) } C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rezultat:

$$\text{a) } A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad \text{b) } B^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{c) } C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. Rešiti matričnu jednačinu

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{bmatrix}.$$

Rezultat:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

11. Rešiti matričnu jednačinu

a) $(A+I)\cdot X + B = 4C$, gde je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) $A \cdot X - B = X$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rezultat:

a) $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

b) Nema rešenja.

12. Odrediti karakteristične korene i vektore matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Rezultat:

Karakteristični koreni su $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$ i $\lambda_3 = 6$.

Za $\lambda_1 = -1$ skup karakterističnih vektora je

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \right\};$$

Za $\lambda_2 = 4$ skup karakterističnih vektora je

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \right\};$$

Za $\lambda_3 = 6$ skup karakterističnih vektora je

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

13. Data je matrica
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Naći karakteristične korene i vektore matrice A.

b) Primenom Kejli-Hamiltonove teoreme izračunati
$$A^4 - 4A^3 + 5A^2 - A - E.$$

Rezultat:

a) Karakteristični koreni matrice A su $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2.$

Za $\lambda = 1$ karakteristični vektori su oblika $\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\};$

Za $\lambda = 2$ karakteristični vektor je $\begin{bmatrix} 0 \\ 2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$

b) $A(A^3 - 4A^2 + 5A - 2E) + A - E = A - E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

14. U zavisnosti od realnog parametra a diskutovati rang matrice

a) $A = \begin{bmatrix} a & 2 & 3a \\ 3a & a+4 & 10a \\ 2a^2 & 6a-4 & 7a^2+3a \end{bmatrix}.$

b) $B = \begin{bmatrix} 2a^2+3a+5 & 2 & a^2+3a+2 \\ a+2 & 1 & a+1 \\ 2a+3 & 0 & 2a+3 \end{bmatrix}.$

c) $C = \begin{bmatrix} a^2-1 & a-1 & 2 & 1 \\ a^2-1 & 2a-2 & 2 & a+1 \\ a^2-1 & a-1 & a^2+a+3 & 2 \\ a^2-1 & a-1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$

Rezultat:

a) Za $a = 0$ je $rang(A) = 1$; za $a = -1$ ili $a = 2$ je $rang(A) = 2$; za ostale vrednosti parametra a je $rang(A) = 3$.

b) Za $a = -\frac{3}{2}$ je $rang(B) = 2$; za ostale vrednosti je $rang(B) = 3$.

c) Za $a = 1$ je $rang(C) = 2$; za $a = -1$ je $rang(C) = 3$; za ostale vrednosti parametra a je $rang(C) = 4$.

6

Sistemi linearnih jednačina

- **Sistem** m **linearnih jednačina sa** n **nepoznatih** nad poljem realnih (kompleksnih) brojeva je konjukcija jednačina

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array} \tag{6.1}$$

  gde su $n, m \in \mathbf{N}$, a_{ij} i b_i realni (kompleksni) brojevi za $1 \leq i \leq m$ i $1 \leq j \leq n$.

  Elementi a_{ij} za $1 \leq i \leq m$ i $a \leq j \leq n$ se nazivaju **koeficijenti,** a elementi b_i za $1 \leq i \leq m$ **slobodni članovi.**

  Ako je $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, onda se kaže da je sistem **homogen**. U suprotnom, ako postoji $i \in \{1, \ldots, m\}$ za koje je $b_i \neq 0$, sistem je nehomogen.

- **Rešenje sistema linearnih jednačina** (6.1) za n-torku nepoznatih $(x_1, \ldots , x_n)$ je svaka uređena n-torka $(c_1, \ldots, c_n)$ realnih (kompleksnih) brojeva koja identički zadovoljava sve jednačine sistema (kada promenljive $x_1, \ldots, x_n$ redom uzmu vrednosti $c_1, \ldots, c_n$ identiteti važe u polju realnih (kompleksnih) brojeva).

  Skup rešenja sistema (6.1) za n-torku nepoznatih $(x_1, \ldots, x_n)$ je skup svih uređenih n-torki $(c_1, \ldots, c_n)$ koje su rešenje sistema za tu n-torku.

  Dva sistema linearnih jednačina sa n nepoznatih su **ekvivalentna** ako su jednaki njihovi skupovi rešenja za $(x_1, \ldots, x_n)$.

  Priroda sistema:

  saglasan (moguć) - ima rešenje

  * odrеđen - ima tačno jedno rešenje
  * neodređen - ima više od jednog rešenja (beskonačno mnogo rešenja)

nemoguć (kontradiktoran ili protivrečan) - nema rešenja

Homogen sistem je uvek saglasan (uvek ima bar **trivijalno rešenje**:$(0,\dots,0)$).

- **Elementarne transformacije** sistema linearnih jednačina su:

  1. Zamena mesta jednačinama.
  2. Množenje neke jednačine brojem različitim od nule.
  3. Dodavanje neke jednačine pomnožene brojem različitim od nule nekoj drugoj jednačini.

  Ove transformacije ne menjaju skup rešenja sistema linearnih jednačina, tj. njihovom primenom se dobijaju sistemi linearnih jednačina koji su ekvivalentni polaznom sistemu.

  • **Gausov algoritam**:
  Sistem linearnih jednačina (6.1) se može elementarnim transformacijama svesti na "trapezni" ("trougaoni") oblik

$$\begin{array}{rcl}
c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \ldots + c_{1k}y_k + e_{11}z_1 + \ldots + e_{1l}z_l & = & d_1 \\
c_{22}y_2 + \ldots + a_{2k}y_k + e_{21}z_1 + \ldots + e_{2l}z_l & = & d_2 \\
\ldots & & \\
c_{kk}y_k + e_{k1}z_1 + \ldots + e_{kl}z_l & = & d_k, \\
0 & = & f \\
0 & = & 0 \\
\ldots & & \\
0 & = & 0
\end{array}$$

  gde je $k+l=n$, $k,l \in \mathbf{N}\cup\{0\}$, $c_{11}c_{22}\ldots c_{kk} \neq 0$ i $(y_1,\ldots,y_k,z_1,\ldots,z_l) = (x_{p(1)},\ldots,x_{p(n)})$, gde je p neka permutacija skupa $\{1,\ldots,n\}$. (Ako je $k = n$, postoji samo prvih k jednačina.)

  - Ako je $k=0$ i $f=0$, sistem je neodređen.
  - Ako je $k\geq 0$ i $f\neq 0$, sistem je nemoguć.
  - Ako je $k>0$ i $f=0$, sistem je saglasan. U tom slučaju za $l=0$ sistem je određen, a za $l\neq 0$ sistem je neodređen i stepen neodređenosti mu je l.

- **Matrica sistema** linearnih jednačina (6.1) je matrica

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Proširena matrica sistema $\overline{A}$ dobija se dopisivanjem kolone koja sadrži, redom, slobodne članove $b_1, b_2, \ldots, b_m$ sistema na mesto $(n+1)$-ve kolone u matrici A.

Kroneker-Kapelijeva teorema: Da bi sistem linearnih jednačina bio saglasan, potrebno je i dovoljno da je rang matrice sistema jednak rangu proširene matrice sistema.

- Za $n = m$ sistem (6.1) se naziva **kvadratni sistem.** Tom kvadratnom sistemu pridružujemo determinantu matrice sistema

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1(i-1)} & a_{1i} & a_{1(i+1)} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2(i-1)} & a_{2i} & a_{2(i+1)} & \ldots & a_{2n} \\ \\ a_{n1} & \ldots & a_{n(i-1)} & a_{ni} & a_{n(i+1)} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Kramerovo pravilo: Ako je determinanta D kvadratnog sistema različita od nule onda je sistem određen i ima jedinstveno rešenje

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{D_{x_1}}{D}, \frac{D_{x_2}}{D}, \ldots, \frac{D_{x_n}}{D} \right),$$

gde je

$$D_{x_i} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \ldots & a_{2n} \\ \\ a_{n1} & \ldots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

U tom slučaju, homogen sistem ima samo trivijalno rešenje $(0, \ldots, 0)$.

(U suprotnom, ako je $D = 0$ i $D_{x_1} = D_{x_2} = \ldots = D_{x_n} = 0$ onda je sistem ili nemoguć ili neodređen, a ako je $D = 0$ i postoji $i \in \{1, \ldots, n\}$ tako da je $D_{x_i} \neq 0$ onda je nemoguć. Homogen kvadratni sistem je za $D = 0$ neodređen.)

Zadaci

1. **Gausovim algoritmom rešiti sistem**

a)
$$\begin{aligned} x - y &= 7 \\ 2x + 3y &= 4 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x + 8y - z &= 2 \\ x - y + z &= 2 \\ 2x + 3y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Rešenje:

a) Ako se prva jednačina pomnoži sa (-2) i doda drugoj jednačini, onda je

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 7 \\ 2x & + & 3y & = & 4 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 7 \\ & & 5y & = & -10 \end{array}.$$

Iz druge jednačine sledi da je $y = -\frac{10}{5} = -2$, i uvrštavanjem te vrednosti za y u prvu jednačinu dobija se $x - (-2) = 7$, tj. $x = 5$.

Rešenje sistema je

$$(x, y) = (5, -2).$$

b) Ako prva i druga jednačina međusobno zamene mesta, biće

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 8y & - & z & = & 2 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 2 \\ 3x & + & 8y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \end{array}.$$

Ako se prva jednačina pomnoži sa (-3) i doda drugoj, i pomnoži sa (-2) i doda trećoj, onda je prethodni sistem ekvivalentan sa

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 2 \\ & & 11y & - & 4z & = & -4 \\ & & 5y & - & 4z & = & -4 \end{array}.$$

Promenom mesta sabiraka u jednačinama dobija se ekvivalentan sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & z & - & y & = & 2 \\ & - & 4z & + & 11y & = & -4 \\ & - & 4z & + & 5y & = & -4 \end{array}.$$

Množenjem druge jednačine sa (-1) i dodavanjem trećoj dobija se sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & z & - & y & = & 2 \\ & - & 4z & + & 11y & = & -4 \\ & & & - & 6y & = & 0 \end{array}.$$

Iz treće jednačine je $y = 0$. Uvrštavanjem u drugu jednačinu, dobija se $z = \frac{-4-11y}{-4} = 1$. Ako se dobijene vrednosti za y i z uvrste u prvu jednačinu, onda je $x = 2 + y - z = 1$.

Dakle, rešenje sistema je

$$(x, y, z) = (1, 0, 1).$$

2. **Primenom Kramerovog pravila rešiti sistem**

a)
$$\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 4y & = & -6 \\ 2x & + & 5y & = & 19 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & + & 3y & - & 2z & = & -3 \\ 3x & - & 2y & + & z & = & 9 \end{array}$$

Rešenje:

a) Determinanta sistema je

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-4) = 23.$$

Kako je $D \neq 0$, to je sistem određen. Iz

$$D_x = \begin{vmatrix} -6 & -4 \\ 19 & 5 \end{vmatrix} = -30 + 76 = 46, \qquad D_y = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 19 \end{vmatrix} = 57 + 12 = 69,$$

prema Kramerovom pravilu, sledi

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{46}{23} = 2 \quad \text{i} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{69}{23} = 3.$$

Sistem ima jedinstveno rešenje

$$(x, y) = (2, 3).$$

b) Sistem je određen jer je

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0. \\ D_x &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -2 \\ 9 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4, \\ D_y &= \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad \text{i} \\ D_z &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 9 \end{vmatrix} = 2. \end{aligned}$$

Dakle, $x = \frac{D_x}{D} = \frac{4}{2} = 2$, $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2}{2} = -1$, $z = \frac{D_z}{D} = \frac{2}{2} = 1$ i rešenje sistema je

$$(x, y, z) = (2, -1, 1).$$

3. **Ispitati prirodu sistema i, ako je sistem saglasan, rešiti ga**

a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 1 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & z & = & -2 \\ 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & - & 2z & = & 3 \\ 6x & + & 2y & & & = & 20 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 2z & = & -3 \\ -2x & + & 2y & + & 4z & = & 6 \\ 3x & - & 3y & - & 6z & = & -9 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 4 \\ 2x & - & y & - & z & = & 0 \\ -2x & + & y & - & 3z & = & -4 \\ 5x & + & 5y & + & 6z & = & 16 \end{array}$$

Rešenje:

a) Ne možemo da primenimo Kramerovo pravilo, jer ovo nije kvadratni sistem. Primenjujemo Gausov algoritam. Ako se prva jednačina pomnoži sa (-2) i doda drugoj jednačini, onda je

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 1 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & - & y & & & = & -1 \end{array}$$

Iz druge jednačine je $y = 1$, a uvrštavanje u prvu daje $x = -z$. Znači, sistem je jednostruko neodređen i skup rešenja sitema za(x, y, z) je

$$\mathcal{R} = \{(-\alpha, 1, \alpha) |\ \alpha \in \mathbf{R}\}.$$

b) Koristeći Gausov algoritam imamo

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & z & = & -2 \\ 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & - & 2z & = & 3 \\ 6x & + & 2y & & & = & 20 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & z & = & -2 \\ & & 3y & - & z & = & -3 \\ & & 5y & - & 5z & = & -3 \\ & & 8y & - & 6z & = & 8 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & - & z & + & y & = & -2 \\ & - & z & + & 3y & = & -3 \\ & - & 5z & + & 5y & = & -3 \\ & - & 6z & + & 8y & = & 8 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} -x & - & z & + & y & = & -2 \\ & - & z & + & 3y & = & -3 \\ & & & - & 10y & = & 12 \\ & & & - & 10y & = & 26 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & - & z & + & y & = & -2 \\ & - & z & + & 3y & = & -3 \\ & & & - & 5y & = & 6 \\ & & & & 0 & = & 7 \end{array}$$

Sistem je nemoguć.

c) Ako se prva jednačina pomnoži sa 2 i doda drugoj jednačini, a zatim sa (-3) i doda trećoj jednačini, onda je dati sistem ekvivalentan sistemu

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 2z & = & -3 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0. \end{array}$$

Sistem je dvostruko neodređen i skup rešenja sistema za uređenu trojku (x, y, z) je

$$\mathcal{R} = \{(-3 + \beta + 2\alpha, \beta, \alpha)|\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}.$$

d) Primenom Gausovog algoritma dobija se

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 4 \\ 2x & - & y & - & z & = & 0 \\ -2x & + & y & - & 3z & = & -4 \\ 5x & + & 5y & + & 6z & = & 16 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 4 \\ & - & 5y & - & 3z & = & -8 \\ & & 5y & - & z & = & 4 \\ & - & 5y & + & z & = & -4 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 4 \\ & - & 5y & - & 3z & = & -8 \\ & & & - & 4z & = & -4 \\ & & & & 4z & = & 4 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 4 \\ & - & 5y & - & 3z & = & -8 \\ & & & & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$z = 1, \quad y = \tfrac{-8+3z}{-5}, \quad x = 4 - 2y - z$$

Sistem je određen i rešenje sistema je

$$(x, y, z) = (1, 1, 1).$$

4. **Rešiti homogen sistem**

a) $\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & y & - & z & = & 0 \\ -4x & - & 3y & + & 2z & = & 0. \end{array}$ **b)** $\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \\ -x & + & 4y & - & 2z & = & 0. \end{array}$

c) $\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & y & - & z & = & 0. \end{array}$ **d)** $\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \\ -x & - & 2y & - & 5z & = & 0 \\ x & + & 2y & & & = & 0. \end{array}$

Rešenje:

a) Determinanta sistema je $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -5.$

Kako je determinanta datog homogenog sistema različita od nule, sistem je određen i ima samo trivijalno rešenje

$$(x, y, z) = (0, 0, 0).$$

b) $D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$

Sistem je neodređen i može se rešiti primenom Gausovog algoritma.

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \\ -x & + & 4y & - & 2z & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & 3y & - & z & = & 0 \\ & & 3y & - & z & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & 3y & - & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Skup rešenja sistema za (x, y, z) je

$$\mathcal{R} = \{(-2\alpha, \alpha, 3\alpha) |\ \alpha \in \mathbf{R}\}.$$

c) Kako je broj jednačina manji od broja nepoznatih u datom homogenom sistemu, sistem je neodređen i rešava se primenom Gausovog algoritma:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & y & - & z & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & z & = & 0 \\ 5x & & & & & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$x = 0, \quad y = 2x + z.$$

Skup rešenja sistema za (x, y, z) je

$$\mathcal{R} = \{(0, \alpha, \alpha) |\ \alpha \in \mathbf{R}\}.$$

d) Primenom Gausovog algoritma, dobija se

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \\ -x & - & 2y & - & 5z & = & 0 \\ x & + & 2y & & & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & 3y & - & z & = & 0 \\ & - & 3y & - & 4z & = & 0 \\ & & 3y & - & z & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & 3y & - & z & = & 0 \\ & & & - & 5z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow z = 0, \quad y = \frac{z}{3}, \quad x = y - z.$$

Sistem je određen i ima samo trivijalno rešenje

$$(x, y, z) = (0, 0, 0).$$

5. **U zavisnosti od realnog parametra λ diskutovati sistem jednačina**

$$\begin{array}{rcrcrcl} (1+\lambda)x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & (1+\lambda)y & + & z & = & \lambda \\ x & + & y & + & (1+\lambda)z & = & \lambda^2. \end{array}$$

Rešenje:

Determinanta sistema je

$$D = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+\lambda & 3+\lambda & 3+\lambda \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= (3+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= (3+\lambda)\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(3+\lambda)
\end{aligned}
$$

(*Napomena:* Najpre smo dodali sve vrste prvoj da bismo mogli da izdvojimo $(\lambda+3)$ ispred determinante. Zatim smo prvu vrstu pomnožili sa -1 i dodali drugoj i trećoj vrsti i na kraju razvili determinantu po elementima prve kolone.)

i) Za $\lambda \neq 0$ i $\lambda \neq -3$ sistem je određen.

ii) Za $\lambda = 0$ sistem je

$$
\begin{array}{ccccccc}
x & + & y & + & z & = & 1 \\
x & + & y & + & z & = & 0 \\
x & + & y & + & z & = & 0
\end{array}.
$$

Oduzimanjem druge jednačine od prve dobija se jednačina $0 = 1$, te je sistem nemoguć.

(U ovom slučaju je $D = D_x = D_y = D_z = 0$.)

iii) Za $\lambda = -3$ sistem je

$$
\begin{array}{ccccccc}
-2x & + & y & + & z & = & 1 \\
x & - & 2y & + & z & = & -3 \\
x & + & y & - & 2z & = & 9
\end{array}
\Leftrightarrow
\begin{array}{ccccccc}
 & - & 3y & + & 3z & = & -5 \\
x- & & 2y & + & z & = & -3 \\
 & & 3y & - & 3z & = & 12.
\end{array}
$$

Ekvivalentan sistem smo dobili množenjem druge jednačine sa 2 i dodavanjem prvoj i množenjem druge jednačine sa -1 i dodavanjem trećoj jednačini.

Ako saberemo prvu i treću jednačinu dobijamo

$$0 = 7,$$

što znači da je i u ovom slučaju sistem nemoguć.

6. **a) U zavisnosti od realnog parametra q diskutovati sistem jednačina**

$$
\begin{array}{ccccccc}
qx & + & qy & + & (q+1)z & = & q \\
qx & + & qy & + & (q-1)z & = & q \\
(q+1)x & + & qy & + & (2q+3)z & = & 1.
\end{array}
$$

b) Rešiti sistem za svaku vrednost parametra q.

Rešenje:

a) Determinanta sistema je

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} q & q & q+1 \\ q & q & q-1 \\ q+1 & q & 2q+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q & q & q+1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & q+2 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{2+3}(-2)\begin{vmatrix} q & q \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2q \end{aligned}$$

i) Ako je $q \neq 0$ onda je sistem određen.

ii) Ako je $q = 0$ sistem je

$$\begin{aligned} z &= 0 \\ -z &= 0 \\ x + 3z &= 1. \end{aligned}$$

Iz prve dve jednačine je $z = 0$. Kada ovu vrednost zamenimo u treću jednačinu dobija se $x = 1$, a y se može izabrati proizvoljno. Dakle, sistem je jednostruko neodredjen i skup rešenja sistema za (x, y, z) je

$$\mathcal{R} = \{(1, \alpha, 0) |\ \alpha \in \mathbf{R}\}.$$

b) Rešenje sistema u slučaju kada je $q \neq 0$ ćemo odrediti Kramerovim pravilom. Već smo izračunali da je determinanta sistema $D = -2q$ i potrebno je još izračunati vrednosti determinanti D_x, D_y i D_z.

$$\begin{aligned} D_x &= \begin{vmatrix} q & q & q+1 \\ q & q & q-1 \\ 1 & q & 2q+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q & q & q+1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & q & 2q+3 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{2+3}(-2)\begin{vmatrix} q & q \\ 1 & q \end{vmatrix} = 2(q^2 - q), \\ D_y &= \begin{vmatrix} q & q & q+1 \\ q & q & q-1 \\ q+1 & 1 & 2q+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q & q & q+1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1-q & q+2 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{2+3}(-2)\begin{vmatrix} q & q \\ 1 & 1-q \end{vmatrix} = -2q^2, \\ D_z &= \begin{vmatrix} q & q & q \\ q & q & q \\ q+1 & q & 1 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} x &= \frac{D_x}{D} = \frac{2q(q-1)}{-2q} = 1 - q, \\ y &= \frac{D_y}{D} = \frac{-2q^2}{-2q} = q, \\ z &= \frac{D_z}{D} = \frac{0}{-2q} = 0 \end{aligned}$$

i rešenje sistema je

$$(x, y, z) = (1 - q, q, 0).$$

7. **U zavisnosti od realnog parametra a diskutovati sistem**

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & (a+2)y & + & 2z & = & 2 \\ (a^2+1)x & + & 2(a+2)y & + & 4z & = & 4a \\ x & + & 3y & + & (a+1)z & = & 2a. \end{array}$$

Rešenje:

Determinanta datog sistema jednačina je

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & a+2 & 2 \\ a^2+1 & 2(a+2) & 4 \\ 1 & 3 & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a+2 & 2 \\ a^2+1 & 2(a+2) & 4 \\ 0 & 1-a & a-1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & a+4 & 2 \\ a^2+1 & 2a+8 & 4 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)\begin{vmatrix} 1 & a+4 \\ a^2+1 & 2a+8 \end{vmatrix} \\ &= (a-1)(a+4)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2+1 & 2 \end{vmatrix} = (a-1)(a+4)(2-a^2-1) \\ &= (a-1)(a+4)(1-a^2) = -(a-1)^2(a+4)(a+1) \end{aligned}$$

i) Ako je $a \neq 1$ i $a \neq -1$ i $a \neq -4$, sistem je određen.

ii) Ako je $a = 1$, onda je

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & 2z & = & 2 \\ 2x & + & 6y & + & 4z & = & 4 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & 2z & = & 2 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0. \end{array}$$

Dakle, sistem je dvostruko neodređen i njegov skup rešenja za uređenu trojku (x, y, z) je

$$\mathcal{R} = \{(2 - 3\alpha - 2\beta, \alpha, \beta) |\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}.$$

iii) Ako je $a = -1$, onda je sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ 2x & + & 2y & + & 4z & = & -4 \\ x & + & 3y & & & = & -2 \end{array}$$

(ako se prva jednačina pomnoži sa -2 i doda drugoj) ekvivalentan sa

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ & & & & 0 & = & -8 \\ x & + & 3y & & & = & -2. \end{array}$$

Sistem jednačina je nemoguć.

iv) Ako je $a = -4$, sledeći sistemi su ekvivalentni:

$$\begin{array}{rcrcl} x & - & 2y & + & 2z = 2 \\ 17x & - & 4y & + & 4z = -16 \\ x & + & 3y & - & 3z = -8 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrl} x & - & 2y & + & 2z & = 2 \\ & & 30y & - & 30z & = -50 \\ & & 5y & - & 5z & = -10 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcrcrl} x & - & 2y & + & 2z & = 2 \\ & & y & - & z & = -2 \\ & & 3y & - & 3z & = -5 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 2z & = & 2 \\ & & y & - & z & = & -2 \\ & & & & 0 & = & 1. \end{array}$$

Sistem jednačina je nemoguć.

8. **U zavisnosti od realnih parametara p i q diskutovati sistem**

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & py & & & = & 2 \\ -x & + & (p-1)y & + & 2z & = & q \\ 2x & - & py & + & z & = & p. \end{array}$$

U slučaju kada je sistem neodređen naći rešenje za koje je $y = 0$.

Rešenje:

Determinanta sistema je

$$D = \begin{vmatrix} 1 & p & 0 \\ -1 & p-1 & 2 \\ 2 & -p & 1 \end{vmatrix} = 8p - 1.$$

i) Za $p \neq \frac{1}{8}$ sistem je određen.

ii) Za $p = \frac{1}{8}$ sistem se svodi na:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & \frac{1}{8}y & & & = & 2 \\ -x & - & \frac{7}{8}y & + & 2z & = & q \\ 2x & - & \frac{1}{8}y & + & z & = & \frac{1}{8} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} x & + & \frac{1}{8}y & & & = & 2 \\ & - & \frac{6}{8}y & + & 2z & = & q+2 \\ & - & \frac{3}{8}y & + & z & = & \frac{1}{8} - 4 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} x & + & \frac{1}{8}y & & & = & 2 \\ & - & \frac{3}{8}y & + & z & = & -\frac{31}{8} \\ & & & & 0 & = & q + \frac{39}{4}. \end{array}$$

Ako je $p = \frac{1}{8}$ i $q \neq -\frac{39}{4}$, sistem je nemoguć.
Ako je $p = \frac{1}{8}$ i $q = -\frac{39}{4}$, sistem je jednostruko neodređen i skup rešenja za (x, y, z) je

$$\mathcal{R} = \Big\{ \Big(2 - \frac{1}{8}\alpha, \alpha, \frac{3}{8}\alpha - \frac{31}{8} \Big) \mid \alpha \in \mathbf{R} \Big\}.$$

Traženo rešenje, kod koga je $y = 0$, je

$$(x, 0, z) = (2, 0, -\frac{31}{8}).$$

9. **U zavisnosti od realnih parametara a i b diskutovati sistem**

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & az & = & 1 \\ 3x & + & 3y & + & (a+1)z & = & b \\ x & + & 2ay & + & z & = & 1 \end{array}.$$

Rešiti sistem u slučaju kada je neodređen.

Rešenje:

Determinanta datog sistema jednačina je

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ 3 & 3 & a+1 \\ 1 & 2a & 1 \end{vmatrix} = 2a^2 - 6a + 4 = 2(a-1)(a-2).$$

i) Ako je $a \neq 1$ i $a \neq 2$, sistem je određen.

ii) Koristeći Gausovog algoritam za $a = 1$ sledi

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ 3x & + & 3y & + & 2z & = & b \\ x & + & 2y & + & z & = & 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ 3x & + & 3y & + & 2z & = & b \\ 2x & + & y & + & z & = & 1 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ & - & 3y & - & z & = & b-3 \\ & - & 3y & - & z & = & -1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ & - & 3y & - & z & = & b-3 \\ & & & & 0 & = & 2-b. \end{array}$$

– Ako je $a = 1$ i $b \neq 2$ onda je sistem nemoguć.

– Ako je $a = 1$ i $b = 2$ sistem je jednostruko neodređen i skup rešenja sistema za (x, y, z) je

$$\mathcal{R} = \Big\{ \Big(\frac{1}{3}(1-\alpha), \frac{1}{3}(1-\alpha), \alpha \Big) \mid \alpha \in \mathbf{R} \Big\}.$$

iii) Za $a = 2$ sledi

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ 3x & + & 3y & + & 3z & = & b \\ x & + & 4y & + & z & = & 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 4y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ 3x & + & 3y & + & 3z & = & b \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrl} x & + & 4y & + & z & = 1 \\ & - & 7y & & & = -1 \\ & - & 9y & & & = b-3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrl} x & + & 4y & + & z & = 1 \\ & & y & & & = \frac{1}{7} \\ & & & & 0 & = b - \frac{12}{7} \end{array}.$$

– Ako je $a = 2$ i $b \neq \frac{12}{7}$ onda je sistem nemoguć.

– Ako je $a = 2$ i $b = \frac{12}{7}$ sistem je jednostruko neodređen i skup rešenja sistema za (x, y, z) je

$$\mathcal{R} = \Big\{\Big(\frac{3}{7} - \alpha, \frac{1}{7}, \alpha\Big) \mid \alpha \in \mathbf{R}\Big\}.$$

10. **U zavisnosti od realnih parametara p i q diskutovati sistem**

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & py & - & z & = & 2 \\ -x & + & (1-2p)y & + & 2z & = & q \\ x & - & py & & & = & p, \end{array}.$$

U slučaju kada je sistem neodređen naći rešenje za koje je $y = z$.

Rešenje:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & py & - & z & = & 2 \\ -x & + & (1-2p)y & + & 2z & = & q \\ x & - & py & & & = & p \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} -z & + & 3x & + & py & = & 2 \\ & & x & - & py & = & p \\ 2z & - & x & + & (1-2p)y & = & q \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} -z & + & 3x & + & py & = & 2 \\ & & x & - & py & = & p \\ & & 5x & + & y & = & q+4 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} -z & + & 3x & + & py & = & 2 \\ & & x & - & py & = & p \\ & & & & (5p+1)y & = & q+4-5p \end{array}.$$

i) Za $5p+1 \neq 0$ odnosno za $p \neq -\frac{1}{5}$, determinanta sistema je različita od nule i u tom slučaju sistem je određen.

ii) Ako je $p = -\frac{1}{5}$, moguća su dva podslučaja:
- za $-5p + q + 4 \neq 0$ odnosno $q \neq -5$, sistem je nemoguć, - za $q = -5$, sistem je jednostruko neodređen.

U slučaju neodređenosti, tj. za $p = -\frac{1}{5}$ i $q = -5$, zamenom $y = z$, dobija se sistem

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & - & \frac{6}{5}z & = & 2 \\ x & + & \frac{1}{5}z & = & -\frac{1}{5} \end{array}$$

čijim se rešavanjem dobija

$$(x, y, z) = \Big(\frac{4}{45}, -\frac{13}{9}, -\frac{13}{9}\Big).$$

11. **U zavisnosti od realnih parametara p i q diskutovati sistem**

$$\begin{array}{rcrcrcl} px & - & y & - & z & = & 2 \\ 2px & - & py & + & z & = & q \\ 3px & - & (p+2)y & + & pz & = & q^2. \end{array}$$

Rešenje:

Determinanta sistema je

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} p & -1 & -1 \\ 2p & -p & 1 \\ 3p & -(p+2) & p \end{vmatrix} = p \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -p & 1 \\ 3 & -(p+2) & p \end{vmatrix} \\ &= p \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2-p & 3 \\ 3 & 1-p & 3+p \end{vmatrix} = p \begin{vmatrix} 2-p & 3 \\ 1-p & 3+p \end{vmatrix} \\ &= p\Big((2-p)(3+p) - 3(1-p)\Big) = -p(p^2-2p-3) \\ &= -p(p-3)(p+1). \end{aligned}$$

i) Za $p \neq 0$ i $p \neq 3$ i $p \neq -1$ sistem je određen.

ii) Za $p = 0$, sistem glasi

$$\begin{array}{rrl} -y & -z & = 2 \\ & z & = q \\ -2y & & = q^2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rrl} -y & -z & = 2 \\ & z & = q \\ y & & = -\frac{q^2}{2} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rl} z & = q \\ y & = -\frac{q^2}{2} \\ 0 & = 2 + q - \frac{q^2}{2} \end{array},$$

gde je $q^2 - 2q - 4 = 0 \Leftrightarrow (q-(1+\sqrt{5}))(q-(1-\sqrt{5})) = 0$.

- Za $q \neq 1+\sqrt{5}$ i $q \neq 1-\sqrt{5}$ sistem je nemoguć.
- Za $q = 1+\sqrt{5}$ sistem je jednostruko neodređen, a skup rešenja za (x,y,z) je

$$\mathcal{R} = \left\{\left(\alpha, -\frac{(1+\sqrt{5})^2}{2}, 1+\sqrt{5}\right) \mid \alpha \in \mathbf{R}\right\}.$$

- Za $q = 1-\sqrt{5}$ sistem je jednostruko neodređen, sa skupom rešenja za (x,y,z)

$$\mathcal{R} = \left\{\left(\alpha, -\frac{(1-\sqrt{5})^2}{2}, 1-\sqrt{5}\right) \mid \alpha \in \mathbf{R}\right\}.$$

iii) Za $p = 3$, sistem glasi:

$$\begin{array}{rcrcrl} 3x & - & y & - & z & = 2 \\ 6x & - & 3y & + & z & = q \\ 9x & - & 5y & + & 3z & = q^2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & - & z & = & 2 \\ & - & y & + & 3z & = & q-4 \\ & - & 2y & + & 6z & = & q^2-6 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & - & z & = & 2 \\ & - & y & + & 3z & = & q-4 \\ & & & & 0 & = & q^2-6-2q+8 \end{array}.$$

Kako jednačina $q^2-2q+2=0$ nema rešenja u skupu realnih brojeva, sistem je u ovom slučaju nemoguć.

iv) Za $p=-1$, sistem glasi

$$\begin{array}{rcrcrl} -x & - & y & -z & = 2 \\ -2x & + & y & +z & = q \\ -3x & - & y & -z & = q^2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} -x & - & y & - & z & = & 2 \\ & & 3y & + & 3z & = & q-4 \\ & & 2y & + & 2z & = & q^2-6 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} -x & - & y & - & z & = & 2 \\ & & 3y & + & 3z & = & q-4 \\ & & & & 0 & = & q^2-6-\frac{2}{3}(q-4) \end{array}.$$

Poslednja jednačina sistema je ekvivalentna jednačini $3q^2-2q-10=0$.

- Ako je $q \neq \frac{1+\sqrt{31}}{3}$ i $q \neq \frac{1-\sqrt{31}}{3}$, sistem je nemoguć.
- Ako je $q=\frac{1+\sqrt{31}}{3}$, sistem je jednostruko neodređen i skup rešenja za (x,y,z) je

$$\mathcal{R}=\{(-2-\frac{\sqrt{31}-11}{9}, -\alpha+\frac{\sqrt{31}-11}{9}, \alpha) |\ \alpha \in \mathbf{R}\}.$$

- Ako je $q=\frac{1-\sqrt{31}}{3}$, sistem je jednostruko neodređen i skup rešenja za (x,y,z) je

$$\mathcal{R}=\{(-2+\frac{\sqrt{31}+11}{9}, -\alpha-\frac{\sqrt{31}+11}{9}, \alpha) |\ \alpha \in \mathbf{R}\}.$$

12. **U zavisnosti od realnih parametara a i b diskutovati sistem jednačina**

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & 2y & & & + & u & = & -3 \\ 2x & + & ay & - & bz & - & u & = & 2b \\ x & + & (2a+1)y & - & bz & - & 2u & = & 3b+1 \end{array}.$$

Rešiti sistem u slučaju kada je neodređen.

Rešenje:

Elementarnim transformacijama se dobija sledeći niz ekvivalentnih sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & 2y & & & + & u & = & -3 \\ 2x & + & ay & - & bz & - & u & = & 2b \\ x & + & (2a+1)y & - & bz & - & 2u & = & 3b+1 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -u & + & 2x & + & ay & - & bz & = & 2b \\ -2u & + & x & + & (2a+1)y & - & bz & = & 3b+1 \\ u & + & x & - & 2y & & & = & -3 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -u & + & 2x & + & ay & - & bz & = & 2b \\ & - & 3x & + & y & + & bz & = & -b+1 \\ & & 3x & + & (a-2)y & - & bz & = & 2b-3 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -u & + & 2x & + & ay & - & bz & = & 2b \\ & - & 3x & + & y & + & bz & = & -b+1 \\ & & & & (a-1)y & & & = & b-2. \end{array}$$

i) Ako je $a \neq 1$, sistem je jednostruko neodređen i skup rešenja za(x, y, z) je

$$\mathcal{R} = \left\{ \left(-\frac{1}{3}(1 - b - \frac{b-2}{a-1} - b\alpha), \frac{b-2}{a-1}, \alpha, \frac{-8a - ab + 6b - 2}{3(a-1)} - \frac{b}{3}\alpha \right) \mid \alpha \in \mathbf{R} \right\}.$$

ii) Za $a = 1$ dati sistem je ekvivalentan sa

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -u & + & 2x & + & y & - & bz & = & 2b \\ & - & 3x & + & y & + & bz & = & -b+1 \\ & & & & & & 0 & = & b-2 \end{array}.$$

Ako je $a = 1$ i $b \neq 2$, sistem je nemoguć.

Ako je $a = 1$ i $b = 2$ sistem je dvostruko neodređen i skup rešenja za(x, y, z) je

$$\mathcal{R} = \{(\alpha, -1 + 3\alpha - 2\beta, \beta, 5\alpha - 4\beta - 5) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}.$$

13. **U zavisnosti od realnog parametra a diskutovati i rešiti sistem**

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & ay & + & a^2z & + & a^3u & = & 0 \\ x & + & y & + & z & + & u & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 4z & + & 8u & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 9z & + & 27u & = & 0. \end{array}$$

Rešenje:

Determinanta sistema je

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a-1 & a^2-1 & a^3-1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 8 & 26 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\begin{vmatrix} a-1 & a^2-1 & a^3-1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 8 & 26 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} a-1 & (a-1)(a+1) & (a-1)(a^2+a+1) \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 8 & 26 \end{vmatrix} \\
&= -(a-1)\begin{vmatrix} 1 & a+1 & a^2+a+1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 8 & 26 \end{vmatrix} \\
&= -(a-1)\begin{vmatrix} 1 & a-2 & a^2+a-6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 12 \end{vmatrix} \\
&= (a-1)\begin{vmatrix} a-2 & a^2+a-6 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} \\
&= (a-1)\big(12(a-2)-2(a^2+a-6)\big) \\
&= 2(a-1)(-a^2+5a-6) \\
&= 2(a-1)(a-2)(3-a).
\end{aligned}
$$

i) Za $a \neq 1$ i $a \neq 2$ i $a \neq 3$, dati homogeni sistem je određen i ima samo trivijalno rešenje

$$(x, y, z, u) = (0, 0, 0, 0).$$

ii) Za $a = 1$ sistem glasi

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
x & + & y & + & z & + & u & = & 0 \\
x & + & y & + & z & + & u & = & 0 \\
x & + & 2y & + & 4z & + & 8u & = & 0 \\
x & + & 3y & + & 9z & + & 27u & = & 0
\end{array} \Leftrightarrow
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
x & + & y & + & z & + & u & = & 0 \\
 & & y & + & 3z & + & 7u & = & 0 \\
 & & 2y & + & 8z & + & 26u & = & 0
\end{array} \Leftrightarrow
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
x & + & y & + & z & + & u & = & 0 \\
 & & y & + & 3z & + & 7u & = & 0 \\
 & & & & 2z & + & 12u & = & 0
\end{array}.
$$

U ovom slučaju, sistem je jednostruko neodređen i skup rešenja za (x, y, z, u) je

$$\mathcal{R} = \{(-6\alpha, 11\alpha, -6\alpha, \alpha) |\ \alpha \in \mathbf{R}\}. \tag{6.2}$$

iii) Za $a = 2$, sistem glasi

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & 4z & + & 8u & = & 0 \\ x & + & y & + & z & + & u & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 4z & + & 8u & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 9z & + & 27u & = & 0 \end{array}.$$

Sistem je jednostruko neodređen i ima skup rešenja (6.2).

iv) Ako je $a = 3$, sistem je

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & 3y & + & 9z & + & u & = & 0 \\ x & + & y & + & z & + & u & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 4z & + & 8u & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 9z & + & 27u & = & 0 \end{array}.$$

Sistem je jednostruko neodređen i ima skup rešenja (6.2).

14. **U zavisnosti od realnog parametra a diskutovati i rešiti sistem**

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & az & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ ax & + & y & + & z & = & a^2 \\ ax & + & ay & + & az & = & a^3 \end{array}.$$

Rešenje:

Elementarnim transformacijama dobija se

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & az & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ ax & + & y & + & z & = & a^2 \\ ax & + & ay & + & az & = & a^3 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & az & = & 1 \\ & & (a-1)y & + & (1-a)z & = & a-1 \\ & & (1-a)y & + & (1-a^2)z & = & a^2-a \\ & & & & (a-a^2)z & = & a^3-a \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & az & = & 1 \\ & & (a-1)y & + & (1-a)z & = & a-1 \\ & & & & (-a^2-a+2)z & = & a^2-1 \\ & & & & (a-a^2)z & = & a^3-a \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & az & = & 1 \\ & & (a-1)y & + & (1-a)z & = & a-1 \\ & & & & -(a-1)(a+2)z & = & (a-1)(a+1) \\ & & & & a(1-a)z & = & a(a-1)(a+1). \end{array}$$

i) Za $a \neq 0$ i $a \neq 1$ posmatrani sistem je ekvivalentan sa

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & az & = & 1 \\ & & (a-1)y & + & (1-a)z & = & a-1 \\ & & & & -(a+2)z & = & (a+1) \\ & & & & z & = & -(a+1), \end{array}$$

odakle sledi da je za $a = -2$ sistem nemoguć.

Ako je $a \neq 0$ i $a \neq 1$ i $a \neq -2$ polazni sistem je ekvivalentan sa sistemom

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & az & = & 1 \\ & & (a-1)y & + & (1-a)z & = & a-1 \\ & & & & z & = & -a-1 \\ & & & & 0 & = & -(a+1)^2 \end{array},$$

koji je za $a \neq -1$ nemoguć.

ii) Ako je $a = -1$, sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ & & -2y & + & 2z & = & -2 \\ & & & & 2z & = & 0 \\ & & & & -2z & = & 0 \end{array}$$

je određen i rešenje sistema je $(0, 1, 0)$.

iii) Ako je $a = 0$, sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & 1 \\ & & -y & + & z & = & -1 \\ & & & & 2z & = & -1 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

je određen i rešenje sistema je $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

iv) Ako je $a = 1$, sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

je dvostruko neodređen i skup rešenja sistema za uređenu trojku (x, y, z) je

$$\mathcal{R} = \{(1-\alpha-\beta, \alpha, \beta) |\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}.$$

15. **Koristeći Kroneker-Kapelijevu teoremu, u zavisnosti od realnog parametra a, diskutovati sistem**

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & ay & - & z & = & 1 \\ x & - & y & - & az & = & 1. \end{array}$$

Rešenje:

Matrica datog sistema je

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & -a \end{bmatrix},$$

a njegova proširena matrica

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{rrr|r} a & 1 & -1 & 1 \\ 1 & a & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -a & 1 \end{array}\right].$$

Rang matrica A i $\overline{A}$ odredićemo koristeći determinantu matrice A. Kako je

$$D(A) = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & -a \end{vmatrix} = a(1-a)(1+a),$$

zaključujemo:

$$\text{za} \qquad a \neq 0 \ \wedge \ a \neq 1 \ \wedge \ a \neq -1, \qquad rang(A) = rang(\overline{A}) = 3,$$

što znači da je za te vrednosti parametra a sistem određen.

U ostalim slučajevima dobijamo:

<u>$a = 0$</u>

$$\begin{aligned} \overline{A} \ &\sim \ \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \\ &\sim \ \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \\ &\sim \ \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Kako je $\quad 2 = rang(A) \neq rang(\overline{A}) = 3, \quad$ zaključujemo da je za $a = 0$ sistem nemoguć.

<u>$a = 1$</u>

$$\overline{A} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

odakle sledi $rang(A) = 2 = rang(\overline{A}) < 3$. Dakle, rang obe matrice je isti, što znači da je sistem saglasan. Pošto je taj rang za jedan manji od maksimalnog, sistem je jednostruko neodređen.

$\underline{a = -1}$

$$\overline{A} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right],$$

odakle sledi da je $2 = rang(A) \neq rang(\overline{A}) = 3$, što znači da je sistem nemoguć.

Zadaci za samostalni rad

1. Rešiti sistem $\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & -2 \\ 3x & - & y & + & 5z & = & -5 \\ x & + & y & + & 4z & = & 0 \end{array}$ Kramerovim pravilom.

Rezultat:
$(x, y, z) = (1, 3, -1)$.

2. Dat je sistem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & +2x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & +x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & = & 11 \\ 3x_1 & + & x_2 & +x_3 & - & 6x_4 & + & 2x_5 & = & 11 \\ x_1 & + & x_2 & -x_3 & + & 3x_4 & - & 3x_5 & = & -7 \end{array}.$$

   a) Gausovom eliminacijom dovesti sistem na trapezni oblik i odrediti prirodu rešenja tog sistema.

   b) Naći rešenje sistema za koje važi da je $x_5 = 1$.

Rezultat:

a) $$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & +2x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ & & x_2 & +x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & -3 \\ & & & -3x_3 & - & 8x_4 & - & 3x_5 & = & 2 \\ & & & & & 9x_4 & - & x_5 & = & -10 \end{array}.$$

b) $(x_1, x_2, x_3, x_4, 1) = (1, -1, 1, -1, 1)$.

3. Rešiti sistem

$a)$
$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 4\ . \\ 3x & - & 2y & + & 2z & = & 1 \\ 5x & + & y & - & 3z & = & 7 \end{array}$$

$b)$
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & - & 3z & = & -2\ . \\ -2x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & 2y & - & 2z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & + & 2z & = & 19 \end{array}$$

$c)$
$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} 2x & - & 3y & + & 2z & + & u & + & t & = -1\ . \\ -x & + & y & + & z & - & u & - & t & = 6 \end{array}$$

Rezultat:
$a)$ $(x, y, z) = (-1, 1, -1)$.
$b)$ Sistem je nemoguć.
$c)$ Sistem je trostruko neodređen i skup rešenja sistema za (x, y, z, u, t) je

$$\mathcal{R} = \{(5\alpha - 2\beta - 2\gamma - 11, 4\alpha - \beta - \gamma - 11, \alpha, \beta, \gamma)|\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}\}.$$

4. U zavisnosti od realnog parametra a diskutovati sistem

$a)$
$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & -ax \\ x & + & 2y & + & z & = & -ay \\ x & + & y & + & 2z & = & -az. \end{array}$$

$b)$
$$\begin{array}{rcrcrcl} (3a-1)x & + & 2ay & + & (3a+1)z & = & 1 \\ 2ax & + & 2ay & + & (3a+1)z & = & a \\ (a+1)x & + & (a+1)y & + & 2(a+1)z & = & a^2. \end{array}$$

Rešiti sistem u slučajevima kada je saglasan.

Rezultat:
$a)$

- Ako je $a \neq -4$ i $a \neq -1$, sistem je određen i ima trivijalno rešenje $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.
- Ako je $a = -4$, sistem je jednostruko neodređen i skup rešenja sistema je $\mathcal{R} = \{(\alpha, \alpha, \alpha)|\alpha \in \mathbf{R}\}$.
- Ako je $a = -1$, sistem je dvostruko neodređen i skup rešenja sistema za (x, y, z)je $\mathcal{R} = \{(1 - \alpha - \beta, \alpha, \beta)|\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$.

$b)$

- Ako je $a \neq 1$ i $a \neq -1$, sistem je određen i rešenje sistema je
$$(x, y, z) = (-1, \frac{-3a^2 - 1 + 1}{a + 1}, \frac{(2a + 1)a}{a + 1}).$$
- Ako je $a = 1$, sistem je dvostruko neodređen i skup rešenja sistema za (x, y, z) je
$$\mathcal{R} = \{(\frac{1}{2}(1 - 2\alpha - 4\beta), \alpha, \beta)|\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}.$$

- Ako je $a = -1$, sistem je nemoguć.

5. U zavisnosti od realnih parametara a i b diskutovati sistem

$$a)\quad \begin{array}{rcrcrcl} x & + & ay & + & 2z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & az & = & 4 \\ ax & + & 2y & + & z & = & b+6. \end{array}$$

$$b)\quad \begin{array}{rcrcrcl} x & + & ay & + & z & = & 1 \\ 2bx & + & 2ay & + & 2z & = & 2 \\ 3bx & - & y & + & 3z & = & 6. \end{array}$$

Rezultat:
a)

- Ako je $a \neq -3$ sistem je određen.
- Ako je $a = -3$ i $b \neq -12$, sistem je nemoguć.
- Ako je $a = -3$ i $b = -12$, sistem je jednostruko neodređen.

b)

- Ako je $a \neq -\frac{1}{3}$ i $b \neq 1$ sistem je određen.
- Ako je $a = -\frac{1}{3}$ i $b = 1$, sistem je nemoguć.
- Ako je $a \neq -\frac{1}{3}$ i $b = 1$, sistem je jednostruko neodređen.
- Ako je $a = -\frac{1}{3}$ i $b \neq 1$, sistem je nemoguć.

6. U zavisnosti od realnih parametara a, b i c diskutovati sistem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & ay & + & a^2z & = & a^3 \\ x & + & by & + & b^2z & = & b^3 \\ x & + & cy & + & c^2z & = & c^3. \end{array}$$

Rezultat:

- Ako je $a \neq b$ i $a \neq c$ i $b \neq c$ sistem je određen.
- Ako je $a = b = c$, sistem je dvostruko neodređen.
- Ako je ($a \neq c$ i $a = b$) ili ($a \neq b$ i $a = c$) ili ($a \neq b$ i $b = c$) sistem je jednostruko neodređen.

7

Vektorski prostori

- Neka je V neprazan skup čije elemente zovemo vektorima i označavamo malim slovima latinice: $x, y, z, \ldots$ i neka je $(F, +, \cdot, 0, 1)$ polje čije elemente zovemo skalarima i označavamo malim grčkim slovima: α, β, $\gamma, \ldots$.

  Uređenu četvorku $(V, +, \cdot, F)$, gde je $+$ operacija sabiranja vektora, a $\cdot$ operacija množenja skalara vektorom, nazivamo **vektorski prostor nad poljem** F, ako je ispunjeno:

  $(V, +)$ je Abelova grupa;

  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;

  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

  $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

  $1 \cdot x = x$

  za sve $x, y \in V$, sve $\alpha, \beta \in F$ i $1 \in F$.

- Struktura $(U, +, \cdot, F)$ je **potprostor** vektorskog prostora $(V, +, \cdot, F)$ ako i samo ako je $U \subseteq V$ i pri tom je skup U zatvoren u odnosu na definisane operacije sabiranja vektora i množenja vektora skalarom.

- **Linearna kombinacija** vektora $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prostora V je vektor oblika $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n$, gde su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ elementi polja F.

  Skup svih linearnih kombinacija vektora $a_1, a_2, \ldots, a_n$ čini vektorski potprostor prostora V. Kažemo da skup $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ generiše taj vektorski potprostor.

- Skup vektora $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ vektorskog prostora V je **linearno zavisan** ako postoje skalari (elementi polja F) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ od kojih je bar jedan različit od nule, takvi da je $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n = 0$. Ukoliko prethodna jednakost važi samo ako su svi skalari u linearnoj kombinaciji jednaki nuli, skup vektora je **linearno nezavisan**.

  Skup vektora je linearno zavisan ako i samo ako se bar jedan od njih može izraziti kao linearna kombinacija ostalih.

- Skup B vektora vektorskog prostora V je **baza** tog vektorskog prostora ako i samo ako je linearno nezavisan i ako se svaki vektor iz V može izraziti kao linearna kombinacija vektora iz B.

  Broj vektora baze prostora V naziva se **dimenzija** prostora V.

- Primeri vektorskih prostora

  1. Struktura $(\mathbf{R}^n, +, \cdot, \mathbf{R})$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbf{R}$ ako su elementi skupa $\mathbf{R}^n$ uređene n-torke realnih brojeva za koje važi

     $$\begin{gathered}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \qquad \text{akko} \\ a_1 = b_1 \ \text{ i } \ a_2 = b_2 \ \text{ i } \ \ldots \ \text{ i } \ a_n = b_n \\ (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \\ \alpha(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \ldots, \alpha \cdot a_n), \quad \text{za } \ \alpha \in \mathbf{R}.\end{gathered}$$

     Skup vektora $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, gde je

     $$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ \ldots, \ e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

     je **standardna baza** vektorskog prostora $\mathbf{R}^n$.
     Dimenzija prostora $\mathbf{R}^n$ jednaka je n.

  2. Neka je

     $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

     realna matrica.

     Vektori-kolone matrice A

     $$\begin{aligned} k_1 &= (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1})^T, \\ k_2 &= (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2})^T, \\ &\ \vdots \\ k_n &= (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})^T \end{aligned}$$

     generišu vektorski prostor (potprostor prostora $\mathbf{R}^m$) koji se naziva **prostor kolona** matrice A.

     Vektori-vrste matrice A

     $$\begin{aligned} v_1 &= (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \\ v_2 &= (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \\ &\ \vdots \\ v_n &= (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}) \end{aligned}$$

     generišu vektorski prostor (potprostor prostora $\mathbf{R}^n$) koji se naziva **prostor vrsta** matrice A.

Dimenzija prostora kolona (maksimalan broj linearno nezavisnih kolona matrice A) jednaka je dimenziji prostora vrsta (maksimalan broj linearno nezavisnih vrsta matrice A). Ova vrednost jednaka je rangu matrice A.

Zadaci

1. **Dati su vektori**

   a) $\vec{a_1} = (4,4,3), \quad \vec{a_2} = (7,2,1), \quad \vec{a_3} = (4,1,6) \quad \text{i} \quad \vec{b} = (5,9,\lambda).$

   b) $\vec{a_1} = (2,1,0), \quad \vec{a_2} = (-3,2,1), \quad \vec{a_3} = (5,-1,-1) \quad \text{i} \quad \vec{b} = (8,\lambda,-2).$

   c) $\vec{a_1} = (-1,3,4), \quad \vec{a_2} = (1,-3,4), \quad \vec{a_3} = (2,-6,8) \quad \text{i} \quad \vec{b} = (0,\lambda,-1).$

   Odrediti $\lambda \in \mathbf{R}$ tako da se vektor $\vec{b}$ može izraziti kao linearna kombinacija vektora $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ i $\vec{a_3}$.

   Rešenje:

   Uočimo, odmah, da skup slobodnih vektora (orijentisanih duži), u kom su definisane operacije sabiranja vektora (pomoću pravila paralelograma) i množenja vektora realnim brojem (na uobičajeni način), ima strukturu vektorskog prostora nad poljem ralnih brojeva. Ovaj skup je model po kom je apstraktna struktura koja ispunjava uvedene aksiome vektorskog prostora i dobila ime. U tom vektorskom prostoru linearno zavisan skup vektora je onaj koji sadrži bar tri koplanarna, odnosno bar dva kolinearna vektora.

   Identifikovanjem slobodnog vektora trodimenzionalnog euklidskog prostora sa uređenom trojkom realnih brojeva koja predstavlja njegove koordinate, dolazimo do još jednog primera vektorskog prostora: to je skup $\mathbf{R}^3$ svih uređenih trojki realnih brojeva, nad poljem $\mathbf{R}$, pri čemu su operacije definisane na uobičajeni način (dva vektora (uređene trojke) se sabiraju tako što im se saberu odgovarajuće koordinate, a vektor (uređena trojka) se množi skalarom (realnim brojem) tako što se sve koordinate vektora pomnože skalarom). U tom vektorskom prostoru se ispitivanje linearne zavisnosti vektora može svesti na izračunavanje determinante koja odgovara njihovom mešovitom proizvodu (ispitivanje koplanarnosti tri vektora) ili izračunavanje intenziteta njihovog vektorskog proizvoda (ispitivanje kolinearnosti dva vektora). (Videti poglavlje *Slobodni vektori*).

   Daljim uopštavanjem dolazimo do novog primera vektorskog prostora - skupa $\mathbf{R}^n$ svih n-torki realnih brojeva, nad poljem $\mathbf{R}$. Operacije su i u ovom slučaju definisane analogno kao u $\mathbf{R}^3$.

U ovom i narednom zadatku naglašena je interpretacija (apstraktnog) vektora - elementa (apstraktnog) nosača V vektorskog prostora. Vektor je posmatran kao slobodan vektor i označavan kao orijentisana duž: $\vec{a}$, $\vec{b}$, ..., i istovremeno kao uređena trojka realnih brojeva-koordinata slobodnog vektora, odnosno koeficijenata njegovog razlaganja u pravcima koordinatnih osa. U daljim zadacima, gde je uglavnom posmatran vektorski prostor $\mathbf{R}^n$, vektori (uređene n-torke) označavani su malim slovima latinice: $a, b, \ldots$, kao što je navedeno u definiciji vektorskog prostora.

a) Kako je

$$\vec{a_1} \cdot (\vec{a_2} \times \vec{a_3}) = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} \neq 0,$$

vektori $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ su nekoplanarni, odnosno linearno nezavisni. Skup $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}\}$ prema tome predstavlja bazu prostora $\mathbf{R}^3$, a tada se svaki vektor iz $\mathbf{R}^3$ može izraziti kao njihova linearna kombinacija. To znači da u ovom slučaju λ može biti bilo koji realan broj.

b) U ovom slučaju je

$$\vec{a_1} \cdot (\vec{a_2} \times \vec{a_3}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

što znači da je dati skup vektora linearno zavisan, odnosno da su vektori $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ koplanarni. Lako je uočiti da je svaki dvočlani podskup ovog skupa linearno nezavisan, pošto ni jedan par vektora nema proporcionalne koordinate, odnosno nije kolinearan. To znači da se parametar λ vektora $\vec{b}$ određuje iz uslova da je $\vec{b}$ linearno zavisan sa bilo kojim dvočlanim podskupom datog skupa vektora $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}\}$. Dakle, imamo

$$rang \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ 8 & \lambda & -2 \end{bmatrix} \right) = 2,$$

odnosno svi minori reda tri ove matrice su jednaki nuli. Ako sada izjednačimo sa nulom minor

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 8 & \lambda & -2 \end{vmatrix} = -2(3+\lambda) = 0,$$

dobijamo da za $\underline{\lambda = -3}$ vektor $\vec{b}$ pripada ravni određenoj vektorima $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ i može se izraziti kao njihova linearna kombinacija. Tako je

$$\vec{b} = \vec{a_1} - 2\,\vec{a_2} = -\vec{a_1} + 2\,\vec{a_3} = -\vec{a_2} + \vec{a_3} = 2\,\vec{a_1} - 3\,\vec{a_2} - \vec{a_3}.$$

c) Očigledno, skup vektora $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}\}$ je linearno zavisan, i to tako da su sva tri vektora kolinearna (koordinate su im proporcionalne i $\vec{a_1} = -\vec{a_2}$, $\vec{a_3} = -2\vec{a_1} = 2\vec{a_2}$). Vektor $\vec{b}$ se može predstaviti kao njihova linearna kombinacija ukoliko i on pripada istoj pravoj, tj. ako su i koordinate vektora $\vec{b}$ proporcionalne koordinatama vektora $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$. To bi značilo da postoji konstanta α takva da je, npr. $\vec{b} = \alpha\,\vec{a_1}$, odnosno

$$0 = -\alpha\,, \quad \lambda = 3\alpha\,, \quad -1 = 4\alpha$$

što nije moguće. U ovom slučaju, dakle, zaključujemo da ne postoji vrednost parametra λ za koju se $\vec{b}$ može prikazati kao linearna kombinacija vektora $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$.

2. **Dati su vektori** $\vec{a_1} = (3,1,1) = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{a_2} = (2,-1,0) = 2\vec{i} - \vec{j}$ **i** $\vec{a_3} = (0,1,2) = \vec{j} + 2\vec{k}$.

   a) Dokazati da skup $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}\}$ **predstavlja bazu prostora** $\mathbf{R}^3$**.**

   b) Pomoću ove baze predstaviti vektor $\vec{b} = (4,6,8) = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 8\vec{k}$.

Rešenje:

a) Dati skup vektora predstavlja bazu vektorskog prostora $\mathbf{R}^3$ ukoliko je linearno nezavisan. Izjednačavajući linearnu kombinaciju datih vektora sa nulom, dobijamo

$$\alpha\,\vec{a_1} \;+\; \beta\,\vec{a_2} \;+\; \gamma\,\vec{a_3} = \vec{0},$$

odnosno $\qquad \alpha\,(3,1,1) \;+\; \beta\,(2,-1,0) \;+\; \gamma\,(0,1,2) = (0,0,0).$

Ovoj vektorskoj jednačini ekvivalentan je sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3\,\alpha & + & 2\,\beta & & & = & 0 \\ \alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & & & + & 2\gamma & = & 0, \end{array}$$

čija je determinanta

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -8.$$

Kako je $D \neq 0$, posmatrani (homogeni) sistem je jednoznačno rešiv, što znači da je $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Tada je dati skup vektora linearno nezavisan i čini bazu prostora $\mathbf{R}^3$.

Treba uočiti da je posmatrana determinanta jednaka mešovitom proizvodu datih vektora (izmena uloga vrsta i kolona ne menja vrednost determinante). Kako je taj mešoviti proizvod različit od nule, zaključujemo da su dati vektori nekoplanarni, a to znači da čine bazu prostora $\mathbf{R}^3$.

b) Svaki vektor prostora $\mathbf{R}^3$ može se predstaviti kao linearna kombinacija vektora (bilo koje) baze tog prostora. Treba, dakle, odrediti koeficijente $\alpha,\ \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ tako da važi

$$\begin{aligned}\vec{b} &= \alpha\,\vec{a_1} + \beta\,\vec{a_2} + \gamma\,\vec{a_3} = \\ &= \alpha\,(3,1,1) + \beta\,(2,-1,0) + \gamma\,(0,1,2) = \\ &= (3\alpha+2\beta)\,\vec{i} + (\alpha-\beta+\gamma)\,\vec{j} + (\alpha+2\gamma)\,\vec{k},\end{aligned}$$

što je ekvivalentno sistemu jednačina

$$3\alpha+2\beta = 4, \quad \alpha-\beta+\gamma = 6, \quad \alpha+2\gamma = 8,$$

čije je rešenje $\alpha = 2, \quad \beta = -1, \quad \gamma = 3.$ Prema tome,

$$\vec{b} = 2\,\vec{a_1} - \vec{a_2} + 3\,\vec{a_3}.$$

3. **Ispitati linearnu zavisnost skupa vektora**

$$\{(1,1,2,1),\ (1,-1,1,2),\ (-3,1,-4,-5),\ (0,2,1,-1)\}.$$

Rešenje:

Linearna kombinacija datih vektora je

$$\alpha\,(1,1,2,1) + \beta\,(1,-1,1,2) + \gamma\,(-3,1,-4,-5) + \delta\,(0,2,1,-1).$$

Ispitaćemo za koje je vrednosti skalara $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ ova linearna kombinacija jednaka nuli. Iz vektorske jednačine

$$\alpha(1,1,2,1) + \beta(1,-1,1,2) + \gamma(-3,1,-4,-5) + \delta(0,2,1,-1) = (0,0,0,0)$$

dobijamo homogeni sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} \alpha & + & \beta & - & 3\gamma & & & = & 0 \\ \alpha & - & \beta & + & \gamma & + & 2\delta & = & 0 \\ 2\alpha & + & \beta & - & 4\gamma & + & \delta & = & 0 \\ \alpha & + & 2\beta & - & 5\gamma & - & \delta & = & 0 \end{array}. \tag{7.1}$$

Determinanta ovog sistema je

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Homogeni sistem čija je determinanta jednaka nuli je neodređen, tako da osim trivijalnog ima i druga rešenja. To znači da postoje vrednosti α, β, γ, δ, od kojih je bar jedna različita od nule, a koje zadovoljavaju sistem (7.1), odnosno za koje je linearna kombinacija datih vektora jednaka nuli. Dati vektori su, dakle, linearno zavisni.

Gausovim algoritmom sistem (7.1) se svodi na

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha & + & \beta & - & 3\gamma & & & = & 0 \\ & & \beta & - & 2\gamma & - & \delta & = & 0, \end{array}$$

a njegovo opšte rešenje je

$$\{(3t_2 - t_1, t_1, t_2, t_1 - 2t_2) \mid t_1, t_2 \in \mathbf{R}\}.$$

Tako za, npr. $t_1 = 0,\ t_2 = 1$ važi

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (3, 0, 1, -2),$$

što znači da je jedna od zavisnosti datih vektora

$$3\,(1, 1, 2, 1) + (-3, 1, -4, -5) - 2\,(0, 2, 1, -1) = (0, 0, 0, 0).$$

4. **Odrediti vrednost realnog parametra a tako da skup vektora**

$$\{(a, a, a, a), \qquad (a, 2, 2, 2), \qquad (a, 2, a, a), \qquad (a, 2, a, 3)\}$$

bude linearno nezavisan.

Rešenje:

Izjednačavanjem linearne kombinacije datih vektora sa nulom, formiramo homogeni sistem jednačina čija je determinanta

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & 2 & 2 & 2 \\ a & 2 & a & a \\ a & 2 & a & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & 2-a & 2-a & 2-a \\ 0 & 2-a & 0 & 0 \\ 0 & 2-a & 0 & 3-a \end{vmatrix} \\ &= a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-a & 2-a & 2-a \\ 0 & 0 & a-2 & a-2 \\ 0 & 0 & a-2 & 1 \end{vmatrix} = a(2-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 3-a \end{vmatrix} \\ &= a(a-2)^2(a-3). \end{aligned}$$

Za $a \neq 0$ i $a \neq 2$ i $a \neq 3$ (homogeni) sistem jednačina ima determinantu različitu od nule, što znači da je jednoznačno rešiv, odnosno ima samo trivijalno rešenje. Tada je dati skup vektora linearno nezavisan.

Zadatak možemo rešiti i tako što ćemo odrediti parametar a iz uslova da je rang matrice čije su vrste dati vektori maksimalan, što u ovom slučaju znači da je jednak četiri. Kako je reč o kvadratnoj matrici, njen rang je jednak njenom redu ukoliko je determinanta matrice različita od nule. Prethodno izračunata determinanta je upravo determinanta te matrice, tako da sledi već navedeni zaključak.

5. **Koje uslove treba da zadovoljavaju** x_1, x_2, x_3, x_4**, da bi vektor** $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$ **pripadao vektorskom prostoru generisanom skupom vektora** $\{(1,-1,1,0)\ ,\quad (1,1,0,1)\ ,\quad (2,0,1,1)\}$?

Rešenje:

Odredićemo, prvo, jednu bazu vektorskog prostora generisanog datim vektorima. Ispitujući rang matrice čije su vrste dati vektori, dobijamo

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

(prva vrsta je pomnožena sa (-1), odnosno (-2), i dodata drugoj, odnosno trećoj; druga vrsta je pomnožena sa (-1) i dodata trećoj)

odakle zaključujemo da je dimenzija posmatranog potprostora jednaka 2. Tada bilo koja dva od tri data vektora čine njegovu bazu. (Očigledno je da su svaka dva vektora linearno nezavisna, pošto im koordinate nisu proporcionalne.)

Ako za bazu odaberemo vektore $(1,-1,1,0)$ i $(1,1,0,1)$, svaki vektor (x_1, x_2, x_3, x_4) koji pripada potprostoru može se prikazati kao njihova linearna kombinacija. Dakle, iz vektorske jednačine

$$\alpha\,(1,-1,1,0) + \beta\,(1,1,0,1) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

sledi sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcl} \alpha & + & \beta & = & x_1 \\ -\alpha & + & \beta & = & x_2 \\ \alpha & & & = & x_3 \\ & & \beta & = & x_4 \end{array}$$

koji mora biti rešiv, a takav je za

$$x_1 - x_3 - x_4 = 0\ , \quad x_2 + x_3 - x_4 = 0,$$

što su uslovi koje moraju zadovoljavati koordinate proizvoljnog vektora iz posmatranog potprostora.

(Jasno je da ovaj zadatak nema jedinstveno rešenje, s obzirom da se dobijeni uslovi mogu izraziti i bilo kojim ekvivalentnim sistemom jednačina.)

6. **Da li skupovi vektora**

$$A_1 = \{(1,-1,2,-3),\ (1,1,2,0),\ (3,-1,6,-6)\} \quad \textbf{i}$$

$$A_2 = \{(1,0,1,0),\ (0,2,0,3)\}$$

generišu isti potprostor vektorskog prostora $\mathbf{R}^4$?

Rešenje:

Ispitaćemo, prvo, da li oba skupa vektora generišu potprostore iste dimenzije.

Očigledno je da su vektori iz skupa A_2 linearno nezavisni, s obzirom da im koordinate nisu proporcionalne, pa je dimenzija potprostora generisanog ovim skupom vektora jednaka 2.

S druge strane, lako se proverava da je

$$rang \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 6 & -6 \end{bmatrix} \right) = 2,$$

što znači da je i dimenzija potprostora generisanog skupom A_1 jednaka 2, a svaki dvočlani podskup skupa A_1 je linearno nezavisan.

Polazeći od činjenice da se svaki vektor vektorskog prostora može izraziti kao linearna kombinacija vektora bilo koje baze tog prostora, zaključujemo da će dati skupovi vektora genarisati isti potprostor ako i samo ako se vektori (bar jednog) linearno nezavisnog podskupa jednog skupa generatora mogu izraziti kao linearna kombinacija vektora (bar jednog) linearno nezavisnog podskupa drugog skupa generatora. U posmatranom slučaju, to znači da treba utvrditi da li postoje skalari $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$ takvi da je

$$(1,0,1,0) = \alpha\,(1,-1,2,-3) + \beta\,(1,1,2,0) \tag{7.2}$$

i

$$(0,2,0,3) = \gamma\,(1,-1,2,-3) + \delta\,(1,1,2,0). \tag{7.3}$$

Može se pokazati da samo jednačina (7.3) može biti zadovoljena, jer je

$$(0,2,0,3) = (1,1,2,0) - (1,-1,2,-3),$$

dok sistem linearnih jednačina

$$1 = \alpha + \beta\,, \quad 0 = -\alpha + \beta\,, \quad 1 = 2\alpha + 2\beta\,, \quad 0 = -3\alpha,$$

na koji se svodi vektorska jednačina (7.2) očigledno nema rešenje, što znači da vektor $(1,0,1,0)$ ne pripada potprostoru koji je generisan skupom A_1. Zaključujemo da dati skupovi vektora ne generišu isti potprostor vektorskog prostora $\mathbf{R}^4$.

7. **Neka je S vektorski prostor generisan skupom $A = \{a, b, c, d, e\}$, gde je**

$$a = (3,3,0,6,9), \quad b = (0,2,1,0,4), \quad c = (1,1,2,1,4),$$
$$d = (2,2,0,4,6), \quad e = (2,0,1,3,3).$$

   a) **Odrediti dimenziju vektorskog prostora S i linearnu zavisnost među vektorima skupa A.**
   b) **Odrediti sve podskupove skupa A koji su baze vektorskog prostora S.**

Rešenje:

a) Dimenziju vektorskog prostora S odredićemo kao rang matrice čije su vrste vektori iz skupa A. Istovremeno, na osnovu postupka određivanja ranga, naznačavajući elementarne transformacije koje se vrše na vrstama matrice i posmatrajući ih kao operacije nad vektorima iz skupa A, odredićemo i linearnu zavisnost među vektorima skupa A. Važno je uočiti da, u slučaju kada određujemo linearne veze u skupu vektora koristeći rang matrice, ne primenjujemo elementarne transformacije na kolone matrice A.

$$\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccccc} 3 & 3 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right]\end{array} \begin{array}{l} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & 3 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} c \\ b \\ d-2c \\ e-2c \\ a-3c \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} c \\ b \\ -\frac{1}{2}(d-2c) \\ e-2c+b \\ -\frac{1}{3}(a-3c) \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} c \\ b \\ -\frac{1}{2}(d-2c) \\ e-2c+b-\frac{1}{2}(d-2c) \\ -\frac{1}{3}(a-3c)+\frac{1}{2}(d-2c) \end{array} .$$

Zaključujemo da je rang ove matrice 3, odnosno da je $dim(S) = 3$.

Posmatrajući vrste koje su se u prethodnom postupku anulirale, dobijamo i linearne veze među vektorima skupa A:

$$2\,b - 2\,c - d + 2\,e = 0, \qquad 2\,a - 3\,d = 0.$$

Napominjemo da ovo nije jedini oblik u kojim se mogu izraziti linearne veze među vektorima skupa A. Ako te linearne veze shvatimo kao sistem dve linearne jednačine sa pet nepoznatih, onda one mogu izraziti i bilo kojim ekvivalentnim sistemom jednačina.

Dimenziju vektorskog prostora koji je generisan datim skupom vektora, kao i linearne veze među vektorima, možemo odrediti i na drugi način. Izjednačimo linearnu kombinaciju datih vektora sa nulom:

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \varepsilon e = 0.$$

Tako dobijamo sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 3\alpha & & & + & \gamma & + & 2\delta & + & 2\varepsilon & = & 0 \\ 3\alpha & + & 2\beta & + & \gamma & + & 2\delta & & & = & 0 \\ & & \beta & + & 2\gamma & & & + & \varepsilon & = & 0 \\ 6\alpha & & & + & \gamma & + & 4\delta & + & 3\varepsilon & = & 0 \\ 9\alpha & + & 4\beta & + & 4\gamma & + & 6\delta & + & 3\varepsilon & = & 0 \end{array} \tag{7.4}$$

koji je ekvivalentan sa sistemom

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 3\alpha & & & + & \gamma & + & 2\delta & + & 2\varepsilon & = & 0 \\ & & \beta & + & 2\gamma & & & + & \varepsilon & = & 0 \\ & & & & \gamma & & & + & \varepsilon & = & 0. \end{array} \tag{7.5}$$

Sistem (7.5) je dvostruko neodređen odakle sledi da je dimenzija vektorskog prostora S, koja se može izračunati kao razlika broja vektora -generatora i stepena neodređenosti sistema (7.5),

$$dim(S) = 5 - 2 = 3.$$

Rešenje sistema (7.5) je

$$\{(-\frac{1}{3}t_1 - \frac{2}{3}t_2, t_1, -t_1, t_2, t_1) \mid t_1, t_2 \in \mathbf{R}\},$$

odakle, uvrštavanjem u linearnu kombinaciju datih vektora, dobijamo

$$(-\frac{1}{3}t_1 - \frac{2}{3}t_2)\ a + t_1\ b - t_1\ c + t_2\ d + t_1\ e = 0,$$

odnosno

$$(-\frac{1}{3}a + b - c + e)\ t_1 + (-\frac{2}{3}a + d)\ t_2 = 0.$$

Kako prethodna jednakost važi za svako $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$, sledi da je

$$-\frac{1}{3}a + b - c + e = 0 \quad \text{i} \quad -\frac{2}{3}a + d = 0,$$

odnosno da su linearne veze u skupu A

$$a - 3b + 3c - 3e = 0 \quad \text{i} \quad 2a - 3d = 0.$$

b) Podskup skupa A je baza vektorskog prostora S ako je tročlan i linearno nezavisan.
Kako je skup $\{a,\ d\}$ linearno zavisan, zaključujemo da među $\binom{5}{3} = 10$ tročlanih podskupova skupa A ona tri koji sadrže istovremeno vektore a i d ne mogu biti baze prostora V. Tako dolazimo do skupova

$$\{a,b,c\},\ \ \{a,b,e\},\ \ \{a,c,e\},\ \ \{b,c,d\},\ \ \{b,c,e\},\ \ \{b,d,e\},\ \ \{c,d,e\}$$

čiju linearnu zavisnost još treba proveriti. Ovo se može učiniti neposredno, određivanjem ranga odgovarajućih matrica (matrica čije su vrste, redom, vektori a, b, c, zatim a, b, e itd.).

Drugi način da utvrdimo koji podskupovi skupa A predstavljaju baze prostora V je da posmatramo dobijene linearne veze među vektorima skupa A kao sistem linearnih jednačina:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2a & & & & & - & 3d & & & = & 0 \\ & & 2b & - & 2c & - & d & + & 2e & = & 0 \end{array}.$$

Ovaj sistem je trostruko neodređen (što odgovara zaključku da je $dim(V) = 3$), a lako je uočiti da svih sedam gore navedenih tročlanih podskupova skupa A predstavljaju skupove slobodnih promenljivih sistema (to su minimalni skupovi promenljivih sistema preko kojih se mogu izraziti sve ostale promenljive sistema). Dakle, polazeći od tri vektora bilo kog od sedam navedenih skupova, možemo odrediti i preostala dva elementa skupa A, a to znači da možemo izraziti i proizvoljan vektor prostora V. Dakle, baze prostora V su skupovi

$$\{a,b,c\},\ \ \{a,b,e\},\ \ \{a,c,e\},\ \ \{b,c,d\},\ \ \{b,c,e\},\ \ \{b,d,e\},\ \ \{c,d,e\}.$$

8. **Odrediti dimenziju vektorskog prostora V generisanog skupom vektora $A = \{a,b,c,d,e\}$ i naći sve podskupove skupa A koji su baze prostora V, ako su sve zavisnosti među vektorima skupa A date jednačinama**

$$a - 2b + c - d + 4e = 0, \qquad a - 3b + 3c + d + 8e = 0,$$

$$-a + 2b + 2d - 2e = 0, \qquad 2a - 4b + 2c - d + 8e = 0.$$

Rešenje:

Posmatrajmo date veze kao sistem linearnih jednačina:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} a & - & 2b & + & c & - & d & + & 4e & = & 0 \\ a & - & 3b & + & 3c & + & d & + & 8e & = & 0 \\ -a & + & 2b & & & + & 2d & - & 2e & = & 0 \\ 2a & - & 4b & + & 2c & - & d & + & 8e & = & 0. \end{array}$$

Gausovim postupkom možemo ga svesti na ekvivalentan sistem oblika

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} a & - & 2b & + & c & - & d & + & 4e & = & 0 \\ & - & b & + & 2c & + & 2d & + & 4e & = & 0 \\ & & & & c & + & d & + & 2e & = & 0 \\ & & & & & & d & & & = & 0, \end{array}$$

odnosno

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} a & - & 2b & + & c & - & d & + & 4e & = & 0 \\ & - & b & & & & & & & = & 0 \\ & & & & c & + & d & + & 2e & = & 0 \\ & & & & & & d & & & = & 0, \end{array}$$

čije je rešenje svaka uređena petorka oblika

$$\alpha\,(-2, 0, -2, 0, 1), \qquad \text{za} \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Dakle, ovaj homogeni sistem je jednostruko neodređen. To znači da je $dim(V) = 1$, odnosno da su sve baze ovog vektorskog prostora jednočlane. Kako vektori $b = 0$ i $d = 0$ ne mogu pripadati bazi, zaključujemo da su

$$\{a\}, \qquad \{c\}, \qquad \{e\}$$

podskupovi skupa A koji su baze vektorskog prostora V.

(Uporediti ovo rešenje sa rešenjem prethodnog zadatka pod b). S obzirom da u ovom zadatku vektori skupa A nisu eksplicitno dati, neposredna provera njihove linearne zavisnosti nije moguća, pa preostaje samo drugi način rešavanja koji se zasniva na analizi sistema jednačina proisteklog iz linearnih veza vektora skupa A.)

9. **U vektorskom prostoru $\mathbf{R}^4$ skup vektora $A = \{a, b, c\}$, gde je**

$$a = (1, 2, 1, 3), \quad b = (-1, 1, 2, 0), \quad c = (2, 1, p, q),$$

generiše potprostor V.

a) U zavisnosti od realnih parametara p i q diskutovati dimenziju prostora V.

b) Za $p = -1$, $q = 3$ naći jednu bazu prostora V i proveriti da li vektor $d = (1, 1, 1, 1)$ pripada prostoru V.

Rešenje:

a) Dimenzija vektorskog prostora V jednaka je broju linearno nezavisnih vektora-generatora. Taj broj možemo odrediti i kao rang matrice čije su vrste upravo vektori a, b i c. (Rang matrice jednak je broju linearno nezavisnih vektora-vrsta matrice.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & p & q \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & p-2 & q-6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & p+1 & q-3 \end{bmatrix}.$$

Zaključujemo:

za $\underline{p=-1}$ i $\underline{q=3}$ je $r(A)=2$, odnosno $dim(V)=2$;

za $\underline{p \neq -1}$ ili $\underline{q \neq 3}$ je $r(A)=3$, odnosno $dim(V)=3$.

b) U slučaju kada je $p=-1$ i $q=3$, dimenzija prostora V je jednaka dva, što znači da bazu čine bilo koja dva linearno nezavisna vektora iz V. Kako dati vektori a i b ispunjavaju te uslove (jer je $a \neq \alpha b$, za $\alpha \in \mathbf{R}$), skup $\{a,b\}$ je jedna baza vektorskog prostora V.

Vektor d pripada vektorskom prostoru V ukoliko se može izraziti kao linearna kombinacija vektora njegove baze. U tom slučaju su vektori a, b i d linearno zavisni, što znači da je rang matrice čije su oni vrste mora biti jednak dva. Međutim, kako je

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

rang ove matrice jednak je 3, što znači da je skup $\{a,b,d\}$ linearno nezavisan. Odatle zaključujemo da vektor d ne pripada vektorskom prostoru V.

Drugi način da se utvrdi da li vektor d pripada prostoru V je da se proveri da li se d može izraziti kao linearna kombinacija vektora baze $\{a,b\}$ prostora V. To znači da treba utvrditi da li postoje $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ za koje je

$$d = \alpha\, a + \beta\, b,$$

odnosno da li sistem jednačina

$$\begin{array}{rcrcl} \alpha & - & \beta & = & 1 \\ 2\alpha & + & \beta & = & 1 \\ \alpha & + & 2\beta & = & 1 \\ 3\alpha & & & = & 1 \end{array}$$

ima rešenje.

Kako sabiranjem prve i druge jednačine dobijamo da je $3\alpha = 2$, što je u kontradikciji sa četvrtom jednačinom ($3\alpha = 1$), zaključujemo da sistem nema rešenje, tj. da d ne pripada vektorskom prostoru V.

10. **Skup vektora $\{a, b, c\}$, gde je**

$$a = (1, -2, 0, 1, 1), \quad b = (2, 0, -1, 0, 3), \quad c = (4, 4, 1, 0, -3),$$

generiše potprostor W vektorskog prostora $\mathbf{R}^5$. Odrediti jednu bazu potprostora W koja sadrži vektor

$$d = (a-2,\ a^2-6a-1,\ 2,\ a^2+2a,\ a^2-a-3).$$

Rešenje:

Prvo treba odrediti dimenziju potprostora W. Ona je jednaka broju linearno nezavisnih vektora među datim vektorima-generatorima. Taj broj ćemo odrediti posmatrajući matricu

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 12 & 1 & -4 & -7 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -10 \end{bmatrix}.$$

Njen rang je jednak 3, što znači da je i $dim(W) = 3$. Dakle, dati vektori čine bazu potprostora W.

Vektor d pripada potprostoru W ako se može izraziti kao linearna kombinacija vektora baze. Prema tome, za neko α, β, $\gamma \in \mathbf{R}$ je

$$d = \alpha\, a \ + \ \beta\, b \ + \ \gamma\, c,$$

odnosno sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & + & 2\beta & + & 4\gamma & = & a-2 \\ -2\alpha & & & + & 4\gamma & = & a^2-6a-1 \\ & - & \beta & + & \gamma & = & 2 \\ \alpha & & & & & = & a^2+2a \\ \alpha & + & 3\beta & - & 3\gamma & = & a^2-a-3 \end{array}$$

mora biti rešiv.

Ako četvrtu jednačinu pomnožimo sa (-1) i saberemo je sa petom, a zatim dobijenoj jednačini dodamo treću, prethodno pomnoženu sa 3, dobijamo da je $\underline{a = 1}$, odnosno

$$d = (-1, -6, 2, 3, -3).$$

Ovako određen vektor d pripada potprostoru W. Da bismo formirali jednu bazu potprostora koja sadrži d, treba da odredimo još dva vektora iz W tako da tročlani skup bude linearno nezavisan. Iskoristićemo date vektore

$a, b, c,$ s obzirom da oni pripadaju vektorskom prostoru W. Ispitaćemo linearnu zavisnost skupa $\{a, b, d\}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & -6 & 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -8 & 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kako je posmatrani skup linearno zavisan (jer je rang prethodne matrice jednak 2), on nije baza potprostora W. Ispitaćemo, dalje, linearnu zavisnost skupa $\{a, c, d\}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & -6 & 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & -8 & 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 12 & 1 & -4 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -10 \end{bmatrix}.$$

Kako je rang prethodne matrice jednak tri, zaključujemo da skup $\{a, c, d\}$ predstavlja bazu potprostora W.

11. **a) Odrediti $a \in \mathbf{R}$ tako da se skup vektora $\{p, q, r\}$, gde je**

$$p = (1,\ 0,\ a,\ -3), \quad q = (3,\ a,\ 4a-2,\ -7), \quad r = (-2,\ 2a,\ -4,\ a+7),$$

može dopuniti do baze prostora $\mathbf{R}^4$ samo jednim vektorom.

b) Za $a = 0$ dopuniti dati skup do baze prostora $\mathbf{R}^4$.

Rešenje:

a) S obzirom da je $dim(\mathbf{R}^4) = 4$, dati skup se može dopuniti do baze prostora $\mathbf{R}^4$ jednim vektorom ukoliko je linearno nezavisan. Odredićemo parametar a tako da rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & -3 \\ 3 & a & 4a-2 & -7 \\ -2 & 2a & -4 & a+7 \end{bmatrix}$$

bude jednak tri. Dakle,

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & -3 \\ 0 & a & a-2 & 2 \\ 0 & 2a & 2a-4 & a+1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & -3 \\ 0 & a & a-2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & a \\ 0 & a & 2 & a-2 \\ 0 & 0 & a-3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Očigledno, za $a \neq 0$ i $a \neq 3$ je $rang(A) = 3$.

Ispitajmo slučajeve kada je $a = 0$ ili $a = 3$.

$\underline{a = 0}$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

pa je i u ovom slučaju $rang(A) = 3$.

$\underline{a = 3}$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

U ovom slučaju je $rang(A) = 2$.

Zaključujemo da je za $a \neq 3$ dati skup vektora linearno nezavisan, odnosno da se može dopuniti do baze prostora $\mathbf{R}^4$ samo jednim vektorom.

b) Za $a = 0$ potrebno je datom skupu dodati jedan vektor iz $\mathbf{R}^4$, linearno nezavisan sa ostalima, da bi se dobila jedna baza prostora $\mathbf{R}^4$. Uobičajeno je da se skup dopunjava vektorima standardne baze, što u ovom slučaju znači da treba odabrati jedan od vektora

$$e_1 = (1,0,0,0), \quad e_2 = (0,1,0,0), \quad e_3 = (0,0,1,0), \quad e_4 = (0,0,0,1)$$

koji je linearno nezavisan sa vektorima

$$p = (1,0,0,-3), \quad q = (3,0,-2,-7), \quad r = (-2,0,-4,7).$$

Linearnu zavisnost svakog od tako dobijenih četvoročlanih skupova možemo ispitati na bilo koji od uobičajenih načina (ispitujući rang matrice, odnosno determinantu sistema jednačina), ali se ovde i bez dodatnih ispitivanja lako uočava da je vektor e_2 jedini linearno nezavisan sa p, q, r. Naime, vektori p, q, r svi imaju drugu koordinatu jednaku nuli, što znači da se dodavanjem još jednog vektora sa tom osobinom svakako dobija linearno zavisan skup - odgovarajuća matrica ima jednu nula-kolonu.

Dakle, skup $\{p, q, r, e_2\}$ predstavlja jednu bazu prostora $\mathbf{R}^4$.

12. **Ako je skup vektora $\{p, q, r, s\}$ linearno nezavisan, ispitati linearnu zavisnost skupa vektora**

$$\{p+q+2r+s, \quad p-q+r+as, \quad -3p+q-4r-5s, \quad aq+r-s\}$$

u zavisnosti od realnog parametra a.

Rešenje:

Da bismo ispitali linearnu zavisnost datog skupa vektora, njihovu linearnu kombinaciju izjednačićemo sa nulom. Ako su α, β, γ, $\delta \in \mathbf{R}$, dobijamo

$$\alpha(p+q+2r+s)+\beta(p-q+r+as)+\gamma(-3p+q-4r-5s)+\delta(aq+r-s)=0, \tag{7.6}$$

a odatle, grupisanjem,

$$(\alpha+\beta-3\gamma)\ p+(\alpha-\beta+\gamma+a\delta)\ q+(2\alpha+\beta-4\gamma+\delta)\ r+(\alpha+a\beta-5\gamma-\delta)\ s=0.$$

Poslednja relacija predstavlja linearnu kombinaciju vektora p, q, r, s, izjednačenu sa nulom. Kako je skup vektora $\{p, q, r, s\}$ linearno nezavisan, svi koeficijenti u navedenoj linearnoj kombinaciji moraju biti jednaki nuli, odakle dobijamo homogeni sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
\alpha & + & \beta & - & 3\gamma & & & = & 0 \\
\alpha & - & \beta & + & \gamma & + & a\delta & = & 0 \\
2\alpha & + & \beta & - & 4\gamma & + & \delta & = & 0 \\
\alpha & + & a\beta & - & 5\gamma & - & \delta & = & 0.
\end{array} \tag{7.7}$$

Ukoliko sistem (7.7) ima samo trivijalno rešenje, $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$, iz (7.6) sledi linearna nezavisnost datog skupa vektora.

Ukoliko je sistem (7.7) neodređen, bar neka od vrednosti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ u (7.6) je različita od nule, što znači da je u tom slučaju dati skup vektora linearno zavisan.

Da bismo ispitali prirodu sistema (7.7), izračunaćemo njegovu determinantu:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & a \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & a & -5 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & a \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=-2(a-2)^2.$$

Zaključujemo da važi

za $\underline{a=2}$ je $D=0$ i dati skup vektora je linearno zavisan;

za $\underline{a\neq 2}$ je $D\neq 0$ i dati skup vektora je linearno nezavisan.

13. **Ako je skup vektora $\{a, b, c\}$ iz $\mathbf{R}^3$ linearno nezavisan, odrediti parametar λ tako da dimenzija potprostora koji je generisan vektorima**

$$\{2a-3b, \qquad (\lambda-1)b-2c, \qquad 3c-a, \qquad \lambda c-b\}$$

bude jednaka dva.

Rešenje:

Izjednačimo linearnu kombinaciju posmatranih vektora sa nulom. Dobijamo

$$\alpha(2a-3b)+\beta((\lambda-1)b-2c)+\gamma(3c-a)+\delta(\lambda c-b)=0,$$

odnosno

$$(2\alpha-\gamma)\,a+(-3\alpha+(\lambda-1)\beta-\delta)\,b+(-2\beta+3\gamma+\lambda\delta)\,c=0.$$

Zbog linearne nezavisnosti vektora a, b, c koeficijenti u prethodnoj linearnoj kombinaciji moraju biti jednaki nuli. Tako dobijamo sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2\alpha & & & - & \gamma & & & = & 0\\ -3\alpha & + & (\lambda-1)\beta & & & - & \delta & = & 0\\ & & -2\beta & + & 3\gamma & + & \lambda\delta & = & 0, \end{array}$$

koji se Gausovim algoritmom svodi na

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -\gamma & + & 2\alpha & & & & & = & 0\\ & - & 3\alpha & + & (\lambda-1)\beta & - & \delta & = & 0\\ & & 6\alpha & - & 2\beta & + & \lambda\delta & = & 0, \end{array}$$

odnosno

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -\gamma & + & 2\alpha & & & & & = & 0\\ & - & 3\alpha & + & (\lambda-1)\beta & - & \delta & = & 0\\ & & & & 2(\lambda-2)\beta & + & (\lambda-2)\delta & = & 0. \end{array} \tag{7.8}$$

Dimenzija prostora generisanog datim skupom vektora dobija se kao razlika broja vektora u skupu i stepena neodređenosti sistema (7.8). Ona je, po uslovu zadatka, jednaka 2. To znači da sistem (7.8) treba da bude $(4-2=2)$ dvostruko neodređen. Za $\lambda=2$, poslednja jednačina se svodi na $0=0$. Sistem je tada oblika

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -\gamma & & & & & + & 2\alpha & = & 0\\ & + & \beta & - & \delta & - & 3\alpha & = & 0 \end{array}$$

i dvostruko je neodređen. Njegovo rešenje je

$$\{(t_1, 3t_1+t_2, 2t_1, t_2) \mid t_1, t_2 \in \mathbf{R}\},$$

a linearna kombinacija datih vektora se svodi na

$$t_1(2a-3b)+(3t_1+t_2)(b-2c)+2t_1(3c-a)+t_2(2c-b)=0,$$

odnosno

$$\big((2a-3b)+3(b-2c)+2(3c-a)\big)\ t_1+\big((b-2c)+(2c-b)\big)\ t_2=0.$$

Odatle dobijamo linearnu zavisnost vektora datog skupa:

$$(2a-3b)+3(b-2c)+2(3c-a)=0, \qquad (b-2c)+(2c-b)=0,$$

i zaključujemo su skupovi

$$\{2a-3b,\quad b-2c\}, \qquad \{2a-3b,\quad 2c-b\}, \qquad \{2a-3b,\quad 3c-a\},$$

$$\{b-2c,\quad 3c-a\}, \qquad \{2c-b,\quad 3c-a\}$$

baze posmatranog dvodimenzionalnog potprostora.

Zadaci za samostalni rad

1. Ispitati linearnu zavisnost skupa vektora

   a) $\{(1,0,2),\ \ (-1,1,2),\ \ (5,2,1)\}$.
   b) $\{(3,1,1),\ \ (-1,2,-1),\ \ (2,3,0)\}$.
   c) $\{(1,0,0,-1),\ \ (2,1,1,0),\ \ (1,1,1,1),\ \ (1,2,3,4)\}$.
   c) $\{(1,1,0,0),\ \ (0,0,1,1),\ \ (2,0,0,1),\ \ (0,0,0,3)\}$.

   Rezultat:
   a) Nezavisan. b) Zavisan. c) Zavisan. d) Nezavisan.

2. Za koje vrednosti realnog parametra a skup vektora

   $$\{(a,1-a,a),\ \ (2a,2a-1,a+2),\ \ (-2a,a,-a)\}$$

   čini bazu vektorskog prostora $\mathbf{R}^3$?

   Rezultat:
   $a\neq 0\ \wedge\ a\neq 1\ \wedge\ a\neq -\frac{4}{3}$.

3. Skup vektora

$$\{(m,0,m)\ ,\quad (2m-1,m-1,3m-2)\ ,\quad (m+2,m-3,3m+1)\}$$

generiše dvodimenzionalni potprostor S vektorskog prostora $\mathbf{R}^3$. Odrediti vrednost realnog parametra m za koju vektor $(1,1+m,2-m)$ pripada vektorskom prostoru S.

Rezultat:
$m=0$.

4. Koje uslove treba da zadovoljavaju x_1,x_2,x_3 da bi vektor $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$ pripadao prostoru generisanom skupom vektora

$$\{(2,1,0),\ (1,-1,2),\ (0,3,-4)\}?$$

Rezultat:
$2x_1-4x_2-3x_3=0$.

5. Da li skupovi vektora $\{(1,2,-1),(2,-3,2)\}$ i $\{(4,1,3),(-3,1,2)\}$ generišu isti potprostor vektorskog prostora $\mathbf{R}^3$?

Rezultat:
Ne.

6. Dat je skup vektora $A=\{a,b,c,d\}$, gde je

$$a=(p,4,10,1),\quad b=(1,7,17,3),\quad c=(2,2,4,3),\quad d=(3,1,1,4).$$

a) Diskutovati dimenziju vektorskog prostora V, generisanog datim vektorima, u zavisnosti od realnog parametra p.

b) U slučaju kada je dimenzija minimalna, odrediti linearnu zavisnost među datim vektorima i navesti sve linearno nezavisne podskupove.

c) Za $p=1$ ispitati da li vektor $(2,-7,-19,2)$ pripada prostoru V.

Rezultat:
a) Za $p=0$ je $dim(V)=2$, a za $p\neq 0$ je $dim(V)=3$.

b) $c-2b+3a=0,\quad d-3b+5a=0$.
Linearno su nezavisni svi jednočlani i svi dvočlani podskupovi datog skupa vektora.

c) Da, $e=-a-b+2c$.

7. U vektorskom prostoru $\mathbf{R}^4$ potprostor V je generisan skupom vektora $A=\{a,b,c,d\}$, gde je

$$a=(4,5,-1,3),\ \ b=(2,1,1,-1),\ \ c=(0,-3,3,1),\ \ d=(2,-2,4,0).$$

a) Odrediti dimenziju prostora V i naći bar jednu njegovu bazu.

b) Nađenu bazu dopuniti do baze prostora $\mathbf{R}^4$.

Rezultat:
a) $dim(V) = 3$, jedna baza je $\{a, b, d\}$.

b) Baza za $\mathbf{R}^4$ je $\{a, b, d, e_1\}$, gde je $e_1 = (1, 0, 0, 0)$.

8. U vektorskom prostoru $\mathbf{R}^4$ potprostor S je generisan skupom vektora

$$\{(1, -1, 2, 3), \quad (1, 0, 1, 0), \quad (3, -5, 2, 7)\}.$$

Odrediti jednu bazu tog potprostora koja sadrži vektor $(1, 1, 0, -1)$.

Rezultat:
$\{(1, -1, 2, 3), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, -1)\}$.

9. Skup vektora $A = \{a, b, c, d\}$ čini bazu vektorskog prostora $\mathbf{R}^4$. Da li skup vektora

$$B = \{a + d, \quad a + b + c, \quad a + c, \quad b + d\}$$

čini bazu tog prostora?

Rezultat:
Da.

8

Nizovi, granična vrednost i neprekidnost funkcije

Nizovi

- **Brojni niz**, u oznaci $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, je preslikavanje $a:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ skupa prirodnih brojeva u skup realnih brojeva. $a_n := a(n)$ se naziva **opšti član niza** $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$.

- Brojni niz $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ se naziva **aritmetički niz** ako postoji realan broj d sa osobinom da za svako $n\in\mathbf{N}$ važi $a_{n+1}=a_n+d$. Njegov opšti član je oblika
$$a_n = a_1+(n-1)d.$$
Suma prvih n članova aritmetičkog niza izračunava se po formuli
$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=na_1+\frac{n(n-1)}{2}\,d, \tag{8.1}$$
gde je a_1 prvi član, a d razlika dva uzastopna člana.

- Brojni niz $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ se naziva **geometrijski niz** ako postoji realan broj q sa osobinom da za svako $n\in\mathbf{N}$ važi $b_{n+1}=b_nq$. Njegov opšti član je oblika
$$b_n=b_1q^{n-1}.$$
Suma prvih n članova geometrijskog niza je data sa
$$S_n=\begin{cases} b_1\,\dfrac{1-q^n}{1-q}, & q\neq 1,\\ nb_1, & q=1\end{cases} \tag{8.2}$$
gde je b_1 prvi član niza, a q količnik dva uzastopna člana.

- Brojni niz $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ je **ograničen** ako postoji realan broj $M > 0$ takav da za svako $n \in \mathbf{N}$ važi $|a_n| \le M$.

- Brojni niz $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ je **monotono rastući (monotono neopadajući)**, ako za svako $n \in \mathbf{N}$ važi $a_n < a_{n+1} (a_n \le a_{n+1})$.

  Brojni niz $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ je **monotono opadajući (monotono nerastući)**, ako za svako $n \in \mathbf{N}$ važi $a_n > a_{n+1} (a_n \ge a_{n+1})$.

- Za realan broj a interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ predstavlja **ε-okolinu tačke** a. Za $a \in \mathbf{R}$ kažemo da je **tačka nagomilavanja** niza $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ ako se u svakoj ε-okolini tačke a nalazi beskonačno mnogo članova niza $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$.

- Za realan broj a kažemo da je **granična vrednost** niza $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ ako se izvan svake ε-okoline tačke a nalazi najviše konačno mnogo članova niza $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, tj. ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 (koji zavisi od ε) tako da za svaki prirodan broj $n \ge n_0$, važi $|a_n - a| < \varepsilon$. Tada pišemo

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

  i kažemo da niz $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ **konvergira** ka broju a, ili da je broj a **granična vrednost (granica)** tog niza.
  Za svaki niz koji ima graničnu vrednost kažemo da je **konvergentan,** u suprotnom kažemo da je **divergentan**.

- Za niz $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ kažemo da **divergira u plus beskonačno,** i pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, ako za svaki realan broj $M > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ sa osobinom da za svako $n \ge n_0$ važi $a_n > M$.

  Za niz $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ kažemo da **divergira u minus beskonačno,** i pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, ako za svaki realan broj $M < 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ sa osobinom da za svako $n \ge n_0$ važi $a_n < M$.

- Svaki monoton i ograničen niz je konvergentan.

  Konvergentan niz ima jedinstvenu graničnu vrednost i ta granična vrednost je jedina tačka nagomilavanja tog niza.

  Konvergentan niz je ograničen.

- Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, tada važi:

  1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$;
  2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$;
  3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$, ako je $b \ne 0$ i ako za svako $n \in \mathbf{N}$ važi $b_n \ne 0$;
  4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$, gde je k neparan broj, ili je k paran broj i za svako $n \in \mathbf{N}$ važi $a_n \ge 0$;

5. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^k = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^k$, gde je $k \in \mathbf{N}$.

- Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ i postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ sa osobinom da za svako $n \geq n_0$ važi $a_n \leq b_n$, onda sledi $a \leq b$.
- Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$ i postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ sa osobinom da za svako $n \geq n_0$ važi $a_n \leq c_n \leq b_n$, onda sledi $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$.
- U zadacima se često koriste sledeće granične vrednosti:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^a} = \begin{cases} 0, & a > 0 \\ 1, & a = 0 \\ +\infty, & a < 0 \end{cases}$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ \infty, & q > 1 \\ \text{ne postoji}, & q \leq -1 \end{cases}$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty} n^b q^n = 0$, $|q| < 1$, $b \in \mathbf{R}$;

4. Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$,

   onda važi $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^a}{n!} = 0$, $a \in \mathbf{R}$;

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 0$;

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$;

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$, $a \in \mathbf{R}$.

Granična vrednost i neprekidnost funkcije

- Tačka x_0 je **tačka nagomilavanja** skupa $D \subseteq \mathbf{R}$, ako za svako $\varepsilon > 0$ interval $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ sadrži bar jedan elemenat iz skupa D, koji je različit od x_0.
  Drugim rečima, x_0 je tačka nagomilavanja skupa D, ako za svako $\varepsilon > 0$ skup $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap D$ ima beskonačno mnogo elemenata.
- Neka je x_0 tačka nagomilavanja domena D funkcije $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$. Kažemo da je broj A **granična vrednost** funkcije f u tački x_0 ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ (δ zavisi od ε), tako da za svako $x \in D$ koje zadovoljava uslov $0 < |x - x_0| < \delta$, važi $|f(x) - A| < \varepsilon$. U tom slučaju pišemo
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$
- Kažemo da je broj A **desna granična vrednost** funkcije $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ u tački x_0 ako je x_0 tačka nagomilavanja skupa $D \cap (x_0, +\infty)$ i ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ (δ zavisi od ε), tako da za svako $x \in D$ koje zadovoljava uslov $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, važi $|f(x) - A| < \varepsilon$. U tom slučaju pišemo
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A.$$

- Kažemo da je broj A **leva granična vrednost** funkcije $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ u tački x_0 ako je x_0 tačka nagomilavanja skupa $D \cap (-\infty, x_0)$ i ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ (δ zavisi od ε), tako da za svako $x \in D$ koje zadovoljava uslov $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, važi $|f(x) - A| < \varepsilon$. U tom slučaju pišemo
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A.$$

- Neka postoji realan broj a takav da domen funkcije $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ sadrži interval $(a, +\infty)$. Broj A je **granična vrednost funkcije f u plus beskonačnosti** ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $M > a$ (M zavisi od ε), tako da za $x > M$ važi $|f(x) - A| < \varepsilon$.
U tom slučaju pišemo: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

  Analogno se definiše: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

- Neka je x_0 tačka nagomilavanja domena funkcije $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$. Ako za svako $K > 0$, postoji $\delta > 0$ (δ zavisi od K), tako da za svako $x \in D$ sa osobinom $0 < |x - x_0| < \delta$, važi $f(x) > K$, onda kažemo da f **teži ka plus beskonačnosti kada $x \to x_0$**.
U tom slučaju pišemo: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.
Analogno se definiše: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

  Često u zadacima umesto $+\infty$ pišemo ∞.

- Neka postoji realan broj a takav da domen funkcije $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ sadrži interval $(a, +\infty)$. Ako za svako $K > 0$, postoji $\delta > 0$ (δ zavisi od K), tako da za svako $x > a$ važi $f(x) > K$, onda kažemo da f **teži ka plus beskonačnosti u plus beskonačnosti.**
U tom slučaju pišemo: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

  (Analogno se definišu: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ i $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

- Neka je x_0 tačka nagomilavanja zajedničkog domena $D \subseteq \mathbf{R}$ funkcija $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ i $g : D \longrightarrow \mathbf{R}$. Pretpostavimo da postoje $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ i $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$. Tada važe jednakosti:

  1. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$,
  2. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$,
  3. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, ako je $B \neq 0$ i za svako $x \in D$ je $g(x) \neq 0$.

  Jednakosti važe i ako se x_0 zameni sa ∞ ili $-\infty$.

- Navodimo neke granične vrednosti koje se često koriste:

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e,$
2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha>0\\ 1, & \alpha=0\\ +\infty, & \alpha<0\end{cases},$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1,$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1,$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1,$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha,\ \alpha\in\mathbf{R}.$

- Za funkciju $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$, $D \subseteq \mathbf{R}$, kažemo da je **neprekidna u tački** $x_0 \in D$, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ (δ zavisi od ε) tako da za svako $x \in D$ koje zadovoljava uslov $|x - x_0| < \delta$ važi $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

- Ako je $x_0 \in D$ tačka nagomilavanja skupa D, onda je $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ neprekidna u x_0 ako i samo ako je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

- Ako u tački $x_0 \in D$ funkcija $f : D \to \mathbf{R}$ nije neprekidna, onda kažemo da ona u toj tački ima **prekid.** Razlikujemo tri vrste prekida:

  Ako $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ postoji (kao konačan broj) i ako je

  $$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0),$$

  onda je to **otklonjiv (prividan) prekid.** (Neki autori pod prividnim prekidom podrazumevaju i tačke nagomilavanja domena funkcije f u kojima funkcija nije definisana ali ima graničnu vrednost.)

  Ako postoje leva i desna granična vrednost funkcije f u tački x_0 i nisu jednake, onda se kaže da funkcija f ima **skok ili prekid prve vrste** u tački x_0.

  Ako bar jedna od graničnih vrednosti

  $$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \quad \text{ili} \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

  ne postoji (kao konačan broj), onda je to **prekid druge vrste**.

- Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbf{R}$ neprekidna na skupu $D_1 \subseteq D$, ako je neprekidna u svakoj tački skupa D_1.

- Ako su funkcije f i g neprekidne u tački x_0, onda su u toj tački neprekidne i sledeće funkcije:

  $$f+g, \quad f-g, \quad f\cdot g, \quad \frac{f}{g}\ \text{(ako je } g(x_0)\neq 0).$$

Ako je funkcija g neprekidna u tački x_0 i funkcija f neprekidna u tački $g(x_0)$, onda je funkcija $f \circ g$ neprekidna u tački x_0.

- Osnovne elementarne funkcije su neprekidne na celom definicionom skupu.
- Ako funkcija $g : D \to D_1, D_1 \subseteq \mathbf{R}$ ima graničnu vrednost A u tački x_0 i funkcija $f : D_1 \to \mathbf{R}$ je neprekidna u tački A, onda je

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x\to x_0} g(x)) = f(A).$$

Ako je $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$) i $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = B$($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = B$), onda je

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = B.$$

Zadaci

Nizovi

1. **Odrediti sumu prvih n članova niza**

a)	$a_n = n.$	**b)**	**parnih brojeva.**
c)	**neparnih brojeva.**	**d)**	$b_n = \dfrac{1}{2^n}.$

Rešenje:

a) Suma prvih n članova aritmetičkog niza izračunava se po formuli (8.1). U posmatranom slučaju je $a_1 = 1$ i $d = 1$, tako da imamo

$$S_n = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$

što je poznata formula za izračunavanje zbira prvih n prirodnih brojeva.

b) Suma prvih n parnih brojeva može se izračunati kao suma aritmetičkog niza čiji je prvi član $a_1 = 2$, a razlika $d = 2$. Koristeći (8.1), imamo

$$S_n = 2n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n^2 + n = n(n+1).$$

c) Za izračunavanje sume prvih n članova niza neparnih brojeva koristićemo ponovo (8.1) sa $a_1 = 1$ i $d = 2$. Tada sledi

$$S_n = n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n^2.$$

d) Suma prvih n članova geometrijskog niza izračunava se po formuli (8.2). U posmatranom slučaju je $a_1 = \frac{1}{2}$ i $q = \frac{1}{2}$, tako da sledi

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2^n - 1}{2^n}.$$

2. **Ispitati konvergenciju niza čiji je opšti član**
a) $a_n = \frac{1}{n}$. **b)** $a_n = (-1)^n$. **c)** $a_n = n$.

Rešenje:

a) Posmatrani niz je ograničen, jer postoji $M = 1$ sa osobinom da za svako $n \in \mathbf{N}$ važi $\left|\frac{1}{n}\right| \leq M$. Dati niz je monotono opadajući,jer za svako $n \in \mathbf{N}$ važi $n < n + 1$, tj. $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$. Znači, niz čiji je opšti član $a_n = \frac{1}{n}$ je konvergentan.
b) Niz $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbf{N}}$ je divergentan jer ima dve tačke nagomilavanja. To su $a_{2k} = 1$ i $a_{2k+1} = -1$.
c) Za svaki pozitivan realan broj M postoji prirodan broj n (npr. $n = [M] + 1$) koji je veći od njega, što znači da niz $\{n\}_{n\in\mathbf{N}}$ nije ograničen, a samim tim nije ni konvergentan. Prema definiciji je

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

3. **Koristeći definiciju granične vrednosti niza, pokazati da je**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3}.$$

Rešenje:

Neka je ε proizvoljan pozitivan realan broj. Treba pokazati da postoji prirodan broj n_0 sa osobinom da za svako $n \geq n_0$ važi $\left|\frac{n}{3n+1} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{n}{3n+1} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{3n - 3n - 1}{3(3n+1)}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{9n+3} < \varepsilon.$$

Za svako $n \in \mathbf{N}$ je $9n + 3 > 9n$, tj. $\frac{1}{9n+3} < \frac{1}{9n}$. Nejednakost $\frac{1}{9n} < \varepsilon$ će važiti za svako $n \in \mathbf{N}$ koje zadovoljava uslov $9n > \frac{1}{\varepsilon}$, tj. $n > \frac{1}{9\varepsilon}$.
Znači ako za n_0 uzmemo npr. najmanji prirodan broj koji je veći od $\frac{1}{9\varepsilon}$, odnosno $n_0 = [\frac{1}{9\varepsilon}] + 1$, onda za svako $n \geq n_0$ važi $\left|\frac{n}{3n-1} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$.

(*Napomena:* Za n_0 se može uzeti bilo koji prirodan broj koji je veći od $\frac{1}{9\varepsilon}$. Sa $[x]$ se označava **ceo deo od** x.)

4. **Odrediti** **a)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3n+4}{3n^3+5n^2+1}$. **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3+3n+5}{3n^3+5n^2+1}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^7-3n^4+8n^2-10}{6n^6-1}$.

Rešenje:

Graničnu vrednost niza, čiji opšti član ima oblik količnika polinoma stepena k i polinoma stepena m, računaćemo tako što ćemo brojilac i imenilac podeliti sa n^l, gde je $l = max\{k, m\}$, a zatim primeniti osobine konvergentnih nizova i nizova koji divergiraju u plus ili minus beskonačno. Na drugi način zadatak se može rešiti izdvajanjem ispred zagrade, u brojiocu n^k, a u imeniocu n^m.

a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2-3n+4}{n^3}}{\frac{3n^3+5n^2+1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3}}{3+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^3}\right)} = 0.$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4n^3+3n+5}{n^3}}{\frac{3n^3+5n^2+1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^3}}{3+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{4}{3}.$$

c)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^7-3n^4+8n^2-10}{6n^6-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^7(1-\frac{3}{n^3}-\frac{8}{n^5}-\frac{10}{n^7})}{n^6(6-\frac{1}{n^6})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{1-\frac{3}{n^3}-\frac{8}{n^5}-\frac{10}{n^7}}{6-\frac{1}{n^6}}\right) = \infty.$$

5. **Odrediti** **a)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}-6n}{3n+1}$. **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+n}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$.

Rešenje:

Ideja primenjena u prethodnom zadatku može se primeniti i u opštijim slučajevima:

a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n}-6n)\ /:n}{(3n+1)\ /:n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}-6}{3+\frac{1}{n}} = -2.$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n})}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6(1+\frac{1}{n^6})}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n\right)^2}{n^2\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^6}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)^2}{n^2\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^6}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)^2}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^6}}}=4.$$

6. **Odrediti** **a**) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5n+4}-n\right)$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-\sqrt[3]{n^3-2}\right)$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+n})$.

Rešenje:

Zadaci ovog tipa mogu se rešiti racionalisanjem:

a)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5n+4}-n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5n+4}-n\right)\cdot\frac{(\sqrt{n^2-5n+4}+n)}{\sqrt{n^2-5n+4}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-5n+4-n^2}{\sqrt{n^2-5n+4}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(-5+\frac{4}{n})}{n\left(\sqrt{1-\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-5+\frac{4}{n}}{\sqrt{1-\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}+1}=-\frac{5}{2},$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-\sqrt[3]{n^3-2}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{(\sqrt[3]{n^3+2n^2})^2+\sqrt[3]{(n^3+2n^2)(n^3-2)}+(\sqrt[3]{n^3-2})^2}{(\sqrt[3]{n^3+2n^2})^2+\sqrt[3]{(n^3+2n^2)(n^3-2)}+(\sqrt[3]{n^3-2})^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2-(n^3-2)}{\sqrt[3]{(n^3+2n^2)^2}+\sqrt[3]{n^3+2n^2}\sqrt[3]{n^3-2}+\sqrt[3]{(n^3-2)^2}}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+2}{\sqrt[3]{n^6+4n^5+4n^4}+\sqrt[3]{n^6+2n^5-2n^3-4n^2}+\sqrt[3]{n^6-4n^3+4}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2+\frac{2}{n^2})}{n^2(\sqrt[3]{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^3}-\frac{4}{n^4}}+\sqrt[3]{1-\frac{4}{n^3}+\frac{4}{n^6}})} = \frac{2}{3}.$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n+n-\sqrt[3]{n^3+n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n) + \lim_{n\to\infty} n(n-\sqrt[3]{n^3+n}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-\sqrt[3]{n^3+n})(n^2+n\sqrt[3]{n^3+n}+\sqrt[3]{(n^3+n)^2})}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+n}+\sqrt[3]{(n^3+n)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n^2+1-n^2)}{\sqrt{n^2+1}+n} + \lim_{n\to\infty} \frac{n(n^3-(n^3+n))}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+n}+\sqrt[3]{(n^3+n)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} + \lim_{n\to\infty} \frac{-n^2}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+n}+\sqrt[3]{(n^3+n)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)} + \lim_{n\to\infty} \frac{-n^2}{n^2\left(1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n^2})^2}\right)} = \frac{1}{6}.$$

7. **Odrediti** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}+5^{n+1}}{3^n-5^n}$.

Rešenje:

Kako za $q = \frac{3}{5} < 1$ geometrijski niz $\{(\frac{3}{5})^n\}_{n\in\mathbf{N}}$ ima graničnu vrednost 0, dobijamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}+5^{n+1}}{3^n-5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}+1\right)}{5^n\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n-1\right)} =$$

$$= 5\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}+1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n-1} = -5.$$

8. **Odrediti** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{13}-13}{4-\sqrt[n]{4}}$.

Rešenje:

Koristeći $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ a>0$, dobijamo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{13}-13}{4-\sqrt[n]{4}} = \frac{1-13}{4-1} = -4.$$

9. **Odrediti** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8^n+n!}{n^3+(n+2)!}$.

Rešenje:

Koristeći $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0,\ a\in\mathbf{R}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^a}{n!} = 0,\ a\in\mathbf{R}$ dobijamo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8^n+n!}{n^3+(n+2)!}\cdot\frac{(n+2)!}{(n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{8^n}{(n+2)!}+\frac{n!}{(n+2)!}}{\frac{n^3}{(n+2)!}+1} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{8^n}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{n^3}{(n+2)!}+1} = \frac{0}{1} = 0.$$

10. **Odrediti** **a)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+3+\ldots+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+3}{2}\right)$.

Rešenje:

Za izračunavanje ove granične vrednosti ne može se iskoristiti pravilo da je granična vrednost zbira konačno mnogo konvergentnih nizova jednaka zbiru njihovih graničnih vrednosti, jer broj sabiraka zavisi od n, tj. traži se granična vrednost sume beskonačno mnogo sabiraka.

a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

b) Da bismo odredili vrednost zbira $\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$, uočimo da važi

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

(postupak rastavljanja racionalne funkcije na parcijalne razlomke).
Tada je

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

c) U brojiocu prvog razlomka se nalazi zbir prvih n neparnih brojeva. Koristeći zadatak 1 pod c), tj. $1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$, i sabirajući razlomke dobijamo:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+3+\ldots+(2n-1)}{n+1}-\frac{2n+3}{2}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-(2n+3)(n+1)}{2(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-5n-3}{2(n+1)}=-\frac{5}{2}.$$

11. **Odrediti** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}}$.

Rešenje:

Sabraćemo članove geometrijskog niza u brojiocu, odnosno imeniocu, a zatim postupiti slično kao u 5. zadatku:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}}}{\frac{1-\frac{1}{3^n}}{\frac{2}{3}}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}\,(2^n-1)}{2^{n-2}\,(3^n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}\,2^n\,(1-\frac{1}{2^n})}{2^{n-2}\,3^n\,(1-\frac{1}{3^n})}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^2\,(1-\frac{1}{2^n})}{3\,(1-\frac{1}{3^n})}=\frac{4}{3}.$$

12. **Odrediti** **a)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. **b)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^n$.

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^3+2}{5n^3}\right)^{n^3}$.

Rešenje:

Sve navedene granične vrednosti mogu se odrediti korišćenjem činjenice da za svaki niz $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ koji divergira ka plus ili minus beskonačnosti, važi

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e.$$

a)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{(-n)}\right)^{(-n)\cdot(-1)}=e^{-1}.$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{(-3n)}\right)^{(-3n)\cdot(-\frac{1}{3})}=e^{-\frac{1}{3}}.$$

c)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^3+2}{5n^3}\right)^{n^3}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{5n^3}\right)^{n^3}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{5n^3}{2}}\right)^{\frac{5n^3}{2}\cdot\frac{2}{5}}=e^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{e^2}.$$

Granična vrednost i neprekidnost funkcije

1. **Pokazati po definiciji da je**

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}=5.$ **b)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{x^2-2x}=-2.$

Rešenje:

a) Primetimo da je $x_0=2$ tačka nagomilavanja domena funkcije $\frac{x^2+x-6}{x-2}$. Po definiciji granične vrednosti potrebno je, za unapred zadato $\varepsilon>0$, pronaći $\delta>0$ tako da za svako $x\in\mathbf{R}\backslash\{2\}$ koje zadovoljava uslov $0<|x-2|<\delta$, važi $\left|5-\frac{x^2+x-6}{x-2}\right|<\varepsilon$.

Kako je

$$\left|5-\frac{x^2+x-6}{x-2}\right|=\left|\frac{5x-10-x^2-x+6}{x-2}\right|=\left|-\frac{(x-2)^2}{x-2}\right|=$$

$$=|x-2|,$$

za dato ε, biramo $\delta=\varepsilon$, pa iz $|x-2|<\delta$ sledi

$$\left|5-\frac{x^2+x-6}{x-2}\right|<\varepsilon.$$

b) Primetimo da, bez ograničenja opštosti, uvek možemo smatrati da je $\varepsilon < 1$. Neka je, dakle, dato $0 < \varepsilon < 1$. Tada, birajući $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, dobijamo

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow \left| -2 - \frac{4-x^2}{x^2-2x} \right| = \left| 2 - \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} \right| =$$

$$= \left| \frac{x-2}{x} \right| = \frac{|x-2|}{x} < \frac{|x-2|}{1} < \delta < \varepsilon,$$

jer, za $\varepsilon < 1$ i $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ iz $0 < |x-2| < \delta$ sledi $x > \frac{3}{2} > 1$.

2. **Odrediti graničnu vrednost**

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2+2x-1}{2x^2-x+1}$. **b)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{x}$. **c)** $\lim\limits_{x\to 0} 2^x$.

d) $\lim\limits_{x\to 0} \arccos x$.

Rešenje:

Ako je funkcija f definisana u okolini tačke x_0 i neprekidna u x_0, onda važi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Kako su sve elementarne funkcije neprekidne, ovu činjenicu ćemo koristiti u narednim zadacima.

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2+2x-1}{2x^2-x+1} = \frac{3\cdot 0+2\cdot 0-1}{2\cdot 0-0+1} = -1.$$

b) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

c) $$\lim_{x\to 0} 2^x = 2^0 = 1.$$

d) $$\lim_{x\to 0} \arccos x = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

3. **Odrediti graničnu vrednost**

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3+3x^2+2x+3}{5x^4+2x^2+x+3}$. **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^4+2x^2+x+5}{5x^3+x^2+x+3}$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$. **d)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

Rešenje:

Ovo su neodređeni izrazi oblika „$\frac{\infty}{\infty}$" i potrebno ih je na neki način transformisati.

a)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+3x^2+2x+3}{5x^4+2x^2+x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(5+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3})}{x^4(5+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^4})}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{x(5+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^4})}=0.$$

b)
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4(5+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{5}{x^4})}{x^3(5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(5+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{5}{x^4})}{5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}}=-\infty.$$

c)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}=1.$$

d)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{\sqrt{x}}{x}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=1.$$

4. **Izračunati graničnu vrednost**

a) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-4x}{x^2-x-12}$. **b)** $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{3x^2-13x-10}{4x^2-14x-30}$.

c) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2+9x+9}$. **d)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x^2-2}{x^3+2x^2-2x-1}$.

e) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-2x^3-8x+16}$. **f)** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^4+2x^3+8x+16}{x^3+7x^2+16x+12}$.

Rešenje:

Ovo su neodređeni izrazi oblika „$\frac{0}{0}$" kod kojih je potrebno faktorisati izraze u brojiocu i imeniocu.

a)
$$\lim_{x\to4}\frac{x^2-4x}{x^2-x-12}=\lim_{x\to4}\frac{x(x-4)}{(x-4)(x+3)}=\lim_{x\to4}\frac{x}{x+3}=\frac{4}{7}.$$

b)

$$\lim_{x\to 5}\frac{3x^2-13x-10}{4x^2-14x-30} = \lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(3x+2)}{2(x-5)(2x+3)}=\lim_{x\to 5}\frac{3x+2}{2(2x+3)} = \frac{17}{26}.$$

c)

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{2x^2+9x+9}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-2)}{2(x+3)(x+\frac{3}{2})}=\lim_{x\to -3}\frac{x-2}{2x+3}=\frac{5}{3}.$$

d) Kako je $x=1$ koren polinoma u brojiocu i imeniocu, faktorisaćemo te polinome (npr. koristeći Hornerovu šemu).

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-2}{x^3+2x^2-2x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{(x-1)(x^2+3x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x+2}{x^2+3x+1}=1.$$

e) Postupamo slično kao i u prethodnim zadacima.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-2x^3-8x+16}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2-4)}{(x-2)(x^3-8)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-8}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x^2+2x+4}=\frac{1}{3}.$$

f)

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^4+2x^3+8x+16}{x^3+7x^2+16x+12}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^3+8)}{(x+2)^2(x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{(x+2)(x+3)}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x+4}{x+3}=12.$$

5. **Izračunati graničnu vrednost**

a) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}.$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-x}{x-3}.$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}.$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt[3]{x^3+x^2+15}}{x^2-5x+6}.$

e) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}},\quad a\in\mathbf{R}.$

Rešenje:

Ove granične vrednosti sadrže izraze koje treba racionalisati.
a)

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{4}.$$

b)

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-x}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-x}{x-3}\cdot\frac{\sqrt{x+6}+x}{\sqrt{x+6}+x}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+6-x^2}{(x-3)(\sqrt{x+6}+x)}=\lim_{x\to 3}\frac{-(x-3)(x+2)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+x)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-(x+2)}{\sqrt{x+6}+x}=\frac{-5}{\sqrt{3+6}+3}=-\frac{5}{6}.$$

c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}\cdot\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x-1)(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}{(1+x-1)(\sqrt{1+x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1+1+1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Na drugi način, koristeći $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$, je

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{(1+x)^{\frac{1}{3}}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{x}}{\frac{(1+x)^{\frac{1}{3}}-1}{x}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}.$$

d)

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt[3]{x^3+x^2+15}}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-5x+6}-$$

$$-\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x^3+x^2+15}-3}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5-9}{(x-2)(x-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}-$$

$$-\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x^2+15-27}{(x-2)(x-3)(\sqrt[3]{(x^3+x^2+15)^2}+3\sqrt[3]{x^3+x^2+15}+9)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}-$$

$$-\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+3x+6)}{(x-2)(x-3)(\sqrt[3]{(x^3+x^2+15)^2}+3\sqrt[3]{x^3+x^2+15}+9)}=-\frac{2}{27}.$$

e)

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}+\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{(x-a)(x+a)}}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})}+\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x+a}}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}+\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x+a}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

6. **Izračunati graničnu vrednost**

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{\sin ax}$, $a\neq 0$, $a\in\mathbf{R}, b\in\mathbf{R}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

d) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$, $a\in\mathbf{R}$.

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$.

g) $\lim\limits_{x\to -a}\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} a}{x+a}$, $a\in\mathbf{R}$.

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\cdot\sin x}$.

Rešenje:

U ovim zadacima ćemo koristiti graničnu vrednost (4).

a)

$$\lim_{x\to 0}3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3.$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{bx}{\sin ax}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin ax}{bx}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{a}{b}\cdot\frac{\sin ax}{ax}}=\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}}=\frac{b}{a}.$$

c) Koristićemo poznatu vezu $1-\cos x=2\cdot\sin^2\frac{x}{2}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2\cdot 4}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

d)

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\cdot\cos(\frac{x+a}{2})\cdot\sin(\frac{x-a}{2})}{x-a}=$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\cos(\frac{x+a}{2}) \cdot \sin(\frac{x-a}{2})}{\frac{(x-a)}{2}} = \cos(\frac{2a}{2}) \cdot \lim_{x\to a} \frac{\sin(\frac{x-a}{2})}{\frac{x-a}{2}} = \cos a.$$

e)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{4 \cdot \frac{\sin 4x}{4x}}{\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}-1}{x}} = \frac{4\cdot 1}{\frac{1}{2}} = 8.$$

f)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \cdot \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x + \sin^2 x + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{x\cdot \sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin^2 x}{x \cdot \sin x \cdot \cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x \cdot (2\cos^2 x + 1)}{x \cdot \sin x \cos^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} = 1 \cdot \frac{2+1}{1} = 3.$$

g)

$$\lim_{x\to -a} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} a}{x+a} = \lim_{x\to -a} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin a}{\cos a}}{x+a} =$$

$$= \lim_{x\to -a} \frac{\sin x \cdot \cos a + \sin a \cdot \cos x}{(x+a)\cdot \cos x \cdot \cos a} = \lim_{x\to -a} \frac{\sin(x+a)}{(x+a)\cdot \cos x \cdot \cos a} =$$

$$= \lim_{x\to -a} \frac{\sin(x+a)}{x+a} \cdot \frac{1}{\cos x \cdot \cos a} = \frac{1}{\cos^2 a}.$$

7. **Izračunati graničnu vrednost**

a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{3}{x}}$. **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3x^2+x-1}{x-1}\right)^{\frac{2x+1}{3x^2}}$.

c) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(\frac{x^2+5}{x^2-2}\right)^{\frac{2x^2}{x+1}}$. **d)** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2x^2-3}{x+3}\right)^{\frac{x}{x^2-4}}$.

e) $\lim\limits_{x\to 3}(x-2)^{\frac{1}{(x-3)^2}}$. **f)** $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x - 1}{x-e}$.

Rešenje:

Ove granične vrednosti a) - e) su oblika „1^∞". Izračunaćemo ih primenom poznatih graničnih vrednosti (1) i (2).

a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{3}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{4x}\cdot\frac{3}{x}\cdot 4x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{12x}{x}} = e^{12}.$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3x^2+x-1}{x-1}\right)^{\frac{2x+1}{3x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{3x^2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{3x^2}\cdot\frac{2x+1}{x-1}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+1}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+1}{x-1}} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}.$

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2-2}\right)^{\frac{2x^2}{x+1}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2-2+7}{x^2-2}\right)^{\frac{2x^2}{x+1}} =$

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{7}{x^2-2}\right)^{\frac{x^2-2}{7}\cdot\frac{2x^2}{x+1}\cdot\frac{7}{x^2-2}} = e^{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{14x^2}{(x+1)(x^2-2)}} =$
$= 1.$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2x^2-3}{x+3}\right)^{\frac{x}{x^2-4}} = \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+3+2x^2-6-x}{x+3}\right)^{\frac{x}{x^2-4}} =$

$= \lim\limits_{x\to 2}\left(1+\dfrac{2x^2-x-6}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{2x^2-x-6}\cdot\frac{x}{x^2-4}\cdot\frac{2x^2-x-6}{x+3}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{x}{x+3}\cdot\frac{(x-2)(2x+3)}{(x-2)(x+2)}} = e^{\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{4}} = e^{\frac{7}{10}}.$

e) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e} = \lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-\ln e}{x-e} = \lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln(\frac{x}{e})}{x-e} = \lim\limits_{x\to e}\ln(\dfrac{x}{e})^{\frac{1}{x-e}} =$

$= \ln\lim\limits_{x\to e}\left(1+\dfrac{x}{e}-1\right)^{\frac{1}{x-e}} = \ln\lim\limits_{x\to e}\left(1+\dfrac{x-e}{e}\right)^{\frac{e}{x-e}\cdot\frac{1}{x-e}\cdot\frac{x-e}{e}} =$

$= \ln e^{\frac{1}{e}} = \dfrac{1}{e}.$

f) $\lim\limits_{x\to 3}(x-2)^{\frac{1}{(x-3)^2}} = \lim\limits_{x\to 3}(1+x-3)^{\frac{1}{x-3}\cdot\frac{1}{(x-3)^2}\cdot(x-3)} = e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x-3}}.$

Ova granična vrednost ne postoji. Zaista, jer desna granična vrednost ne postoji (kao konačna)

$$\lim_{x\to 3^+}(x-2)^{\frac{1}{(x-3)^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}} = +\infty,$$

a leva granična vrednost je jednaka nuli

$$\lim_{x\to 3^-}(x-2)^{\frac{1}{(x-3)^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{1}{x-3}} = 0.$$

8. **Izračunati graničnu vrednost**

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\sqrt{x})$. **b**) $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{1}{x-4}$. **c**) $\lim\limits_{x\to 0^+}3^{\frac{1}{x}}$.

d) $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{1}{x-4}$. **e**) $\lim\limits_{x\to 0^-}3^{\frac{1}{x}}$. **f**) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{1-x}}{1-x^2}$.

g) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x+|x|}{3x}$. **h**) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x+|x|}{3x}$.

Rešenje:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\sqrt{x})=1.$

Primetimo da ovde nije moguće tražiti levu graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, jer funkcija $1+\sqrt{x}$ nije definisana za $x<0$.

b) Ovo je granična vrednost oblika „$\frac{1}{0^+}$”, dakle $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{1}{x-4}=+\infty.$

c) Ovo je granična vrednost oblika „$3^{+\infty}$”, dakle $\lim\limits_{x\to 0^+} 3^{\frac{1}{x}}=+\infty.$

d) Ovo je granična vrednost oblika „$\frac{1}{0^-}$”, dakle $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{1}{x-4}=-\infty.$

e) Ovo je granična vrednost oblika „$3^{-\infty}$”, dakle $\lim\limits_{x\to 0^-} 3^{\frac{1}{x}}=0.$

f) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{1-x}}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{1-x}}{(\sqrt{(1-x)(1+x)})^2}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}=$

$=+\infty.$

g) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x+|x|}{3x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x-x}{3x}=\dfrac{1}{3}.$

h) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x+|x|}{3x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x+x}{3x}=1.$

9. **Izračunati graničnu vrednost**

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}.$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-1}{x}.$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}.$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}}.$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x-2}.$ **f)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{|x-1|}.$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\sin x|}{x}.$ **h)** $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin(x+1).$

Rešenje:

a) Koristimo smenu $a^x-1=t,\ x=\frac{\ln(t+1)}{\ln a}.$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\ln(t+1)}{\ln a}}=\ln a\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)}=\ln a\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(t+1)}{t}}=$$

$$=\ln a\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\ln a\cdot\frac{1}{\ln e}=\ln a.$$

b) Koristimo $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}\cdot a=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}\cdot a=a$$

c)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\sin x-1)^{\frac{1}{\sin x-1}\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot(\sin x-1)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cdot\frac{\sin x-1}{\cos^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-1}{1+\sin x}}=e^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

d) Logaritmovanjem leve i desne strane izraza

$$y=(\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}}$$

dobijamo

$$\ln y=\frac{1}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}\cdot\ln\operatorname{tg} x.$$

Tada je

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}\cdot\ln\frac{\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x-\ln\cos x}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}-\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}-0=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\cdot x\right)}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}+\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1+\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}=$$

$$=0+\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{\ln x}+\sqrt[3]{\frac{1}{\ln^3 x}+\frac{1}{\ln x}}}=-\infty.$$

Dakle, $\lim\limits_{x\to 0}\ln y=\ln\lim\limits_{x\to 0}y=-\infty$, tj. $\lim\limits_{x\to 0}y=0.$

e) Posmatrajmo levi i desni limes u tački $x=2:$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x}{x-2}=-\infty,\qquad\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{x-2}=+\infty.$$

Kako leva i desna granična vrednost u tački $x=2$ imaju različitu vrednost, sledi da $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x}{x-2}$ ne postoji.

f) Posmatrajmo levu i desnu graničnu vrednost u tački $x=1:$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1}=1,$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{-(x-1)}=-1.$$

Dakle, ova granična vrednost ne postoji.

g) Slično kao u prethodnom primeru, posmatramo levu i desnu graničnu vrednost u tački $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|\sin x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{|\sin x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x}=-1.$$

Dakle, granična vrednost u nuli ne postoji.

h) Kako je domen funkcije $f(x)=\arcsin(x+1)$, $D=\{x\in\mathbf{R}\mid -1\le x+1\le 1\}=[-2,0]$, to se granična vrednost u tački $x=0$ svodi na jednostranu graničnu vrednost, tj. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ (ova jednakost važi pod uslovom da $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ postoji). Kako je

$$\lim_{x\to 0^-}\arcsin(x+1)=\frac{\pi}{2},$$

sledi da granična vrednost $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin(x+1)$ postoji i jednaka je $\dfrac{\pi}{2}$.

10. **Ispitati neprekidnost funkcije**

a) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ u tački $x=1$.

b) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2} & , \; x\ne 2\\ 4 & , \; x=2\end{cases}$ u tački $x=2$.

c) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2} & , \; x\ne 2\\ 3 & , \; x=2\end{cases}$ u tački $x=2$.

d) $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}} & , \; x\ne 0\\ e & , \; x=0\end{cases}$ u tački $x=0$.

e) $f(x)=\begin{cases}1 & , \; x>0\\ 0 & , \; x=0\\ -1 & , \; x<0\end{cases}$ u tački $x=0$.

f) $f(x)=\begin{cases}2x+1 & , \; x\le 3\\ (x-2)^{\frac{1}{(x-3)^2}} & , \; x>3\end{cases}$ u tački $x=3$.

Rešenje:

a) Funkcija f nije definisana za $x=1$, pa na osnovu naše definicije neprekidnosti funkcije ne može govoriti o neprekidnosti u tački $x = 1$. Bilo bi pogrešno reći da je funkcija f prekidna u tački $x = 1$.

b) Funkcija je definisana u $x = 2$ i kako je

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4 = f(2),$$

sledi da je ona neprekidna u tački 2.

c) Kako važi

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4 \neq f(2) = 3,$$

funkcija ima prekid u tački $x = 2$. Primetimo još da se radi o otklonjivom prekidu.

d) Kako je

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e = f(0),$$

sledi da je funkcija neprekidna u $x = 0$.

e) Odredićemo prvo levu i desnu graničnu vrednost u $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(-1) = -1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1.$$

Vidimo da se radi o prekidu prve vrste, jer leva i desna granična vrednost u $x = 0$ postoje, ali su različiti brojevi

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

f) Iz

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = e^{\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3}} = +\infty,$$

sledi da desna granična vrednost funkcije u tački $x = 3$ ne postoji kao konačna, tako da u tački $x = 3$ funkcija f ima prekid druge vrste.

11. **Odrediti skup $A \subseteq \mathbf{R}$ na kome je funkcija f neprekidna, ako je**

a) $f(x) = x^5 + 3x$. **b**) $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$. **c**) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$.

d) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$. **e**) $f(x) = |x|$.

Rešenje:

a) Pošto je funkcija f polinom, ona je definisana i neprekidna nad $\mathbf{R}$, dakle $A = \mathbf{R}$.

b) Funkcija f nije definisana u $x = 1$. Pošto je f racionalna funkcija, ona je neprekidna nad definicionim skupom, dakle $A = \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

c) Ova funkcija je neprekidna za svako x za koje važi $2 - x > 0$, tj. $x < 2$. Dakle $A = (-\infty, 2)$.

d) f je racionalna funkcija definisana nad $\mathbf{R}$, dakle $A = \mathbf{R}$.

e) Kako je

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

jedina tačka u kojoj je moguć prekid je $x = 0$. Ispitajmo neprekidnost u $x = 0$. Pošto je

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0,$$

kao i $|0| = 0$, sledi da je funkcija $|x|$ neprekidna u $x = 0$, odnosno za svako $x \in \mathbf{R}$. Tako je $A = \mathbf{R}$.

12. **Odrediti parametre A i B tako da funkcija f bude neprekidna u svim tačkama definisanosti, ako je**

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} Ax - 1, & x \leq 1 \\ 3x^2 + 1, & x > 1. \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} (x+2)e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ A, & x = 0 \\ \frac{-1}{1+\ln x}, & x > 0. \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} -\sin x, & x \leq -\pi/2 \\ A\sin x + B, & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \cos x, & x \geq \pi/2. \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}, & x \neq -8 \wedge x \leq 1 \\ A, & x = -8. \end{cases}$

Rešenje:

a) Funkcija f je definisana na celom skupu $\mathbf{R}$. Za $x \neq 0$ f ima oblik količnika neprekidnih funkcija (sinus je neprekidna funkcija nad **R**), znači da nam preostaje da ispitamo neprekidnost u nuli. Da bi funkcija f bila neprekidna u nuli, treba da važi

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0).$$

Znamo da je

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{i} \quad f(0) = A.$$

Dakle, za $A = 1$ funkcija f je neprekidna nad celim definicionim skupom, tj. na R.

b) Funkcija f je definisana na celom skupu **R**. Za $x \neq 1$, f je polinom prvog, odnosno drugog stepena, dakle sledi da je neprekidna funkcija. Treba još da ispitamo neprekidnost u $x = 1$. Treba da važi

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1).$$

Imamo

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (3x^2 + 1) = 4,$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (Ax - 1) = A - 1.$$

Sada možemo da odredimo A :

$$f(1) = A - 1, \quad A - 1 = 4 \Rightarrow A = 5.$$

Dakle, za $A = 5$, funkcija f je neprekidna na celom skupu **R**.

c) Slično kao i u prethodnom razmatranju vidimo da je f definisana na **R** i da je neprekidna za svako $x \neq 0$ (kao kompozicija, količnik i proizvod neprekidnih funkcija). Ispitaćemo neprekidnost u $x = 0$. Imamo:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{1 + \ln x} = 0,$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x + 2)e^{\frac{1}{x}} = 2 \cdot 0 = 0.$$

Da bi f bila neprekidna u $x = 0$, mora da važi

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0), \text{ odnosno } A = 0.$$

d) Funkcija f je neprekidna za svako $x \neq \frac{\pi}{2}$ i $x \neq -\frac{\pi}{2}$. Odredićemo A i B tako da $f(x)$ bude neprekidna u $x = \frac{\pi}{2}$ i $x = -\frac{\pi}{2}$.

U tački $x = \frac{\pi}{2}$ imamo

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \cos x = 0,$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(A\sin x + B) = A + B,$$

tako da dobijamo jednačinu $A + B = 0$.

U tački $x = -\frac{\pi}{2}$ imamo

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}(A\sin x + B) = -A + B,$$

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-}(-\sin x) = 1,$$

iz čega sledi jednačina $-A + B = 1$.

Rešavanjem sistema

$$\begin{array}{rcrl} A & + & B = & 0 \\ -A & + & B = & 1, \end{array}$$

dobijamo: $B = \frac{1}{2}$ i $A = -\frac{1}{2}$.

e) Funkcija f je definisana za svako $x \le 1$. Takođe se lako vidi da je ona neprekidna za svako $x \le 1$ i $x \ne -8$. Ispitajmo neprekidnost u tački $x = -8$:

$$\lim_{x\to-8} f(x) = \lim_{x\to-8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})} \cdot \frac{\sqrt{1-x}+3}{\sqrt{1-x}+3} =$$

$$= \lim_{x\to-8} \frac{1-x-9}{8+x} \cdot \frac{(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt{1-x}+3} =$$

$$= \lim_{x\to-8} \frac{-(x+8)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(x+8)(\sqrt{1-x}+3)} = -\frac{12}{6} = -2.$$

Dakle, za $A = -2$, funkcija f je neprekidna za svako $x \le 1$.

Zadaci za samostalni rad

Pokazati

1. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n-1}{(n+1)^2} = 1.$

2. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n}{3n^3+2n-1} = 0.$

3. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^4+n^2}{n^2+1} = \infty.$

4. $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2+1}{2n-3} - \dfrac{n^2+\frac{1}{2}}{n-2}\right) = -\frac{1}{2}.$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0.$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\dfrac{1}{2}.$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-3n+2}-n+1)=-\dfrac{1}{2}.$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^2+3n-7}-\sqrt[3]{n^2-n+4})=0.$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+3+\ldots+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+3}{2}\right)=-\dfrac{5}{2}.$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=\dfrac{1}{e}.$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-2}{3n}\right)^{n-1}=\sqrt[3]{e^2}.$

12. Izračunati graničnu vrednost

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+3x^2+2x+5}{5x^3+x^2+x+3}.$ *b)* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-x^3}{\sqrt[3]{x^2}+2x}.$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+x^3-2x^4}{2x^2+3x^5}.$ *d)* $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-x-12}{2x^2+11x+15}.$

e) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^5-3x^4+5x^3-7x^2+4}{x^5-5x^4+8x^3+x^2-12x+4}.$

Rezultat: *a)* ∞. *b)* $-\infty$. *c)* $\frac{1}{2}$. *d)* 7. *e)* 2.

13. Izračunati graničnu vrednost

a) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{\sqrt[3]{4x+3}-3}{2x-12}.$ *b)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-x-1}{x}.$

c) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}.$

Rezultat: *a)* $\frac{2}{27}$. *b)* $-\frac{1}{2}$. *c)* $\frac{12}{5}$.

14. Izračunati graničnu vrednost

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x}{\sin 2x}.$ *b)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}.$

c) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2}{\sin 2x\cdot\sin x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right).$ *d)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x+\sin x}-\sqrt{\cos x}}.$

Rezultat: *a)* 2. *b)* 1. *c)* $\frac{1}{2}$. *d)* 0.

15. Izračunati graničnu vrednost

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$. *b)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln\sqrt{x+1}-\ln\sqrt{x}\right)x$. *d)* $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$.

Rezultat: *a)* 1. *b)* 1. *c)* $\frac{1}{2}$. *d)* $\sqrt{e}$.

16. Izračunati graničnu vrednost

a) $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$. *b)* $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

c) $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{x^2+e^{\frac{1}{2-x}}}$. *d)* $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{1}{x^2+e^{\frac{1}{2-x}}}$.

e) $\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(1+2^{-\frac{1}{x}}\right)$.

Rezultat: *a)* 1. *b)* 0. *c)* 0. *d)* $\frac{1}{4}$. *e)* 0.

17. Odrediti skup $A\subseteq\mathbf{R}$ na kome je funkcija f neprekidna, ako je

a) $f(x)=\dfrac{10x}{x^2+6}$. *b)* $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin 3x}$.

c) $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{3}x+e^{\frac{1}{x-1}}, & x<1\\ \frac{\pi}{3}, & x=1\\ \operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}, & x>1.\end{cases}$

Rezultat: *a)* $A=\mathbf{R}$. *b)* $A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,x\ge 0 \text{ i } x\ne\frac{k}{3}\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$.
c) $A=\mathbf{R}\setminus\{1\}$.

18. Odrediti parametre A i B tako da funkcija f bude neprekidna u svim tačkama domena, ako je

a) $f(x)=\begin{cases}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}, & x\ne 0\\ A, & x=0.\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}, & x<\frac{\pi}{2}\\ A, & x=\frac{\pi}{2}\\ Ae+\frac{B}{x}, & x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

Rezultat: *a)* $A=e^2$. *b)* $A=\frac{1}{\sqrt{e}}$, $B=\frac{\pi}{2}\frac{(1-e)\sqrt{e}}{e}$.

9

Izvod funkcije

- Neka je funkcija f definisana na intervalu (a,b) i neka je x tačka iz intervala (a,b). Ako postoji granična vrednost

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x},$$

tada se ova granična vrednost naziva **prvi izvod** funkcije f **u tački** x i obeležava se sa $f'(x)$ ili $f'_x(x)$.

Desni i **levi izvod** funkcije f u tački x su definisani sa

$$\lim_{\triangle x\to 0^+}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x} \quad \text{i} \quad \lim_{\triangle x\to 0^-}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x},$$

ako date granične vrednosti postoje i obeležavaju se sa $f'_+(x)$ i $f'_-(x)$ respektivno.

Ako u tački x postoje levi i desni izvod funkcije f i ako su jednaki, tada postoji izvod funkcije f u tački x, tj. važi

$$f'_+(x)=f'_-(x)=f'(x).$$

- **Tablica prvih izvoda elementarnih funkcija**

$$\begin{aligned}
(c)' &= 0\\
(x^\alpha)' &= \alpha x^{\alpha-1},\ \ 1.\ x>0,\ \alpha\in\mathbf{R}\setminus\{0\}\\
&\qquad\qquad\ \ 2.\ x<0,\ \alpha=\frac{p}{q},\ p\in\mathbf{Z},\ q\in\mathbf{N},\ q \text{ neparno}\\
&\qquad\qquad\ \ 3.\ x=0,\ \alpha=\frac{p}{q}\ge 1,\ p\in\mathbf{Z},\ q\in\mathbf{N},\ q \text{ neparno}\\
(\log_a x)' &= \frac{1}{x\ln a},\ \ a>0,\ a\ne 1,\ x>0\\
(\ln x)' &= \frac{1}{x},\ x>0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(a^x)' &= a^x \ln a, \quad a > 0 \\
(e^x)' &= e^x, \quad x \in \mathbf{R} \\
(\sin x)' &= \cos x, \quad x \in \mathbf{R} \\
(\cos x)' &= -\sin x, \quad x \in \mathbf{R} \\
(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, \ x \in \mathbf{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} | k \in \mathbf{Z}\} \\
(\operatorname{ctg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}, \ x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbf{Z}\} \\
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ |x| < 1 \\
(\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ |x| < 1 \\
(\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbf{R} \\
(\operatorname{arcctg} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbf{R}
\end{aligned}
$$

- **Osnovna pravila diferenciranja**
Neka funkcije f i g imaju prve izvode u tački x iz intervala (a, b). Tada je:

$$
\begin{aligned}
\big(c \cdot f(x)\big)' &= c \cdot f'(x), \qquad c \in \mathbf{R} \\
\big(f(x) \pm g(x)\big)' &= f'(x) \pm g'(x) \\
\big(f(x) \cdot g(x)\big)' &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}, \qquad g(x) \neq 0.
\end{aligned}
$$

- **Izvod složene funkcije**
Neka funkcija $g : (a, b) \to (c, d)$ ima izvod u tački $x \in (a, b)$, i neka funkcija $f : (c, d) \to \mathbf{R}$ ima izvod u tački $g(x) \in (c, d)$.

  Tada složena funkcija $h : (a, b) \to \mathbf{R}, \ h(x) = f(g(x))$ ima izvod u tački x i važi
$$h'(x) = f'_g(g(x)) \cdot g'(x).$$

- **Izvod implicitne funkcije**
Ako je funkcija $y = f(x)$ data implicitno jednačinom $F(x, y) = 0$, onda se određuje izvod funkcije F po x, gde je y funkcija koja zavisi od x. Tako se dobija izvod funkcije f u implicitnom obliku.

- **Izvod inverzne funkcije**
Neka je $f : (a,b) \to (c,d)$ bijektivna funkcija, a f^{-1} inverzna funkcija za datu funkciju. Ako funkcija f^{-1} ima izvod u tački x i ako je $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, onda je
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

- **Izvod parametarski zadate funkcije**
Ako funkcije $x = x(t)$ i $y = y(t)$ imaju izvode po t i ako je $x'(t) \neq 0$, onda je izvod parametarski zadate funkcije $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ parametarski zadata funkcija $\begin{cases} x = x(t) \\ y'_x(t) = \dfrac{y'_t(t)}{x'_t(t)} \end{cases}$.

- **Geometrijsko značenje prvog izvoda**
Vrednost prvog izvoda funkcije f u tački x jednaka je koeficijentu pravca tangente na grafik funkcije f u tački x.

  Jednačina tangente t na grafik funkcije f u tački $A(x_0, y_0)$ krive $y = f(x)$ je
$$t:\ y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$
ukoliko je prvi izvod $f'(x_0)$ konačan. Ako $f'(x_0)$ nije konačan ($f'(x_0) = \pm\infty$), onda je tangenta prava $x = x_0$.

  Jednačina normale n na grafik funkcije f u tački $A(x_0, y_0)$ krive $y = f(x)$ je
$$n : y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}\,(x - x_0)$$
ako je prvi izvod $f'(x_0)$ konačan i $f'(x_0) \neq 0$.
Ako je $f'(x_0) = 0$, tada je normala prava $x = x_0$, a ako prvi izvod nije konačan ($f'(x_0) = \pm\infty$), tada je normala prava $y = y_0$.

- **Izvodi višeg reda**
$(n+1)$-vi izvod funkcije f je prvi izvod (ako postoji) n-tog izvoda funkcije f, tj.
$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)',\ n \in \mathbf{N}.$$

- **Diferencijal funkcije**
Ako funkcija $y = f(x)$ ima konačan prvi izvod u nekoj tački x, za priraštaj funkcije $\triangle y$ važi
$$\triangle y = f'(x) \cdot \triangle x + \alpha(\triangle x) \cdot \triangle x$$
gde je $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \alpha(\triangle x) = 0$. **Diferencijal nezavisne promenljive** x je
$$dx = \triangle x,$$

a **diferencijal zavisne promenljive** y je

$$dy = f'(x)dx.$$

Ako funkcija f ima konačan prvi izvod u tački x, kažemo da je funkcija f **diferencijabilna** u tački x. Ako je funkcija f diferencijabilna u svakoj tački intervala (a, b), kaže se da je ona **diferencijabilna na intervalu** (a, b).

Zadaci

1. **Odrediti, po definiciji, vrednost $f'(0)$ ako je**
   a) $y = \sin x$. **b)** $y = \sqrt{x}$.

   Rešenje:

   Po definiciji, vrednost prvog izvoda u tački $x_0 = 0$ je

   $$f'(0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(0 + \triangle x) - f(0)}{\triangle x},$$

   ako ova vrednost postoji.

   a) $f'(0) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{\sin \triangle x - \sin 0}{\triangle x} = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{\sin \triangle x}{\triangle x} = 1.$

   b) $f'(0) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{\sqrt{\triangle x} - \sqrt{0}}{\triangle x} = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{\triangle x}}$,

   $f'_+(0) = \lim\limits_{\triangle x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{\triangle x}} = +\infty$,

   $f'_-(0) = \lim\limits_{\triangle x \to 0^-} \dfrac{1}{\sqrt{\triangle x}} = -\infty$.

   Dakle, za funkciju $f(x) = \sqrt{x}$ desni i levi izvod u nuli nisu jednaki pa prvi izvod u nuli ne postoji.

2. **Koristeći definiciju prvog izvoda, odrediti izvod funkcije $y = \ln x$ za $x \in (0, +\infty)$.**

   Rešenje:

$$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\ln(x + \triangle x) - \ln x}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\ln \dfrac{x + \triangle x}{x}}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{1}{\triangle x} \ln \frac{x + \triangle x}{x} =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \ln \left(\frac{x + \triangle x}{x} \right)^{\frac{1}{\triangle x}} = \ln \lim_{\triangle x \to 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{\triangle x}} \right)^{\frac{x}{\triangle x} \cdot \frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}.$$

3. **Odrediti konstantu A tako da za funkciju** $f(x)=\begin{cases} x^2+Ax, & x\geq 0\\ \sin x, & x<0\end{cases}$ **postoji prvi izvod u nuli.**

Rešenje:
Da bi za funkciju f postojao prvi izvod u nuli, moraju postojati levi i desni izvod u toj tački i moraju biti jednaki. Dakle koristimo da je

$$f'(0)=f'_-(0)=f'_+(0)$$

ako postoje vrednosti $f'_-(0)$ i $f'_+(0)$.

$$f'_-(0)=\lim_{\triangle x\to 0^-}\frac{\sin(0+\triangle x)-\sin 0}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0^-}\frac{\sin\triangle x}{\triangle x}=1.$$

$$f'_+(0)=\lim_{\triangle x\to 0^+}\frac{(0+\triangle x)^2+A(0+\triangle x)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0^+}\frac{(\triangle x)^2+A\triangle x}{\triangle x}=$$

$$=\lim_{\triangle x\to 0^+}(\triangle x+A)=A.$$

Dakle, da bi bio ispunjen uslov $f'_-(0)=f'_+(0)$, mora biti $A=1$ i tada je $f'(0)=1$.

4. **Naći prvi izvod funkcije**

a) $y=\dfrac{1}{x}$ **b)** $y=\sqrt{x}$

c) $y=\dfrac{x}{x+1}$ **d)** $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

e) $y=e^x\sin x$ **f)** $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$

g) $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x},\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$

za sve vrednosti x iz domena funkcije y.

Rešenje:

Tražene izvode odredićemo koristeći tablicu izvoda elementarnih funkcija i pravila za izvod zbira, proizvoda i količnika.

a) $y'=(x^{-1})'=(-1)x^{-1-1}=-x^{-2}=-\dfrac{1}{x^2}.$

b) $y'=(x^{\frac{1}{2}})'=\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ x\neq 0.$

Za $x=0$ prvi izvod ne postoji (vidi Zadatak 1 b)).

c) $y'=\dfrac{x'(x+1)-x(x+1)'}{(x+1)^2}=\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2}.$

d) $$y'=\frac{(1+\sqrt{x})'(1-\sqrt{x})-(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})'}{(1-\sqrt{x})^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})-(1+\sqrt{x})\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{(1-\sqrt{x})^2}=$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}}{(1-\sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2},\ x \neq 0.$$

U tački $x = 0$ desni prvi izvod je $f'_+(0) = 2$.

e) $y' = (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x =$
$= e^x(\sin x + \cos x)$.

f) $y' = \frac{(\ln x)' x^2 - \ln x (x^2)'}{x^4} = \frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x\ln x}{x^4} =$
$= \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$.

g) $y' = \frac{(\cos x)'(1-\sin x) - \cos x(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2} =$
$= \frac{(-\sin x)(1-\sin x) - \cos x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} =$
$= \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1-\sin x)^2} = \frac{1}{1-\sin x}$.

5. **Naći prvi izvod funkcije**

a) $y = e^{-x}$.
b) $y = \sqrt{1-x^2}$.
c) $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.
d) $y = \cos^3 x - \frac{1}{\cos^3 x}$.
e) $y = \sqrt{\sin 3x} + \sin x^2$.
f) $y = \ln(\sin x)$.
g) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}$.
h) $y = \arccos e^x$.
i) $y = \sin 2x \cdot e^{\sin x}$.
j) $y = \ln^2 x - \ln(\ln x)$.
k) $y = 3\ln\frac{x-1}{x+1}$.
l) $y = 3^{\frac{x}{\ln x}}$.

Rešenje:

U svim navedenim primerima potrebno je naći izvod složene funkcije. *Napomena:* U tačkama u kojima prvi izvod nije definisan, a koje pripadaju unutrašnjosti domena funkcije y, izvod se traži po definiciji.

a) $y' = e^{-x} \cdot (-x)' = -e^{-x}$.

b) $y' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (1-x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

c) $y' = \frac{((x+1)^3)'(x-1)^2 - (x+1)^3((x-1)^2)'}{(x-1)^4} =$
$= \frac{3(x+1)^2(x+1)'(x-1)^2 - (x+1)^3 \cdot 2(x-1)(x-1)'}{(x-1)^4} =$
$= \frac{(x+1)^2(x-1)(3(x-1) - 2(x+1))}{(x-1)^4} = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$.

d) $y' = 3\cos^2 x \cdot (\cos x)' - (-3\cos^{-4} x) \cdot (\cos x)' =$

$$\begin{aligned}
&= 3\cos^2 x(-\sin x) + \frac{3}{\cos^4 x}(-\sin x) = \\
&= -3\sin x\Big(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^4 x}\Big).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{e) } y' &= \frac{1}{2\sqrt{\sin 3x}} \cdot (\sin 3x)' + \cos x^2 \cdot (x^2)' = \\
&= \frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}} + 2x\cos x^2.
\end{aligned}$$

$$\text{f) } y' = \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x = \operatorname{ctg} x.$$

$$\text{g) } y' = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}\cdot\Big(\frac{1}{x^2}\Big)' = \frac{1}{\frac{x^4+1}{x^4}}\cdot\frac{-2}{x^3} = \frac{-2x}{x^4+1}.$$

$$\text{h) } y' = -\frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}}(e^x)' = -\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

$$\begin{aligned}
\text{i) } y' &= (\sin 2x)'\cdot e^{\sin x} + \sin 2x\cdot(e^{\sin x})' = \\
&= \cos 2x\cdot(2x)'\cdot e^{\sin x} + \sin 2x\cdot e^{\sin x}(\sin x)' = \\
&= 2\cos 2x\cdot e^{\sin x} + \sin 2x\cdot\cos x\cdot e^{\sin x}.
\end{aligned}$$

$$\text{j) } y' = 2\ln x\cdot(\ln x)' - \frac{1}{\ln x}\cdot(\ln x)' = \frac{2\ln x}{x} - \frac{1}{x\ln x}.$$

$$\begin{aligned}
\text{k) } y' &= 3\frac{x+1}{x-1}\cdot\Big(\frac{x-1}{x+1}\Big)' = 3\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \\
&= 3\frac{1}{x-1}\cdot\frac{2}{x+1} = \frac{6}{x^2-1}.
\end{aligned}$$

$$\text{l) } y' = 3^{\frac{x}{\ln x}}\cdot\ln 3\cdot\Big(\frac{x}{\ln x}\Big)' = 3^{\frac{x}{\ln x}}\cdot\ln 3\cdot\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}.$$

6. **Naći drugi izvod funkcije**
   a) $y = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$. **b)** $y = (x-2)e^{2x}$.

Rešenje:

Drugi izvod funkcije određujemo kao prvi izvod prvog izvoda.

$$\begin{aligned}
\text{a) } y' &= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\Big(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\Big) = \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \\
y'' &= -\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } y' &= e^{2x} + (x-2)e^{2x}\cdot 2 = (2x-3)e^{2x}; \\
y'' &= 2e^{2x} + (2x-3)e^{2x}\cdot 2 = 4(x-1)e^{2x}.
\end{aligned}$$

7. **Odrediti y''_x parametarski zadate funkcije**

a) $x = \sin t,\ \ y = \cos t.$

b) $x = \ln t,\ \ y = t + \frac{1}{t}.$

c) $x = e^{-t},\ \ y = e^{2t}.$

Rešenje:

Prvi izvod određujemo koristeći pravilo za diferenciranje parametarski zadate funkcije. Kako je y'_x ponovo funkcija koja zavisi od t, i drugi izvod određujemo na isti način, kao izvod prvog izvoda, zadatog parametarski.

a) $$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(\cos t)'}{(\sin t)'} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t;$$

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-\operatorname{tg} t)'}{(\sin t)'} = \frac{-\frac{1}{\cos^2 t}}{\cos t} = -\frac{1}{\cos^3 t}.$$

b) $$y'_x = \frac{\left(t+\frac{1}{t}\right)'}{(\ln t)'} = \frac{1-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{t^2-1}{t};$$

$$y''_x = \frac{\left(\frac{t^2-1}{t}\right)'}{(\ln t)'} = \frac{\frac{2t^2-t^2+1}{t^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{t^2+1}{t} = t + \frac{1}{t}.$$

c) $$y'_x = \frac{(e^{2t})'}{(e^{-t})'} = \frac{2e^{2t}}{-e^{-t}} = -2e^{3t};$$

$$y''_x = \frac{(-2e^{3t})'}{(e^{-t})'} = \frac{-6e^{3t}}{-e^{-t}} = 6e^{4t}.$$

8. **Izračunati x'_y funkcije $y = x + \ln x$ koristeći izvod inverzne funkcije.**

Rešenje:

$$y'_x = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} \ \Rightarrow\ x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{x}{x+1}.$$

9. **Naći prvi i drugi izvod implicitno zadate funkcije** $y = y(x)$

a) $x^3 + y^3 = a^3.$ **b)** $e^y = x + y.$

c) $\ln y + \frac{x}{y} = c.$ **d)** $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2).$

Rešenje:

Ako je funkcija $y = y(x)$ data implicitno jednačinom $F(x, y) = 0$, prvo se odredi izvod leve i izvod desne strane po x, pri čemu se vodi računa da je y funkcija koja zavisi od x. Dakle i izvod y' funkcije y se dobija takođe u implicitnom obliku. Drugi izvod funkcije y se takođe traži kao izvod implicitno zadate funkcije $y' = y'(x, y(x))$.

a)

$$\begin{aligned}
x^3+y^3 &= a^3\\
3x^2+3y^2y' &= 0\\
y' &= -\frac{x^2}{y^2},\quad y\neq 0;\\
y'' &= -\frac{2xy^2-2x^2yy'}{y^4} =\\
&= -\frac{2xy+2x^2\cdot\frac{x^2}{y^2}}{y^3} =\\
&= -2\frac{x(x^3+y^3)}{y^5}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
e^y &= x+y\\
e^y y' &= 1+y'\\
y'(e^y-1) &= 1\\
y' &= \frac{1}{e^y-1},\quad y\neq 0;\\
y'' &= -\frac{1}{(e^y-1)^2}\cdot e^y\cdot y' =\\
&= -\frac{1}{(e^y-1)^2}\cdot e^y\cdot\frac{1}{e^y-1} =\\
&= \frac{-e^y}{(e^y-1)^3}.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\ln y+\frac{x}{y} &= c\\
\frac{1}{y}y'+\frac{y-xy'}{y^2} &= 0\\
yy'+y-xy' &= 0\\
y'(y-x) &= -y\\
y' &= \frac{y}{x-y},\quad y\neq x;\\
y'' &= \frac{y'(x-y)-y(1-y')}{(x-y)^2} =\\
&= \frac{\frac{y}{x-y}(x-y)-y(1-\frac{y}{x-y})}{(x-y)^2} =\\
&= \frac{y^2}{(x-y)^3}.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\operatorname{arctg}\frac{y}{x} &= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\\
\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{y}{x}\right)' &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}(x^2+y^2)'\\
\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}(2x+2yy')\\
\frac{y'x-y}{x^2+y^2} &= \frac{x+yy'}{x^2+y^2}\\
y'x-y &= x+yy'\\
y'(x-y) &= x+y\\
y' &= \frac{x+y}{x-y},\quad y\neq x;\\
y'' &= \frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2} =\\
&= \frac{x-y+xy'-yy'-x-y+xy'+yy'}{(x-y)^2} =\\
&= \frac{2x\frac{x+y}{x-y}-2y}{(x-y)^2} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.
\end{aligned}$$

10. **Odrediti prvi izvod funkcije**

a) $y = x^x$. **b)** $y = (\cos x)^{\sin x}$. **c)** $y = \dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$.

Rešenje:

Potrebno je diferencirati funkciju oblika $y = f(x)^{g(x)}$, što nije moguće uraditi primenom nijednog od navedenih pravila. Zato prvo logaritmujemo datu funkciju, a zatim tražimo izvod dobijene implicitne funkcije.

a)
$$\begin{aligned}
y &= x^x\\
\ln y &= \ln x^x = x\ln x\\
\frac{y'}{y} &= \ln x + x\cdot\frac{1}{x}\\
\frac{y'}{y} &= \ln x + 1\\
y' &= x^x(\ln x+1).
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
y &= (\cos x)^{\sin x}\\
\ln y &= \sin x\cdot\ln(\cos x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{y} &= \cos x\cdot\ln(\cos x)+\sin x\cdot\frac{-\sin x}{\cos x}\\
\frac{y'}{y} &= \frac{1}{\cos x}(\cos^2 x\cdot\ln(\cos x)-\sin^2 x)\\
y' &= (\cos x)^{\sin x-1}(\cos^2 x\cdot\ln(\cos x)-\sin^2 x).
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
y &= \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}\\
\ln y &= \ln(\ln x)^x-\ln x^{\ln x}\\
\ln y &= x\ln(\ln x)-\ln x\cdot\ln x\\
\frac{y'}{y} &= \ln(\ln x)+x\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}-2\cdot\frac{1}{x}\ln x\\
y' &= \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}\big(\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}-\frac{2\ln x}{x}\big).
\end{aligned}$$

11. **Napisati jednačinu tangente i normale krive**

a) $y=x^2+2x$ **u tački čija je apscisa** $x=1$.

b) $x=2\operatorname{tg}t,\ y=2\sin^2 t+\sin 2t$ **u tački** $A(2,2)$.

Rešenje:

a) Ordinata date tačke je $y(1)=3$. Funkcija je data eksplicitno što znači da je $y'=2x+2$, a u datoj tački je $y'(1)=4$. Tada je jednačina tangente u tački $(1,3)$

$$t: y-3=4(x-1),\ \text{odnosno}\ t: 4x-y-1=0,$$

a jednačina normale

$$n: y-3=-\frac{1}{4}(x-1),\ \text{odnosno}\ n: x+4y-13=0.$$

b) Treba prvo odrediti vrednost parametra t u datoj tački A koristeći jednačine $x=x(t)$ ili $y=y(t)$. Znači, $2=2\operatorname{tg}t$, tj. $\operatorname{tg}t=1$, odakle je $t=\frac{\pi}{4}$. (Vrednost $t=\frac{5\pi}{4}$ ne uzimamo u obzir jer tada nije $y=2$.)
Na osnovu pravila za izvod funkcije zadate parametarski dobijamo

$$y'=\frac{4\sin t\cos t+2\cos 2t}{\frac{2}{\cos^2 t}}=\cos^2 t(\sin 2t+\cos 2t)$$

U datoj tački A je $y'(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$. Tada jednačina tangente u tački A ima oblik

$$t: y-2=\frac{1}{2}(x-2);\quad \text{tj.}\quad t: x-2y+2=0,$$

a jednačina normale

$$n: y-2=-2(x-2)\quad \text{tj.}\quad n: 2x+y-6=0.$$

Zadaci za samostalni rad

1. Naći prvi izvod funkcije
   a) $y = 3\sqrt[3]{x^2} - 2x\sqrt{x}$. b) $y = \frac{x^5}{e^x}$. c) $y = \frac{x^2+1}{x^2+4}$.

   Rezultat:
   a) $y' = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 3\sqrt{x}$. b) $y' = \frac{x^4(5-x)}{e^x}$. c) $y' = \frac{6x}{(x^2+4)^2}$.

2. Naći prvi izvod funkcije
   a) $y = \frac{(2x-3)^2}{(x+5)^2}$. b) $y = \ln(\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x})$. c) $y = \sqrt{1-x^2}\arcsin x$.

   Rezultat:
   a) $y' = \frac{26(2x-3)}{(x+5)^3}$. b) $y' = -\frac{1}{\sin x}$. c) $y' = 1 - \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. Naći drugi izvod funkcije
   a) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$. b) $y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$.

   Rezultat:
   a) $y' = -2\sin 2x \cos 2x$; $y'' = -4\cos 4x$.
   b) $y' = \frac{1}{1+x^2}$; $y'' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$.

4. Odrediti y''_x parametarski zadate funkcije
   a) $y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2$, $x = \frac{1}{t+1}$. b) $y = b\sin^3 t$, $x = a\cos^3 t$.

   Rezultat:
   a) $y'_x = \dfrac{-2t}{t+1}$, $y''_x = 2$.
   b) $y'_x = -\dfrac{b}{a}\operatorname{tg} t$, $y''_x = \dfrac{b}{3a^2\cos^4 t \sin t}$.

5. Naći prvi izvod implicitno zadate funkcije
   a) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$. b) $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = c$.

   Rezultat:
   a) $y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. b) $y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$.

6. Odrediti prvi izvod funkcije
   a) $y = (x^2)^x$. b) $y = (\frac{1}{x})^{\ln x}$.

   Rezultat:
   a) $y' = (x^2)^x(\ln x^2 + 2)$. b) $y' = (\frac{1}{x})^{\ln x + 1}(\ln\frac{1}{x} - \ln x)$.

7. Napisati jednačinu tangente i normale krive $y = \frac{-8a}{4a^2+x^2}$ u tački čija je apscisa $x = 2a$.

   Rezultat:
   $t : y + \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{2a^2}(x - 2a)$; $\quad n : y + \dfrac{1}{a} = -2a^2(x - 2a)$.

10

Primena izvoda

Lopitalovo pravilo

- Granične vrednosti mogu biti različitog neodređenog tipa

$$„\tfrac{0}{0}", \ „\tfrac{\infty}{\infty}", \ „0\cdot\infty", \ „\infty-\infty", \ „1^{\infty}", \ „0^{0}", \ „\infty^{0}".$$

  U ovim slučajevima pogodno je primeniti **Lopitalovo pravilo**.

- **Lopitalovo pravilo (teorema).** Neka su funkcije f i g neprekidne u nekoj okolini U tačke a i imaju izvod za sve x iz te okoline sem eventualno u tački a i važi $g'(x) \neq 0$ za sve $x \in U \setminus \{a\}$, gde je a broj ili simbol beskonačnosti[1] ($a = \pm\infty$).
  Ako $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (ili $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$) i postoji (konačna ili beskonačna) granična vrednost $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, tada postoji i $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ i važi

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- Pokažimo da se i ostali neodređeni izrazi mogu transformisati na oblike „$\frac{0}{0}$" ili „$\frac{\infty}{\infty}$", koji su pogodni za primenu Lopitalovog pravila.

  1° „$0\cdot\infty$". Pri izračunavanju granične vrednosti $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)\cdot f_2(x))$, gde je $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = 0$ i $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = \infty$, možemo izraz $f_1(x)\cdot f_2(x)$ zapisati na sledeći način

$$f_1(x)\cdot f_2(x) = \frac{f_1(x)}{\frac{1}{f_2(x)}}$$

  i tako ga svesti na oblik „$\frac{0}{0}$".

[1] Ako je $a = \infty(-\infty)$ onda se pod okolinom U podrazumeva skup svih brojeva x tako da je $x > \frac{1}{\varepsilon}$ $(-x > \frac{1}{\varepsilon})$, za neko $\varepsilon > 0$.

2° „$\infty - \infty$”. Pri izračunavanju $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) - f_2(x))$, gde je $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = = \lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = \infty$, možemo postupiti na sledeći način:
Kako je
$$f_1(x) - f_2(x) = f_1(x)\left(1 - \frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right),$$
ako $\frac{f_2(x)}{f_1(x)} \to 1$ kada $x \to a$, dobijamo slučaj 1°. Ako $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$ ne teži ka 1 $(x \to a)$, odnosno $\frac{f_2(x)}{f_1(x)} \to \infty$ ili $\frac{f_2(x)}{f_1(x)} \to c$, $c \neq 1$ $(x \to a)$, onda dobijamo određene izraze „$\infty \cdot \infty$” $= \infty$ ili „$\infty \cdot (1 - c)$” $= \infty$.

3° „1^∞”, „0^0”, „∞^0”. Ti oblici se pomoću jednakosti
$$[f_1(x)]^{f_2(x)} = e^{f_2(x)\cdot \ln f_1(x)}$$
svode na slučaj 1°. Dakle, pri računanju izraza $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)^{f_2(x)}$ prvo računamo $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) \ln f_1(x)$.

- U zadacima ćemo iznad znaka jednakosti uvek naznačiti o kom tipu granične vrednosti se radi. Primena Lopitalovog pravila, odnosno korišćenje jednakosti $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, obeležavaćemo sa $\left(L, \frac{0}{0}\right)$ ili $\left(L, \frac{\infty}{\infty}\right)$ u zavisnosti od tipa granične vrednosti $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. Čitaocu se ostavlja da proveri da li su uslovi za primenu ovog pravila zadovoljeni.

Tejlorova i Maklorenova formula

- Neka je f neprekidna funkcija koja ima neprekidne sve izvode do izvoda reda n na intervalu $[a, b]$ i ima izvod reda $n + 1$ na intervalu (a, b). Tada za $x, x_0 \in [a, b]$ važi **Tejlorova formula**
$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \tag{10.1}$$
gde je
$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$,
$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$,
$\varepsilon = x_0 + \theta \cdot (x - x_0)$ i $0 < \theta < 1$
(drugim rečima, ε je neka tačka između x_0 i x).

Polinom T_n se naziva **Tejlorov polinom** stepena n za funkciju f u okolini tačke x_0, i kaže se da on aproksimira funkciju f u okolini tačke x_0 sa **greškom (ostatkom)** R_n.

Kažemo da je, za svaku tačku x iz okoline tačke x_0, vrednost $f(x)$ funkcije f u tački x aproksimirana sa $T_n(x)$, i pišemo $f(x) \approx T_n(x)$.

- Za $x_0 = 0$ dobija se **Maklorenova**

$$f(x) = M_n(x) + R_n(x), \tag{10.2}$$

$M_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}x^{n+1},$

gde je $\varepsilon = \theta \cdot x$ i $0 < \theta < 1$ (ε je između 0 i x).

- Prema Maklorenovoj formuli dobija se:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + R_n(x), \\
& \quad R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\theta x}; \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k}(x), \\
& \quad R_{2k}(x) = \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \cos \theta x; \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k+1}(x), \\
& \quad R_{2k+1}(x) = \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+2}}{(2k+2)!} \cos \theta x; \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x), \\
& \quad R_n(x) = \frac{(-1)^n \cdot x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}; \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + R_n(x), \\
& \quad R_n(x) = \binom{\alpha}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1-\alpha}}.
\end{aligned}$$

(*Napomena:* $\binom{\alpha}{n} \overset{\text{def}}{=} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}, \ \binom{\alpha}{0} \overset{\text{def}}{=} 1, \ n \in \mathbf{N}, \ \alpha \in \mathbf{R}$)

Zadaci

Lopitalovo pravilo

1. **Izračunati graničnu vrednost**

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1}$. **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{\arcsin 5x}$. **d)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{\ln x}$.

Rešenje.

Ove granične vrednosti su oblika „$\frac{0}{0}$" i možemo direktno primeniti Lopitalovo pravilo.

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1}\overset{(L,\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\frac{1}{e^x}}{\frac{-1}{e-x}+1}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}+1)(e-x)}{e^x(e-x-1)}=\frac{2e}{e-1}.$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}\overset{(L,\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1-\cos x)\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}=2.$$

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}2x}{\arcsin 5x}\overset{(L,\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+4x^2}\cdot 2}{\frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\cdot 5}=\frac{2}{5}.$$

d) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{\ln x}\overset{(L,\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)}{\frac{1}{x}}=1.$$

2. **Izračunati graničnu vrednost**

a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x\cdot\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$. **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}})$. **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-x\cdot e^{\frac{1}{x-2}})$.

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

Rešenje.

U zadacima pod *a*) i *b*) imamo granične vrednosti oblika „$\frac{\infty}{\infty}$". Može se direktno primeniti Lopitalovo pravilo.

a) $$\lim_{x\to a}\frac{\cos x\cdot\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}=\lim_{x\to a}\cos x\cdot\lim_{x\to a}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}\overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=}$$

$$=\cos a\cdot\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x-a}}{\frac{1}{e^x-e^a}\cdot e^x}=\cos a\cdot\lim_{x\to a}\frac{1}{e^x}\cdot\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}\overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=}$$

$$=\cos a\cdot\frac{1}{e^a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{e^x}{1}=\cos a.$$

b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n}\overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\frac{1}{n}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=0.$$

c) Pre primene Lopitalovog pravila, neodređeni izraz oblika „$0\cdot\infty$" svodimo na oblik „$\frac{\infty}{\infty}$".

$$\lim_{x\to 0}x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}\overset{(0\cdot\infty)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}\overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}}{-\frac{2}{x^3}}=\infty.$$

Granične vrednosti u zadacima pod *d*) i *e*) su oblika „$\infty-\infty$". Faktorizacijom taj oblik svodimo na „$0\cdot\infty$" a zatim na oblik „$\frac{\infty}{\infty}$", nakon čega primenjujemo Lopitalovo pravilo.

d) $$\lim_{x\to-\infty}(x-x\cdot e^{\frac{1}{x-2}})\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to-\infty}x\cdot(1-e^{\frac{1}{x-2}})\overset{(\infty\cdot 0)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{1-e^{\frac{1}{x-2}}}{\frac{1}{x}}\overset{(L,\frac{0}{0})}{=}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x-2}}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{(x-2)^2}=1\cdot(-1)=-1.$$

e) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x}{\sin x}-1\right)\overset{(\infty\cdot 0)}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}-1}{x}\overset{(L,\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}\overset{(L,\frac{0}{0})}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{2\sin x\cos x}=0.$$

3. **Izračunati graničnu vrednost**

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$. **b**) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$. **c**) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{ctg}x)^x$.
d) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$. **e**) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}$. **f**) $\lim\limits_{x\to 0}(3x+1)^{\operatorname{ctg}x}$.

Rešenje.

a) Granična vrednost je oblika „0^0".

Neka je $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = A$. Tada je

$$\ln A = \ln \lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} x\ln x \overset{(0\cdot\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

Na osnovu toga je

$$\ln A = 0 \;\Rightarrow\; A = e^0 = 1.$$

b) Granična vrednost je oblika „0^0".

Neka je $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x} = A$. Tada je

$$\ln A = \ln \lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \ln x^{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \sin x\cdot \ln x \overset{(0\cdot\infty)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}\cdot\cos x} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x} =$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg} x\cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 0\cdot 1 = 0.$$

Na osnovu toga je A,

$$\ln A = 0 \;\Rightarrow\; A = e^0 = 1.$$

c) Granična vrednost je oblika „∞^0".

Neka je $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{ctg} x)^x = A$. Tada imamo

$$\ln A = \ln \lim_{x\to 0^+} (\operatorname{ctg} x)^x = \lim_{x\to 0^+} x\ln\operatorname{ctg} x \overset{(0\cdot\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\operatorname{ctg} x}{\frac{1}{x}} \overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\sin x\cdot\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x}\cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\cos x} = 0.$$

Prema tome je

$$\ln A = 0 \;\Rightarrow\; A = e^0 = 1.$$

d) Granična vrednost je oblika „∞^0".

Neka je $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}} = A$. Tada imamo

$$\ln A = \ln \lim_{x\to 0^+} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\operatorname{ctg} x}{\ln x} \overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x \cdot \cos x} = -1.$$

Na osnovu toga je

$$\ln A = -1 \ \Rightarrow\ A = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

e) Granična vrednost je oblika „1^∞".

Neka je $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = A$. Tada je

$$\ln A = \ln \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} \overset{(L,\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Prema tome je

$$\ln A = 1 \ \Rightarrow\ A = e.$$

f) Granična vrednost je oblika „1^∞".

Neka je $\lim\limits_{x\to 0}(3x+1)^{\operatorname{ctg} x} = A$. Tada je

$$\ln A = \ln \lim_{x\to 0}(3x+1)^{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x \ln(3x+1)) \overset{(\infty\cdot 0)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(3x+1)}{\operatorname{tg} x} \overset{(L,\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{3x+1}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 3.$$

Prema tome je

$$\ln A = 3 \ \Rightarrow\ A = e^3.$$

Tejlorova i Maklorenova formula

1. **Za funkciju $f(x) = a^x$ napisati Maklorenov polinom stepena n.**

Rešenje:

Dokazaćemo, koristeći matematičku indukciju, da je

$$f^{(n)}(x) = \ln^n a \cdot a^x.$$

Prva tri izvoda date funkcije su

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln a \cdot a^x; \\ f''(x) &= \ln^2 a \cdot a^x; \\ f'''(x) &= \ln^3 a \cdot a^x. \end{aligned}$$

Ako pretpostavimo da važi $f^{(n)}(x) = \ln^n a \cdot a^x$, onda je

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = \ln^n a \cdot (a^x)' = \ln^n a \cdot a^x \ln a = \ln^{n+1} a \cdot a^x.$$

Kako je za svako $n \in N$, $f^{(n)}(0) = \ln^n a$, to je

$$M_n(x) = 1 + \ln a \cdot x + \frac{\ln^2 a}{2} \cdot x^2 + \frac{\ln^3 a}{3!} \cdot x^3 + \ldots + \frac{\ln^n a}{n!} \cdot x^n.$$

2. **Napisati polinom** $P(x) = x^5 + x^3 + 2x^2 - 12x + 8$ **po stepenima od** $x + 1$.

Rešenje:

Napisaćemo Tejlorov polinom petog stepena za funkciju P u okolini tačke $x_0 = -1$.

$$\begin{array}{rcll}
P(x) & = & x^5 + x^3 + 2x^2 - 12x + 8 & P(-1) = 20 \\
P'(x) & = & 5x^4 + 3x^2 + 4x - 12, & P'(-1) = -8 \\
P''(x) & = & 20x^3 + 6x + 4, & P''(-1) = -22 \\
P'''(x) & = & 60x^2 + 6, & P'''(-1) = 66 \\
P^{iv}(x) & = & 120x, & P^{iv}(-1) = -120 \\
P^{v}(x) & = & 120, & P^{v}(-1) = 120 \\
P^{vi}(x) & = & 0. &
\end{array}$$

Kako za svako $n > 5$ važi $P^{(n)}(x) = 0$, dobija se da je
$P(x) = 20 - 8(x+1) - 22\frac{(x+1)^2}{2} + 66\frac{(x+1)^3}{3!} - 120\frac{(x+1)^4}{4!} + 120\frac{(x+1)^5}{5!}$

$$P(x) = (x+1)^5 - 5(x+1)^4 + 11(x+1)^3 - 11(x+1)^2 - 8(x+1) + 20,$$

sa greškom $R_5(x) = 0$.

3. **Aproksimirati broj** e **koristeći Maklorenov polinom šestog stepena.**

Rešenje:

Ako u Maklorenovu formulu za funkciju $f(x) = e^x$ stavimo $n = 6$, onda je

$$M_6(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!},$$

odakle je

$$e = e^1 \approx M_6(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \approx 2.71806\ .$$

4. **Aproksimirati** $\sqrt{4.1}$ **koristeći Tejlorov polinom trećeg stepena.**

Rešenje:

Vrednost funkcije $f(x)=\sqrt{x}$ u tački $x=4.1$ je $\sqrt{4.1}$. Odredićemo Tejlorov polinom trećeg stepena za funkciju $f(x)=\sqrt{x}$ u okolini tačke $x_0=4$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x}, & f(4)&=2 \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}, & f'(4)&=\frac{1}{4} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}, & f''(4)&=-\frac{1}{32} \\ f'''(x) &= \frac{3}{8\sqrt{x^5}}, & f'''(4)&=\frac{3}{256} \end{aligned}$$

$$T_3(x)=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2+\frac{1}{512}(x-4)^3$$

$$\sqrt{4.1}\approx T_3(4.1)=2+\frac{1}{4}\cdot 0.1-\frac{1}{64}\cdot(0.1)^2+\frac{1}{512}\cdot(0.1)^3=2.02485\,.$$

5. **Data je funkcija $f(x)=e^{-x}(2-x)$. Aproksimirati je Tejlorovim polinomom trećeg stepena u okolini tačke $x_0=1$ i oceniti apsolutnu vrednost greške na intervalu $\left(1,\frac{5}{4}\right)$.**

Rešenje:

Nađimo, prvo, sve izvode do petog reda date funkcije.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x}(2-x), & f(1)&=e^{-1}; \\ f'(x) &= -e^{-x}(2-x)-e^{-x}=-e^{-x}(3-x), & f'(1)&=-2e^{-1}; \\ f''(x) &= e^{-x}(3-x)+e^{-x}=e^{-x}(4-x), & f''(1)&=3e^{-1}; \\ f'''(x) &= -e^{-x}(4-x)-e^{-x}=-e^{-x}(5-x), & f'''(1)&=-4e^{-1}; \\ f^{iv}(x) &= e^{-x}(5-x)+e^{-x}=e^{-x}(6-x). \end{aligned}$$

Prema Tejlorovoj formuli, za funkciju $f(x)=e^{-x}(2-x)$ u okolini tačke $x_0=1$, važi

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+R_3(x)\,.$$

Dakle, Tejlorov polinom date funkcije u okolini tačke $x_0=1$ je

$$T_3(x)=e^{-1}\left(1-2(x-1)+\frac{3}{2}(x-1)^2-\frac{2}{3}(x-1)^3\right).$$

$|R_3(x)|=\left|\frac{f^{iv}(\varepsilon)}{4!}(x-1)^4\right|=\left|\frac{e^{-\varepsilon}(6-\varepsilon)}{4!}(x-1)^4\right|\,,\ 1<\varepsilon<x<\frac{5}{4}$.

Kako je $1<\varepsilon$, to je $e^{-\varepsilon}<e^{-1}$ (jer je $g(x)=e^{-x}$ monotono opadajuća funkcija) i $-\varepsilon<-1$, odakle je $6-\varepsilon<6-1=5$. Za $1<x<\frac{5}{4}$ je $x-1<\frac{1}{4}$ i $(x-1)^4<\frac{1}{4^4}$. Tako dobijamo

$$|R_3(x)| = \left|\frac{f^{iv}(\varepsilon)}{4!}(x-1)^4\right| < \frac{5}{4!\,e}\cdot\frac{1}{4^4} < \frac{5}{16700} < 3\cdot 10^{-4}\ ,\ x\in\Big(1,\frac{5}{4}\Big).$$

6. **U kom intervalu polinom $T_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$ aproksimira funkciju $f(x) = \sin x$ sa greškom po apsolutnoj vrednosti manjom od 10^{-5}?**

Rešenje:

Data aproksimativna formula je Maklorenov polinom drugog stepena za funkciju $f(x) = \sin x$.
Greška aproksimacije je

$$|R_4(x)| = \left|(-1)^2\frac{x^5}{5!}\cos\varepsilon\right|,\quad \varepsilon = \theta\cdot x,\quad 0<\theta<1.$$

Iz $(-1)^2 = 1$ i $|\cos\varepsilon| \le 1$, sledi

$$|R_4(x)| \le \frac{|x|^5}{5!}.$$

Da bi ta vrednost bila manja od 10^{-5}, mora biti

$$|x|^5 \le 10^{-5}\cdot 5!,\quad \text{tj.}\quad |x| \le \frac{\sqrt[5]{5!}}{10},$$

što znači da je traženi interval $(-0.26, 0.26)$.

7. **Koliko članova Maklorenovog polinoma treba sabrati da bi se vrednost $\sqrt[3]{e^2}$ izračunala sa greškom manjom od $\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}$?**

Rešenje:

Vrednost $\sqrt[3]{e^2} = e^{\frac{2}{3}}$ je vrednost funkcije $f(x) = e^x$ za $x = \frac{2}{3}$. Za njeno približno određivanje koristićemo razvoj funkcije $f(x) = e^x$ u okolini tačke $x_0 = 0$. Maklorenova formula za funkciju $f(x) = e^x$ je

$$e^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + R_n(x),$$

gde je $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$ .Treba da odredimo koliko članova treba sabrati da bi se $\sqrt[3]{e^2}$ izračunao sa greškom manjom od $\frac{1}{2}10^{-2}$, tj. treba da odredimo n iz uslova da je

$$\left|R_n\Big(\frac{2}{3}\Big)\right| = \left|\frac{(\frac{2}{3})^{n+1}}{(n+1)!}e^{\frac{2}{3}\theta}\right| < \frac{1}{2}10^{-2} = \frac{1}{200},\ 0<\theta<1.$$

Za $\theta < 1$ je $e^{\frac{2}{3}\theta} < e^{\frac{2}{3}}$, jer je $g(x) = e^{\frac{2}{3}x}$ monotono rastuća funkcija. Tada je

$$\left|R_n\left(\frac{2}{3}\right)\right| < \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{(n+1)!}e^{\frac{2}{3}}.$$

Kako je $e^2 < 8$, to je $\sqrt[3]{e^2} < \sqrt[3]{8} = 2$ i

$$\left|R_n\left(\frac{2}{3}\right)\right| < \frac{2^{n+2}}{3^{n+1}} \cdot \frac{1}{(n+1)!},$$

odakle sledi

za $n = 1:$ $\quad \frac{1}{2!}\frac{2^3}{3^2} = \frac{4}{9} > \frac{1}{200};$

za $n = 2:$ $\quad \frac{1}{3!}\frac{2^4}{3^3} = \frac{8}{81} > \frac{1}{200};$

za $n = 3:$ $\quad \frac{1}{4!}\frac{2^5}{3^4} = \frac{4}{143} > \frac{1}{200};$

za $n = 4:$ $\quad \frac{1}{5!}\frac{2^6}{3^5} = \frac{8}{3654} < \frac{1}{200}.$

Dakle, $n = 4$, tj. treba sabrati pet članova, tako da je

$$\sqrt[3]{e^2} \approx 1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{81} + \frac{2}{243} = \frac{473}{243} \approx 1.946\,.$$

Zadaci za samostalni rad

1. Izračunati graničnu vrednost

$a)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{\ln(x+1)}.$ $\qquad b)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$ $\quad (a, b > 0).$

$c)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1).$ $\qquad d)$ $\displaystyle\lim_{x\to a}(\arcsin(x-a)\cdot \mathrm{ctg}\,(x-a)).$

Rezultat: $a)$ 1. $\quad b)$ 1. $\quad c)$ 1. $\quad d)$ 1.

2. Izračunati graničnu vrednost

$a)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}.$ $\qquad b)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}.$

$c)$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,x\right)^{\frac{1}{\ln x}}.$

Rezultat: $a)$ e^2. $\quad b)$ e^2. $\quad c)$ $\frac{1}{e}$.

3. Napisati polinom $f(x) = x^4 + 2x^3 - x + 10$ po stepenima od $x + 2$.

   Rezultat:
   $f(x) = (x+2)^4 - 6(x+2)^3 + 12(x+2)^2 - 9(x+2) + 12.$

4. Koristeći Maklorenovu formulu izračunati $\sqrt{e}$ na tri decimale.

   Rezultat:
   $\sqrt{e} \approx 1.648.$

5. Izračunati približno $\sqrt[3]{70}$ tako da napravljena greška ne bude veća od 0.001.

   Rezultat:
   $\sqrt[3]{70} \approx 4 \cdot \frac{31}{256}.$

11

Ispitivanje funkcija

Kod ispitivanja funkcije, potrebno je uraditi sledeće:

- Odrediti oblast definisanosti funkcije.
- Ispitati specijalna svojstva (parnost, neparnost, periodičnost).
- Odrediti nule i znak.
- Odrediti intervale monotonosti[1] i ekstremne tačke.
  - Uslovi monotonosti.

    Neka je $D \subseteq \mathbf{R}$ i $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ neprekidna funkcija na intervalu $[a, b]$. Ako za svako $x \in (a, b) \subseteq D$, $f'(x)$ postoji i

    $f'(x) > 0$, onda je funkcija f rastuća
    $f'(x) \geq 0$, onda je funkcija f neopadajuća
    $f'(x) = 0$, onda je funkcija f konstantna
    $f'(x) \leq 0$, onda je funkcija f nerastuća
    $f'(x) < 0$, onda je funkcija f opadajuća
    na (a, b).
  - Neka je f definisana u nekoj okolini x_0 u kojoj dostiže ekstremnu vrednost. Tada ili $f'(x_0)$ ne postoji ili je $f'(x_0) = 0$.
    Tačke domena funkcije u kojima $f'(x)$ ne postoji ili $f'(x) = 0$, nazivamo **kritičnim tačkama** i one predstavljaju moguće tačke u kojima funkcija dostiže ekstremnu vrednost.
  - Neka je f neprekidna u x_0. Neka je f diferencijabilna funkcija u nekoj okolini U tačke x_0, osim eventualno u tački x_0.
    Ako je $f'(x) > 0$ za $x \in U \cap (-\infty, x_0)$ i $f'(x) < 0$ za $x \in U \cap (x_0, +\infty)$, onda funkcija u tački x_0 ima **lokalni maksimum**.
    Ako je $f'(x) > 0$ za $x \in U \cap (x_0, +\infty)$ i $f'(x) < 0$ za $x \in U \cap (-\infty, x_0)$, onda funkcija u tački x_0 ima **lokalni minimum**.

[1] Definicija monotonosti i ekstremne vrednosti funkcije može se videti u [3].

Drugim rečima i ne tako precizno, ako $f'(x)$ menja znak kada x prolazi kroz x_0, onda je to tačka u kojoj funkcija dostiže ekstremnu vrednost.

- Odrediti konveksnost i prevojne tačke.
  - Neka funkcija $f : (a,b) \longrightarrow \mathbf{R}$ ima drugi izvod na (a,b). $f(x)$ je **konkavna (konveksna)** na (a,b) ako i samo ako je $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$ za $x \in (a,b)$.
  - Neka je f definisana u nekoj okolini U tačke x_0 i u toj tački ima konačan ili beskonačan prvi izvod i neprekidna je. Tačka $(x_0, f(x_0))$ naziva se **prevojnom tačkom** grafika funkcije f, ako je f konveksna (konkavna) na skupu $\{x \in U|\ x > x_0\}$ i konkavna (konveksna) na skupu $\{x \in U|\ x < x_0\}$.

    Neka funkcija f ima prvi izvod u nekoj okolini U tačke x_0 i ima drugi izvod u $U \setminus \{x_0\}$. Ako $f''(x)$ menja znak pri prolazu argumenta kroz tačku x_0, onda je $(x_0, f(x_0))$ prevojna tačka grafika funkcije f.
  - Neka funkcija f u x_0 ima sve izvode zaključno sa n-tim$(n \geq 2)$ pri čemu je

    $$f^{(k)}(x_0) = 0, \quad \text{za} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1 \quad \text{i}$$
    $$f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

    Ako je $n = 2k$ $(k \in \mathbf{N})$, onda funkcija ima ekstrem u tački x_0 i to za

    $$f^{(n)}(x_0) > 0, \quad \text{lokalni minimum;}$$
    $$f^{(n)}(x_0) < 0, \quad \text{lokalni maksimum.}$$

    Ako je $n = 2k + 1$ $(k \in \mathbf{N})$ onda je x_0 prevojna tačka.

- Naći asimptote.
  - Prava $x = x_0$ je **vertikalna asimptota** grafika funkcije ako je

    $$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ili} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

  - Prava $y = kx + n$ je **kosa asimptota** grafika funkcije ako postoje $k \in \mathbf{R}$ i $n \in \mathbf{R}$ tako da je

    $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{i} \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = n,$$

    ili

    $$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{i} \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx) = n.$$

    Specijalno za $k = 0$ dobija se prava $y = n$, koja je paralelna sa x-osom i naziva se **horizontalna asimptota**.

- Odrediti ostale specifičnosti grafika.

- Nacrtati grafik.

Zadaci

1. **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije**

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

Rešenje.

- Domen funkcije f je $D = \mathbf{R} \setminus \{1, -1\}$, jer deljenje sa nulom nije definisano, pa mora da važi

$$x^2 - 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 1 \ \wedge \ x \neq -1.$$

- Funkcija je neparna, jer važi

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x}{x^2 - 1} = -f(x).$$

Dakle, grafik funkcije f je simetričan u odnosu na koordinatni početak.

- Nula funkcije f je $x = 0$. Znak funkcije je prikazan u tablici.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

- Prvi izvod funkcije je

$$f'(x) = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{1, -1\}.$$

Vidimo da je $f'(x) < 0$ za svako $x \in \mathbf{R} \setminus \{1, -1\}$, a to znači da je f opadajuća na čitavom domenu D.

- Drugi izvod funkcije je

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{1, -1\}$$

$f''(x) = 0$ za $x = 0$. Tačka $A(0, 0)$ je moguća prevojna tačka. Odredimo znak drugog izvoda:

$$f''(x) > 0 \ \Leftrightarrow \ (x > 0 \ \wedge \ x^2 - 1 > 0) \ \vee \ (x < 0 \ \wedge \ x^2 - 1 < 0) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (1, +\infty) \ \vee \ x \in (-1, 0).$$

Dakle, funkcija je konkavna ($\smile$) na skupu $(-1, 0) \cup (1, \infty)$, a konveksna ($\frown$) na skupu $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ i tačka $A(0, 0)$ je prevojna tačka grafika funkcije f.

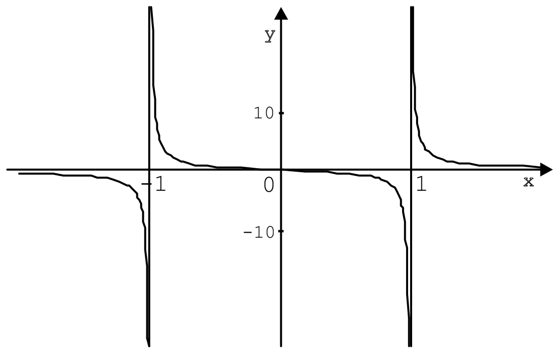
- Asimptote.

  Kako je $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$,

  i kako je $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to -1^-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$,

  to su prave $x = 1$ i $x = -1$ vertikalne asimptote funkcije f.

  Kako je
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0,$$
  to je prava $y = 0$, tj. x-osa horizontalna asimptota funkcije.



Slika 11.1: Grafik funkcije $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

2. **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije**
$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}.$$

Rešenje.

- Domen funkcije f je $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$.
- Funkcija f nije ni parna ni neparna.
- Lako se vidi da je tačka $x = 1$ jedina nula funkcije f.

  Odredimo znak funkcije.

	$(-\infty,-2)$	$(-2,1)$	$(1,+\infty)$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$

- Prvi izvod funkcije f je

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2(x+8)}{(x+2)^3}, \quad x \in D.$$

Nule prvog izvoda su $x = 1$ i $x = -8$ a to su ujedno i kritične tačke.

Odredimo znak prvog izvoda, odnosno monotonost funkcije.

	$(-\infty,-8)$	$(-8,-2)$	$(-2,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Iz tablice se može zaključiti da u tački $x = -8$ funkcija ima lokalni maksimum, $A(-8, -\frac{81}{4})$. Tačka $x = 1$ nije ekstremna tačka.

- Drugi izvod funkcije f je

$$f''(x) = \frac{54(x-1)}{(x+2)^4}, \quad x \in D.$$

$f''(x) = 0$ za $x = 1$, to je tačka $P(1,0)$ moguća prevojna tačka grafika funkcije f.

Odredimo znak drugog izvoda, odnosno koveksnost funkcije.

	$(-\infty,-2)$	$(-2,1)$	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	konveksna ($\frown$)	konveksna ($\frown$)	konkavna ($\smile$)

Sada možemo zaključiti da je tačka $P(1,0)$ prevojna tačka grafika funkcije f.

- Asimptote.

Funkcija f nije definisana u tački $x = -2$ i kako

$$\lim_{x\to -2} \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} = -\infty,$$

to je prava $x = -2$ vertikalna asimptota funkcije f.

Funkcija f nema horizotalnu asimptotu, jer je

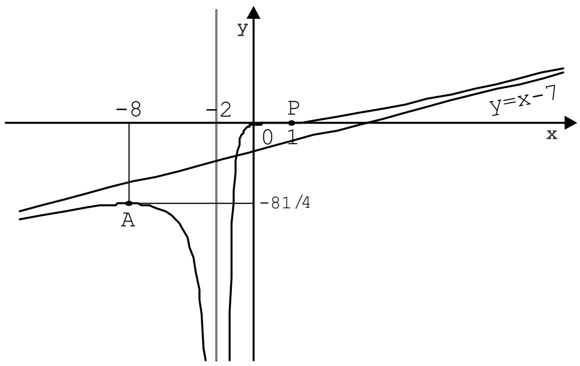
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} = -\infty.$$

Funkcija f ima kosu asimptotu $y = x - 7$, jer je

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-1)^3}{x(x+2)^2} = 1 \quad \text{i}$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} - x \right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-7x^2 - x - 1}{(x+2)^2} = -7.$$



Slika 11.2: Grafik funkcije $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}$.

3. **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije:**

$$f(x) = \sqrt{(x^2-9)^3}.$$

Rešenje.

- Da bi kvadratni koren bio definisan, mora da važi

$$(x^2-9)^3 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x^2-9 \geq 0 \;\Leftrightarrow |x| \geq 3,$$

odnosno domen funkcije $D = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$.

- Funkcija je parna, zaista

$$f(-x) = \sqrt{((-x)^2-9)^3} = \sqrt{(x^2-9)^3} = f(x).$$

Dakle, grafik funkcije je simetričan u odnosu na y-osu.

- Nule funkcije f se određuju iz $f(x) = 0$, odnosno

$$x^2 - 9 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 3 \text{ ili } x = -3.$$

Nule su dakle u tačkama $x = 3$ i $x = -3$.

Pošto je kvadratni koren nenegativna funkcija na domenu, nije teško videti da je funkcija f nenegativna tj. $f(x) \geq 0$ za svako $x \in D$.

- Prvi izvod funkcije f je

$$f'(x) = \frac{3}{2}(x^2-9)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = 3x\sqrt{x^2-9},\; x \in D.$$

Odredićemo nule prvog izvoda:

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x\sqrt{x^2-9} = 0 \;\Leftrightarrow\; (x = 0 \text{ ili } x = 3 \text{ ili } x = -3).$$

Sledi da su kritične tačke $x = 3$ i $x = -3$ (nulu smo isključili, jer $0 \notin D$).

Sada ćemo odrediti znak prvog izvoda, odnosno monotonost:

	$(-\infty, -3)$	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Lako je zaključiti da su tačke $A(-3, 0)$ i $B(3, 0)$ lokalni minimumi date funkcije.

- Drugi izvod funkcije f je

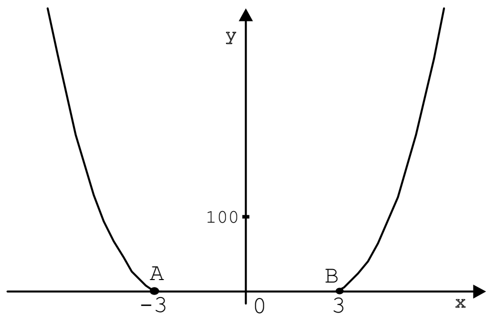
$$f''(x) = 3 \cdot \sqrt{x^2 - 9} + 3x\frac{1}{2}(x^2 - 9)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = 3\sqrt{x^2 - 9} + 3x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}},$$

$$f''(x) = 3 \cdot \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 9}}, \quad x \in D \setminus \{-3, 3\}.$$

Odredićemo nule drugog izvoda

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} \notin D.$$

Dakle, funkcija nema prevojnih tačaka, $f''(x) > 0$ za svako $x \in D \setminus \{-3, 3\}$, odnosno $f(x)$ je konkavna $(\smile)$ na skupu $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.



Slika 11.3: Grafik funkcije $f(x) = \sqrt{(x^2 - 9)^3}$.

- Asimptote.

Funkcija nema vertikalnu asimptotu, jer je neprekidna u svim tačkama domena.

Funkcija nema kosu asimptotu, jer je

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{(x^2 - 9)^3}}{x} = \pm\infty.$$

Funkcija nema ni kosu ni horizontalnu asimptotu, jer je

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{(x^2-9)^3} = +\infty.$$

- Odredićemo još ugao α koji tangenta grafika funkcije f zaklapa sa pozitivnim delom x-ose u tački $x = 3$ ($x = -3$).

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(3) = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 0.$$

4. **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije**

$$f(x) = x\sqrt[3]{(x+1)^2}.$$

Rešenje.

- Domen funkcije f je $D = \mathbf{R}$.
- Funkcija f nije ni parna ni neparna.
- Nule funkcije.

$$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; (x = 0 \quad \vee \quad x+1 = 0)$$

dakle, $x = 0$ i $x = -1$ su nule funkcije.

Znajući da je $(x+1)^2 \geq 0$ za svako $x \in D$, jasno je da je $f(x) \leq 0$ za $x \in (-\infty, 0)$ i $f(x) > 0$ za $x \in (0, +\infty)$.

- Prvi izvod funkcije f je

$$f'(x) = \frac{5x+3}{3\sqrt[3]{x+1}}, \;\; x \in D \setminus \{-1\}.$$

Nule prvog izvoda:

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 5x+3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{3}{5}.$$

Kako $f'(-1)$ ne postoji, sledi da su $x = -1$ i $x = -\frac{3}{5}$ kritične tačke funkcije.

Odredimo znak prvog izvoda.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, -\frac{3}{5})$	$(-\frac{3}{5}, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Funkcija ima lokalni maksimum u tački $x = -1$, $A(-1, 0)$ i lokalni minimum u tački $x = -\frac{3}{5}$, $B(-\frac{3}{5}, f(-\frac{3}{5}))$, $f(-\frac{3}{5}) \approx -0.33$.

- Drugi izvod funkcije f je

$$f''(x) = \frac{10x+12}{9\sqrt[3]{(x+1)^4}}, \quad x \in D \setminus \{-1\}.$$

Odredićemo nule drugog izvoda:

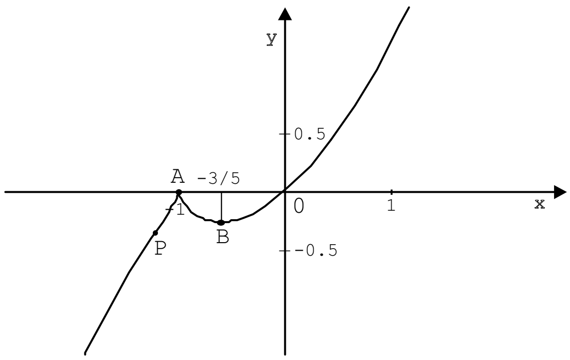
$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 10x+12 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{6}{5}.$$

Moguće prevojne tačke su $x = -\frac{6}{5}$ i $x = -1$.

Znak drugog izvoda:

	$(-\infty, -\frac{6}{5})$	$(-\frac{6}{5}, -1)$	$(-1, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	konveksna ($\frown$)	konkavna ($\smile$)	konkavna ($\smile$)

Sada možemo zaključiti da je tačaka $P(-\frac{6}{5}, f(-\frac{6}{5}))$ prevojna tačka grafika funkcije f, $f(-\frac{6}{5}) \approx -0.41$.



Slika 11.4: Grafik funkcije $f(x) = x\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

- Asimptote.

Funkcija je definisana i neprekidna nad skupom $\mathbf{R}$, te zbog toga nema vertikalnu asimptotu.

Funkcija f nema horizotalnu asimptotu jer je

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x\sqrt[3]{(x+1)^2} = \pm\infty.$$

Funkcija f nema kosu asimptotu, zato što je

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\sqrt[3]{(x+1)^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{(x+1)^2} = +\infty.$$

5. **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije**

$$f(x) = x\, e^{\frac{1}{x-2}}.$$

Rešenje.

- Domen funkcije f je $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$.
- Funkcija f nije ni parna ni neparna.
- Nula funkcije f je $x = 0$. Odredićemo znak funkcije.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$+$

- Prvi izvod fukcije f je

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)^2}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}.$$

Odredimo nule prvog izvoda:

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 5x + 4 = 0 \;\Leftrightarrow x = 1 \;\vee\; x = 4.$$

Kritične tačke funkcije f su $x = 1$ i $x = 4$. Znak prvog izvoda i monotonost funkcije je prikazana u tablici.

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 4)$	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Dakle, f monotono raste na skupu $(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$, a monotono opada na skupu $(1, 2) \cup (2, 4)$.

- Drugi izvod funkcije je

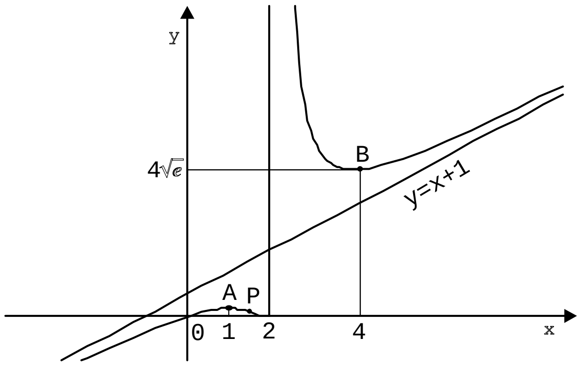
$$f''(x) = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{5x - 8}{(x-2)^4}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}.$$

$f''(x) = 0$ za $x = \frac{8}{5}$. Analizirajmo znak drugog izvoda.

	$(-\infty, \frac{8}{5})$	$(\frac{8}{5}, 2)$	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	konveksna ($\frown$)	konkavna ($\smile$)	konkavna ($\smile$)

Sada možemo zaključiti da je prevojna tačka grafika funkcije f je $P(\frac{8}{5}, \frac{8}{5}e^{\frac{-5}{2}})$.

Može se ekstremna vrednost odrediti i preko drugog izvoda pa ćemo u ovom zadatku to uraditi.



Slika 11.5: Grafik funkcije $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$.

$f''(1) = -\frac{3}{e} < 0$, tako da u tački $A(1, \frac{1}{e})$ funkcija ima lokalni maksimum.

$f''(4) = \frac{3}{4}\sqrt{e} > 0$, tako da u tački $B(4, 4\sqrt{e})$ funkcija ima lokalni minimum.

- Asimptote.

Kako je

$$\lim_{x \to 2^+} x\, e^{\frac{1}{x-2}} = +\infty,$$

prava $x = 2$ je vertikalna asimptota funkcije f. Sa druge strane važi

$$\lim_{x \to 2^-} x\, e^{\frac{1}{x-2}} = 0$$

što znači da kad $x \to 2^-$ grafik funkcije se „približava" tački $(2, 0)$.

Kako je

$$\lim_{x \to +\infty} x\, e^{\frac{1}{x-2}} = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \to -\infty} x\, e^{\frac{1}{x-2}} = -\infty,$$

to funkcija nema horizontalnih asimptota.

Kako je

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x\, e^{\frac{1}{x-2}}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x-2}} = 1 \quad \text{i}$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to \pm\infty} x \cdot (e^{\frac{1}{x-2}} - 1) =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-2}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-2}} - 1}{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{x-2}{x} = 1,$$

to je prava

$$y = x + 1$$

kosa asimptota funkcije f kada $x \to \pm\infty$.

6. **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije**

$$f(x) = |x+1|\, e^{-\frac{1}{x}}.$$

Rešenje.

- Domen funkcije f je $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.
- Funkcija f nije ni parna ni neparna.
- Nule funkcije:

$$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1.$$

Jasno je da $f(x) > 0$ za svako $x \in D$.

- Pošto je

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{-\frac{1}{x}}, & x > -1, x \neq 0 \\ -(x+1)e^{-\frac{1}{x}}, & x < -1 \\ 0, & x = -1 \end{cases}$$

lako se dobija prvi izvod,

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{x+1}{x^2}\right), & x > -1, x \neq 0 \\ -e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{x+1}{x^2}\right), & x < -1. \end{cases}$$

Ispitajmo postojanje prvog izvoda u tački $x = -1$. Odredimo levi izvod

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = \lim_{x \to -1^-} -e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{x+1}{x^2}\right) = e$$

a zatim, desni izvod

$$\lim_{x \to -1^+} f'(x) = \lim_{x \to -1^+} e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{x+1}{x^2}\right) = -e$$

Kao što vidimo levi i desni izvodi u tački $x = -1$ nisu jednaki, a to znači da ne postoji prvi izvod u $x = -1$.

Odredimo nule prvog izvoda.

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(1 + \frac{x+1}{x^2} = 0 \;\wedge x \neq -1 \;\wedge\; x \neq 0\right) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x+1}{x^2} = 0, \;\; x \neq -1, \;\; x \neq 0.$$

Kako je $x^2 + x + 1 \neq 0$ za svako $x \in \mathbf{R}$, sledi da prvi izvod nema nula. Jedina kritična tačka je $x = -1$.

Odredimo znak prvog izvoda:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Sada možemo zaključiti da je tačka $x = -1$ lokalni minimum funkcije f, na grafiku to je tačka $A(-1,0)$.

- Drugi izvod funkcije f je

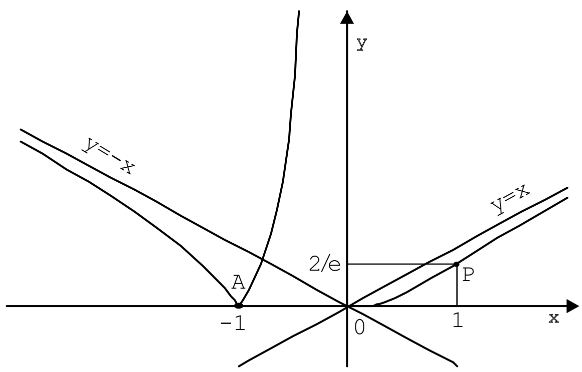
$$f''(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{-x+1}{x^4}\right), & x > -1, x \neq 0 \\ -e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{-x+1}{x^4}\right), & x < -1 \end{cases}$$

$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1$, tako da je to, moguća prevojna tačka.

Odredimo znak drugog izvoda:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	konveksna $(\frown)$	konkavna $(\smile)$	konkavna $(\smile)$	konveksna $(\frown)$

Drugi izvod menja znak prolazeći kroz tačke $x = -1$ i $x = 1$. Samo je tačka $x = 1$ prevojna tačka funkcije, $P(1, \frac{2}{e})$, zato što prvi izvod ne postoji u tački $x = -1$.



Slika 11.6: Grafik funkcije $f(x) = |x+1|\, e^{-\frac{1}{x}}$.

- Asimptote.

  Funkcija f nije definisana u tački $x=0$ i kako je

  $$\lim_{x\to 0^-} |x+1|\, e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$$

  to je prava $x=0$ vertikalna asimptota funkcije f. A sa druge strane je

  $$\lim_{x\to 0+} |x+1|\, e^{-\frac{1}{x}} = 1\cdot 0 = 0. \tag{11.1}$$

  Funkcija f nema horizontalnu asimptotu, jer je

  $$\lim_{x\to+\infty} |x+1|\, e^{\frac{-1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{e^{\frac{1}{x}}} = +\infty$$

  i

  $$\lim_{x\to-\infty} |x+1|\, e^{\frac{-1}{x}} = +\infty.$$

  Kose asimptote.

  $$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\right) = 1,$$

  $$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{(-x-1)e^{-\frac{1}{x}}}{x} = -1,$$

  $$\begin{aligned} n_1 &= \lim_{x\to+\infty} \left[(x+1)e^{\frac{-1}{x}} - x\right] = 1 + \lim_{x\to+\infty} x(e^{-\frac{1}{x}}-1) = \\ &= 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}x^{-2}}{-x^{-2}} = 1-1=0, \\ n_2 &= \lim_{x\to-\infty} \left[(-x-1)e^{-\frac{1}{x}} + x\right] = -1 + \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{-\frac{1}{x}} = \\ &= -1+1=0. \end{aligned}$$

  Dakle, imamo dve kose asimptote

  $$y_1 = x \text{ (kada } x\to+\infty) \quad \text{i} \quad y_2 = -x \text{ (kada } x\to-\infty).$$

- Kako važi (11.1), odredićemo još ugao α između tangente funkcije f kada $x\to 0^+$ i pozitivnog dela x-ose

  $$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} \left(1+\frac{x+1}{x^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.$$

7. **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije**

$$f(x) = \ln\frac{x+3}{1-x}.$$

Rešenje.

- Funkcija f je definisana za $\frac{x+3}{1-x} > 0$. Domen date funkcije je $D = (-3, 1)$.
- Funkcija f nije ni parna ni neparna.
- Nule funkcije f se određuju rešavanjem jednačine $\frac{x+3}{1-x} = 1$, odakle sledi da je nula funkcije $x = -1$. Odredimo znak funkcije.

	$(-3,-1)$	$(-1,1)$
$f(x)$	$-$	$+$

- Prvi izvod funkcije f je

$$f'(x) = \frac{4}{(x+3)(1-x)}, \quad x \in (-3, 1).$$

Prvi izvod nema nula.

Lako se može videti da je $f'(x) > 0$ za svako $x \in D$, a to znači da je funkcija monotono rastuća na čitavom domenu D.

Ekstremnih tačaka ne može biti.

- Drugi izvod funkcije f je

$$f''(x) = \frac{8x+8}{(x+3)^2(1-x)^2}, \quad x \in D$$

Odredimo znak drugog izvoda:

$$f''(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; 8x + 8 > 0 \;\wedge x \in D \;\Leftrightarrow\; x \in (-1, 1),$$

odnosno,

$$f''(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (-3, -1).$$

Dakle, funkcija f je konkavna ($\smile$) na intervalu $(-1, 1)$,a konveksna ($\frown$) na intervalu $(-3, -1)$.

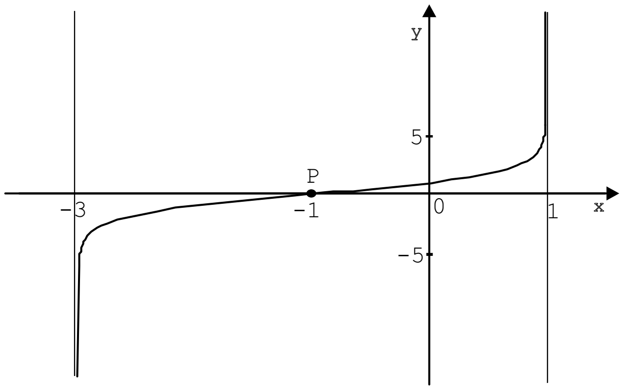
Tačka $P(-1, 0)$ je prevojna tačka grafika funkcije f.

- Asimptote.

Funkcija f ima dve vertikalne asimptote $x = -3$ i $x = 1$, jer je

$$\lim_{x\to-3^+} \ln\frac{x+3}{1-x} = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to1^-} \ln\frac{x+3}{1-x} = +\infty.$$

Funkcija nema kosu asimptotu, pošto je domen funkcije interval $(-3, 1)$, tako da argument x ne može da teži ka $+\infty$ ili $-\infty$, što je potrebno za postojanje kose asimptote.



Slika 11.7: Grafik funkcije $f(x) = \ln \frac{x+3}{1-x}$.

8. **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije**

$$f(x) = \sin^4 x - 2\sin^2 x + \frac{3}{4}.$$

Rešenje.

- Domen funkcije f je $D = \mathbf{R}$.
- Funkcija f je periodična sa osnovnim periodom π (važi $f(x+\pi) = = f(x),\ x \in D$). Zato je dovoljno da je posmatramo na intervalu $[0, \pi]$.
- Nule funkcije f se odrede iz $f(x) = 0$, odnosno

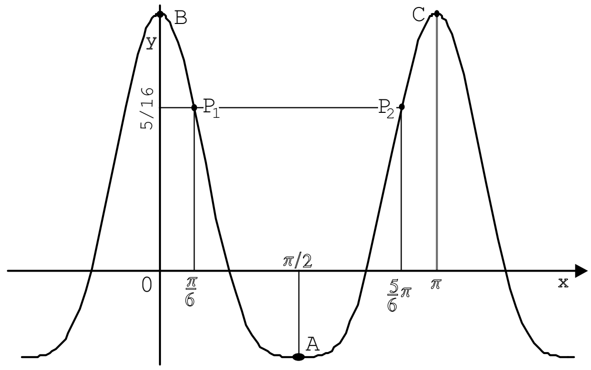
$$\sin^4 x - 2\sin^2 x + \frac{3}{4} = 0,$$

uvedemo smenu $t = \sin^2 x$. Dakle, imamo jednačinu

$$t^2 - 2t + \frac{3}{4} = 0$$

čija su rešenja $t_1 = \frac{3}{2}$ i $t_2 = \frac{1}{2}$. Pošto $\sin^2 x \neq \frac{3}{2}$, rešenja dobijamo iz $\sin^2 x = \frac{1}{2}$, odnosno $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Nule fukcije f na $x \in [0, \pi]$ su $x = \frac{\pi}{4}$ i $x = \frac{3\pi}{4}$.
Odredimo znak funkcije.

	$(0, \frac{\pi}{4})$	$(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$	$(\frac{3\pi}{4}, \pi)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$



Slika 11.8: Grafik funkcije $f(x) = \sin^4 x - 2\sin^2 x + \frac{3}{4}$.

- Prvi izvod funkcije f je

$$f'(x) = -4\sin x \cdot \cos^3 x,\ \ x \in D.$$

Nule prvog izvoda se dobijaju iz

$$-4\sin x \cdot \cos^3 x = 0 \ \Leftrightarrow\ \sin x = 0 \ \vee\ \cos x = 0.$$

Iz ovoga sledi da su tačke $x = 0,\ x = \pi$ i $x = \frac{\pi}{2}$ nule prvog izvoda na posmatranom intervalu, ujedno i sve kritične tačke.

Odredimo znak prvog izvoda.

	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Funkcija ima lokalni minimum u tački $A(\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{4})$ i lokalne maksimume u tačkama $B(0, \frac{3}{4})$ i $C(\pi, \frac{3}{4})$.

- Drugi izvod funkcije f je

$$f''(x) = -4\cos^4 x\left(1 - 3\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right),\ \ x \in D \setminus \{\frac{\pi}{2}\}.$$

Funkcija je konkavna ako je $f''(x) > 0$, odnosno ako je

$$1 - 3\mathrm{tg}^2 x < 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{-1}{\sqrt{3}} > \mathrm{tg}\, x > \frac{1}{\sqrt{3}} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right).$$

Funkcija je konveksna ako je $f''(x) < 0$, odnosno za $x \in (0, \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{5\pi}{6}, \pi)$. Iz prethodna dva razmatranja da se zaključiti da su $P_1(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{16})$ i $P_2(\frac{5\pi}{6}, \frac{5}{16})$ prevojne tačke funkcije f.

- Asimptote.

  Funkcija je definisana i neprekidna nad $\mathbf{R}$, te nema vertikalnih asimptota.

  Funkcija f nema kosu asimptotu, jer n ne postoji:

$$n = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\sin^4 x - 2\sin^2 x + \frac{3}{4}).$$

9. **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije**

$$f(x) = x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2}.$$

Rešenje.

- Domen funkcije f određujemo iz uslova

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1.$$

  Iz toga sledi

$$-1 - x^2 \leq 2x \ \wedge\ 1 + x^2 \geq 2x \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 \geq 0 \ \wedge\ (1-x)^2 \geq 0,$$

  što je zadovoljeno za svako $x \in \mathbf{R}$. Dakle, domen funkcije f je $D = \mathbf{R}$.
- Funkcija je neparna. Zaista,

$$f(-x) = -x + \arcsin\frac{-2x}{1+x^2} = -x - \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = -f(x),$$

  Tako da je dovoljno ispitati tu funkciju samo za $x \geq 0$.
- Iz

$$f(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0,$$

  sledi da je $x = 0$ jedina nula funkcije f.
- Prvi izvod funkcije je

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = 1 + \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)|1-x^2|}.$$

  Vidimo da f' nije definisana u $x = 1$. Oslobodimo se znaka apsolutne vrednosti,

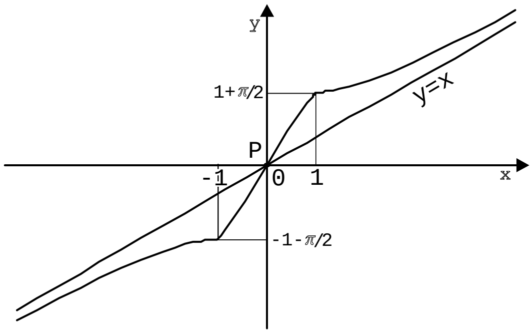
$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{1+x^2}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x^2-1}{1+x^2}, & x > 1. \end{cases}$$

  $f'(x) > 0$ za svako $x \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$. Što znači da funkcija f raste za svako $x \in \mathbf{R}^+$, a zbog neparnosti i nad celim $\mathbf{R}$. Ekstremnih tačaka nema. Ispitajmo još levu i desnu graničnu vrednost od f' u tački $x = 1$,

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(1 - \frac{2}{1+x^2}\right) = 0, \quad \alpha_1 = \operatorname{arctg} 0 = 0,$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(1 + \frac{2}{1+x^2}\right) = 2, \quad \alpha_2 = \operatorname{arctg} 2 \approx 63.43^\circ.$$

α_1 i α_2 su odgovarajući uglovi koje tangente grafika u tački $x = 1$ zaklapaju sa pozitivnim delom x-ose. Ovi podaci omogućavaju preciznije crtanje grafika funkcije. Primetimo da u tački $x = 1$ funkcija f je neprekidna ali nije diferencijabilna.



Slika 11.9: Grafik funkcije $f(x) = x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

- Drugi izvod funkcije je

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{4x}{(1+x^2)^2}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{4x}{(1+x^2)^2}, & x > 1. \end{cases}$$

Analizirajmo znak drugog izvoda:

	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	konveksna $(\frown)$	konkavna $(\smile)$

Tačka $P(0,0)$ je jedina prevojna tačka grafika funkcije. U tačkama $x = 1$ i $x = -1$ prvi izvod ne postoji te ne mogu biti prevojne tačke, iako drugi izvod menja znak prolazeći kroz te tačke.

- Asimptote.

Kako je f neprekidna nad $D = \mathbf{R}$, vertikalnih asimptota nema.

Ispitajmo postojanje kose asimptote,

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1 + \frac{\arcsin\frac{2x}{1+x^2}}{x}\right) = 1 + 0 = 1,$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty}(x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} - x) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = 0.$$

Dakle, prava $y = x$ je kosa asimptota.

10. **Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije**

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Rešenje.

- Domen funkcije f je $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.
- Funkcija f nije ni parna ni neparna.
- Nule funkcije f se određuju iz $f(x) = 0$, odnosno

$$\operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 + \frac{1}{x} = 0 \;\Leftrightarrow\; x + 1 = 0.$$

Dakle, $x = -1$ je nula funkcije.

$$f(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; 1 + \frac{1}{x} > 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x+1}{x} > 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (x > 0 \quad \vee \quad x < -1) \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty).$$

Prikažimo to u tablici:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

- Prvi izvod funkcije f je

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (1 + \frac{1}{x})^2} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{2x^2 + 2x + 1}.$$

Diskriminanta od $2x^2 + 2x + 1 = 0$ je $a^2 - 4ac = 4 - 8 = -4 < 0$ i $a = 2$, te sledi da je trinom $2x^2 + 2x + 1 > 0$ za savko $x \in D$. To znači da je $f'(x) < 0$ za svako $x \in D$, tj. $f(x)$ monotono opada nad čitavim domenom D. Ekstremnih vrednosti nema.

- Drugi izvod funkcije f je

$$f''(x) = \frac{4x+2}{(2x^2+2x+1)^2}, \quad x \in D.$$

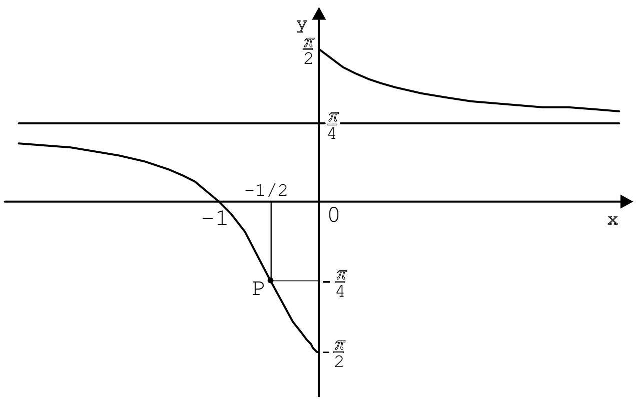
Nule drugog izvoda:

$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 4x+2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{1}{2}.$$

Dakle, $x = -\frac{1}{2}$ je jedina nula drugog izvoda i moguća prevojna tačka. Odredićemo znak drugog izvoda:

	$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, 0)$	$(0, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	konveksna ($\frown$)	konkavna ($\smile$)	konkavna ($\smile$)

$P(-\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{4})$ je prevojna tačka grafika funkcije.



Slika 11.10: Grafik funkcije $f(x) = \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

- Asimptote.

Funkcija nema vertikalnu asimptotu, jer je

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\frac{\pi}{2} \tag{11.2}$$

i

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}. \tag{11.3}$$

Ispitaćemo da li funkcija ima horizontalnu asimptotu. Iz

$$\lim_{x\to \pm\infty} \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{4}$$

sledi da je prava $y = \frac{\pi}{4}$ horizontalna asimptota funkcije f.

- Kako važi (11.2) i (11.3), odredićemo još ugao α koji tangenta grafika funkcije f kada $x \to 0^{\pm}$ zaklapa sa pozitivnim delom x-ose.

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{x\to 0^{\pm}} f'(x) = \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{-1}{2x^2+2x+1} = -1 \;\Rightarrow\; \alpha = -\frac{\pi}{4}.$$

Zadaci za samostalni rad

1. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije f, ako je

a) $f(x) = \dfrac{x+2}{2x+1}$. *b)* $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{x^2+1}$.

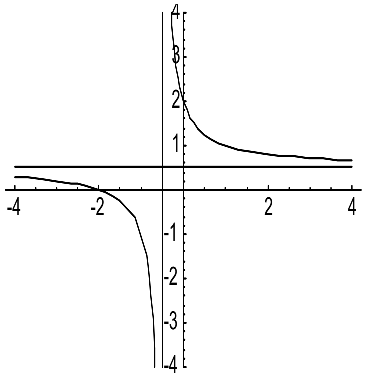
c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$. *d)* $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+1}}$.

e) $f(x) = x^{\frac{2}{3}} \cdot e^{-x}$. *f)* $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}$.

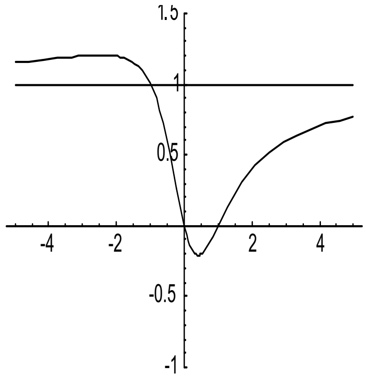
g) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$. *h)* $f(x) = \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$.

i) $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$. *j)* $f(x) = \operatorname{arctg}\,(e^x) - \ln\left(\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}\right)$.

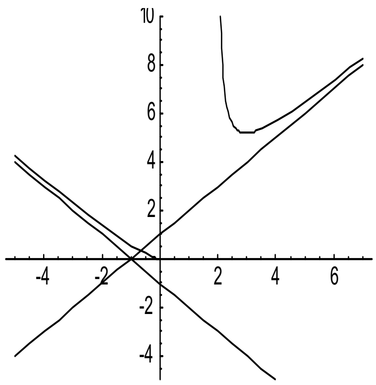
Grafici funkcija:



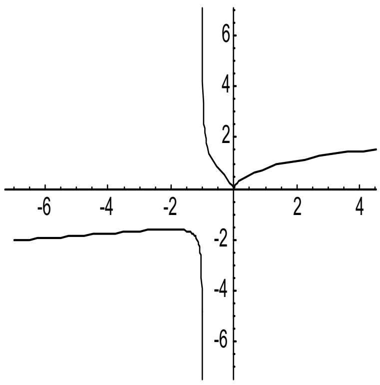
a) .



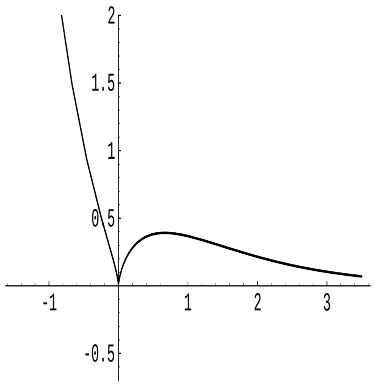
b) .



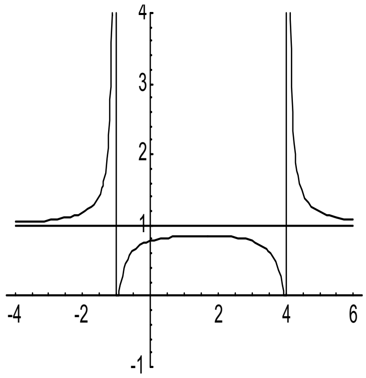
c) .



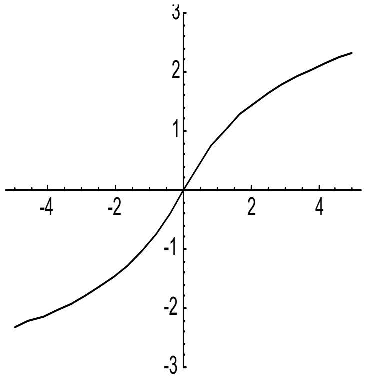
d) .



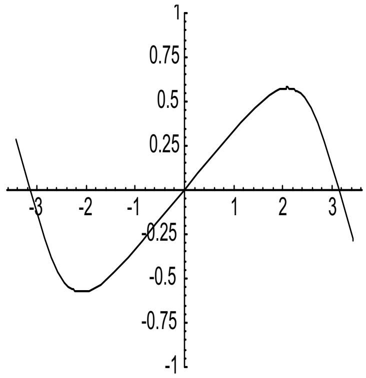
e) .



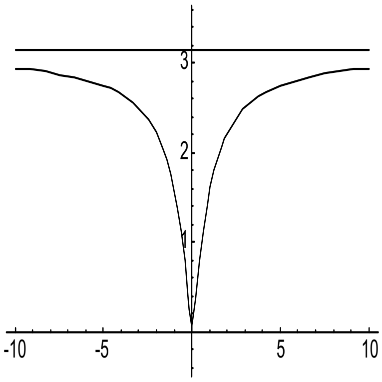
f) .


3
2
1
-4
-2
2
4
-1
-2
-3

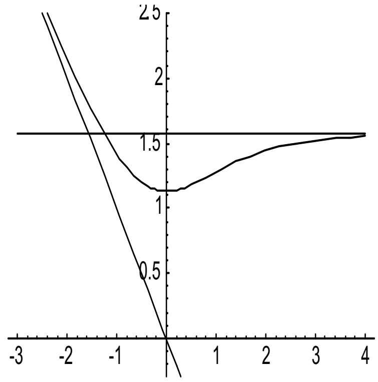
$g)$.


1
0.75
0.5
0.25
-3
-2
-1
1
2
3
-0.25
-0.5
-0.75
-1

$h)$.


3
2
1
-10
-5
5
10

$i)$.


2.5
2
1.5
1
0.5
-3
-2
-1
1
2
3
4

$j)$.

12

Numeričko rešavanje jednačina

Neka je data jednačina

$$f(x) = 0 \tag{12.1}$$

i neka je funkcija $f = f(x)$ definisana i neprekidna u konačnom ili beskonačnom intervalu (α, β). Neka je tačno rešenje ove jednačine $x = \eta$. Numerički metod približnog rešavanja daje iterativni niz $x_0, x_1, , \ldots$ takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} = \eta$. Za približno rešenje jednačine (12.1) uzima se onaj član iterativnog niza x_n koji prvi zadovolji postavljeni izlazni kriterijum.
Izlazni kriterijumi su:

1) greška aproksimacije $|x_n - \eta|$
2) tolerancija funckije $|f(x_n)|$
3) tolerancija postupka $|x_n - x_{n-1}|$
4) prisilan kraj (zadaje se broj koraka n).

Rešavanje jednačine (12.1) sastoji se iz dve etape:

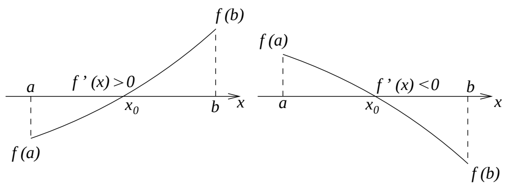
1) Lokalizacija korena jednačine (12.1), tj. određivanje svih intervala u kojima se nalaze jedinstveni koreni jednačine (12.1).

2) Primena nekog od poznatih numeričkih metoda koji sužava početni interval, tj. omogućava nalaženje približne vrednosti rešenja jednačine (12.1) sa proizvoljnom tačnošću.

Lokalizacija korena

Za lokalizaciju korena jednačine (12.1), koriste se sledeći kriterijumi:

- Ako je $f = f(x)$ nad intervalom $[a, b]$ monotona funkcija i ako na



krajevima intervala ima vrednosti različitog znaka, tada u $[a, b]$ postoji jedno i samo jedno rešenje jednačine (12.1).

- Grafički metod je često pogodan za određivanje intervala u kome se nalaze nule jednačine (12.1). Ovaj metod se zasniva na činjenici da je koren jednačine (12.1) zapravo presek grafika funkcije f sa x-osom. U slučaju kada je teško nacrtati grafik funkcije f, koristi se zapis funkcije f u obliku

$$f(x) = g(x) - h(x).$$

Tada je jednačina (12.1) ekvivalentna sa jednačinom

$$g(x) = h(x).$$

Sada se određivanje realnih korena jednačine (12.1) svodi na određivanje apscisa tačaka preseka krivih $g = g(x)$ i $h = h(x)$.

Numerički metodi za nalaženje približnih vrednosti korena jednačina

- **Metod polovljenja**

Metodom polovljenja delimo interval $[a_n, b_n],\ n = 0, 1, ...$ $([a, b] = [a_0, b_0])$ u kome jednačina $f(x) = 0$ ima rešenje, tačkom $x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ i proveravamo da li je $f(x_n) = 0$. Ako je to ispunjeno, onda je tačka x_n traženi koren jednačine. Ako tačka x_n nije koren, onda se od intervala $[a_n, x_n]$ i $[x_n, b_n]$ bira onaj na čijim krajevima funkcija f ima različit znak, tj.

$$a_{n+1} = x_n, \quad b_{n+1} = b_n \qquad \text{ako je} \qquad f(x_n) \cdot f(b_n) < 0$$

ili

$$a_{n+1} = a_n, \quad b_{n+1} = x_n \qquad \text{ako je} \qquad f(a_n) \cdot f(x_n) < 0.$$

metod nastavljamo do željene tačnosti. Ocena greške sa kojom je određeno približno rešenje posle n koraka je $|x_n - \eta| \leq \dfrac{b-a}{2^n}$.

- **Metod sečice**

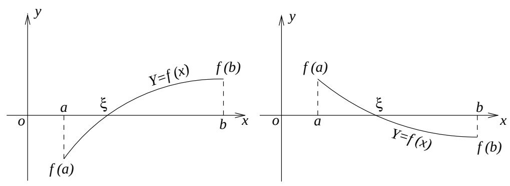
Neka je za jednačinu $f(x) = 0$ lokalizovan koren η u intervalu $[a, b]$ i neka važi

(1) $f(a) \cdot f(b) < 0$

(2) f' i f'' su neprekidne funkcije stalnog znaka nad intervalom $[a, b]$.

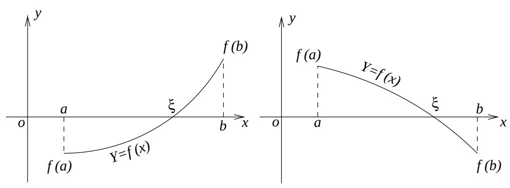
Razlikujemo dva slučaja:

a) $f(a) \cdot f''(a) > 0$ i $f(b) \cdot f''(b) < 0$



tada je $x_0 = a$ i $x_1 = b$.

b) $f(b) \cdot f''(b) > 0$ i $f(a) \cdot f''(a) < 0$



tada je $x_0 = b$ i $x_1 = a$.

Iterativni niz u oba slučaja ima oblik:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, ... \tag{12.2}$$

Ocena greške ovog postupka u n-tom koraku je data sa

$$|x_n - \eta| \leq \frac{|f(x_n)|}{m},$$

gde je $m = \min\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|$.

- **Metod tangente**
  Neka funkcija f iz jednačine $f(x) = 0$ zadovoljava uslove (1) i (2). Razlikujemo dva slučaja:
  a) ako važi $f(a) \cdot f''(a) > 0$,
  monotono rastući niz aproksimacija se izračunava po formuli:

$$x_0 = a, \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, ... \tag{12.3}$$

  b) ako važi $f(b) \cdot f''(b) > 0$,
  monotono opadajući niz aproksimacija ima oblik:

$$x_0 = b, \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, ... \tag{12.4}$$

  Ocena greške ovog postupka u n-tom koraku izračunava se na isti način kao i kod postupka sečice.

Zadaci

Lokalizacija korena

1. **Lokalizovati korene jednačine** $x^3 - 3x - 4 = 0$.

Rešenje:

Funkcije $f(x) = x^3 - 3x - 4$ i $f'(x) = 3x^2 - 3$ su neprekidne nad celim skupom realnih brojeva. Iz jednačine

$$3x^2 - 3 = 0$$

dobijamo intervale monotonosti funkcije f :

$$(-\infty, -1), \quad (-1, 1), \quad (1, +\infty).$$

Kako je

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{i} \quad f(-1) < 0, \quad f(1) < 0,$$

sledi da u intervalima $(-\infty, -1)$ i $(-1, 1)$ ne postoji ni jedan realan koren zadate jednačine.

Pošto je $f(1) < 0$, a $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, jedini realan koren se nalazi u intervalu $(1, +\infty)$. Polazeći od toga, odredićemo konačan interval (a, b) u kom se nalazi koren jednačine. Kako važi

$$f(2) = -2 < 0 \quad \text{i} \quad f(3) = 14 > 0,$$

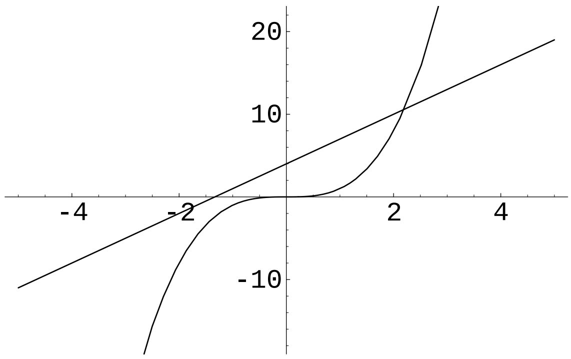
sledi da se jedini realan koren jednačine $x^3 - 3x - 4 = 0$ nalazi u intervalu $[2, 3]$.

Na istom primeru ćemo pokazati kako se za lokalizaciju korena može koristiti i grafički metod.

Početnu jednačinu $x^3 - 3x - 4 = 0$ ćemo zapisati u obliku $g(x) = h(x)$:

$$x^3 = 3x + 4.$$

Grafici krivih $g(x) = x^3$ i $h(x) = 3x + 4$ su dati na slici.



Sa slike se vidi da se apscisa presečne tačke krivih $g(x) = x^3$ i $h(x) = 3x + 4$, tj. realan koren zadate jednačine, nalazi u intervalu $[2, 3]$.

2. **Lokalizovati koren jednačine** $\sin 2x - 2x \cos 2x = 0$.

Rešenje:

Funkcija $f(x) = \sin 2x - 2x \cos 2x$ i njen prvi izvod $f'(x) = 4x \sin 2x$ su neprekidne nad skupom realnih brojeva. Granice intervala monotonosti funkcije $f(x)$ se dobijaju rešavanjem jednačine $f'(x) = 0$.

Kako je $4x \sin 2x = 0$ za $x = \frac{k\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ i kako $f'(x)$ pri prolasku kroz $x = \frac{k\pi}{2}$ za $k = \pm 1, \pm 2, ...$ menja znak, to su intervali monotonosti funkcije f :

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{i} \quad \left(\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2}\right) \quad k = 1, \pm 2, ...$$

Potrebno je još proveriti da li f ima vrednosti različitog znaka na krajevima intervala monotonosti:

$$f\left(\frac{k\pi}{2}\right) \cdot f\left(\frac{(k+1)\pi}{2}\right) =$$

$$= (\sin(k\pi) - k\pi\cos(k\pi)) \cdot (\sin(k+1)\pi - (k+1)\pi\cos(k+1)\pi) =$$

$$= k\pi(-1)^{k+1}(k+1)\pi(-1)^{k+2} = -k(k+1)\pi^2 < 0, \quad k = 1, \pm 2, ...$$

Dakle, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0.$

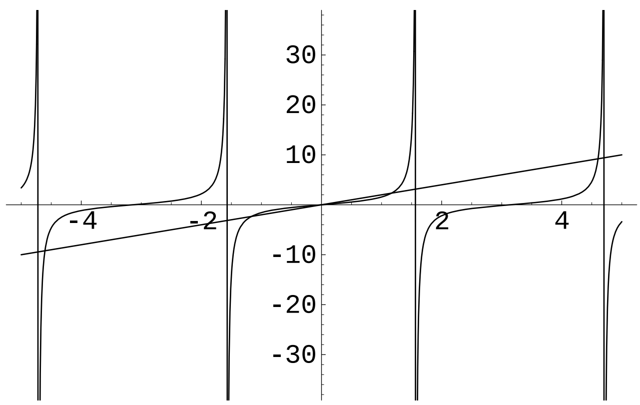
Kako funkcija f ima različit znak na svakom od krajeva intervala monotonosti, možemo zaključiti da u svakom od intervala monotonosti postoji po jedan koren jednačine $\sin 2x - 2x\cos 2x = 0$.

3. **Grafičkim metodom naći približnu vrednost najmanjeg pozitivnog i najvećeg negativnog realnog korena jednačine**

$$\text{tg } x - 2x = 0.$$

Rešenje:

Neka je $g(x) = \text{tg } x$ a $h(x) = 2x$. Tada se polazni problem svodi na nalaženje preseka ove dve krive. Primetimo da je $f(x) = \text{tg } x - 2x$ neparna funkcija ($f(-x) = -f(x)$), pa su njeni koreni raspoređeni simetrično u odnosu na koordinatni početak. To znači da je dovoljno pronaći najmanji pozitivan koren x_0, jer će najveći negativan koren onda biti $-x_0$.

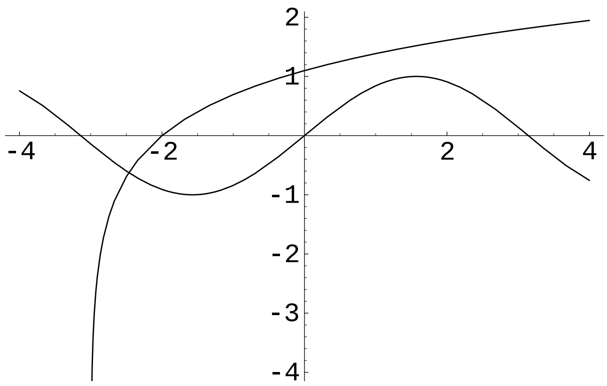


Posmatrajući sliku, vidimo da se najmanji pozitivan koren jednačine $f(x) = 0$ nalazi u intervalu $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$. Onda je njen najveći negativan koren u intervalu $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$.

4. **Lokalizovati koren jednačine** $\ln(x+3) - \sin x = 0$.

Rešenje:

Napisaćemo zadatu jednačinu u obliku $\ln(x+3) = \sin x$ i grafički odrediti apscisu presečne tačke grafika funkcija $g(x) = \ln(x+3)$ i $h(x) = \sin x$.



Sa slike se vidi da se jedini realan koren nalazi u intervalu $(-3, -2)$.

Numerički metodi za nalaženje približnih vrednosti korena jednačina

1. **Metodom polovljenja naći najveći realan koren jednačine**

$$x^3 - 6x + 2 = 0$$

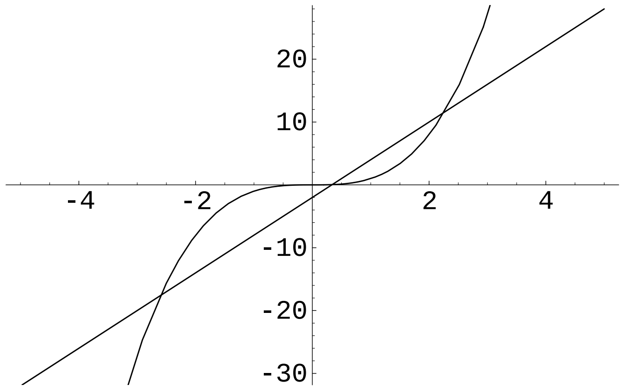
sa greškom koja je manja od 10^{-2}.

Rešenje:

Prvo ćemo grafičkim metodom lokalizovati korene date jednačine da bismo odredili interval u kome se nalazi njen najveći koren. Jednačinu $f(x) = 0$, gde je $f(x) = x^3 - 6x + 2$, zapisaćemo u obliku

$$x^3 = 6x - 2$$

i nacrtati grafike funkcija $g(x) = x^3$ i $h(x) = 6x - 2$.



Sa slike se vidi da se najveći koren jednačine $f(x) = 0$ nalazi u intervalu $[a, b] = [2, 3]$. Kako je $f(a) \cdot f(b) < 0$ i $f'(x) = 3x^2 - 6 > 0$ za svako $x \in [2, 3]$, (tj. funkcija f je monotona na $[2, 3]$), data jednačina na intervalu $[2, 3]$ ima tačno jedno rešenje.

Broj koraka n nalazimo iz uslova

$$\frac{b-a}{2^n} < 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} < 10^{-2} \Leftrightarrow 2^n > 100 \Leftrightarrow n > 7.$$

Primenjujući metod polovljenja dobijamo niz aproksimacija tako što nalazimo sredinu intervala

$$x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{2+3}{2} = 2.5,$$

a zatim, pomoću znaka funkcije ($f(x_1) > 0$) proveravamo u kojoj polovini intervala se nalazi koren jednačine. Isti metod se ponavlja na toj polovini intervala, sa novim a i b.

Kako je $f(2) < 0$ i $f(2.5) > 0$, uzimamo $a = 2$ i $b = x_1 = 2.5$. Ponovo tražimo sredinu intervala i metod ponavljamo $n = 7$ puta. Sve vrednosti su date u tabeli.

n	a	b	x_n	$f(x_n)$
1	2	3	2.5	2.625
2	2	2.5	2.25	-0.109375
3	2.25	2.5	2.375	1.14648
4	2.25	2.375	2.3125	0.491455
5	2.25	2.3125	2.28125	0.184357
6	2.25	2.28125	2.25782	-0.0371155
7	2.25782	2.28125	2.26954	0.0727334

Vrednost $x_7 = 2.26954$ je traženo približno rešenje polazne jednačine .

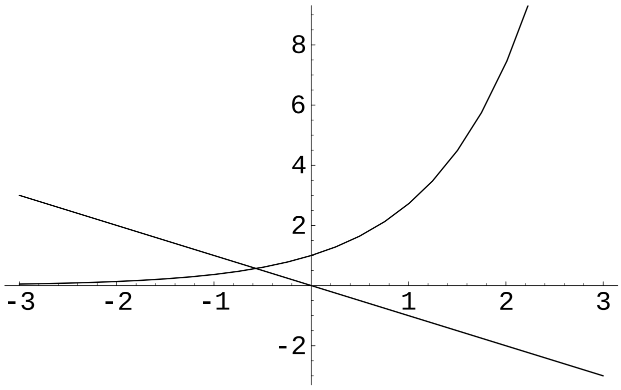
2. **Metodom sečice naći koren jednačine** $x + e^x = 0$ **sa tačnošću** 10^{-4}.

Rešenje:

Grafičkim metodom ćemo lokalizovati korene jednačine $f(x) = 0$, gde je $f(x) = x + e^x$. Zapisaćemo datu jednačinu u obliku

$$e^x = -x$$

i tražiti apscise tačaka preseka funkcija $g(x) = e^x$ i $h(x) = -x$.



Sa slike se vidi da se jedini koren jednačine $f(x) = 0$ nalazi u intervalu $[a, b] = [-1, 0]$.

Da bismo mogli primeniti metod sečice, proveravamo da li su ispunjeni uslovi:
(1) $f(-1) \cdot f(0) < 0$
(2) funkcije $f'(x) = 1 + e^x$ i $f''(x) = e^x$ su neprekidne i važi $f'(x) > 0$ i $f''(x) > 0$ za svako $x \in [-1, 0]$.

Pošto je $f(-1) \cdot f''(-1) < 0$, posmatramo $f(0) \cdot f''(0) > 0$ i za početne vrednosti uzimamo $x_0 = 0$ i $x_1 = -1$. Gornju granicu greške ćemo, u svakom koraku, ocenjivati sa $\delta(x_n) = \frac{|f(x_n)|}{m}$, gde je $m = \min\limits_{x \in [-1,0]} |f'(x)| = 1.36788$.

Rezultati dobijeni primenom ovog postupka dati su u tabeli.

n	x_n	$f(x_n)$	$\delta(x_n)$
0	0	1	
1	-1	-0.632121	0.462117
2	-0.6127	-0.070814	0.0517691
3	-0.563838	0.0051824	0.0037886
4	-0.56717	-0.000040	0.000031

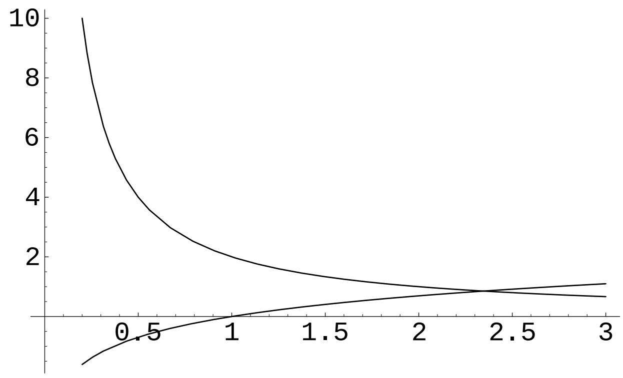
Približno rešenje je $x_5 = -0.56717$, a greška aproksimacije je

$$|x_5 - \eta| < 3.1 \cdot 10^{-5}.$$

3. **Metodom tangente naći koren jednačine** $x \ln x - 2 = 0$ **sa tačnošću** 10^{-3}.

Rešenje:

Grafičkim metodom ćemo lokalizovati korene jednačine $f(x) = 0$, gde je $f(x) = x \ln x - 2$. Jednačinu ćemo zapisati u obliku $\ln x = \dfrac{2}{x}$ i nacrtati grafike funkcija $g(x) = \ln x$ i $h(x) = \dfrac{2}{x}$.



Sa slike se vidi da se jedini koren jednačine $f(x) = 0$ nalazi u intervalu $[2, 3]$. Da bismo mogli da primenimo metod tangente, proverićemo da li važe uslovi:

(1) $f(2) \cdot f(3) < 0$,

(2) Kako je $f'(x) = \ln x + 1$ i $f''(x) = \dfrac{1}{x}$ na intervalu $x \in [2, 3]$, su funkcije $f'(x)$ i $f''(x)$ su pozitivne i neprekidne.

Kako je $f(3) \cdot f''(3) > 0$, monotono opadajući niz aproksimacija se izračunava po formuli:

$$x_0 = 3, \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 1, 2, ...$$

Gornju granicu greške se ocenjuje sa $\delta(x_n) = \frac{|f(x_n)|}{m}$, gde je $m = \min\limits_{x \in [2,3]} |f'(x)| = 1.69315$. Izračunate vrednosti se nalaze u tabeli.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\delta(x_n)$
0	3	1.29584	2.09861	0.765342
1	2.38253	0.068478	1.86816	0.040412
2	2.3459	0.000283	1.85267	0.000163

Približno rešenje je $x_2 = 2.3459$, a greška aproksimacije

$$|x_2 - \eta| < 1.63 \cdot 10^{-4}.$$

Zadaci za samostalni rad

1. Lokalizovati najmanji koren jednačine $x^3 - 4x + 2 = 0$.

   Rezultat: $[-3, -1]$.

2. Metodom polovljenja naći približno rešenje jednačine $\cos x - x = 0$ sa greškom manjom od 0.05.

   Rezultat: $[0, 1]$, $x_5 = 0.71875$.

3. Metodom polovljenja naći koren jednačine $e^{-x} - x = 0$, sa greškom manjom od $5 \cdot 10^{-2}$.

   Rezultat: $[0, 1]$, $x_5 = 0.59375$.

4. Metodom sečice izračunati realan koren jednačine $x^3 - 2x^2 - 1 = 0$ sa tolerancijom funkcije manjom od $5 \cdot 10^{-2}$.

   Rezultat: $[2, 3]$, $x_4 = 2.20899$.

5. Metodom sečice rešiti jednačinu $x^2 - e^x + 2 = 0$ sa tolerancijom postpuka manjom od $5 \cdot 10^{-3}$. *Rezultat:* $[1, 2]$, $x_6 = 1.31895$.

6. Metodom tangente naći približno rešenje jednačine $\sin(x + \frac{\pi}{2}) - x = 0$ sa greškom manjom od 10^{-4}.

   Rezultat: $[0, \frac{\pi}{4}]$, $x_2 = 0.739085$.

7. Metodom tangente izračunati manji pozitivan koren jednačine $x^3 - 5x + 1 = 0$ sa tolerancijom funkcije manjom od 10^{-5}.

   Rezultat: $[0, 1]$, $(x_0 = 0)$, $x_2 = 0.201639$.

Literatura

[1] D. Adnađević, Z. Kadelburg, Matematička analiza I, Nauka, Beograd, 1994.

[2] N. Adžić, V. Vrcelj, S. Gilezan, R. Doroslovački, J. Nikić, Z. Uzelac, Zbirka rešenih zadataka sa pismenih ispita iz Matematike I na fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu, Naučna knjiga, Beograd, 1991.

[3] B. P. Demidovič, Zbornik zadač i upreženia po matematičeskomu analizu (ruski), Nauka, Moskva, 1969.

[4] R. Doroslovačk, Algebra, Stylos, Novi Sad, 1995.

[5] R. Doroslovački, F.Ferenci, I. Čomić, M.Cvijanović, S. Gilezan, J. Nikić, Z. Uzelac, N. Adžić, Zbirka rešenih zadataka iz matematike za studente tehničkih nauka, I deo, Naučna knjiga, Beograd, 1991.

[6] I. Kovačević, N. Ralević, Matematička analiza I: uvodni pojmovi i granični procesi, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 2000.

[7] S. Milić, Elementi algebre, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1984.

[8] P. Miličić, M. Ušćumlić, Zbirka zadataka iz više matematike I, Naučna knjiga, Beograd, 1985.

[9] J. Nikić, L. Čomić, Matematika jedan I deo, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, Edicija "Tehničke nauke", Novi Sad, 1999.

[10] Z. Šami, Matematika I deo, Saobraćajni fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 1992.

[11] Đ. Takači, A. Takači, N. Đapić, I. Štajner-Papuga, Zbirka zadataka iz analize I, prvi deo, Institut za matematiku Prirodnomatematičkog fakulteta, Novi Sad, 2000.

[12] V. Ungar, Z. Uzelac, R. Doroslovački, N.Adžić, V. Vrcelj, S. Gilezan, J. Žunić, Zbirka rešenih zadataka sa pismenih ispita iz Matematike II, Naučna knjiga, Beograd, 1989.

[13] G. Vojvodić, Algebra za studente tehničkih fakulteta, Institut za matematiku, Novi Sad, 1987.