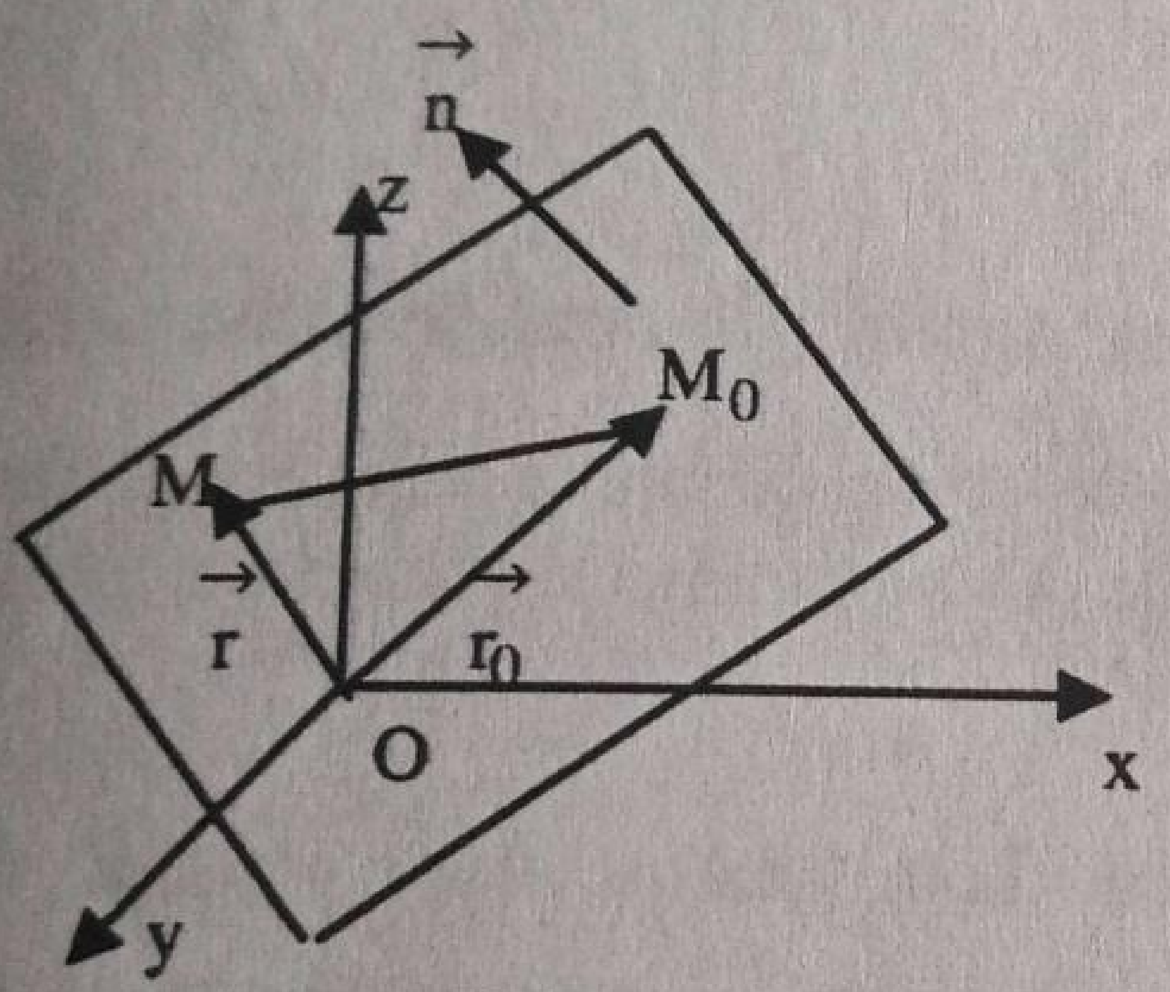
Glava 3. ANALITIČKA GEOMETRIJA U PROSTORU

3.1. RAVAN U PROSTORU

Ravan u prostoru je određena tačkom $M_0(x_0, y_0, z_0)$ kroz koju prolazi i nenultim vektorom $\vec{n} = (A, B, C)$ koji je normalan na nju. Sa ova dva elementa ravan je jednoznačno određena. Neka je M(x,y,z) proizvoljna tačka ravni, $\vec{r}$ -vektor položaja take M i $\vec{r_0}$ -vektor položaja



sl 1

tačke M_0. Tada je vektor $\overrightarrow{MM_0}$ normalan na vektor $\vec{n}$ za svaku tačku M iz ravni (sl 1). Slijedi, $\overrightarrow{MM_0} \cdot \vec{n} = 0$, odnosno $\left(\vec{r_0} - \vec{r}\right) \cdot \vec{n} = 0$, tj.

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = a, \tag{1}$$

gdje je $a = \vec{r_0} \cdot \vec{n}$. Formula (1) predstavlja vektorski oblik jednačine ravni u prostoru. U Dekartovim koordinatama formula (1) ima oblik

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{2}$$

odnosno

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{3}$$

gdje je $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$. Dakle, svakoj ravni u prostoru odgovara formula oblika (3). Važi i obratno: svakoj formuli oblika (3) može se pridružiti ravan u prostoru. Iz (3) se može "pročitati" da je (A,B,C) vektor koji je na nju normalan.

Primjer 1. Napisati jednačinu ravni koja sadrži tačku (3,4,1) i na koju je normalan vektor $\vec{n} = (-1,3,2)$. Saglasno formuli (2) imamo da je $-1 \cdot (x-3) + 3 \cdot (y-4) + 2 \cdot (z-2) = 0$, odnosno $-x + 3y + 2z - 11 = 0$.

Primjer 2. Napisati jednačinu ravni koja sadrži tačku (1,1,1) i normalna je na liniju presjeka ravni x−y+2z−3=0, 2x−z+4=0.

Rješenje. Potrebno je odrediti vektor $\vec{n}$ koji je normalan na ravan. Očigledno, $\vec{n}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$, gdje su $\vec{n_1}=(1,-1,2)$ i $\vec{n_2}=(2,0,-1)$ (koji su normalni, redom, na ravni $x-y+2z-3=0$, $2x-z+4=0$). Kako je $\vec{n}=(1,5,2)$, to tražena ravan ima jednačinu $x+5y+2z-8=0$.

U zavisnosti od toga kakav je vektor $\vec{n}$ ravan može imati različite položaje u koordinatnom sistemu. Tako je, na primjer, $x=a$ jednačina ravni koja je normalna na osu Ox i paralelna je ravni Oyz. Tačka kroz koju prolazi je $(a,0,0)$, a vektor normalan na nju je $(1,0,0)$.
Ako je u (3) $D=0$, tada ravan sadrži koordinatni početak.
Pretpostavimo da je $A\cdot B\cdot C\cdot D\neq 0$. Tada jednačinu (3) možemo zapisati u obliku

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1,$$

odnosno

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{4}$$

gdje je $a=-\frac{D}{A}$, $b=-\frac{D}{B}$ i $c=-\frac{D}{C}$. Brojevi a, b i c su apscisa, ordinata i aplikata tačaka presjeka ravni, redom, sa koordinatnim osama Ox, Oy i Oz (tj. algebarske vrijednosti dužina odsječaka koje ravan gradi na koordinatnim ōsama). Oblik (4) nazivamo segmentnim oblikom jednačine ravni.

Primjer 3. Odrediti koordinate tačaka u kojima koordinatne ose prodiru ravan $3x+4y-2z-6=0$.
Rješenje. Dovoljno je napisati segmentni oblik jednačine date ravni: $3x+4y-2z=6$, $\frac{3x}{6}+\frac{4y}{6}+\frac{-2z}{6}=1$, $\frac{x}{2}+\frac{y}{3/2}+\frac{z}{-3}-1$. Slijedi, algebarske vrijednosti odsječaka koje data ravan gradi na koordinatnim osama su: 2, $\frac{3}{2}$ i -3. Dakle, radi se o tačkama $(2,0,0)$, $\left(0,\frac{3}{2},0\right)$ i $(0,0,-3)$. Napomena. Zadatak se mogao riješiti i na sljedeći način. Da bi našli tačku na osi Ox kroz koju prolazi data ravan, dovoljno je u jednačini ravni staviti $y=z=0$. Slično se postupa i kod nalaženja odgovarajućih tačaka na osama Oy i Oz.

Primjer 4. Naći jednačinu ravni koja sadrži tri nekolinearne tačke:
a) $P(1,3,2)$, $Q(-2,4,1)$ i $R(5,-3.4)$; b) $P(x_1,y_1,z_1)$, $Q(x_2,y_2,z_2)$ i $R(x_3,y_3,z_3)$.

Rješenje. a) Prvi način: Da bi napisali jednačinu tražene ravni potrebno je naći vektor $\vec{n}$ koji je normalan na datu ravan i uzeti jednu od tri zadate tačke. Za vektor $\vec{n}$ možemo uzeti vektor $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$, jer je ovaj vektor normalan na vektore $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{PR}$, a to znači i na traženu ravan. Kako je $\overrightarrow{PQ}=(-3,1,-1)$ i $\overrightarrow{PR}=(4,-6,2)$, to je $\vec{n}=\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 1 & -1\\ 4 & -6 & 2\end{vmatrix}=(-4,2,14)$. Sa vektorom $\vec{n}$ i tačkom, na primjer P, jednačina tražene ravni glasi $-4(x-1)+2(y-3)+14(z-2)=0$, odnosno $-2x+y+7z-15=0$.

Drugi način: Neka je $M(x,y,z)$ proizvoljna tačka tražene ravni. Tada su vektori $\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{PR}$ komplanarni, pa je njihov mješoviti proizvod jednak nuli, tj. $\overrightarrow{PM}\cdot(\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR})=0$. Kako je $\overrightarrow{PM}=(x-1,y-3,z-2)$, $\overrightarrow{PQ}=(-3,1,-1)$ i $\overrightarrow{PR}=(4,-6,2)$, to je $\overrightarrow{PM}\cdot(\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR})=$ $\begin{vmatrix}x-1 & y-3 & z-2\\ -3 & 1 & -1\\ 4 & -6 & 2\end{vmatrix}=0$, tj. $-2x+y+7z-15=0$.

b) Slično prethodnom slučaju. $\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0$ ili u vektorskom obliku $\left(\vec{r}-\vec{r_1}\right)\cdot\left[\left(\vec{r_2}-\vec{r_1}\right)\times\left(\vec{r_3}-\vec{r_1}\right)\right]=0$, gdje su $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$ i $\vec{r_3}$, redom, vektori položaja tačkaka P,Q i R.

Označimo sa α, β i γ uglove koje vektor $\vec{n}=(A,B,C)$, normalan na datu ravan, gradi sa koordinatnim osama. Tada je

$\cos\alpha=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{i}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{i}|}=\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\beta=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{j}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{j}|}=\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\gamma=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{k}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{k}|}=$ $\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Zapazimo da je $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. Iz formule (3), poslije dijeljenja sa izrazom $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, ispred kojeg se stavlja znak suprotan znaku broja D, dobijamo

$$\frac{Ax}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\frac{By}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\frac{Cz}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0,$$

odnosno

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0, \tag{5}$$

Scanned by TapScanner

gdje je $p=\dfrac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\geq 0$. Oblik (5) nazivamo normalnim, ili trigonometrijskim, oblikom jednačine ravni. Veličina p predstavlja normalno rastojanje ravni od koordinatnog početka.

Normalni oblik jednačine ravni se koristi za izračunavanje rastojanja tačke od ravni. Rastojanje d tačke $M_0(x_0,y_0,z_0)$ od ravni zadate jednačinom (5) računa se po formuli

$$d=|x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p|,$$

odnosno po formuli

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \qquad (6)$$

ako je jednačina ravni zadata sa Ax+By+Cz+D=0.

Primjer 5. Naći rastojanje između paralelnih ravni: x+y−z−2=0 i 2x+2y−2z+5=0.
Rješenje. Prvi način: Uzeti jednu tačku iz jedne ravni i odrediti njeno rastojanje od druge ravni. Na primje, za y=z=0 iz jednačine prve ravni nalazimo x=2, tj tačka M(2,0,0) pripada prvoj ravni. Rastojanje tačke M od druge ravni je $d=\dfrac{|2\cdot 2+2\cdot 0-2\cdot 0+5|}{\sqrt{4+4+4}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Drugi način: Napišimo segmentne oblike jednačina datih ravni. To su $\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\dfrac{y}{\sqrt{3}}+\dfrac{z}{-\sqrt{3}}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}=0$ i $\dfrac{x}{-2\sqrt{3}}+\dfrac{y}{-2\sqrt{3}}+\dfrac{z}{2\sqrt{3}}-\dfrac{5}{2\sqrt{3}}=0$. Može se zapaziti da se koordinatni početak nalazi između datih ravni. Slijedi, rastojanje između datih ravni jednako je sumi njihovih rastojanja od koordinatnog početka. Kako su ta rastojanja $d_1=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ i $d_2=\dfrac{5}{2\sqrt{3}}$, to je $d_1+d_2=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Primjer 6. Naći tačku, simetričnu koordinatnom početku, u odnosu na ravan 10x+2y−11z+450=0.

Rješenje. Vektor $\vec{n}=(10,2,-11)$ je normalan na datu ravan, a vektor $\alpha\cdot\vec{n}=(10\alpha,2\alpha,-11\alpha)$, gdje je α realni parametar različit od nule, je kolinearan sa vektorom $\vec{n}$. Treba odrediti vrijednost parametra α tako da je $\alpha\cdot\vec{n}$ radijus vektor tačke koja je simstrična sa koordinatnim početkom u odnosu na datu ravan. O vektoru $\alpha\cdot\vec{n}$ znamo da ima intenzitet dva puta veći nego što je rastojanje kordinatnog početka od date ravni, a to rastojanje iznosi $d=\dfrac{450}{\sqrt{100+4+121}}=30$. Iz $\left|\alpha\cdot\vec{n}\right|=60$ nalazimo da je $\sqrt{100\alpha^2+4\alpha^2+121\alpha^2}=60$, odnosno $|15\alpha|=60$, tj. $\alpha=-4$ ili $\alpha=4$. Slučaj $\alpha=4$ nije moguć, jer se tada tačka čiji je radiju vektor $4\cdot\vec{n}$ i koordinatni početak nalaze sa iste strane date ravni. Slijedi, za $\alpha=-4$ dobijamo tačku $(-40,-8,44)$ koja je simetrična koordinatnom početku u odnosu na datu ravan.

Uglom između dvije ravni $\pi_1: \; A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ i $\pi_2: \; A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ nazivamo ugao između vektora $\vec{n_1}=(A_1,B_1,C_1)$ i $\vec{n_2}=(A_2,B_2,C_2)$. Označimo taj ugao sa φ. Tada je

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{\left|\vec{n_1}\right|\cdot\left|\vec{n_2}\right|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Manji od dva ugla kojeg obrazuju date ravni nalazi se po formuli

$$\cos\varphi=\frac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Specijalno,

- $\pi_1 \parallel \pi_2$ (ravni su paralelne) $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$ $(A_2B_2C_2D_2\neq 0)$,
- $\pi_1 \perp \pi_2$ (ravni su normalne) $\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$,
- $\pi_1 \equiv \pi_2$ (ravni se poklapaju) $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$ $(A_2B_2C_2D_2\neq 0)$.

Primjer 7. Naći oštar ugao među ravnima: $x+y-2z-11=0$ i $2x+3y+z-3=0$.

Rješenje. Treba naći oštar ugao φ između vektora $\vec{n_1}=(1,1,-2)$ i $\vec{n_2}=(2,3,1)$. Slijedi,

$$\cos\varphi=\frac{|2+3-2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{21}}{14}, \text{ tj. } \varphi=\arccos\frac{\sqrt{21}}{14}.$$

Primjer 8. Odrediti vrijednosti parametra α za koje su ravni $-2x+\alpha y+4z-5=0$ i $2x+\alpha y-3z+3=0$ međusobno normalne.

Rješenje. Potreban i dovoljan uslov da date ravni budu međusobno normalne je uzajamna normalnost vektora $\vec{n_1}=(-2,\alpha,4)$ i $\vec{n_2}=(2,\alpha,-3)$. Slijedi, $-4+\alpha^2-12=0$, tj. $\alpha=-4$ ili $\alpha=4$.

Primjer 9. Odrediti vrijednosti parametara α i β tako da ravni $2x+\alpha y+3z-5=0$ i $\beta x-6y-6z+3=0$ budu međusobno paralelne.

Rješenje. Potreban i dovoljan uslov da date ravni budu paralelne je kolinearnost vektora $\vec{n_1}=(2,\alpha,3)$ i $\vec{n_2}=(\beta,-6,-6)$. Slijedi, $\dfrac{2}{\beta}=\dfrac{\alpha}{-6}=\dfrac{3}{-6}$, tj. $\alpha=3$ i $\beta=-4$.

Primjer 10. Naći tačku presjeka ravni x−3y+2z−11=0, x−2y+z−7=0, 2x+y−z+2-0.
Rješenje. (1,−2,2). Uputstvo. Treba riješiti sistem jednačina: x−3y+2z−11=0, x−2y+z−7=0, 2x+y−z+2=0.

Primejr 11. Naći geometrijsko mjesto tačaka koje su jednako udaljene od tačaka P(2,1,−2) i Q(−2,3,4).
Rješenje. 2x−y−3z+5=0. Uputstvo. Proizvoljna tačka M(x,y,z) traženog skupa tačaka zadovoljava uslov $\overline{PM} = \overline{QM}$.

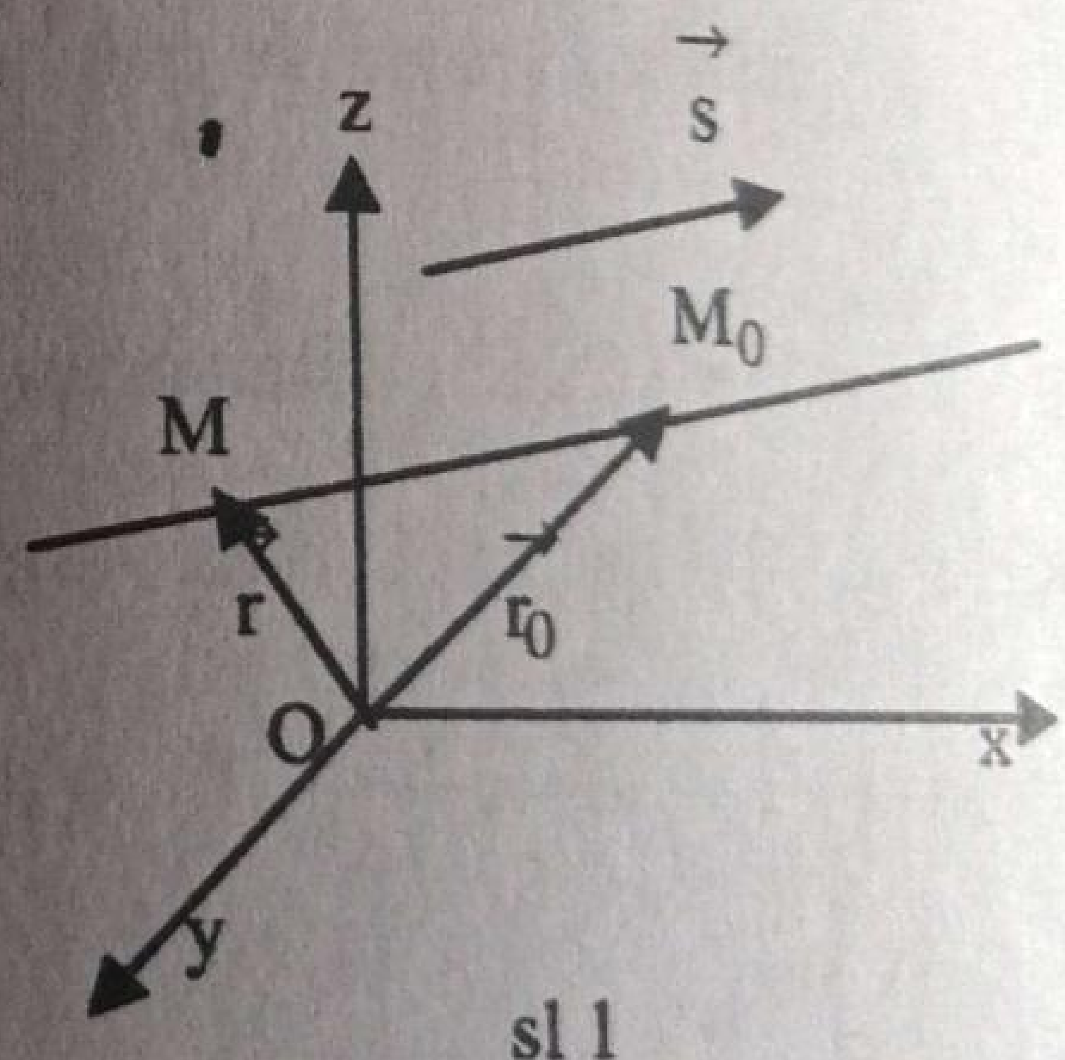
3.2. PRAVA U PROSTORU

Prava u prostoru je određena tačkom $M_0(x_0, y_0, z_0)$ kroz koju prolazi i nenultim vektorom pravca $\vec{s} = (m, n, p)$. Sa ova dva elementa prava je jednoznačno određena. Neka je M(x,y,z) proizvoljna tačka prave, $\vec{r}$ -vektor položaja take M i $\vec{r_0}$ -vektor položaja tačke M_0. Tada je vektor $\overrightarrow{MM_0}$ kolinearan sa vektorom $\vec{s}$ za svaku tačku M sa prave (sl 1). Slijedi, $\overrightarrow{MM_0} \times \vec{s} = \vec{0}$, odnosno $\left(\vec{r_0} - \vec{r}\right) \times \vec{s} = \vec{0}$, tj.

$$\vec{r} \times \vec{s} = \vec{a}, \qquad (1)$$

gdje je $\vec{a} = \vec{r_0} \times \vec{s}$. Formula (1) predstavlja vektorski oblik jednačine ravni u prostoru. U Dekartovim koordinatama formula (1) ima oblik

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad (2)$$



sl 1

Formulu (2) nazivamo kanonskim oblikom jednačine prave u prostoru. Svakoj pravoj u prostoru odgovara formula oblika (2). Važi i obratno: svakoj formuli oblika (2) može se pridružiti prava u prostoru. Iz (2) se može "pročitati" da je (m,n,p) vektor pravca date prave.

Jednačina prave se može napisati i u parametarskom obliku:

$$x = x_0 + t \cdot m, \; y = y_0 + t \cdot n, \; z = z_0 + t \cdot p, \qquad (3)$$

gdje je t –realni parametar. Za svaku konkretnu vrijednost parametra t iz (3) dobija se po jedna tačka prave. Iz formule (3) se "čita" da prava prolazi tačkom $M_0(x_0, y_0, z_0)$ i da ima vektor pravca $\vec{s} = (m, n, p)$.

Primjer 1. Napisati jednačinu prave koja sadrži tačku $M_0(3,-2,1)$ i ima vektor pravca $\vec{s}=(-1,3,2)$.

Rješenje. Saglasno formuli (2) imamo da je $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{2}$ jednačina tražene prave. Jednačina ove prave u parametarskom obliku glasi: $x=3-t$, $y=-2+3t$, $z=1+2t$, $t\in R$.

Prava je jednoznačno određena i sa dvije tačke koje joj pripadaju. Slijedi primjer koji to ilustruje.

Primjer 2. Napisati jednačinu prave koja sadrži tačke:

a) $M_1(-1,2,0)$ i $M_2(2,3,-1)$,

b) $M_1(x_1,y_1,z_1)$ i $M_2(x_2,y_2,z_3)$, $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$ i $z_1 \neq z_2$.

Rješenje. a) Imamo poznatu tačku kroz koju prolazi prava (jedna od dvije poznate tačke). Za vektor pravca prave možemo uzeti vektor $\overrightarrow{M_1M_2}$, ili neki njemu kolinearan vektor. Kako je $\vec{s}=\overrightarrow{M_1M_2}=(3,1,-1)$, to je, saglasno (2), tražena jednačina prave: $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$, ili u parametarskom obliku: $x=-1+3t$, $y=2+t$, $z=-t$, $t\in R$.

b) $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Prava je jednoznačno određena i kao presjek dvije (neparalelne) ravni. Evo primjer.

Primjer 3. Napisati kanonski oblik jednačine prave koja se javlja presjekom (neparalelnih) ravni:

a) $x+y-1=0$, $2y-z-2=0$.

b) $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Rješenje. a) Podsjetimo: da bi napisali jednačinu prave potrebno je znati, na primjer, jednu njenu tačku M_0 i vektor $\vec{s}$ pravca prave. Za tačku M_0 treba naći jedno rješenje sistema jednačina: $x+y-1=0$, $2y-z-2=0$. Ako uzmemo da je $z=0$, tada je $y=1$ i $x=0$. Dakle, za M_0 možemo uzeti tačku $(0,1,0)$. Neka su $\vec{n}_1=(1,1,0)$ i $\vec{n}_2=(0,2,-1)$ (prvi vektor je normalan na prvu, a drugi na drugu datu ravan). Očigledno, za vektor pravca prave može se uzeti vektor

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{vmatrix}=(-1,1,2).$$

Slijedi, tražena prava ima jednačinu: $\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$.

b) Slično prethodnom slučaju. $\frac{x-x_1}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_1}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_1}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$. Uputstvo. Vektor pravca prave je $\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$.

Uglom između pravih $L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$ i $L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$ nazivamo ugao između vektora $\vec{s_1} = (m_1, n_1, p_1)$ i $\vec{s_2} = (m_2, n_2, p_2)$. Označimo ga sa φ. Tada je

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s_1} \cdot \vec{s_2}}{|\vec{s_1}| \cdot |\vec{s_2}|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Za traženje oštrog ugla između pravih koristi se formula

$$\cos\varphi = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Specijalno:

- $L_1 \parallel L_2$ (prave su paralelne) $\Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$ $(m_2 n_2 p_2 \neq 0)$,
- $L_1 \perp L_2$ (prave su normalne) $\Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$.

Primjer 4. Naći oštar ugao između pravih $\frac{x-5}{7} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-6}{-8}$ i $\frac{x-2}{11} = \frac{y-4}{-8} = \frac{z+1}{-7}$.

Rješenje. Treba naći oštar ugao između vektora $\vec{s_1} = (7,2,-8)$ i $\vec{s_2} = (11,-8,-7)$. Slijedi,

$\cos\varphi = \frac{|77-16+56|}{\sqrt{117} \cdot \sqrt{234}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tj. φ=45°.

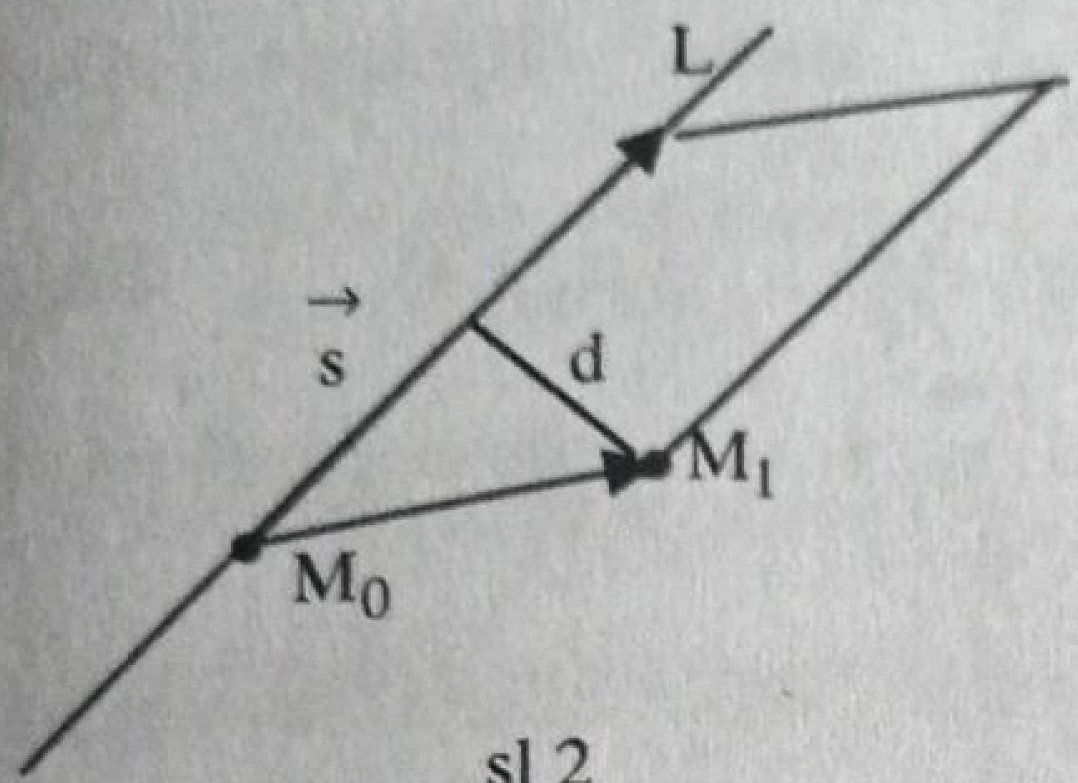
Primjer 5. Odrediti vrijednost parametra α tako da prave:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{\alpha} = \frac{z}{-3} \quad \text{i} \quad \frac{x}{4} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-12\alpha}$$

budu uzajamno: a) normalne, b) paralelne.

Rješenje. a) $\frac{8}{37}$, b) $-\frac{1}{2}$.

Kako se nalazi rastojanje tačke od prave? Neka je zadata tačka $M_1(x_1, y_1, z_1)$ koja ne pripada pravoj L: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$. Neka je $\vec{r_0}$ vektor položaja tačke $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{r_1}$ vektor položaja tačke M_1 i d rastojanje tačke M_1 od prave L (sl 2). Poznato je da je površina paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{s}$ i $\overrightarrow{M_0M_1}$ jednaka $\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{s}\right|$. Sa druge strane, ista ta površina je jednaka $\left|\vec{s}\right|\cdot d$. Odavde slijedi da je



sl 2

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{s}\right|}{\left|\vec{s}\right|}. \qquad (4)$$

U konkretnim slučajevima treba izvršiti tražena izračunavanja u (4). Nešto kasnije ovaj zadatak ćemo riješiti na još jedan način.

Primjer 6. Naći rastojanje tačke $M_1(-5,4,3)$ od prave $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{2}$.

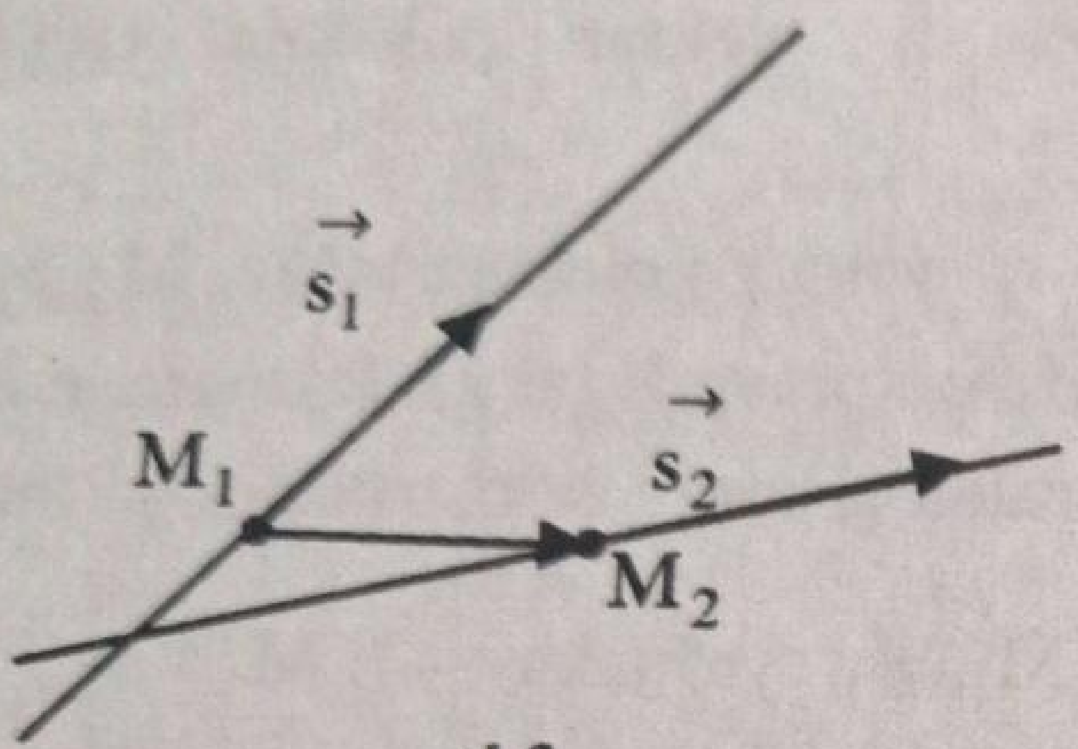
Rješenje. Ovdje je $M_0(2,3,1)$ i $\vec{s}(-1,3,2)$. Kako je $\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{s}=(-4,12,-20)$, to je $\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{s}\right|$ $=4\sqrt{35}$. Dalje je $\left|\vec{s}\right|=\sqrt{14}$, pa je traženo rastojanje $d=\frac{4\sqrt{35}}{\sqrt{14}}=2\sqrt{10}$.

Primjer 7. Naći rastojanje između paralelnih pravih: $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2}$ i $\frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}$.

Rješenje. 3. Uputstvo. Uzeti jednu tačku sa jedne prave i odrediti, po formuli (4), njeno rastojanje od druge prave.

Dvije prave, a i b, u prostoru se mogu sjeći, poklapati ili nemati zajedničkih tačaka (paralelne su ili se mimoilaze). Odredimo uslove pod kojima se one sijeku. Prvi uslov je da vektori pravaca $\vec{s_1}$ i $\vec{s_2}$ ne budu paralelni. Drugi uslov se jasno vidi sa slike 3, to je da vektori

$\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{s_1}$ i $\vec{s_2}$ pripadati jednoj ravni (tj. oni moraju biti komplanarni), što se može zapisati kao: $\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\left(\vec{s_1}\times\vec{s_2}\right)=0.$



sl 3

Primjer 8. Ispitati da li se prave $\frac{x-6}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$ i $\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-5}{4}$ sijeku. Rješenje. Ovdje je $\vec{s_1}(3,-2,1)$, $M_1(6,-1,0)$, $\vec{s_2}(2,1,4)$ i $M_2(1,7,5)$.

Očigledno, vektori $\vec{s_1}$ i $\vec{s_2}$ nijesu paralelni. Kako je $\overrightarrow{M_1M_2}=(-5,8,5)$, to je $\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\left(\vec{s_1}\times\vec{s_2}\right)=\begin{vmatrix}-5 & 8 & 5\\ 3 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}=\ldots=0$. Slijedi, ispunjeni su svi uslovi da se date prave sijeku.

Primjer 9. Naći tačku presjeka pravih $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{4}$ i $\frac{x+2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{4}$.

Rješenje. Prvo treba provjeriti da se date prave sijeku. Postupajući kao u prethodnom primjeru, uvjerićemo se da se date prave sijeku. Ostaje da se nađe tačka presjeka, tj. tačka koja pripada objema pravama. Napišimo jednačine datih pravih u parametarskom obliku: $x=1+\alpha$, $y=-2+2\alpha$, $z=3+4\alpha$, α -realni parametar; $x=-2+3\beta$, $y=-1-2\beta$, $z==-2+4\beta$, β -realni parametar. Za svako konkretno α (β) dobija se po jedna tačka sa prve (druge) prave. Odredimo vrijednosti parametara α i β tako da se radi o istoj tački. Dakle, treba riješiti sistem jednačina: $1+\alpha=-2+3\beta$, $-2+2\alpha=-1-2\beta$, $3+4\alpha=-2+4\beta$, odnosno sistem jednačina: $\alpha-3\beta=-3$, $2\alpha+2\beta=1$, $4\alpha-4\beta=-5$. Ovaj sistem ima jedinstveno rješenje: $\alpha=-\frac{3}{8}$, $\beta=\frac{7}{8}$. Zamjenom α u: $x=1+\alpha$, $y=-2+2\alpha$, $z=3+4\alpha$,dobijamo zajedničku tačku datih pravih $\left(\frac{5}{8},-\frac{11}{4},\frac{3}{2}\right)$.

3.3. PRAVA I RAVAN U PROSTORU

Neka su u prostoru zadati prava: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ i ravan : Ax+By+Cz+D=0.

- Uglom između prave i ravni nazivamo ugao između prave i njene normalne projekcije na tu ravan. Označimo ovaj ugao sa φ. Tada je

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

- Uslov normalnosti prave i ravni: Am+Bn+Cp=0.
- Uslov paralelnosti prave i ravni: $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$.

- Za nalaženje zajedničke tačke prave i ravni potrebno je riješiti sistem jednačina: $x=x_0+t\cdot m$, $y=y_0+t\cdot n$, $z=z_0+t\cdot p$, Ax+By+Cz+D=0. Ovaj sistem se rješava tako što se iz prve tri jednačine zamijeni x=.., y=... i z=... u jednačinu ravni. Tako se dobija jedna linearna jednačina sa nepoznatom t. Rješenje ove jednačine po t omogućava nalaženje zajedničke tačke (x,y,z).
- Uslov da prava pripada ravni je da bude paralelna ravni i da bar jedna njena tačka pripada ravni, tj. da je Am+Bn+Cp=0 i $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$.
- Ako je Am+Bn+Cp≠0, tada prava prodire ravan.
- Ako je Am+Bn+Cp=0 i $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$, tada je prava paralelna ravni.

Primjer 1. Odrediti vrijednost parametara α i β tako da prava $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-3}{\alpha}$ bude normalna na ravan 6x+βy−3z=0.

Rješenje. Uslov normalnosti je kolinearnost vektora pravca prave $\vec{s}=(3,-4,\alpha)$ i vektora $\vec{n}=(6,\beta,-3)$ normalnog na ravan. Dakle, $\frac{3}{6}=\frac{-4}{\beta}=\frac{\alpha}{-3}$, tj. $\alpha=-\frac{3}{2}$ i $\beta=-8$.

Primjer 2. Ispitati da li prava $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-7}$ pripada ravni:a) 3x+2y+z=0, b) 3x+2y+z−1=0.

Rješenje. a) Označimo sa L datu pravu i sa Q datu ravan. Tačka $M_0(0,0,0)$ pripada pravoj L. Vektor pravca prave L je $\vec{s}=(1,2,-7)$, a vektor normalan na ravan Q je $\vec{n}=(3,2,1)$. Uslov da prava L pripada ravni Q je da $M_0\in Q$ i da vektori $\vec{s}$ i $\vec{n}$ budu normalni. Oba uslova su ispunjena, jer je $3\cdot0+2\cdot0+1\cdot0=0$ i $\vec{s}\cdot\vec{n}=3+4-7=0$. b) Ne pripada, jer tačka $M_0(0,0,0)$ ne pripada datoj ravni. Prava je paralelna ravni.

Primjer 3. Naći tačku prodora prave $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{1}$ kroz ravan $3x-y+2z+5=0$.
Rješenje. Prvo bi trebalo utvrditi da prava i ravan imaju zajedničkih tačaka. Za ovo je dovoljno da vektori $\vec{s}=(2,1,1)$ i $\vec{n}=(3,-1,2)$ nijesu normalni, što je tačno, jer je $\vec{s}\cdot\vec{n}\neq0$. Jednačinu date prave napišimo u parametarskom obliku $x=1+2t$, $y=-2+t$, $z=2+t$. Preostaje da riješimo sistem linearnih jednačina: $x=1+2t$, $y=-2+t$, $z=2+t$, $3x-y+2z+5=0$. Iz prve tri jednačine zamijenimo x, y i z u zadnju jednačinu, dobijamo da je $7t+14=0$, odnosno $t=-2$. Za ovo t imamo da je $(-3,-4,0)$ tačka prodora prave kroz ravan.

Primjer 4. Naći normalnu projekciju tačke $M(-3,0,2)$ na pravu $x=5-t$, $y=2t$, $z=3t$.
Rješenje. Označimo sa L datu pravu. Prvo navedimo algoritam za rješavanje zadatka. 1. Postaviti ravan Q kroz tačku M koja je normalna na pravu L. 2. Odrediti tačku M' u kojoj prave L prodire ravan Q. 3. Tačka M' je tražena tačka. Ostaje da realizujemo navedeni algoritam za konkretne podatke. Jednačina ravni Q je $-x+2y+3z-9=0$ (tačka kroz koju prolazi je $(-3,0,2)$, vektor normalan na ravan je $\vec{n}=(-1,2,3)$). Prodor prave L kroz ravan Q je tačka $M'(4,2,3)$. Tačka M' je normalna projekcija tačke M na ravan Q.

Primjer 5. Naći tačku $M'(x',y',z')$ simetričnu tački $M(1,2,4)$ u odnosu na ravan $2x+5y+2z+13=0$.
Rješenje. Označimo sa Q datu ravan. Evo algoritma za rješenje zadatka. 1. Kroz tačku M postaviti pravu L koja je normalna na ravan Q. 2. Odrediti tačku N prodora prave L kroz ravan Q. 3. Odrediti tačku M' tako da je tačka N sredina odsječka MM'. 4. Tačka M' je tražena tačka. Svaki od ovih zadataka (u koracima 1,2 i 3) rješavali smo ranije. Prava L prolazi kroz tačku M i ima vektor pravca $\vec{s}=(2,5,2)$. Jednačina prave L je $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-4}{2}$. Prodor prave L kroz datu ravan je tačka $N(-1,-3,2)$. Ostaje da se nađe tačka M' takva da je N sredina odsječka MM'. Kako je $\frac{x'+1}{2}=-1$, $\frac{y'+2}{2}=-3$ i $\frac{z'+4}{2}=2$, to je $x'=-3$, $y'=-8$, $z'=0$. Slijedi, tačka $M'(-3,-8,0)$ je simetrična tački M u odnosu na datu ravan.

Primjer 6. Naći tačku $M'(x',y',z')$ simetričnu tački $M(2,8,0)$ u odnosu na pravu $\frac{x-1}{-3}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-3}{-1}$.
Rješenje. Označimo sa L datu pravu. Navodimo algoritam za rješavanje zadatka. 1. Odrediti ravan Q koja sadrži tačku M i normalna je na pravu L. 2. Odrediti prodor prave L kroz ravan Q, tačku prodora označimo sa N. 3. Naći tačku M' takvu da je tačka N sredina odsječka MM'. 4. Tačka M' je tražena tačka. Evo i konkretnih rezultata: Jednačina ravni Q: $3x-y+z+2=0$. Tačka

prodora prave L kroz ravan Q je N(−2,−2,2). Tačka M', simetrična tački M u odnosu na tačku N, je M'(−6,−12,4).

Primjer 7. Naći jednačinu normalne projekcije prave $\frac{x}{5}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+1}{-3}$ na ravan 2x−3y+z−4=0.

Rješenje. Označimo sa L datu pravu i sa Q datu ravan. Tražena prava S se nalazi u presjeku ravni Q i ravni R koja sadrži pravu L i normalna je na ravan Q. Ostaje da nađemo jednačinu ravni R. Vektor $\vec{n}_2$, normalan na ravan R, normalan je na vektore $\vec{s}=(5,-2,-3)$ (vektor pravca prave L) i $\vec{n}_1(2,-3,1)$ (vektor normalan na ravan Q). Dakle, vektor $\vec{n}_2$ je kolinearan sa vektorom $\vec{s}\times\vec{n}_1=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & -2 & -3\\ 2 & -3 & 1\end{vmatrix}=-11\cdot(1,1,1)$. Slijedi, za vektor $\vec{n}_2$ može se uzeti vektor (1,1,1). Ravan R sadrži tačku (0,−1,−1), jer ova tačka priada pravoj L. Sada možemo napisati jednačinu ravni Q: x+y+z+2=0. Iz prethodnog slijedi, jednačine tražene prave S je data kao presjek ravni: 2x−3y+z−4=0, x+y+z+2=0. Zapišimo ovu pravu u kanonskom i parametarskom obliku. Njen vektor pravca je $\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(-4,-1,5)$. Treba nam još bar jedna tačka koja pripada pravoj S. Za ovo je dovoljno, na primjer, u jednačini prave S: 2x−3y+z−4=0, x+y+z+2=0 staviti z=0. Dobijamo $x=-\frac{2}{5}$ i $y=-\frac{8}{5}$. Dakle, tačka $\left(-\frac{2}{5},-\frac{8}{5},0\right)$ pripada pravoj S, pa je njena jednačina $\frac{x+\frac{2}{5}}{-4}=\frac{y+\frac{8}{5}}{-1}=\frac{z}{5}$. Parametarski oblik jdnačine prave S glasi $x=-\frac{2}{5}-4t$, $y=-\frac{8}{5}-t$, z=5t, $t\in R$.

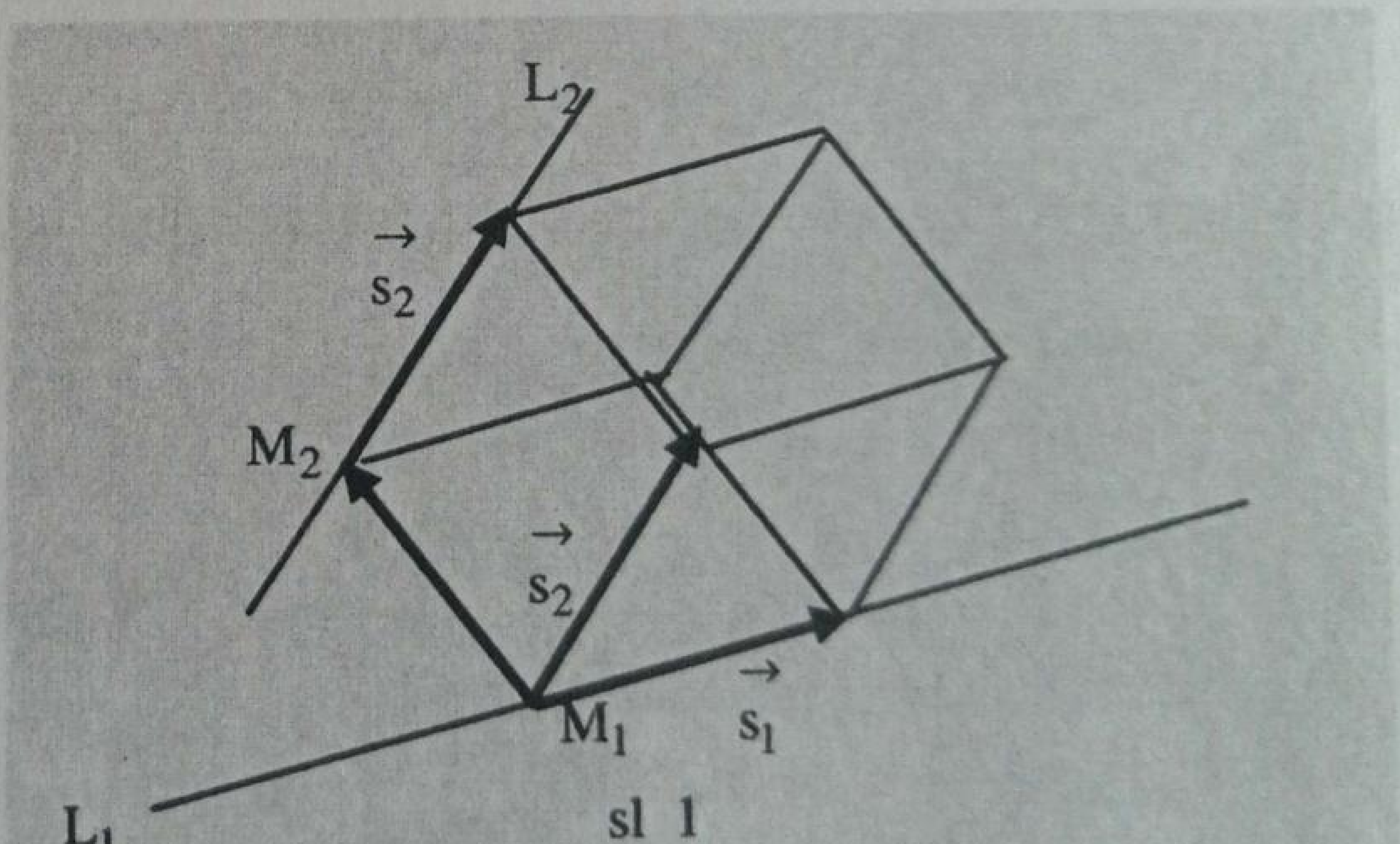
Primjer 8. Odrediti vrijednost parametra α za koju je ravan $\alpha x-2y-4z+5=0$ paralelna pravoj $\begin{cases}y-z=0\\ x+y=0\end{cases}$. Rješenje. $\alpha=2$.

Primjer 9. Date su prave $L_1:\frac{x-3}{-6}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{1}$ i $L_2:\frac{x+2}{3}=\frac{z-3}{-1}$, $y-4=0$. Naći jednačinu ravni koja sadrži pravu L_2 i paralelna je pravoj L_1.

Rješenje. Označimo sa Q traženu ravan i sa $\vec{n}$ vektor koji je normalan na nju. Vektor $\vec{n}$ je normalan na vektore $\vec{s_1}$ (vektor pravca prave L_1) i $\vec{s_2}$ (vektor pravca prave L_2). Kako je $\vec{s_1}=(-6,4,1)$ i $\vec{s_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=(-3,0,1)$, to je $\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(4,-3,12)$. Tačka $(-2,4,3)$ pripada ravni Q, jer ta tačka pripada pravoj L_2. Slijedi, ravan Q ima jednačinu $4x-3y+12z-16=0$.

Primjer 10. Naći najkraće rastojanje između mimoilaznih pravih: $L_1: \dfrac{x-9}{-6}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ i $L_2: \dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$.

Rješenje. 1. način. Neka je M_1 (M_2) tačka na pravoj L_1 (L_2) i $\vec{s_1}$ ($\vec{s_2}$) vektor pravca prave L_1 (L_2) (vidi sl 1). Algoritam za rješavanje zadatka. 1. U tački M_1, kao početku, konstruisati vektor $\vec{s_2}$. 2. Konstrisati paralelopiped nad vektorima: $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{s_1}$ i $\vec{s_2}$. 3. Visina h paralelopipeda, nad stranicom određenom vektorima $\vec{s_1}$ i $\vec{s_2}$, je traženo rastojanje između pravih L_1 i L_2. Kako je zapremina paralelopipeda



sl 1

$V=\left|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\left(\vec{s_1}\times\vec{s_2}\right)\right|$ i

$V=\left|\vec{s_1}\times\vec{s_2}\right|\cdot h$, to je

$h=\dfrac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\left(\vec{s_1}\times\vec{s_2}\right)\right|}{\left|\vec{s_1}\times\vec{s_2}\right|}$. Dalje je

$\vec{s_1}\times\vec{s_2}=-3(2,3,6)$, $\left|\vec{s_1}\times\vec{s_2}\right|=21$, $\overrightarrow{M_1M_2}=(-14,-5,-1)$, $\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\left(\vec{s_1}\times\vec{s_2}\right)=147$, $h=\dfrac{147}{21}=7$.

2. način: Algoritam. 1. Postaviti ravan Q koja sadrži pravu L_2 paralelnu pravoj L_1 (vidi prethodni zadatak) (Q: 2x+3y+6z+19=0). 2. Odrediti rastojanje tačke M_1 (sa prave L_1) od ravni Q. To rastojanje je 7 i ono je najkraće rastojanje između pravih L_1 i L_2.

3.4. POVRŠI DRUGOG REDA

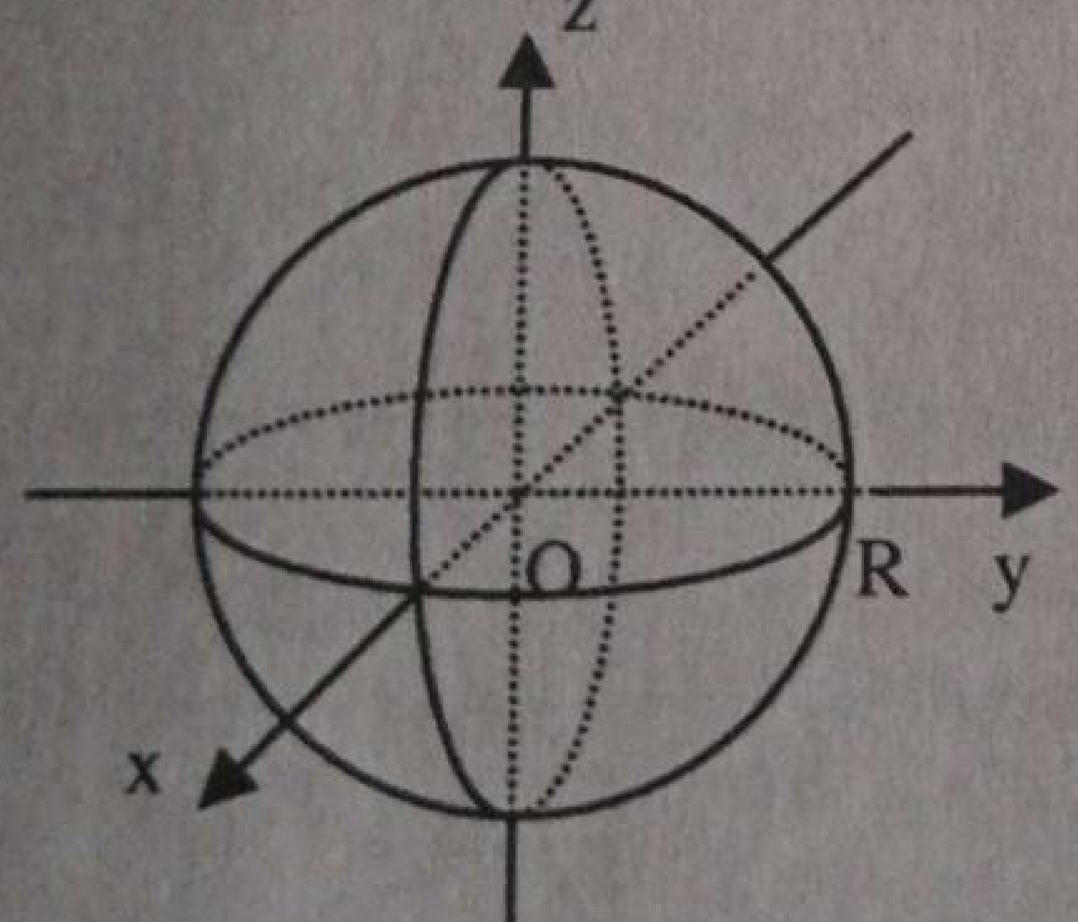
Jednačinom površi u prostoru Oxyz nazivamo jednačinu F(x,y,z)=0, kojoj udovoljavaju koordinate svake tačke površi i samo one. Površina može biti zadata jednačinom F(x,y,z)=0, ili jednačinom z=f(x,y) (y=φ(x,z), x=ψ(y,z)). Jednačina oblika F(x,y)=0 definiše u prostoru cilindričnu površ. Ako je F(x,y,z) polinom stepena najviše 2 po promjenljivim x, y i z, tada F(x,y,z)=0 nazivamo jednačinom površi drugog reda a odgovarajuće površi površima drugog reda. Ako površ ima specifičan raspored u odnosu na dati koordinatni sistem (na primjer, simetrična je u odnosu na neke koordinatne ravni ili koordinatni početak i sl) tada njena jednačina ima dovoljno prost oblik koji nazivamo kanonskim oblikom. U površi drugog reda spadaju i cilindri (eliptički, hiperbolički i parabolički).

Navedimo kanonske oblike nekih (karakterističnih) površi drugog reda.

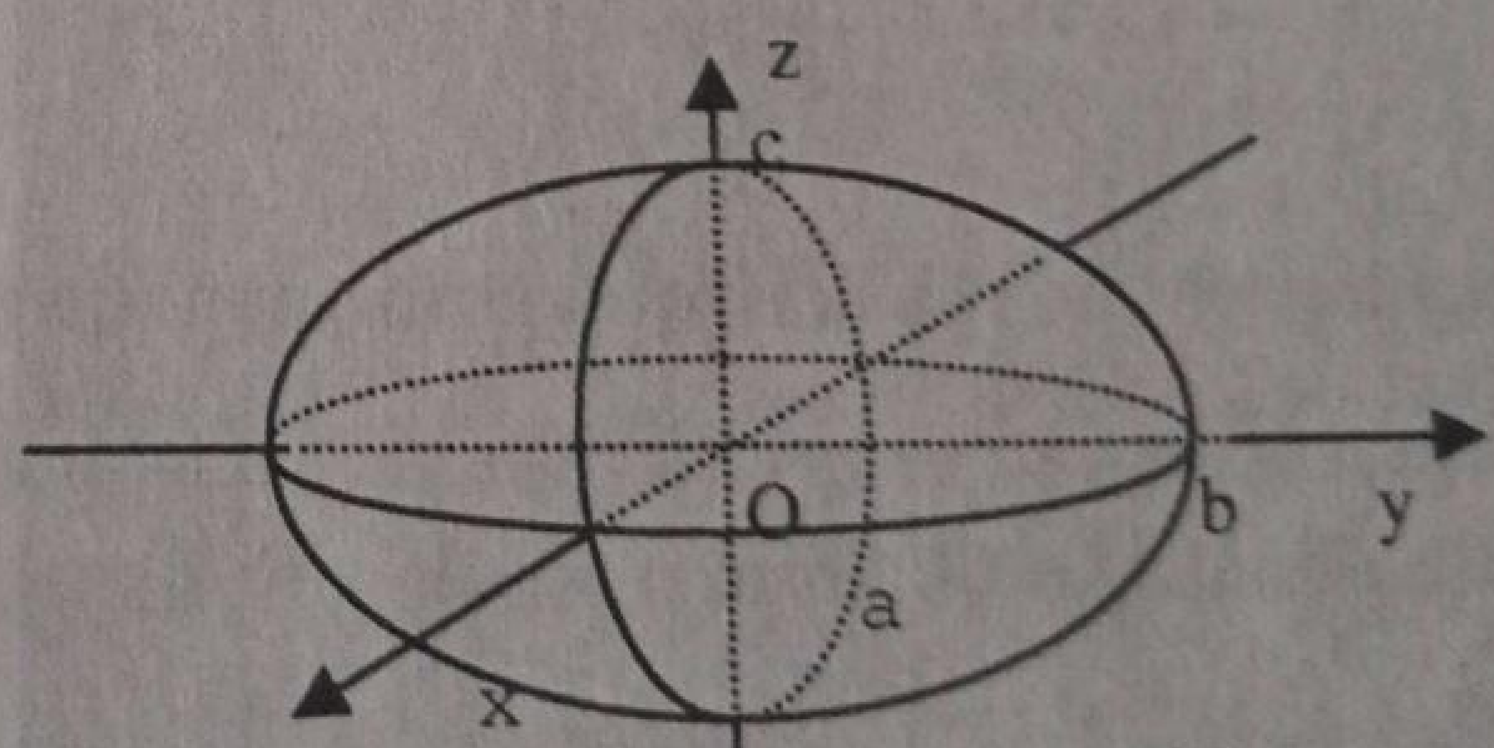
1. Sfera poluprečnika R sa centrom u koordinatnom početku ima jednačinu

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

(sl 1). Jednačina $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ predstavlja sferu poluprečnika R sa centrom u tački (x_0,y_0,z_0).



sl 1



sl 2

2. Elipsoid sa poluosama a,b i c i centrom u koordinatnom početku ima jednačinu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

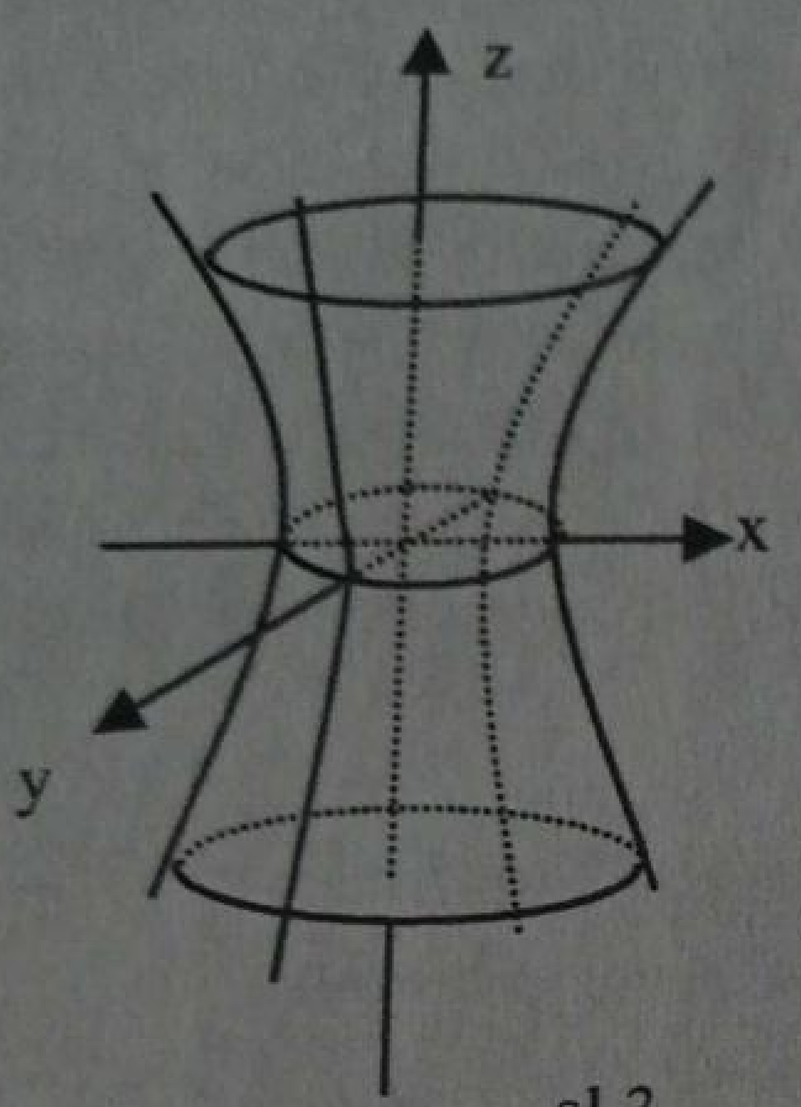
(sl 2). Ako je a=b=c tada elipsoid prelazi u sferu poluprečnika R=a.

3. Jednograni (ili jednolisni) hiperboloid sa poluosama a, b i c i osom Oz ima jednačinu

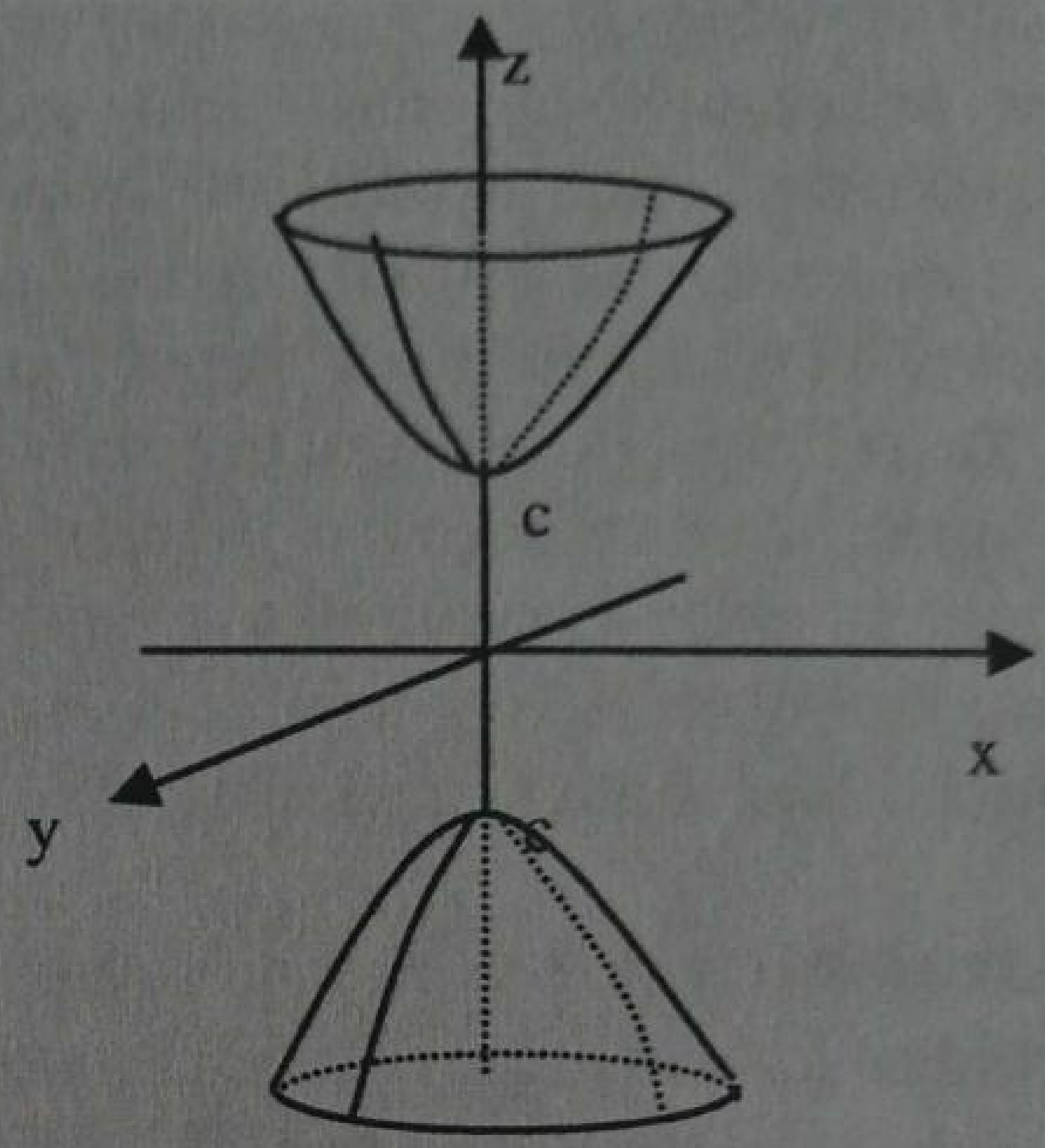
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

(sl 3). Presjeci hiperbolida sa horizontalnim ravnima z=h su elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}$. Presjeci hiperbolida sa vertikalnim ravnima x=h ili y=h su hiperbole $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2}$ ili

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}$.



sl 3



sl 4

4. Dvograni (ili dvolisni) hiperboloid sa poluosama a, b i c i osom Oz (sl 4) ima jednačinu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

(sl 4). Presjeci hiperbolida sa horizontalnim ravnima z=h, |h|>c su elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1$.

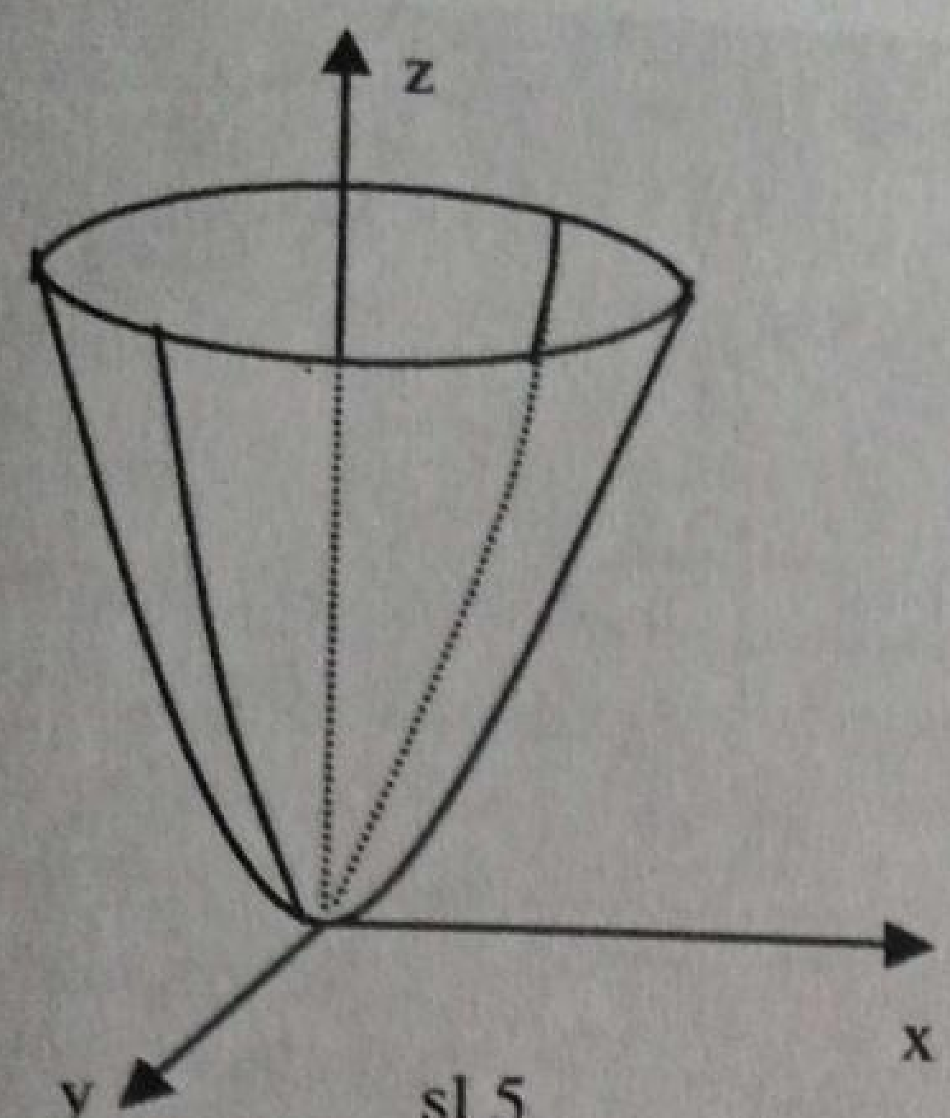
Presjeci hiperbolida sa vertikalnim ravnima x=h ili y=h su hiperbole $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-\frac{h^2}{a^2}-1$ ili

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-\frac{h^2}{b^2}-1$.

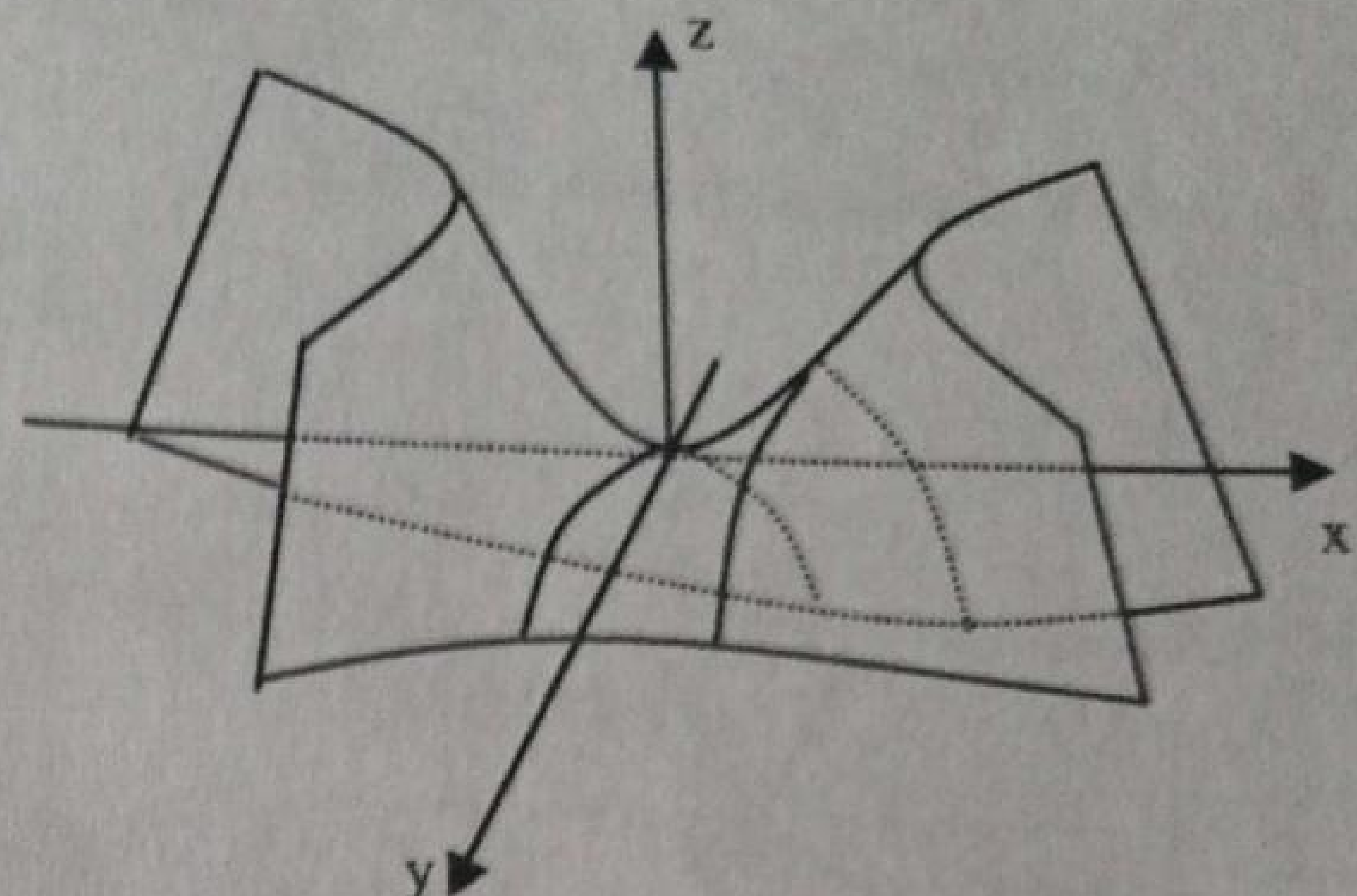
5. Eliptički paraboliod sa parametrima a,b i p i tjemenom u koordinatnom početku ima jednačinu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz$$

(sl 5). Presjeci paraboloida sa horizontalnim ravnima z=h, (h>0 za p>0, h<0 za p<0) su elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2ph$. Presjeci paraboloida sa vertikalnim ravnima x=h ili y=h su parabole $\frac{y^2}{b^2}=2pz-\frac{h^2}{a^2}$ ili $\frac{x^2}{a^2}=2pz-\frac{h^2}{b^2}$.



sl 5



sl 6

6. Hiperbolički paraboloid sa parametrima a, b i p i tjemenom u koordinatnom početku ima jednačinu

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$$

(sl 6). Presjeci paraboloida sa horizontalnim ravnima z=h su hiperbole $\frac{x^2}{2a^2ph}-\frac{y^2}{2b^2ph}=1$.

Presjeci paraboloida sa vertikalnim ravnima x=h i y=h su parabole $\frac{y^2}{b^2}=-2pz+\frac{h^2}{a^2}$ i $\frac{x^2}{a^2}=2pz+\frac{h^2}{b^2}$.

7. Eliptički konus sa tjemenom u koordinatnom početku i osom Oz ima jednačinu

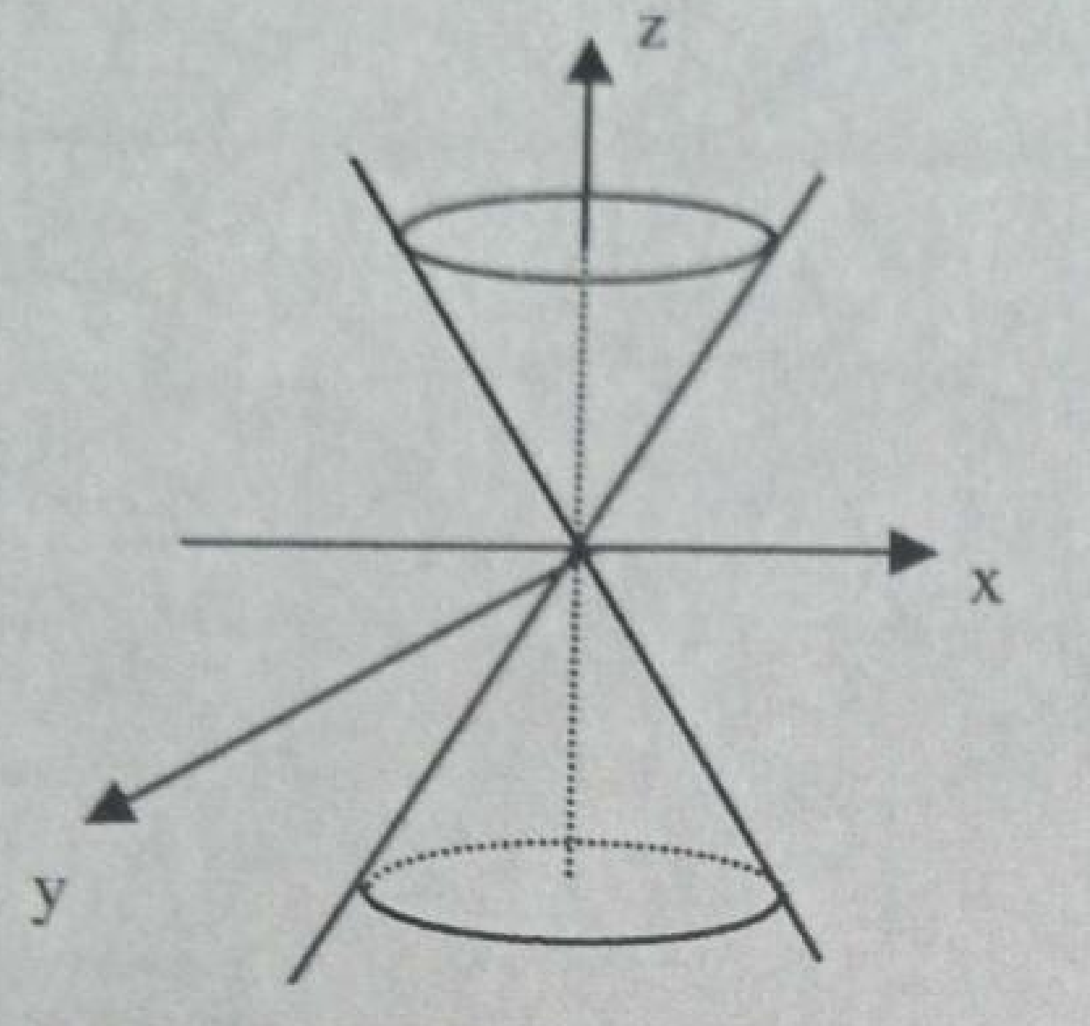
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

(sl 7). Ako je a=b tada se dobija kružni konus. Presjeci konusa sa horizontalnim ravnima z=h su elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}$ (za h=0 dobija se tačka). Presjeci konusa sa vertikalnim ravnima x=h i y=h su hiperbole $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-\frac{h^2}{a^2}$ i $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-\frac{h^2}{b^2}$ za $h\neq 0$, ili par paralelnih pravih: $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ i $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ za h=0.

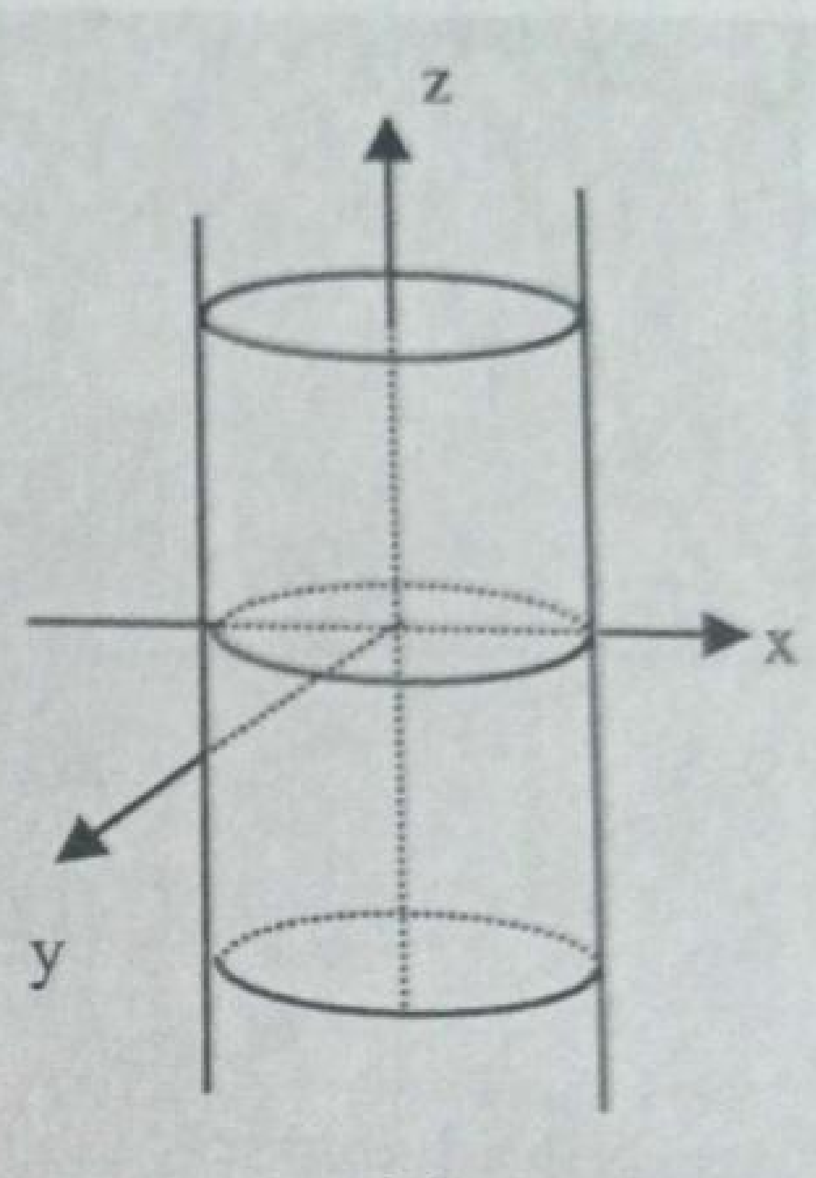
8. Eliptički cilindar ima jednačinu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

(sl 8). Za a=b=R dobijamo kružni cilindar.



sl 7



sl 8

9. Hiperboliki cilindar ima jednačinu

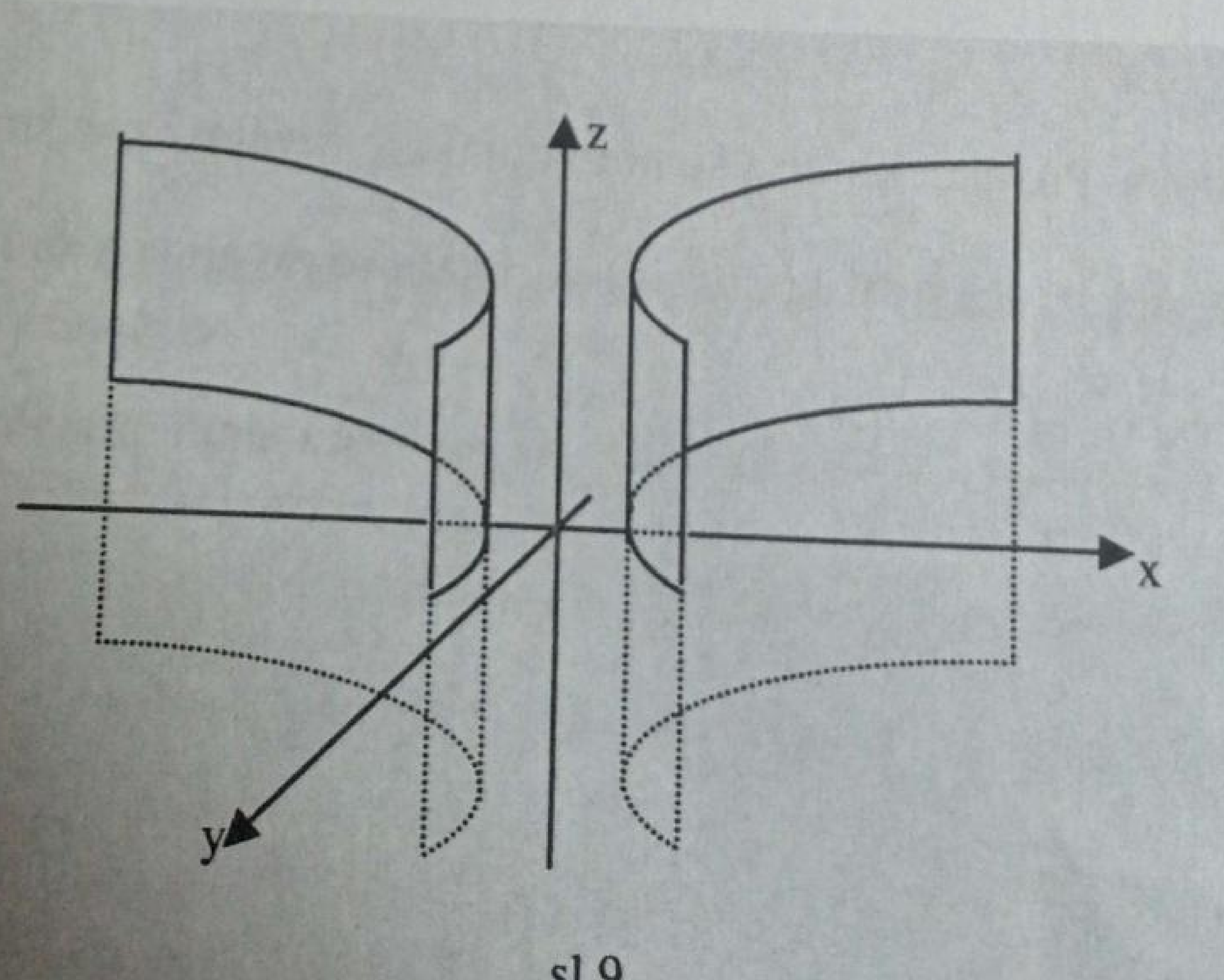
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

(sl 9).

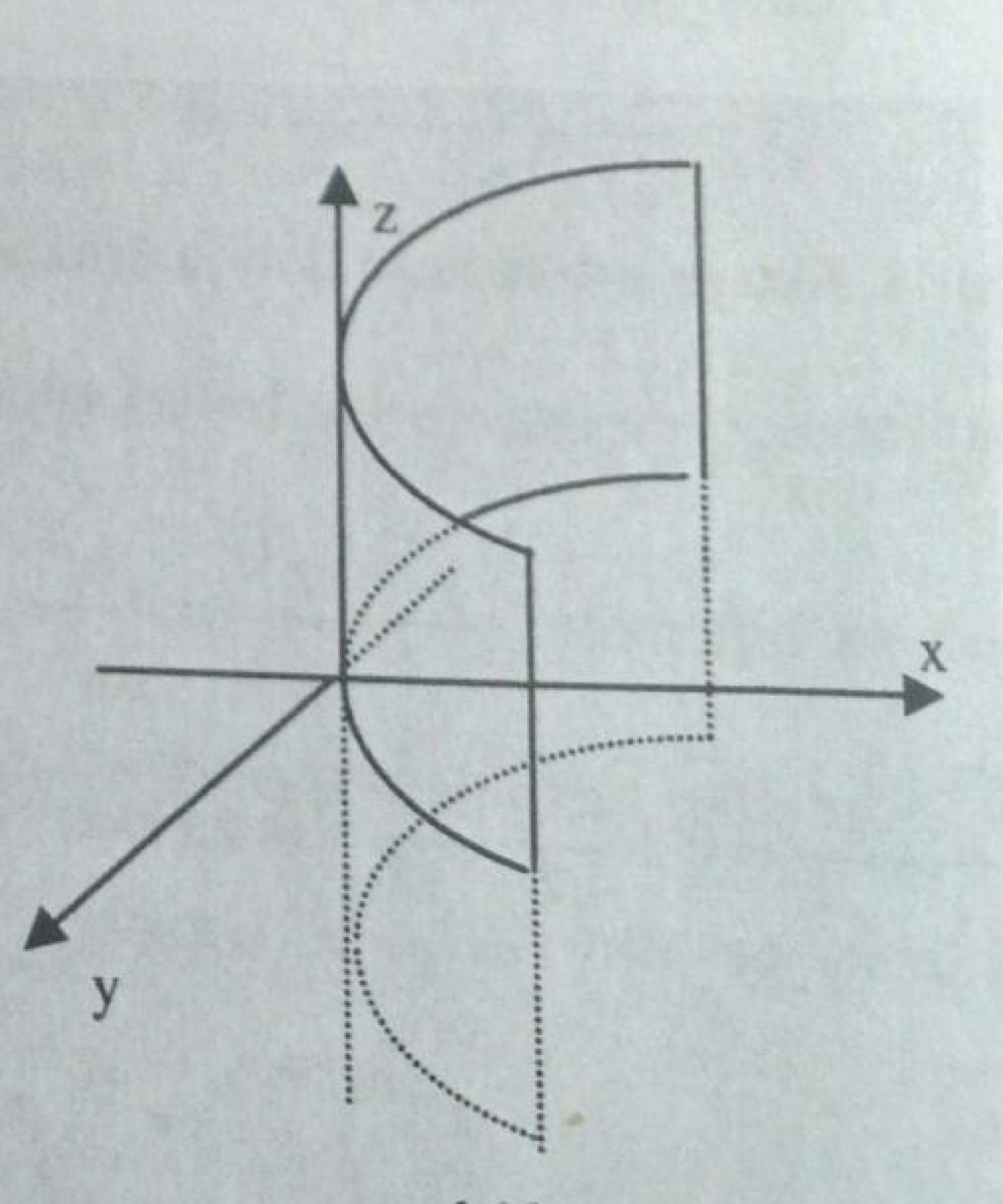
10. Parabolički cilindar ima jednačinu

$$y^2=2px$$

(sl 10).



sl 9



sl 10

Primjer 1. Ustanoviti tip površi i nacrtati je:

1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$, 2) $x^2+y^2-z^2=-1$, 3) $2x^2+y^2=4(z-1)$,

4) $2y=x^2-\frac{z^2}{9}$, 5) $y^2=4z$, 6) $z=4-x^2-y^2$,

7) $x^2-4y^2=z^2$, 8) $x^2=2y-4$, 9) $x^2-2x+y^2+4y+z^2=30$,

10) $x^2-3y^2+4z^2=0$, 11) $x+1=y^2-4y+3z^2+6$.

Rješenje. 1) elipsoid sa poluosama a=2, b=3 i c=4. 2) Dvograni hiperboloid sa osom Oz.
3) Eliptički paraboloid sa tjemenom u tački (0,0,1), usmjeren naviše
4) Hiperbolički paraboloid .
5) Paraboliki cilindar. (osa Ox).
6) Kružni paraboloid sa tjemenom u tački (0,0,4), usmeren naniže.
7) Eliptički konus (osa Ox).
8) Parabolički cilindar (osa Oz).
9) Sfera sa centrom u tački (1,–2,0) i poluprečnikom 5.
10) Konus (sa osom Oy).
11) Eliptiki paraboloid sa tjemenom u tački (–1,2,–1) (pozitivni dio ose Ox).

Primjer 2. Odrediti liniju presjeka površi $(x-4)^2+(y-7)^2+(z+1)^2=36$ i 3x+y–z–9=0.

Rješenje. Označimo sa S prvu a sa α drugu površ. Radi se o sfere S, sa centrom u tački (4,7,–1) i poluprečnikom R=6, i ravni α. Sfera i ravan mogu se sjeći po kružnici, imati jednu zajedničku tački ili nemati zajedničkih tačaka. Da bi odgovorili koja je od ovih mogućnosti, potrebno je naći rastojanje d centra sfere S od ravni α. Kako je $d=\frac{|3\cdot 4+1\cdot 7-1\cdot(-1)-9|}{\sqrt{9+1+1}}=\sqrt{11}<6$, to se sfera S i ravan α sijeku po kružnici. Ova kružnica se nalazi u ravni α. Njen centar O_1 je tačka u kojoj prava, koja sadrži centar sfere S i normalna je na ravan α, prodire ravan α. Lako se pokazuje da je $O_1(1,6,0)$. Poluprečnik presječne kružnice je r=5. Dakle, sfera S i ravan α se sijeku po kružnici: $(x-1)^2+(y-6)^2+z^2=25$, 3x+y–z–9=0.

Primjer 3. Na sferi $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=5$ naći tačku M najbližu ravni π: 3x–4z+19=0 i izračunati rastojanje tačke M od ravni π.

Rješenje. Prvi način: Kroz centar sfere C(1,–2,3) postavimo pravu p koja je normalna na ravan π. U presjeku prave p i date sfere dobijaju se tačke M_1 i M_2, od kojih je jedna tražena tačka. Kako je $p:\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-3}{-4}$, to je x=1+3t, y=–2, z=3–4t, $t\in R$, parametarski oblik jednačine prave p. Zamjenom u jednačinu sfere dobijamo da je $(3t+1-1)^2+(-2+2)^2+(-4t+3-3)^2=5$, odnosno $t=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$. Za $t=\frac{\sqrt{5}}{5}$ dobijamo tačku

$M_1\left(1+\frac{3\sqrt{5}}{5},-2,3-\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$, a za $t=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ tačku $M_2\left(1-\frac{3\sqrt{5}}{5},-2,3+\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$. Kako je $d(M_1,\pi)=\sqrt{5}+2$, a $d(M_2,\pi)=\sqrt{5}-2$, to je M=M_2, tj. $M\left(1-\frac{3\sqrt{5}}{5},-2,3+\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$. Uočimo da je rastojanje tačke M do ravni π jednako $\sqrt{5}-2$. Drugi način: Nađimo jednačinu ravni π_1 paralelne ravni π koja dodiruje datu sferu. Očigledmo postoje takve dvije ravni, od kojih jedna dodiruje datu sferu u traženoj tački. Jednačina ravni π_1 ima oblik $3x-4z+D=0$, gdje se parameter D određuje iz uslova da ravan π_1 dodiruje datu sferu. Uočimo da je rastojanje centra C(1,−2,3) date sfere od ravni π_1 jednako poluprečniku te sfere, tj. $\sqrt{5}$. Slijedi, $\frac{|3\cdot 1-4\cdot 3+D|}{\sqrt{9+16}}=\sqrt{5}$, odnosno $D=9\pm 5\sqrt{5}$. Kako se ravan $\pi_1^{'}:3x-4z+9-5\sqrt{5}=0$ nalazi između ravni π_1 i $\pi_1^{''}:3x-4z+9+5\sqrt{5}=0$, to ostaje da se nađe tačka M dodira date sfere i ravni $\pi_1^{''}$. Uočimo da je ordinate tačke M jednaka −2. Apscisa i aplikata tačke M određuju se kao rješenje sistema jednačina $\begin{cases}(x-1)^2+(z-3)^2=5\\3x-4z+9+5\sqrt{5}=0\end{cases}$.

Primjer 4. Napisati jednačinu sfere koja dodiruje sve tri koordinatne ravni, leži u prvom oktantu i dodiruje ravan π: x+2y+2z−10=0.
Rješenje. Neka je C(a,b,c) centar i R poluprečnik tražene sfere. Rastojanje od centra C do dodirne tačke sa ravni x=0 jednako je poluprečniku R tražene sfere. Slijedi a=R. Na sličan način zaključujemo da je i b=c=R. Kako tražena sfera dodiruje i ravan x+2y+2z−9=0, to je d(C,π)=R. Slijedi, $\frac{|a+2b+2c-10|}{\sqrt{1+4+4}}=R$, odnosno $\frac{|R+2R+2R-10|}{\sqrt{1+4+4}}=R$, tj. R=5 ili $R=\frac{5}{4}$. Ovo znači da postoje dvije sfere koje zadovoljavaju uslove zadatka: $(x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2=25$, $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2+\left(z-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$.

Primjer 5. Napisati jednačinu elipsoida čije su ose poklapaju sa koordinatnim osama, sadrži tačku M(2,0,1) i siječe raven xOy duž elipse $\frac{x^2}{8}+y^2=1$.

Rješenje. Neka je jednačina traženog elipsoida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (1). Kako je presjek elipsoida (1) sa ravni xOy elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, to je $a^2=8$ i $b^2=1$. Dalje, tačka M pripada elipsoidu (1), pa je $c^2=2$. Iz prethodnog slijedi, jednačina traženog elipsoida je $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{2}=1$.

Primjer 6. Napisati jednačine projekcija na koordinatne ravni presjeka elipsoida $x^2+2y^2+z^2=1$ i konusa $x^2+y^2-z^2=0$.

Rješenje. Jednačinu projekcije presjeka na raven x=0 dobijamo eliminacijom promjenljive x iz sistema jednačina: $x^2+2y^2+z^2=1$, $x^2+y^2-z^2=0$. Kako je $x^2=1-2y^2-z^2$ i $x^2=-y^2+z^2$, to je $1-2y^2-z^2=-y^2+z^2$, odnosno $y^2+2z^2=1$. Pokažimo da projekcija presjeka neće biti cijela elipsa. Iz $x^2+2y^2+z^2=1$ imamo da je $2y^2+z^2=1-x^2\le 1$. Dalje je $z^2=\frac{1}{2}\left(1-y^2\right)$, odnosno $2y^2+\frac{1}{2}\left(1-y^2\right)\le 1$, tj. $y^2\le\frac{1}{3}$. Iz prethodnog slijedi da je

jednačina projekcije presjeka sa ravni x=0: $\begin{cases} y^2+2z^2=1 \\ y^2\le\frac{1}{3} \\ x=0 \end{cases}$ .Na sličan način se dobijaju i

jednačine projekcije presjeka sa ravnima y=0 i z=0: $\begin{cases} 3z^2-x^2=1 \\ z^2\le\frac{1}{2} \\ y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} 2x^2+3y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$.

Primjer 7. Dokazati da je presjek ravni z+1=0 i jednogranog hiperboloida $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2}=1$ hiperbola. Naći njene poluose i tjemena.

Rješenje: Iz sistema jednačina $\begin{cases} \frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2}=1 \\ z+1=0 \end{cases}$ dobijamo da je $\begin{cases} \frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}=\frac{1}{2} \\ z=-1 \end{cases}$, tj.

$\begin{cases} \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1 \\ z=-1 \end{cases}$. Dakle, presjek zadatog hiperboloida sa ravni z=−1 je hiperbola sa poluosama 4 i 3 i tjemenima $(4,0,-1)$ i $(-4,0,-1)$.

Primjer 8. Odrediti one vrijednosti parametra m za koje je presjek dvogranog hiperboloida $x^2+y^2-z^2=-1$ i ravni x+mz−1=0: a) elipsa, b) hiperbola.

Rješenje: Iz sistema jednačina $\begin{cases} x=1-mz \\ x^2+y^2-z^2=-1 \end{cases}$ dobijamo da presječna kriva ima jednačinu

$\begin{cases} x=1-mz \\ (1-mz)^2+y^2-z^2=-1 \end{cases}$, tj. $\begin{cases} x=1-mz \\ (m^2-1)z^2-2mz+y^2=-2 \end{cases}$. Da bi presječna kriva bila elipsa ili hiperbola, neophodno je da parameter m ispunjava uslov $m^2\neq 1$. Dakle, dijeljenjem sa m^2-1 i daljim sređivanjem dobijamo da presječna kriva ima jednačinu

$$\begin{cases} x = 1 - mz \\ \dfrac{\left(z - \dfrac{m}{m^2-1}\right)^2}{\dfrac{2-m^2}{\left(m^2-1\right)^2}} + \dfrac{y^2}{\dfrac{2-m^2}{\left(m^2-1\right)}} = 1 \end{cases}$$ (1). Ako je $2 - m^2 > 0$ i $m^2 - 1 > 0$ (tj. $1 < |m| < \sqrt{2}$),

tada jednačina (1) predstavlja jednačinu elipse. Ako je $2 - m^2 > 0$ i $m^2 - 1 < 0$ (tj. $|m| < 1$), tada jednačina (1) predstavlja jednačinu hiperbole.

Primjer 9. Naći jednačinu površi ako je zbir rastojanja bilo koje njene tačke do tačaka $F_1(0,0,-4)$ i $F_2(0,0,4)$ jednak 10.

Rješenje. Označimo sa $M(x,y,z)$ proizvoljnu tačku tražene površi. Tada je $d(M,F_1)+d(M,F_2)=10$, odnosno $d^2(M,F_1)=100-20d(M,F_2)+d^2(M,F_2)$. Dalje je $x^2 + y^2 + (z+4)^2 = 100 - 20\sqrt{x^2 + y^2 + (z-4)^2} + x^2 + y^2 + (z-4)^2$, odnosno $4z = 25 - 5\sqrt{x^2 + y^2 + (z-4)^2}$, tj. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{25} = 1$. Tražena površ je ellipsoid sa poluosama 3,3 i 5.