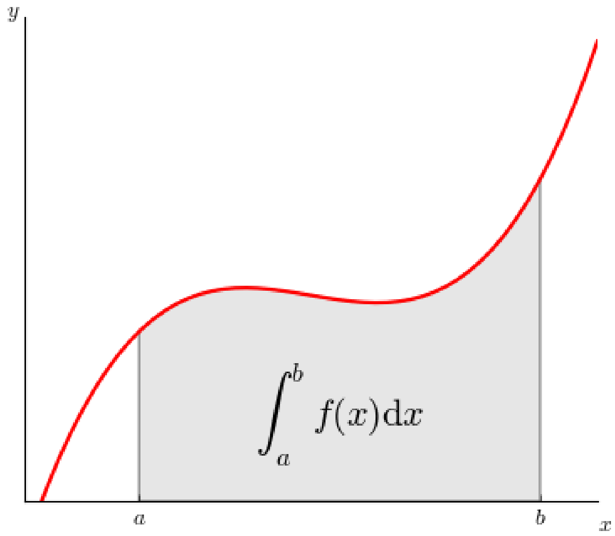
Zaštita životne sredine
Metalurško-tehnološki fakultet
Univerzitet Crne Gore

Određeni integral

Materijal za završni ispit iz predmeta *Matematika*

Decembar 2017.



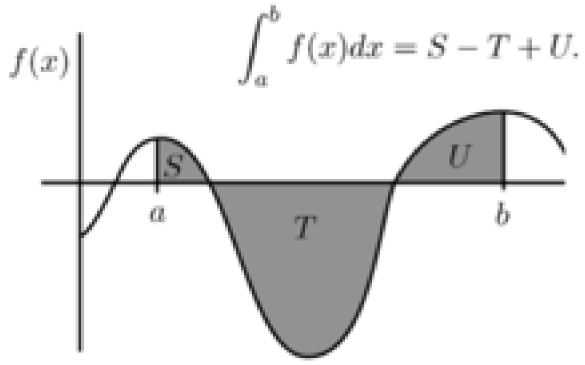
Slika 1. Određeni integral nenegativne funkcije.

Geometrijsko značenje određenog integrala Neka je funkcija $f(x)$ neprekidna na intervalu $[a, b]$ takva da važi $f(x) \geq 0$. *Određeni integral* funkcije f na intervalu $[a, b]$ je broj koji je jednak površini figure ograničene grafikom funkcije $f(x)$, osom Ox i pravama $x = a$ i $x = b$ (vidi sliku 1). Koristimo oznaku:

$$P = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Ako grafik funkcije f na intervalu $[a, b]$ nije iznad Ox ose (tj. ako nije zadovoljen uslov $f(x) \geq 0$) onda je određeni integral jednak *orijentisanoj površini* dijela ravni između grafika funkcije i ose Ox: površine djelova ravni koji su iznad ose Ox sabiraju se sa pozitivnim predznakom, a površine djelova ravni koji su ispod Ox ose sa negativnim predznakom.

Ovo je ilustrovano na slici 2: Određeni integral funkcije f na intervalu $[a, b]$ jednak je zbiru površina ograniěnih grafikom funkcije i osom Ox, pri čemu se djelovi S i U sabiraju sa preznakom "+" (jer se nalaze iznad ose), a dio T se sabira sa predznakom "-", tj. oduzima se (jer se nalazi ispod ose).



Slika 2. Određeni integral neprekidne funkcije koja nije nenegativna.

Njutnov-Lajbnicova formula: Ako je $F'(x) = f(x)$ tj.:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

onda se odredjeni integral može računati koristeći sljedeću formulu:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Razliku $F(b) - F(a)$ često označavamo sa $F(x)\big|_a^b$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b .$$

Primjeri

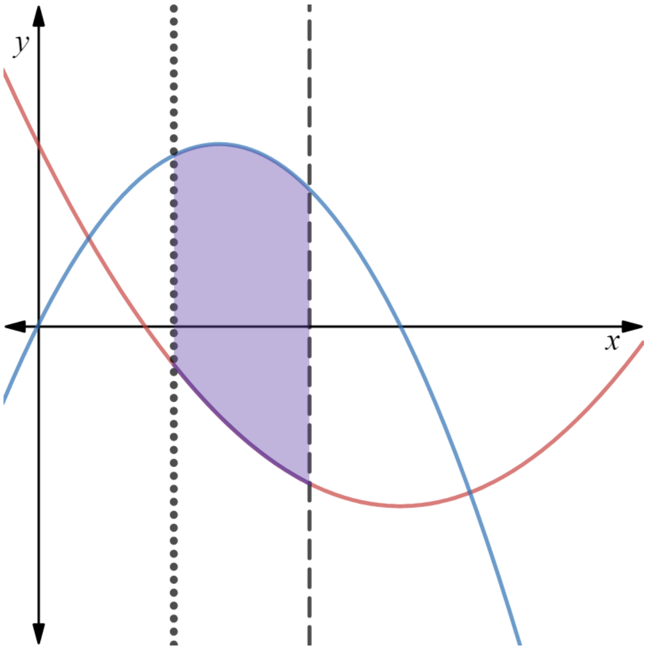
1. $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$

2. $\displaystyle\int\limits_1^4 \sqrt{x}dx = \int\limits_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^4 = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\bigg|_1^4 = \frac{2}{3}\sqrt{4}^3 - \frac{2}{3}\sqrt{1}^3 = \frac{14}{3}$

3. $$\begin{aligned}\int\limits_{-1}^3 \left(1 - 2x + 3x^2\right)dx &= \left(x - 2\frac{x}{2} + 3\frac{x^3}{3}\right)\bigg|_{-1}^3 = \left(x - x^2 + x^3\right)\big|_{-1}^3 \\ &= \left(3 - 3^2 + 3^3\right) - \left(-1 - (-1)^2 + (-1)^3\right) \\ &= 3 - 9 + 27 - (-1 - 1 - 1) = 24\end{aligned}$$

Površina između dvije krive Ako su $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne funkcije na intervalu $[a, b]$ takve da je $f(x) \geq g(x)$ onda je površina figure ograničene pravama $x = a$ i $x = b$ i graficima datih funkcija (vidi sliku 3) data sa:

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$



Slika 3. Određeni integral nenegativne funkcije.

Specijalno, ako se krive $y = f(x)$ i $y = g(x)$ sijeku u tačkama čije su x-koordinate a i b redom, onda prethodna formula predstavlja površinu figure ograničene tim krivama (vidi primjer u nastavku).

Primijetimo da u ovom slučaju ne moramo voditi računa o tome da li se grafici nalaze iznad ili ispod Ox ose.

Primjer: Izračunati površinu figure koja je ograničena parabolom $y = x^2 - 2x - 1$ i pravom $y = 1 - x$.

Rješenje:

Na slici 4 su skicirane date krive i figura čija se površina traži.

U prvom koraku pronađemo x-koordinate tačaka presjeka prave i krive. To radimo tako što izjednačimo izraze za y, i riješimo dobijenu jednačinu.

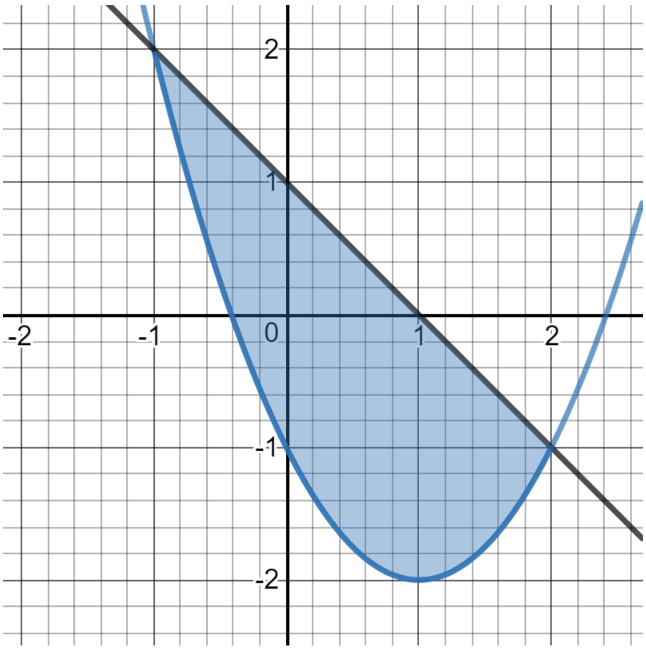
$$1 - x = x^2 - 2x - 1.$$

Posljednja jednačina je ekvivalentna jednačini $x^2 - x - 2 = 0$ čija su rješenja $x = -1$ o $x = 2$. Dakle, površina će biti jednaka određenom integralu na intrvalu $[-1, 2]$

Vidimo da se prava nalazi iznad parabole, pa površinu računamo koristeći gornju formulu:

$$P = \int_{-1}^{2} (\,(1 - x) - (x^2 - 2x - 1)\,)\, dx. = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)\, dx.$$

Posljednji integral se računa slično integralu iz primjera 3. Rješenje je $P = \frac{9}{2}$.



Slika 4. Površina između dvije krive: osjenčena figura je ograničena krivama $y = f(x)$ (plava), $y = g(x)$ (crvena) i pravama $x = a$ (tačkasta) i $x = b$ (isprekidana).