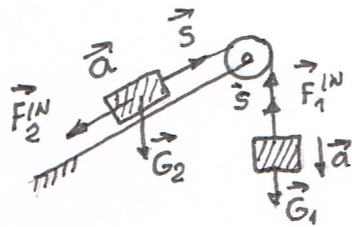


TEHNIČKA MEHANIKA

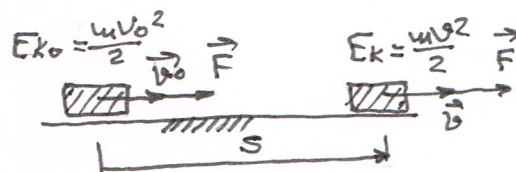
TEORIJA I ZADACI

2. KOLOKVIJUM

- DALAMBEROV PRINCIP



- RAD. ENERGIJA, SNAGA ...

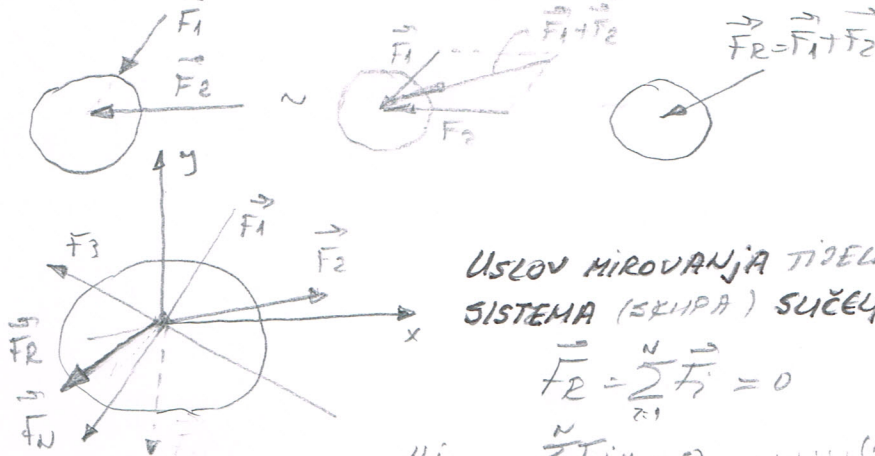


10. 11. 2017.

STATIKA

SILA - JE MERA UZAJAMNOG DEJSTVA DVA TIJELA

SILA JE VEKTORSKA VELICINA: $\vec{F}, \vec{G}, \vec{R}, \vec{N}, \dots$



USLOV MIROVANJA TIJELA POD DEJSTVOM SISTEMA (EKIPA) SUČELNIH SILA JE

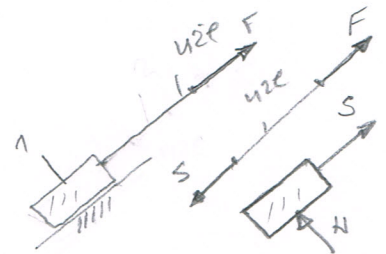
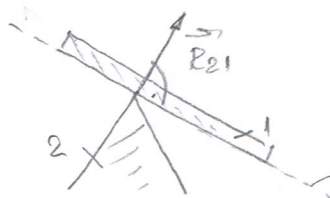
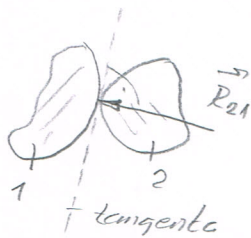
$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0$$

ili $\sum_{i=1}^N F_{ix} = 0 \dots (1.1)$

$\sum_{i=1}^N F_{iy} = 0 \dots (1.2)$

REAKCIJA VEZE - REAKTIVNA SILA JE POSLEDICA KONTAKTA DVA TIJELA.

REAKTIVNA SILA ISKAZUJE UTICAJ JEDNOG TIJELA NA DRUGO STRANO TIJELA



SILA TRENJA KLIZANJA



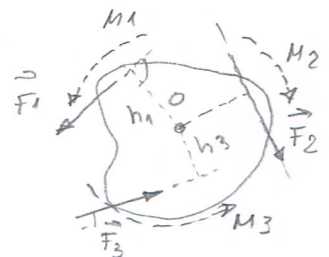
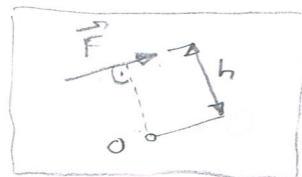
$$F_{tr} = N \cdot f$$

f - KOFICIJENT TRENJA KLIZANJA
N - REAKCIJA VEZE

MOMENT SILE U RAVNI ZA TAČKU I RAVNI

$$M_o = F \cdot h$$

h - KRAJ SILE - NADKRAJČE
RASTOJANJE PRAVCA SILE F ZA MOMENTNU TAČKU O



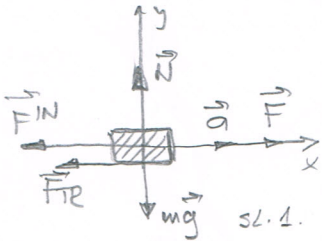
USLOV DA SE TIJELO OKO TAČKE O NE OBRĆE:

$$F_1 \cdot h_1 - F_2 \cdot h_2 + F_3 \cdot h_3 = 0$$

$$\sum_{i=1}^N F_i h_i = \sum_{i=1}^N M_{oi} = 0$$

DINAMIKA

DALAMBEROV PRINCIP



II NJUTNOV ZAKON : $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_{tr}$

DALAMBEROV PRINCIP $\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_{tr} + \vec{F}^{IN} = 0 \dots (1)$

$\vec{F}^{IN} = -m\vec{a}$ - INERCIJALNA SILA - POJAVLJUJE SE KAD NEKA MASA IMA UBRZANJE KAKO PROTNOG SMJERA JE OD UBRZANJA

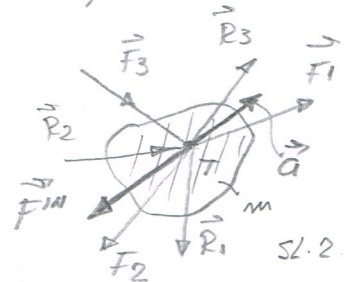
$\sum \vec{F}_i + \sum \vec{R}_i + \vec{F}^{IN} = 0 \dots (1)$

GDE JE: $\sum \vec{F}_i$ - ZBIR SVIH SPOJASNIJIA SILA
 $\sum \vec{R}_i$ - ZBIR SVIH REAKTIVNIH SILA
 \vec{F}^{IN} - INERCIJALNA SILA

UMJESTO JEDNAČINE (1) MOGU SE KORISTITI DVIJE SKALARNE JEDNAČINE:

$\sum F_{ix} + \sum R_{ix} + F_x^{IN} = 0 \dots (1.1)$

$\sum F_{iy} + \sum R_{iy} + F_y^{IN} = 0 \dots (1.2)$



JEDNAČINE (1) TJ. JEDNAČINE (1.1) I (1.2) ODNOSE SE NA **SISTEM SUČEJNIH SILA** - SISTEM SILA KOJI IMA SVOJSTVO DA SE PRAVCI SVIH SILA Sijeku u JEDNOJ TAČKI (SLIKA 2.).

DALAMBEROV PRINCIP ZA TIJELO KOJE SE OBRĆE

VAŽI : $J_0 \cdot \epsilon = M$ - JEDNAČINA OBRATANJA

J_0 - AKSIJALNI MOMENT INERCIJE TIJELA U ODNOSU NA OSU OBRATANJA

ϵ - UGAONO UBRZANJE

M - MOMENT SPOJASNIJIA SILA; M^{IN} - MOMENT INERCIJALNIH SILA

$M^{IN} = -J_0 \epsilon$; $M + M^{IN} = 0 \dots (3)$

TIJELO SE NEĆE OBRTATI OKO TAČKE O ALO JE ZBIR SVIH MOMENATA JEDNAK NULI TJ:

AKO JE $F_1 \cdot h_1 + F_2 \cdot h_2 - F_3 \cdot h_3 = 0$

MOMENTI SILA F_1 I F_2 SU ISTOG ZNAKA JER OBRĆU u ISTOM SMJERU TIJELO, A MOMENT SILE F_3 JE NEGATIVAN JER OBRĆE TIJELO u SUPROTNOM SMJERU OD POZITIVNOG SMJERA URETOG ZA SILE F_1 I F_2

DAKLE, TIJELO SE NE OBRĆE AKO JE $\sum M_i = M_1 + M_2 + M_3 + \dots = 0$
 AKO JE ZADOVOLJENO DA JE $\sum \vec{F}_i = 0$ TIJELO SE NEĆE NI POHNJEKATI.

DAKLE AKO JE ISPUNJENO:

$\sum \vec{F}_i = 0$

$\sum M_i = 0$

$\sum F_{ix} = 0$

$\sum F_{iy} = 0$

$\sum M_i = 0$

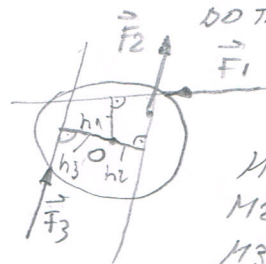
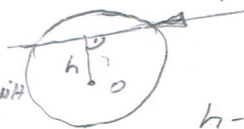
TIJELO MIKNE

POD DEJSTVOM SISTEMA SILA u RAVNI.



$M_0 = F \cdot h$

h - KRAK SILE - NAJKRACE RASTOJANJE PRAVCA SILE DO TAČKE OBRATANJA



$M_1 = F_1 \cdot h_1$

$M_2 = F_2 \cdot h_2$

$M_3 = -F_3 \cdot h_3$

• RAD • ENERGIJA • SNAGA ...

$$V = V_0 + a \cdot t \quad \dots (1)$$

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2} \quad \dots (2)$$

$$F_v - F_o = m \cdot a \quad (3)$$

JEDNAČINE (1) i (2) su JEDNAČINE KOJE OPISUJU JEDNOLIKO PROMENJIVO KRETANJE TAČKE BEZ UZIMANJA U OBZIR MASE TAČKE I SILA
 JEDNAČINA (3) PREDSTAVLJA 11 NJUTONOV ZAKON



F_v - aktivna - vučna sila
 F_o - sila otpora
 m - masa
 a - ubrzanje

$$E_{k0} = \frac{mV_0^2}{2} ; V_0 - \text{POČETNA BRZINA}$$

$$E_k = \frac{mV^2}{2} ; V - \text{KRAJNJA BRZINA}$$

$$E_k = \frac{mV^2}{2} - \text{KINETIČKA ENERGIJA MASE KOJA IMA BRZINU V}$$

$$A^{F_v} = F_v \cdot S - \text{RAD VUČNE SILE}$$

S - pomjeranje

$$A^{F_o} = F_o \cdot S - \text{RAD SILE OTPORA}$$

$$A = F \cdot S - \text{RAD KONSTANTNE SILE F NA POMJERANJU (PROMJENI PUTA S)}$$

$$P_0 = V_0 \cdot F_v - \text{SNAGA U POČETNOM TREUTKU}$$

$$P = V \cdot F_v - \text{SNAGA U PROMJENJIVOM TREUTKU}$$

$$E_k - E_{k0} = A - \text{TEOREMA O PROMJENI KINETIČKE ENERGIJE}$$

$$P_{sr} = \frac{P_0 + P}{2} = F_v \left(\frac{V_0 + V}{2} \right) = F_v \cdot V_{sr}$$

E_k - KINETIČKA ENERGIJA U PROMJENJIVOM TREUTKU (POLOŽAJU)

$$P_{sr} = F_v \cdot \frac{S}{t} = \frac{A}{t} ; V_{sr} = \frac{S}{t}$$

E_{k0} - KINETIČKA ENERGIJA U POČETNOM TREUTKU (POLOŽAJU)

$$P - P_0 = F_v (V - V_0) =$$

$$= m \cdot a \cdot a \cdot t$$

$$= m a^2 t$$

A - RAD SILE NA POMJERANJU IZMEDU DVA UČEĆA A OLSAJA

$$a = \sqrt{\frac{P - P_0}{m \cdot t}}$$

$A = F \cdot S$
 $P = V \cdot F$ - SNAGA SILE F KADA SE NAPADNA TAČKA SILE PROMJERA BRZINOM V

$$P_{sr} = F \cdot V_{sr} ; V_{sr} = \frac{V_0 + V}{2}$$

V_{sr} - SREDNJA BRZINA

P_{sr} - SREDNJA SNAGA

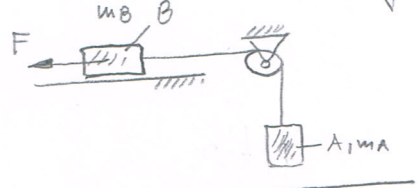
$$P_{sr} = \frac{A}{t} = F \cdot \frac{S}{t} = F V_{sr}$$

ZADATAK

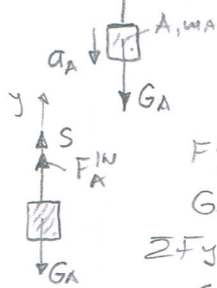
DVA TIJELA A i B MASA m_A i m_B POVEZANA SU NEELASTIČNIM UČETOM KAO NA SLICI. ODREDITI UBRAZANJE TERETA A AKO NA TIJELA DJELUJE SILA F KAO NA SLICI. TRENJE ZANEHARITI, ZATIM ODREDITI I SILU U UČETU.

1°

POZNATO JE: $m_A = 3m$ $a_A = ?$
 $m_B = m$
 $F = 2mg$



$a_B = a_A = a$
 (NEELASTIČNO UČE)

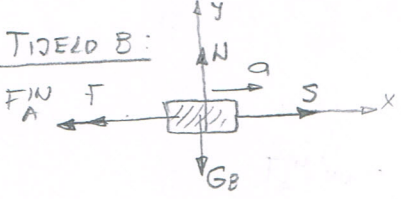


TIJELO A:

$F_A^{IN} = m_A \cdot a = 3ma$
 $G_A = m_A g = 3mg$

$\sum F_y = 0$
 $S + F_A^{IN} - G_A = 0$
 $S + 3ma - 3mg = 0 \dots (2)$

TIJELO B:



$\sum F_x = 0$
 $S - F - F_B^{IN} = 0$
 $S - 2mg - ma = 0 \dots (1)$

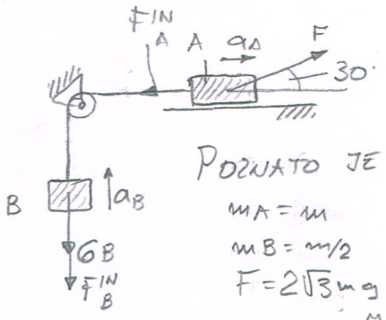
$F_A^{IN} = m_B \cdot a = ma$
 $G_B = m_B g = mg$

$\sum F_y = 0 \quad N - G_B = 0 \Rightarrow N = mg$

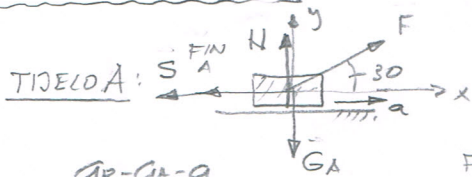
12 (1) i (2)

$3mg - 3ma - 2mg - ma = 0$
 $4ma = mg \quad a = \frac{g}{4} \Rightarrow S = \frac{9}{4} mg$

2°



POZNATO JE:
 $m_A = m$
 $m_B = m/2$
 $F = 2\sqrt{3}mg$



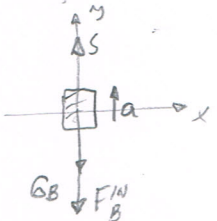
$a_B = a_A = a$
 $F_A^{IN} = mg$
 $F_B^{IN} = \frac{mg}{2}$

$\sum F_y = 0: N - G_A = 0$
 $N = mg$

$\sum F_x = 0$
 $F \cos 30 - S - F_A^{IN} = 0$

$F \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - S - ma = 0 \dots (1)$

TIJELO B



$\sum F_y = 0$
 $S - G_B - F_B^{IN} = 0$
 $S - \frac{mg}{2} - \frac{mg}{2} = 0 \dots (2) \Rightarrow S = \frac{mg + ma}{2}$

12 (1) i (2)

$F \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - (\frac{mg+ma}{2}) - ma = 0$
 $2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot mg - \frac{mg}{2} - \frac{ma}{2} - ma = 0$
 $mg(3 - \frac{1}{2}) = ma(\frac{1}{2} + 1)$

$S = \frac{1}{3} mg \leftarrow \frac{3a}{2} = \frac{5g}{2}, a = \frac{5g}{3}$

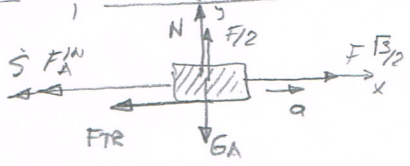
NAPOMENA

AKO SE ZADATKU 2° TRENJE NE ZANEHARUJE TI AKO JE PODLOGA HRA-PRAVA I AKO JE KOEFICIJENT TRENJA KLIZANJA f , I NDE $f = \frac{1}{2} = 0,5$ ZADATAK 2° SADA IMA RJEŠENJE:

ZA TIJELO B VAŽI SVE ISTO:

$S = \frac{mg + ma}{2} \dots (1)$

ZA TIJELO A:



MOGA SE UZETI U OBZIR SILA TRENJA:

$F_{TR} = N \cdot f$

$\sum F_y = 0 \quad N + \frac{F}{2} - G_A = 0 \Rightarrow N = \frac{F}{2} - G_A$

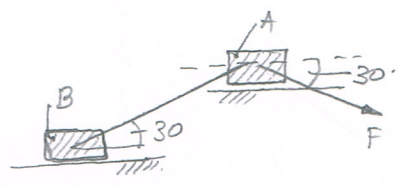
$N = \frac{2\sqrt{3}mg}{2} - mg = mg(\sqrt{3} - 1)$

$F_{TR} = N \cdot f = mg(\sqrt{3} - 1) f$

$\sum F_x = 0 \quad F \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - S - F_A^{IN} - F_{TR} = 0$

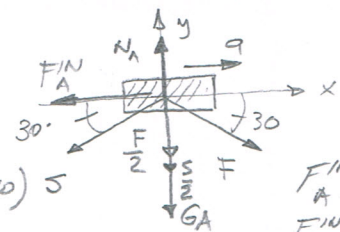
$F \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - (\frac{mg+ma}{2}) - ma - mg(\sqrt{3}-1)f = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{3}g - \frac{2}{3}g(\sqrt{3}-1)f = \frac{(6-\sqrt{3})}{3} \cdot g$

30



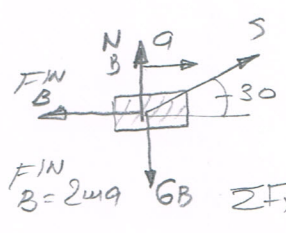
POZVATO JE:
 $m_A = m$
 $m_B = 2m$
 $F = 4mg$
 $a = ?$

TJELO A:



$a_A = a_B = a$
 (LICE NEISTEBIVO)
 $F_A^N = m_A \cdot a$
 $F_A^N = m \cdot a$

TJELO B:



$\sum F_y = 0: N_B + \frac{S}{2} - G_B = 0$
 $N_B = G_B - \frac{S}{2}$

$\sum F_x = 0: S \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - F_B^N = 0 \Rightarrow S = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 2ma$
 $S = \frac{4}{\sqrt{3}} ma \dots (2)$

SADA JE $S = \frac{8}{3} mg$

$\sum F_y = 0: N_A = \frac{F}{2} + \frac{S}{2} + G_A$

$\sum F_x = 0$

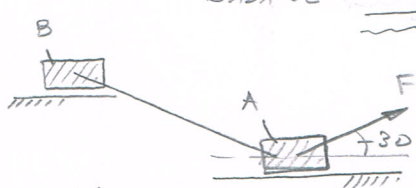
$F \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - F_A^N - S \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \dots (1)$

iz (1) i (2) \Rightarrow :

$F \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - ma - \frac{4}{\sqrt{3}} ma \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

$4mg \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 3ma = 0 \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{3}}{3} g$

40



POZVATO JE:
 $m_A = 4m$
 $m_B = 2m$
 $F = 4mg$
 $a = ?$

TJELO A:

$\sum F_y = 0: N_A + F \cdot \frac{1}{2} + S \cdot \frac{1}{2} - G_A = 0 \dots (1)$

$N_A = G_A - \frac{F}{2} - \frac{S}{2}$

$\sum F_x = 0: F \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - S \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - F_A^N = 0 \dots (2)$

$4mg \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - S \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 4m \cdot a = 0$

TJELO B:

$\sum F_y = 0: N_B - G_B - S \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$
 $N_B = G_B + S \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \dots (3)$

$\sum F_x = 0: S \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - F_B^N = 0$

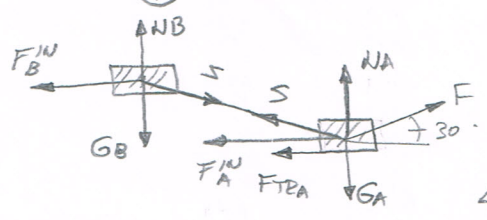
$S = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 2m \cdot a = \frac{4}{\sqrt{3}} a \dots (4)$

iz (2) i (4):

$4mg \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 2ma \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 4ma = 0$

$4mg \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6ma \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{3} g; S = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} g \Rightarrow S = \frac{4g}{3}$

NAPOМЕНА: AKO SE U ZADATKU 40 UZME DA JE PODLOGA IZMEDU TIJELA A I PODLOGE HRAPAVA, I DA JE KOEFICIENT TRENJA KLIZANJA $f; f = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,87$ ONDA ZADATK 40 IMA RJESENJE:



JEDNAČINA (1) ZA TIJELO A GLASI:

$N_A + \frac{F}{2} + \frac{S}{2} - G_A = 0 \Rightarrow N_A = G_A - \frac{F}{2} - \frac{S}{2} \dots (1')$

JEDNAČINA (2) SADA IZGLEDA:

$4mg \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - S \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 4ma - F_{T(A)} = 0$

$F_{T(A)} = (G_A - \frac{F}{2} - \frac{S}{2}) \cdot f$

$F_{T(A)} = (4mg - \frac{4mg}{2} - \frac{S}{2}) \cdot f$

$F_{T(A)} = 2mg \cdot f - \frac{S \cdot f}{2}$

$F_{T(A)} = mg\sqrt{3} - \frac{S\sqrt{3}}{4}$

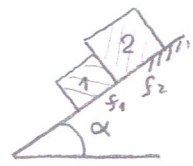
$2mg\sqrt{3} - S \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 4ma - mg\sqrt{3} + \frac{S \cdot \sqrt{3}}{4} = 0$
 $mg\sqrt{3} - \frac{S\sqrt{3}}{4} - 4ma = 0 \dots (2')$

JEDNAČINE (3) I (4) ZA TIJELO B OSTAJU ISTE, PA IZ (4) I (2'):

$mg\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} a - 4ma = 0 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{5} g; S = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{5} g \Rightarrow S = \frac{4g}{5}$

ZADATAK

NA STRMOJ RAVNI NAGIBNOG UGLOVA α POSTAVLJENA SU DVA TIJELA 1 I 2 KOJA SE DODIRUJU. MASE TIJELA SU m_1 I m_2 , A KOEFCIJENT TREKTA KLIZANJA O PODLOGI TIJELA 1 I 2 SU RESPEKTIVNO f_1 I f_2 PRI ČEMU JE $f_1 > f_2$.

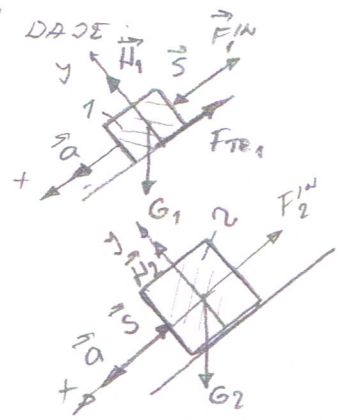


ODREDITI SILU UZAJAMNOG DEJSTVA IZMEBU TIJELA ZA VRIJEME KRETANJA

DALAMBEROV PRINCIP ZA TIJELO "1" I ZA TIJELO "2" DAJE:

"1" : $\vec{S} + \vec{N}_1 + \vec{F}_1^{IN} + \vec{G}_1 + \vec{F}_{TR1} = 0 \dots (1)$
 $G_1 = m_1 \cdot g$ \vec{S} - SILA UZAJAMNOG DEJSTVA
 $F_{TR1} = N_1 \cdot f_1$
 $F_1^{IN} = m_1 a$

"2" : $\vec{S} + \vec{N}_2 + \vec{F}_2^{IN} + \vec{G}_2 + \vec{F}_{TR2} = 0 \dots (2)$
 $G_2 = m_2 \cdot g$
 $F_{TR2} = N_2 \cdot f_2$
 $F_2^{IN} = m_2 \cdot a$



(1) y-osa : $N_1 - G_1 \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_1 = m_1 g \cos \alpha$; $F_{TR1} = m_1 g \cos \alpha \cdot f_1$
 (2) y-osa : $N_2 - G_2 \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_2 = m_2 g \cos \alpha$; $F_{TR2} = m_2 g \cos \alpha \cdot f_2$
 (1) x-osa : $S + m_1 g \sin \alpha - m_1 a - m_1 g \cos \alpha \cdot f_1 = 0 \dots (a)$
 (2) x-osa : $-S + m_2 g \sin \alpha - m_2 a - m_2 g \cos \alpha \cdot f_2 = 0 \dots (b)$

KADA (1) POMNOŽIMO SA m_1 A (2) SA m_2 ; ODUZMEMO DOBIJAMO:

$$S = \frac{(f_1 - f_2) m_1 \cdot m_2 \cos \alpha}{m_1 + m_2}$$

Ali (a) i (b) SABREM:

$$(m_1 + m_2) g \sin \alpha - (m_1 + m_2) a - (m_1 f_1 + m_2 f_2) g \cos \alpha = 0$$

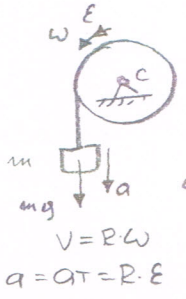
DOBIJA SE:

$$a = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2} \sin \alpha - \frac{(m_1 f_1 + m_2 f_2) \cos \alpha}{m_1 + m_2} \cdot g$$

ZADATAK

PREKO KOTURBA MASE m_1 POLUPREČNIKA R PREBAČENO JE UŽE NA EIJIJIM SE KRAJEVIMA NALAZE MASE m ; $m_1 = 4m$
 KADA SE OTRAČI DESNA MASA KOTUR I LIJEVI TERET POČINJU DA SE KREĆU.

- ODREDITI:
- UBRZANJE TERETA I UGADNO UBRZANJE KOTURBA
 - SILU U UŽETU
 - UGADNU BRZINU KOTURBA KADA SE TERET SPAUSTI ZA VISINU H .



TERET:

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{1N} + S = mg$$

$$mg + S = mg \dots (1)$$

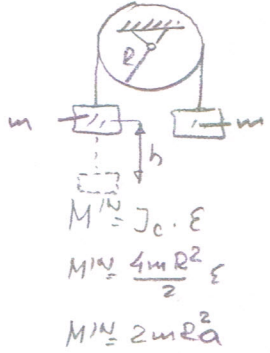
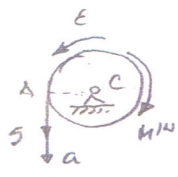
KOTUR:

$$\sum M_c = 0$$

$$S \cdot R - M^{1N} = 0$$

$$S = 2mR\alpha \dots (2)$$

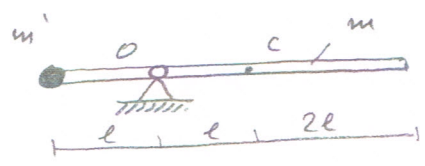
IZ (1) I (2) $\Rightarrow a = \frac{g}{3}; \epsilon = \frac{g}{3R}; S = \frac{2}{3}mg$



$v = R\omega$
 $a = a_T = R \cdot \epsilon$
 c) $\epsilon = \text{const}; \omega_0 = 0; \omega = \epsilon t; \varphi = \frac{\epsilon t^2}{2} \Rightarrow \omega^2 = 2\epsilon\varphi \Rightarrow \omega^2 = \frac{2g}{3R} \cdot \frac{H}{R} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2gH}{3R^2}}$

ZADATAK

GREDA MASE m I DULJINE $4l$ IZ POLOŽAJA PRIKAZANOG NA SLICI POČINJE OBRZTANJE U VERTIKALNOJ RAVNI OKO ZGLOBA A. NA KRAJU GREDE NALAZI SE MATERIJALNA TAČKA MASE $m' = 2m$



ODREDITI UGADNO UBRZANJE GREDE NEPOSREDNO POSLE POČEKA KRETANJA (KADA JE UGADNA BRZINA JEDNAKA NULI).

SVE SILE I MOMENTI KOJI DJELOJU NA GREDE SU PRIKAZANI NA SLICI

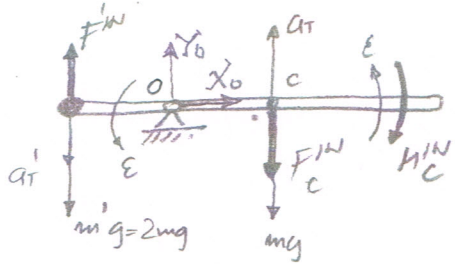
$$\sum M_D = 0$$

$$2mg \cdot l - mg \cdot l - F_{1N} \cdot l - F_{1N} \cdot l - M_c^{1N} = 0 \dots (1)$$

$$F_{1N} = m \cdot a_T = m \cdot \epsilon \cdot l$$

$$F_{1N} = m' \cdot a_T' = 2m \cdot a_T' = 2m \cdot \epsilon \cdot l$$

$$M_c^{1N} = J_c \cdot \epsilon = \frac{m(4l)^2}{12} \cdot \epsilon = \frac{4}{3} ml^2 \epsilon$$



$$(1) \Rightarrow 2mgl - mgl - 2ml^2\epsilon - ml^2\epsilon - \frac{4}{3}ml^2\epsilon = 0$$

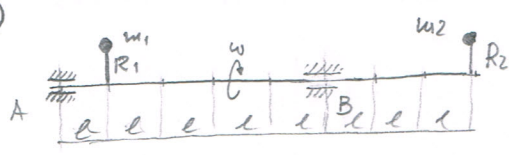
$$\epsilon = \frac{3}{13}g$$

ZADATAK

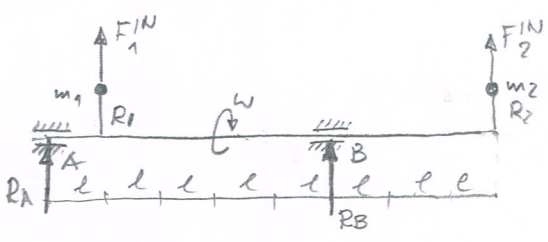
VRATILU SE NALAZI U LEŽIŠTIMA A I B ROTIRA KONSTANTNOM UGAONOM BRZINOM ω . NA VRATILU SE NALAZE DVIJE MASE: m_1 I m_2 NA RASTOJANJIMA R_1 I R_2 OD OSE VRATILA, KAO NA SLICI. ODREDITI REAKTIVNE SILE R_A , R_B U LEŽIŠTIMA A I B USLED INERCIJALNOG OPTEREĆENJA

POZNATO JE: $m_1 = 2\text{kg}$; $m_2 = 1\text{kg}$; $\omega = 185^\circ/\text{s}$
 $R_1 = 0,1\text{m}$; $R_2 = 0,2\text{m}$; $l = 0,2\text{m}$

10



10



$$F_{1N} = R_1 \cdot \omega^2 \cdot m_1 = 0,1 \cdot 185^2 \cdot 2 = 64,8\text{N}$$

$$F_{2N} = R_2 \cdot \omega^2 \cdot m_2 = 0,2 \cdot 185^2 \cdot 1 = 64,8\text{N}$$

$$\sum F_V = 0 \quad R_A + R_B + F_{1N} + F_{2N} = 0 \Rightarrow R_A + R_B = -64,8 - 64,8$$

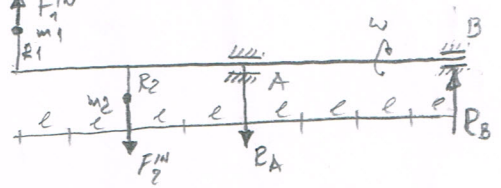
$$R_A + R_B = -129,6\text{N}$$

$$\sum M_A = 0 \quad F_{1N} \cdot l + F_{2N} \cdot 8l + R_B \cdot 5l = 0 \Rightarrow R_B = \frac{-9 \cdot F_{1N}}{5} = -116,64\text{N}$$

$$R_A = -129,6 - R_B$$

$$R_A = -129,6 + 116,64 = -12,96\text{N}$$

20



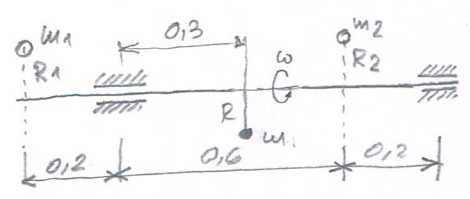
$$\sum F_V = 0 \quad F_{1N} - F_{2N} + R_B - R_A = 0$$

$$64,8 - 64,8 + R_B - R_A = 0 \quad R_B = R_A$$

$$\sum M_A = 0 \quad F_{1N} \cdot 4l - F_{2N} \cdot 2l - R_B \cdot 4l = 0 \Rightarrow R_B \cdot 4 = F_{1N} \cdot 2l \Rightarrow R_B = 32,4\text{N} = R_A$$

ZADATAK

NA VRATILU KOJE ROTIRA KONSTANTNOM UGAONOM BRZINOM NALAZE SE TRI MASE m_1 , m_2 I m_3 NA RASTOJANJIMA R_1 , R_2 I R_3 OD OSE VRATILA KAO NA SLICI. ODREDITI VRIJEDNOSTI MASA m_1 I m_2 TAKO DA REAKCIJE U LEŽIŠTIMA A I B BUDU JEDNAKE NULLI, AKO SE MASA $m = 0,4\text{kg}$ NALAZI NA RASTOJANJU $R = 0,2\text{m}$ (SLIKA) OD OSE VRATILA. RAZMATRATI SAMO INERCIJALNO OPTEREĆENJE. LIJETI $R_1 = 0,2\text{m}$; $R_2 = 0,3\text{m}$



$$\sum F_V = 0 \quad F_{1N} + F_{2N} = F_{3N}$$

$$m_1 R_1 \omega^2 + m_2 R_2 \omega^2 = m R \omega^2$$

$$m_1 \cdot 0,2 + m_2 \cdot 0,3 = 0,4 \cdot 0,2 = 0,08 \dots (1)$$

$$\sum M_C = 0 \quad m_1 R_1 \omega^2 \cdot 0,8 - m R \omega^2 \cdot 0,3 = 0$$

$$m_1 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,4 \cdot 0,2 \cdot 0,3$$

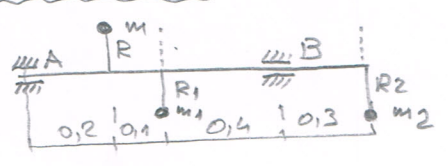
$$m_1 = 0,15\text{kg}$$

$$|2(1) \Rightarrow m_2 = \frac{0,08 - m_1 \cdot 0,2}{0,3}$$

$$m_2 = \frac{0,08 - 0,15 \cdot 0,2}{0,3} = 0,367\text{kg}$$

ZADATAK

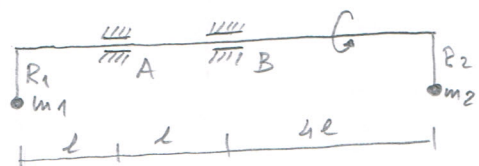
NA VRATILU KOJE ROTIRA KONSTANTNOM BRZINOM 2400ob/min NALAZE SE MASE $m_1 = 0,2\text{kg}$ I $m_2 = 0,8\text{kg}$. KOJIKU TREBA DA SU RASTOJANJA R_1 I R_2 MASA OD OSE OBETAJKA TAKO DA REAKCIJE U LEŽIŠTIMA A I B USLED INERCIJALNOG OPTEREĆENJA BUDU JEDNAKE NULLI AKO SE MASA $m = 0,4\text{kg}$ NALAZI NA RASTOJANJU $R = 0,2\text{m}$ OD OSE VRATILA



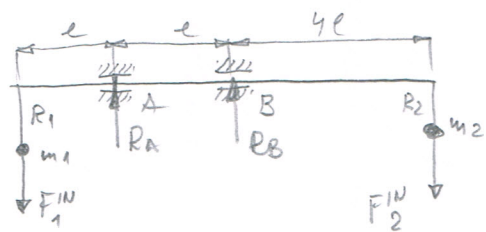
$$\left(\begin{array}{l} R: \quad R_2 = -0,0443\text{m} \quad \sum F_V = 0: F_{1N} - F_{2N} - F_{3N} = 0 \\ R_1 = 0,343\text{m} \quad \sum M_C = 0: F_{1N} \cdot 0,1 + F_{2N} \cdot 0,7 = 0 \end{array} \right)$$

ZADATAK

NA VRATILU KOJE SE OBRTI SA $15,9155 \frac{\text{obr}}{\text{s}}$
 NALAZE SE MASE m_1 I m_2 NA RASTOJA-
 NJIMA R_1 I R_2 OD OSE VRATILA (SLIKA).
 AKO JE $R_1 = R_2 = 0,2 \text{ m}$ I $m_2 = 0,2 \text{ kg}$ I $l = 0,2 \text{ m}$
 I UZIMAJUĆI U OBZIR SAMO INERCI-
 JALNO OPTEREĆENJE



- 1°) ODREDITI REAKCIJU U LEŽIŠTU A I MASU m_1 DA BI REAKCIJA U LEŽIŠTU B BILA JEDNAKA NULI
- 2°) ODREDITI REAKCIJU U LEŽIŠTU B I MASU m_1 DA BI REAKCIJA U LEŽIŠTU A BILA JEDNAKA NULI



$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,14 \cdot 15,9155 = 100 \frac{\text{s}^{-1}}$$

$$f = 15,9155 \frac{\text{obr}}{\text{s}}$$

$$F_2^{\text{IN}} = m_2 \cdot R_2 \cdot \omega^2 = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 100^2 = 400 \text{ N}$$

1°) $R_B = 0$ $\sum F_V = 0$ $R_A - F_1^{\text{IN}} - F_2^{\text{IN}} = 0 \dots (1)$

$\sum M_A = 0$ $F_1^{\text{IN}} \cdot l - F_2^{\text{IN}} \cdot 5l = 0 \dots (2)$

$$m_1 \cdot R_1 \cdot \omega^2 = 5 F_2^{\text{IN}} = 5 \cdot 400 = 2000$$

$$m_1 = \frac{2000}{0,2 \cdot 100^2} = 1 \text{ kg}$$

12(1) \Rightarrow $R_A = F_1^{\text{IN}} + F_2^{\text{IN}} = 1 \cdot 0,2 \cdot 100^2 + 400$

$$R_A = 2000 + 400 = 2400 \text{ N}$$

2°) $R_A = 0$ $\sum F_V = 0$ $R_B - F_1^{\text{IN}} - F_2^{\text{IN}} = 0 \dots (1)$

$\sum M_B = 0$ $F_1^{\text{IN}} \cdot 2l - F_2^{\text{IN}} \cdot 4l = 0$

$$F_1^{\text{IN}} = 2 F_2^{\text{IN}} = 2 \cdot 400 = 800 \text{ N}$$

$$m_1 \cdot R_1 \cdot \omega^2 = 800$$

$$m_1 = \frac{800}{0,2 \cdot 100^2} = 0,4 \text{ kg}$$

12(1) \Rightarrow $R_B = F_1^{\text{IN}} + F_2^{\text{IN}} = 0,4 \cdot 0,2 \cdot 100^2 + 400$

$$R_B = 800 + 800 = 1600 \text{ N}$$

ZADATAK

TJELO MASE m [kg] SE KREĆE PRAVDLINIJSKI POD DEJSTVOM KONSTANTNE VUČNE SILE $F_v = \text{const.}$



NTNE VUČNE SILE $F_v = \text{const.}$

ZA POZNATE DINAMIČKE VELIČINE KRETANJA TIJELA ODREDITI TRAŽENE VELIČINE.

1° POZNATO: $m = 20 \text{ kg}$
 $E_k = 60 \text{ J}$ POSLE $t = 2 \text{ s}$
 $P_{SR} = 20 \text{ W}$ U SREDNJA SNAGA F_v

ODREDITI:
 - RAD VUČNE SILE
 - VUČNU SILU

$P_{SR} = \frac{A}{t} \rightarrow A = P_{SR} \cdot t = 20 \cdot 2 = 40 \text{ J}$
 $F_v = m \cdot a$; $a = \frac{v - v_0}{t}$
 $E_k - E_{k0} = A \rightarrow E_{k0} = E_k - A = 60 - 40 = 20 \text{ J}$
 $v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 60}{20}} = 2,45 \text{ m/s}$
 $v_0 = \sqrt{\frac{2E_{k0}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{20}} = 1,41 \text{ m/s}$
 $\Rightarrow a = \frac{2,45 - 1,41}{2} = 0,51 \text{ m/s}^2$
 $F_v = 20 \cdot 0,51 = 10,14 \text{ N}$

2° POZNATO: $m = 20 \text{ kg}$
 $P_0 = 20 \text{ W}$ ZA $t = 0 \text{ s}$
 $F_v = 200 \text{ N}$

ODREDITI ZA $t = 10 \text{ s}$:
 - RAD SILE F_v
 - UBRZANJE
 - PREDENI PUT

$F_v = m \cdot a \rightarrow a = \frac{F_v}{m} = \frac{200}{20} = 10 \text{ m/s}^2$
 $P_0 = F_v \cdot v_0 \rightarrow v_0 = \frac{P_0}{F_v} = \frac{20}{200} = 0,1 \text{ m/s}$
 $v = v_0 + a \cdot t = 0,1 + 10 \cdot 10 = 100,1 \text{ m/s}$
 $s = v_0 t + \frac{a t^2}{2} = 0,1 \cdot 10 + \frac{10 \cdot 10^2}{2} = 501 \text{ m}$
 $A = F_v \cdot s = 200 \cdot 501 = 100,2 \text{ kJ}$

3° POZNATO: $m = 20 \text{ kg}$
 $E_{k0} = 20 \text{ J}$ - KINETIČKA ENERGIJA ZA $t = 0$
 $P_0 = 60 \text{ W}$ - SNAGA ZA $t = 0$

ODREDITI POSLE $t = 6 \text{ s}$:
 - RAD VUČNE SILE
 - UBRZANJE

$E_{k0} = \frac{m v_0^2}{2} \rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2E_{k0}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{20}} = \sqrt{2} = 1,41 \text{ m/s}$
 $P_0 = F_v \cdot v_0 \rightarrow F_v = \frac{P_0}{v_0} = \frac{60}{1,41} = 42,55 \text{ N}$
 $F_v = m \cdot a \rightarrow a = \frac{F_v}{m} = \frac{42,55}{20} = 2,12 \text{ m/s}^2$
 $s = v_0 t + \frac{a t^2}{2} = 1,41 \cdot 6 + \frac{2,12 \cdot 6^2}{2} = 46,62 \text{ m}$
 $A = F_v \cdot s = 42,55 \cdot 46,62 = 1983,68 \text{ J} = 1,98 \text{ kJ}$

4° POZNATO: $m = 20 \text{ kg}$
 $P_0 = 20 \text{ W}$ SNAGA ZA $t = 0$
 $P = 60 \text{ W}$ SNAGA ZA $t = 4 \text{ s}$

ODREDITI:
 - VUČNU SILU
 - RAD VUČNE SILE

$P_0 = F_v \cdot v_0$; $P = F_v \cdot v$ } $\rightarrow P - P_0 = F_v (v - v_0) = m \cdot a \cdot (a t) = m \cdot a^2 \cdot t$
 $a = \sqrt{\frac{(P - P_0)}{m \cdot t}} = \sqrt{\frac{60 - 20}{20 \cdot 4}} = 0,71 \text{ m/s}^2$
 $F_v = m \cdot a = 20 \cdot 0,71 = 14,14 \text{ N}$
 $A F_v = P_{SR} \cdot t = \frac{P_0 + P}{2} \cdot t = \frac{20 + 60}{2} \cdot 4 = 160 \text{ J}$

5° POZNATO: $m = 2000 \text{ kg}$
 - MASA AUTOMOBILA
 $E_{k0} = 36 \text{ kJ}$ - KINETIČKA ENERGIJA NA POČETKU ZA $t = 0$
 $t = 5 \text{ s}$ - VREMENE KRETANJA
 $A = 36 \text{ kJ}$ - RAD ZA VRIJEME KRETANJA

ODREDITI:
 - VUČNU SILU AUTOMOBILA
 - SNAGU ZA $t = 0$ I ZA $t = 5 \text{ s}$
 - SREDNJU SNAGU AUTOMOBILA

$E_k - E_{k0} = A \rightarrow E_k = E_{k0} + A = 36 + 36 = 72 \text{ kJ}$
 $v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 72 \cdot 10^3}{2000}} = 6 \cdot \sqrt{2} \text{ m/s}$
 $v_0 = \sqrt{\frac{2E_{k0}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 36 \cdot 10^3}{2000}} = 6 \text{ m/s}$
 $\rightarrow a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{6\sqrt{2} - 6}{5} = 0,497 \text{ m/s}^2$
 $F_v = m \cdot a = 2000 \cdot 0,497 = 994 \text{ N}$
 $P_0 = F_v \cdot v_0 = 994 \cdot 6 = 5964 \text{ W}$
 $P = F_v \cdot v = 994 \cdot 6\sqrt{2} = 8434,37 \text{ W}$
 $P_{SR} = \frac{P_0 + P}{2} = \frac{5964 + 8434,37}{2} = 7200 \text{ W}$
 $s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{72 - 36}{2 \cdot 0,497} = 36,2173 \text{ m}$
 $A = F_v \cdot s = 994 \cdot 36,2173 = 36000 \text{ J}$
 $P_{SR} = \frac{A}{t} = \frac{36000}{5} = 7200 \text{ W}$

6° POZNATO: $m = 2000 \text{ kg}$
- MASA AUTOMOBILA

$$t = 5 \text{ s}$$

$P_{SR} = 10 \text{ kW}$ - SREDNJA
SNAGA AUTOMOBILA
ZA $t \in [0, 5]$

$S = 20 \text{ m}$ - PREDENI PUT

ODREDITI:

- UBRZANJE
- VUČNU SILU
- POČETNU I KRAJNJU
BRZINU

$$A = P_{SR} \cdot t = 10 \cdot 5 = 50 \text{ kJ}$$

$$F_v = \frac{A}{S} = \frac{50 \cdot 10^3}{20} = 2500 \text{ N}$$

$$a = \frac{F_v}{m} = \frac{2500}{2000} = 1,25 \text{ m/s}^2$$

$$S = v_0 t + \frac{a t^2}{2} \rightarrow v_0 = \frac{S}{t} - \frac{a t}{2} = \frac{20}{5} - \frac{1,25 \cdot 5}{2} = 0,875 \text{ m/s}$$

$$v = v_0 + a t = 0,875 + 1,25 \cdot 5 = 7,125 \text{ m/s}$$

7° POZNATO: $m = 2000 \text{ kg}$
- MASA AUTOMOBILA

$$t = 5 \text{ s}$$

$P_{SR} = 10 \text{ kW}$ - SREDNJA
SNAGA AUTOMOBILA
ZA $t \in [0, 5]$

$F_v = 400 \text{ N}$ - VUČNA
SILA AUTOMOBILA

ODREDITI:

- PREDENI PUT
- POČETNU I KRAJNJU
BRZINU

$$F_v = m a \rightarrow a = \frac{F_v}{m} = \frac{400}{2000} = 0,2 \text{ m/s}^2$$

$$A = P_{SR} \cdot t = 10 \cdot 5 = 50 \text{ kJ}$$

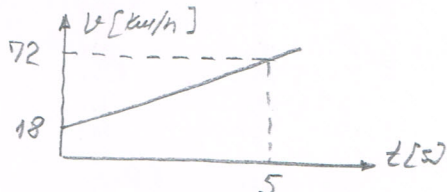
$$A = F_v \cdot S \rightarrow S = \frac{A}{F_v} = \frac{50 \cdot 10^3}{400} = 125 \text{ m}$$

$$S = v_0 t + \frac{a t^2}{2} \rightarrow v_0 = \frac{S}{t} - \frac{a t}{2} = \frac{125}{5} - \frac{0,2 \cdot 5}{2} = 24,5 \text{ m/s}$$

$$v = v_0 + a t = 24,5 + 0,2 \cdot 5 = 25,5 \text{ m/s}$$

ZADATAK

AUTOMOBIL MASE 1500 kg SE KREĆE
JEDNOLIKO UBRZANO SAGLASNO DIJA-
GRAMU PROMJENE BRZINE KAO NA
SLICI



AKO JE SILA OTPORA 10% OD SILE
VUČE ODREDITI:

- RAD VUČNE SILE ZA $t \in [0, 5]$
- SREDNJU SNAGU VUČNE SILE
ZA $t \in [0, 5]$

$$v_0 = 18 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 5 \text{ m/s}$$

$$v = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 20 \text{ m/s}$$

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{20 - 5}{5} = 3 \text{ m/s}^2$$

$$F_v - 0,1 F_v = m a \Rightarrow 0,9 F_v = 1500 \cdot 3$$

$$F_v = \frac{1500 \cdot 3}{0,9} = 5000 \text{ N} = 5 \text{ kN}$$

$$S = v_0 t + \frac{a t^2}{2} = 5 \cdot 5 + \frac{3 \cdot 5^2}{2} = 62,5 \text{ m}$$

$$A^{F_v} = F_v \cdot S = 5000 \cdot 62,5 = 312,5 \text{ kJ}$$

$$P_{SR} = \frac{A^{F_v}}{t} = \frac{312,5}{5} = 62,5 \text{ kW}$$

$$(P_{SR} = \frac{P_0 + P}{2} = \frac{F_v (v_0 + v)}{2}) = \frac{5 \cdot (5 + 20)}{2} = 62,5 \text{ kW})$$

ZADATAK

AUTOMOBIL MASE 1200 kg SE KREĆE
SAGLASNO JEDNAČINI:

$$v = 5 + 3t ; t [s] \quad v [m/s]$$

AKO JE SILA OTPORA 10% OD VUČNE
SILE AUTOMOBILA ODREDITI:

- SNAGU MOTORA U TRENUCIMA $t = 0$
I $t = 5 \text{ s}$
- RAD VUČNE SILE I RAD SILE OTPORA
NA INTERVALU $t \in [0, 5] \text{ s}$
- SREDNJU SNAGU MOTORA (VUČNE SILE)
NA INTERVALU $t \in [0, 5] \text{ s}$

$$v_0 = 5 + 3 \cdot 0 = 5 \text{ m/s}$$

$$v \stackrel{t=5}{=} 5 + 3 \cdot 5 = 20 \text{ m/s}$$

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{20 - 5}{5} = 3 \text{ m/s}^2$$

$$F_v - F_0 = m a \Rightarrow 0,9 F_v = m a ; F_v = \frac{m a}{0,9}$$

$$F_v = \frac{1200 \cdot 3}{0,9} = 4000 \text{ N} = 4 \text{ kN}$$

$$P_0 = F_v \cdot v_0 = 4 \cdot 5 = 20 \text{ kW}$$

$$P = F_v \cdot v = 4 \cdot 20 = 80 \text{ kW}$$

$$S = v_0 t + \frac{a t^2}{2} = 5 \cdot 5 + \frac{3 \cdot 5^2}{2} = 62,5 \text{ m}$$

$$A^{F_v} = F_v \cdot S = 4000 \cdot 62,5 = 250 \text{ kJ}$$

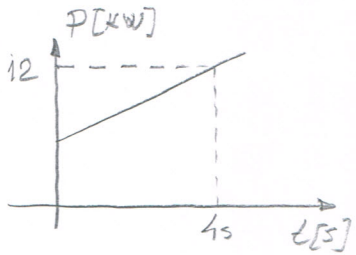
$$A^{F_0} = F_0 \cdot S = 0,1 F_v \cdot S = 25 \text{ kJ}$$

$$P_{SR} = \frac{A^{F_v}}{t} = \frac{250}{5} = 50 \text{ kW} \quad \left(P_{SR} = \frac{P_0 + P}{2} = \frac{20 + 80}{2} = 50 \text{ kW} \right)$$

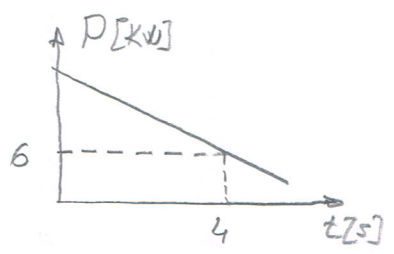
ZADATAK

SNAGA (MOTORA) AUTOMOBILA MASE $m = 1000 \text{ kg}$ JE MIJENJA SAGLASNO ODABRANU PRIKAZANOM NA SLICI

1°



2°



KOLIKA JE POČETNA BRZINA AUTOMOBILA AKO JE SREDNJA SNAGA NA INTERVALU $t \in [0, 4] \text{ s}$ 10 kW.

ODREDITI VUČNU SILU ODNOSNO SILU OPTORA AUTOMOBILA AKO JE ONA KONSTANTNA.

1° POZNATO:

$m = 1000 \text{ kg}$

$t = 4 \text{ s}$

$P(t=4\text{s}) = 12 \text{ kW}$

$P_{sr} = 10 \text{ kW}$

ODREDITI:

$F_v = ?$ VUČNA SILA

v_0 - POČETNA BRZINA

v - KRAJNJA BRZINA

$P_{sr} = \frac{P_0 + P}{2} \rightarrow P_0 = 2P_{sr} - P = 2 \cdot 10 - 12 = 8 \text{ kW}$

$P - P_0 = F_v (v - v_0) = m \cdot a \cdot a \cdot t \rightarrow a = \sqrt{\frac{P - P_0}{m \cdot t}} = \sqrt{\frac{12 - 8}{1000 \cdot 4}} = 1 \text{ m/s}^2$

$F_v = m \cdot a = 1000 \cdot 1 = 1000 \text{ N}$

$v_0 = \frac{P_0}{F_v} = \frac{8000}{1000} = 8 \text{ m/s}$

$v = \frac{P}{F_v} = \frac{12000}{1000} = 12 \text{ m/s}$

$(v = v_0 + a \cdot t = 8 + 1 \cdot 4 = 12 \text{ m/s})$

2° POZNATO:

$m = 1000 \text{ kg}$

$t = 4 \text{ s}$

$P = 6 \text{ kW}$

$P_{sr} = 10 \text{ kW}; t \in [0, 4]$

ODREDITI:

$F_0 = ?$ SILA OPTORA

v_0 - POČETNA BRZINA

v - KRAJNJA BRZINA

$P_{sr} = \frac{P_0 + P}{2} \rightarrow P_0 = 2P_{sr} - P = 2 \cdot 10 - 6 = 14 \text{ kW}$

$P_0 = F_0 \cdot v_0 \rightarrow P_0 - P = F_0 (v_0 - v) = (-m \cdot a) \cdot (-a \cdot t) = m \cdot t \cdot a^2$

$P = F_0 \cdot v$

$F_0 - F_0 = m \cdot a \rightarrow F_0 = -m \cdot a$

$a = \pm \sqrt{\frac{P_0 - P}{m \cdot t}} = -\sqrt{\frac{14 - 6}{1000 \cdot 4}} = -\sqrt{2} = -1,41 \text{ m/s}^2$

$F_0 = m \cdot a = 1000 \cdot 1,41 = 1410 \text{ N}$

$v_0 = \frac{P_0}{F_0} = \frac{14 \cdot 10^3}{1410} = 9,9 \text{ m/s}$

$v = \frac{P}{F_0} = \frac{6 \cdot 10^3}{1410} = 4,26 \text{ m/s}$

$(v = v_0 + a \cdot t = 9,9 - 1,41 \cdot 4 = 4,26 \text{ m/s})$