

# POGLAVLJE 4



## **VJEROVATNOĆA**

## 4.1 EKSPERIMENT, ISHODI I PROSTOR UZORKA

---

### Definicija

**Eksperiment** je proces, čiji rezultat izvođenja je jedna i samo jedna od mnogih opservacija. Te opservacije se nazivaju **ishodi** eksperimenta. Skup svih ishoda jednog eksperimenta se naziva **prostor uzorka**.

## Tabela 4.1 Primjeri eksperimenata, ishoda i prostora uzorka

---

| Eksperiment              | Ishodi           | Prostor uzorka                    |
|--------------------------|------------------|-----------------------------------|
| Bacanje novčića jednom   | Pismo, glava     | $S = \{\text{pismo, glava}\}$     |
| Bacanje kocke jednom     | 1, 2, 3, 4, 5, 6 | $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$        |
| Bacanje novčića dva puta | $GG, GP, PG, PP$ | $S = \{GG, GP, PG, PP\}$          |
| Igranje lutrije          | dobiti, izgubiti | $S = \{\text{dobiti, izgubiti}\}$ |
| Polaganje testa          | proći, pasti     | $S = \{\text{proći, pasti}\}$     |
| Biranje studenta         | muško, žensko    | $S = \{\text{muško, žensko}\}$    |

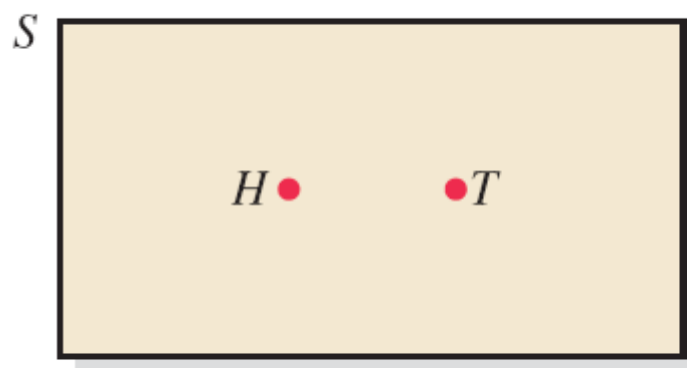
## Primjer 4-1

---

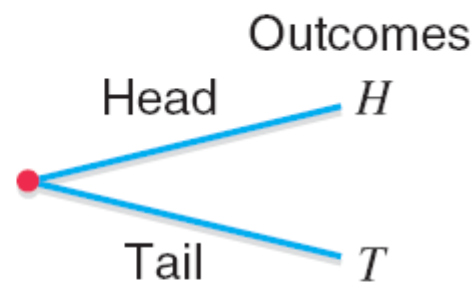
Nacrtati Venov dijagram i stablo ishoda za eksperiment bacanja novčića jedanput.

Slika 4.1 (a) Venov dijagram i (b) stablo ishoda za jedno bacanje novčića.

---



(a)



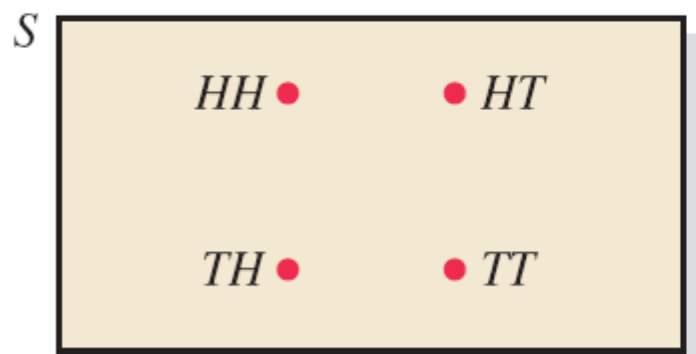
(b)

## Primjer 4-2

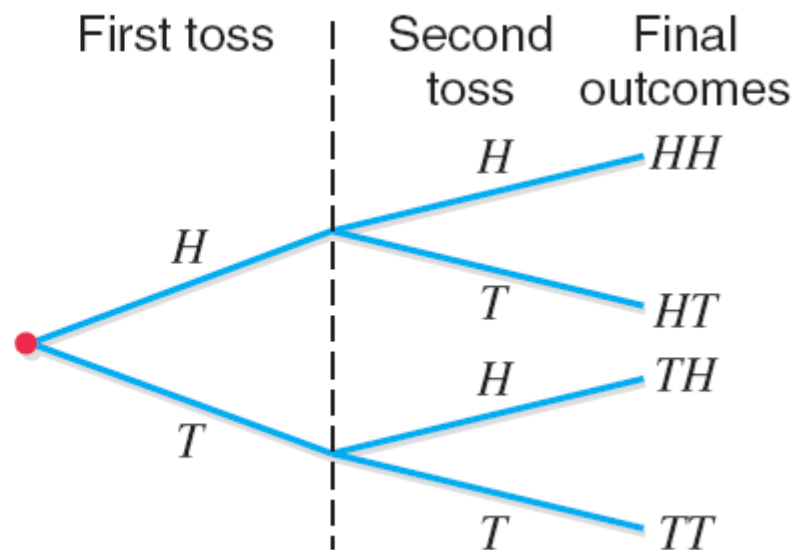
---

Nacrtati Venov dijagram i stablo ishoda za eksperiment bacanja novčića dva puta.

Slika 4.2 (a) Venov diagram i (b) stablo ishoda za dva bacanja novčića.



(a)



(b)

# Elementarni i složeni događaji

---

## Definicija

**Događaj** je skup jednog ili više ishoda eksperimenta.

Događaj koji sadrži jedan i samo jedan od (krajnjih) ishoda nekog eksperimenta se naziva **elementarni događaj** i obično obilježava sa  $E_i$ .

**Složeni događaj** je skup više od jednog ishoda nekog eksperimenta.

## Primjer 4-3

---

Razmotrimo primjer o biranju dva zaposlena iz jedne firme i bilježenju svaki put da li je izabrani zaposleni muško ili žensko. Svaki od četiri krajnja ishoda ( $MM$ ,  $MW$ ,  $WM$  i  $WW$ ) za ovaj eksperiment je elementarni događaj. Ta četiri događaja mogu da se obilježe sa  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ , i  $E_4$ , redom. Dakle,

$$E_1 = (MM), \quad E_2 = (MW), \quad E_3 = (WM), \quad \text{i} \quad E_4 = (WW)$$

## Primjer 4-4

---

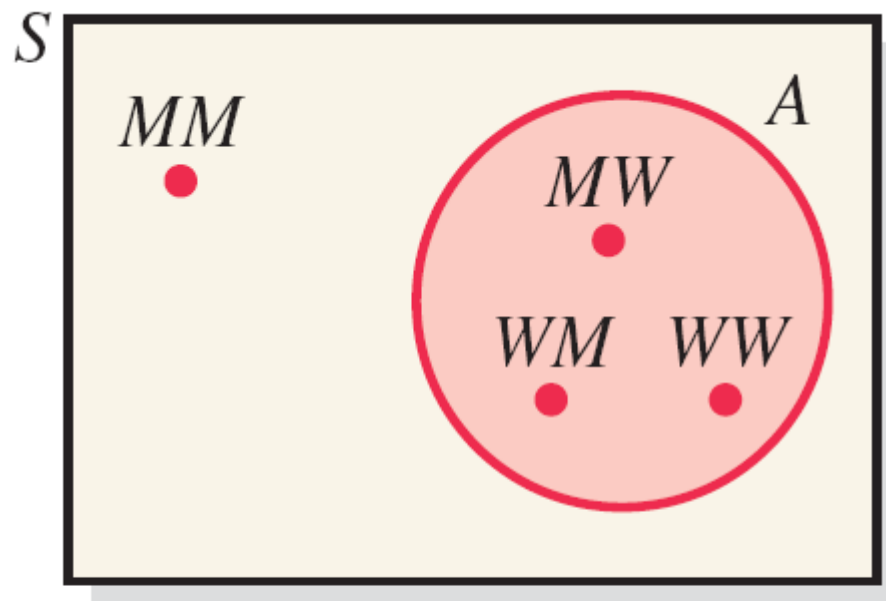
Razmotrimo ponovo primjer 4-3 o biranju dva zaposlena iz jedne firme i bilježenju svaki put da li je izabrani zaposleni muško ili žensko. Neka je  $A$  događaj da je izabran najviše jedan muškarac. Događaj  $A$  će se realizovati ako je izabran jedan ili nijedan muškarac. Dakle, događaj  $A$  je

$$A = \{MW, WM, WW\}$$

Pošto događaj  $A$  sadrži više od jednog ishoda, on je složeni događaj. Venov dijagram na slici 4.3 daje grafički prikaz složenog događaja  $A$ .

## Slika 4.3 Venov dijagram za događaj $A$ .

---



**Figure 4.4** Venn diagram for event  $A$ .

## 4.2 IZRAČUNAVANJE VJEROVATNOĆE

---

### Definicija

**Vjerovatnoća** je numerička mjera mogućnosti realizacije određenog događaja.

## Dvije osobine vjerovatnoće

---

- Vjerovatnoća nekog događaja se uvijek nalazi u intervalu od 0 do 1.

Prva osobina vjerovatnoće

$$0 \leq P(E_i) \leq 1$$
$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- Suma vjerovatnoća svih elementarnih događaja (ili krajnjih ishoda) nekog eksperimenta, koja se obilježava sa  **$\sum P(E_i)$** , uvijek je jednaka 1.

Druga osobina vjerovatnoće      Za neki eksperiment je:

$$\sum P(E_i) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \dots = 1$$

# Tri konceptualna pristupa vjerovatnoći

---

## Klasična vjerovatnoća

### Definicija

Dva ili više ishoda (ili događaja) koji imaju istu vjerovatnoću realizacije se zovu **jednako vjerovatni ishodi** (ili događaji).

## Klasična vjerovatnoća

---

Pravilo klasične vjerovatnoće za određivanje vjerovatnoće

$$P(E_i) = \frac{1}{\text{Ukupan broj ishoda eksperimenta}}$$

$$P(A) = \frac{\text{Broj povoljnih ishoda za } A}{\text{Ukupan broj ishoda eksperimenta}}$$

## Primjer 4-5

---

Odrediti vjerojatnoću pojave glave i vjerojatnoću pojave pisma prilikom jednog bacanja novčića.

## Primjer 4-5: Rješenje

---

$$P(\textit{glava}) = \frac{1}{\textit{ukupan broj ishoda}} = \frac{1}{2} = 0.50$$

Slično tome,

$$P(\textit{pismo}) = \frac{1}{2} = 0.50$$

# Tri konceptualna pristupa vjerovatnoći

---

## Koncept vjerovatnoće kao relativne frekvencije

### Korišćenje relativne frekvencije kao aproksimacije vjerovatnoće

Ako se neki eksperiment ponavlja  $n$  puta, pri čemu se neki događaj  $A$  realizuje  $f$  puta, onda, po konceptu vjerovatnoće kao relativne frekvencije je:

$$P(A) = \frac{f}{n}$$

## Primjer 4-6

---

Deset od 500 slučajno odabranih automobila proizvedenih u određenoj fabrici je bilo defektno. Pod pretpostavkom da se defektni automobili proizvode slučajno, kolika je vjerovatnoća da će sledeći automobil proizveden u ovoj fabrici biti defektan?

## Primjer 4-6: Rješenje

---

Neka  $n$  predstavlja ukupan broj automobila u uzorku, a  $f$  je broj defektnih automobila među ovih  $n$ . Tada važi,

$$n = 500 \quad \text{i} \quad f = 10$$

Koristeći koncept vjerovatnoće kao relativne frekvencije, dobijamo:

$$P(\text{sledeći automobil je defektan}) = \frac{f}{n} = \frac{10}{500} = 0.02$$

Tabela 4.2 Raspodjele frekvencija i relativnih frekvencija  
za uzorak automobila

---

| Automobil | $f$       | Relativna frekvencija |
|-----------|-----------|-----------------------|
| Ispravan  | 490       | $490/500=0.98$        |
| Defektan  | 10        | $10/500=0.02$         |
|           | $n = 500$ | Ukupno = 1.00         |

# Zakon velikih brojeva

---

## Definicija

### **Zakon velikih brojeva**

Ako se neki eksperiment ponavlja veliki broj puta, vjerovatnoća događaja dobijena na osnovu relativne frekvencije teži stvarnoj ili teorijskoj vjerovatnoći.

## Primjer 4-7

---

Allison želi da odredi vjerovatnoću da slučajno izabrana porodica iz države Njujork posjeduje kuću. Kako ona može da odredi ovu vjerovatnoću?

## Primjer 4-7: Rješenje

---

Za slučajno odabranu porodicu iz države Njujork postoje dva ishoda: „ova porodica posjeduje kuću” i „ova porodica ne posjeduje kuću”. Ova dva događaja nisu jednako vjerovatna. Dakle, pravilo klasične vjerovatnoće ne može da se primijeni. Međutim, ovaj eksperiment možemo da ponavljamo više puta. Prema tome, korist ćemo koncept vjerovatnoće kao relativne frekvencije.

# Tri konceptualna pristupa vjerovatnoći

---

## Subjektivna vjerovatnoća

### Definicija

**Subjektivna vjerovatnoća** je vjerovatnoća dodijeljena nekom događaju na osnovu subjektivne procjene, iskustva, informacija i vjerovanja.

## **4.3 MARGINALNA VJEROVATNOĆA, USLOVNA VJEROVATNOĆA, I SRODNI KONCEPTI VJEROVATNOĆE**

---

Pretpostavimo da su svih 100 zaposlenih u jednom preduzeću upitani da li su za isplatu većih plata izvršnim direktorima u američkim preduzećima ili su protiv toga. Tabela 4.3 prikazuje dvije klasifikacije odgovora ovih 100 zaposlenih.

Tabela 4.3 Dvije klasifikacije odgovora zaposlenih

---

|        | Za | Protiv |
|--------|----|--------|
| Muško  | 15 | 45     |
| Žensko | 4  | 36     |

Tabela 4.4 Dvije klasifikacije odgovora zaposlenih sa ukupnim zbirovima

---

|        | Za | Protiv | Ukupno |
|--------|----|--------|--------|
| Muško  | 15 | 45     | 60     |
| Žensko | 4  | 36     | 40     |
| Ukupno | 19 | 81     | 100    |

# MARGINALNA VJEROVATNOĆA, USLOVNA VJEROVATNOĆA I SRODNI KONCEPTI VJEROVATNOĆE

---

## Definicija

**Marginalna vjerovatnoća** je vjerovatnoća jednog događaja bez posmatranja bilo kog drugog događaja. Marginalna vjerovatnoća se još naziva i **prosta vjerovatnoća**.

## Tabela 4.5 Marginalne vjerovatnoće

---

|            | Za (A) | Protiv (B) | Ukupno |
|------------|--------|------------|--------|
| Muško (M)  | 15     | 45         | 60     |
| Žensko (Ž) | 4      | 36         | 40     |
| Ukupno     | 19     | 81         | 100    |

$$P(A) = 19/100 \\ = 0.19$$

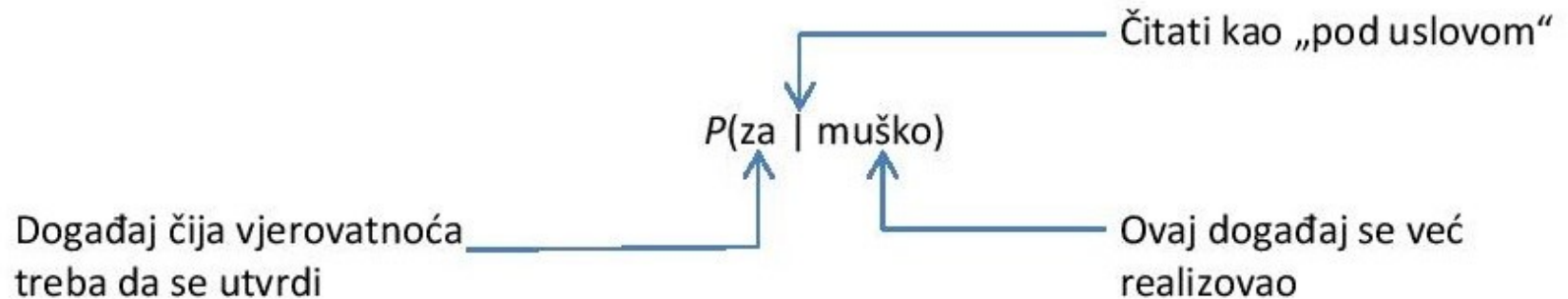
$$P(B) = 81/100 \\ = 0.81$$

$$P(M) = 60/100 = 0.60$$

$$P(F) = 40/100 = 0.40$$

# MARGINALNA VJEROVATNOĆA, USLOVNA VJEROVATNOĆA I SRODNI KONCEPTI VJEROVATNOĆE

---



# MARGINALNA VJEROVATNOĆA, USLOVNA VJEROVATNOĆA I SRODNI KONCEPTI VJEROVATNOĆE

---

## Definicija

**Uslovna vjerovatnoća** je vjerovatnoća da će se neki događaj realizovati pod uslovom da se drugi događaj već realizovao. Ako su  $A$  i  $B$  dva događaja, onda se uslovna vjerovatnoća  $A$  pod uslovom  $B$  zapisuje kao

$$P ( A | B )$$

i čita se kao "vjerovatnoća  $A$  pod uslovom da se  $B$  već realizovao."

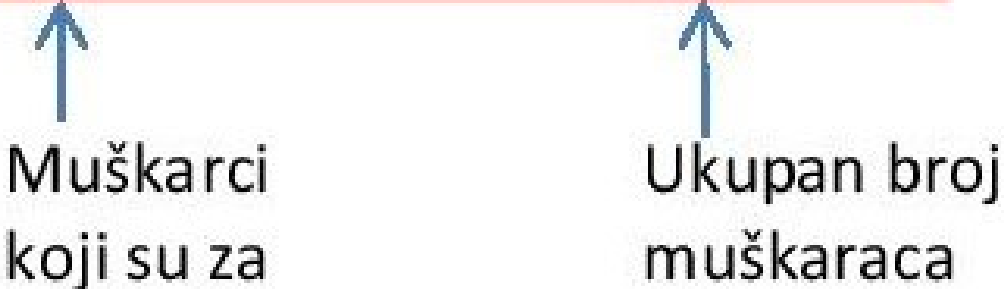
## Primjer 4-8

---

Izračunati uslovnu vjerovatnoću  $P$  (za | muško) za podatke o 100 zaposlenih date u Tabeli 4.4.

## Primjer 4-8: Rješenje

|           | Za | Protiv | Ukupno |
|-----------|----|--------|--------|
| Muško (M) | 15 | 45     | 60     |



Muškarci koji su za                      Ukupan broj muškaraca

$$P(\text{za} \mid \text{muško}) = \frac{\text{broj muškaraca koji su za}}{\text{ukupan broj muškaraca}} = \frac{15}{60} = 0.25$$

## Primjer 4-9

---

Za podatke iz Tabele 4.4, izračunati uslovnu vjerovatnoću da je slučajno odabrani zaposleni osoba ženskog pola, pod uslovom da je taj zaposleni za isplatu većih plata izvršnim direktorima.

## Primjer 4-9: Rješenje

---

|    |                                     |
|----|-------------------------------------|
| Za |                                     |
| 15 |                                     |
| 4  | ← Žene koje su za                   |
| 19 | ← Ukupan broj zaposlenih koji su za |

$$P(\text{žensko} \mid \text{za}) = \frac{\text{broj žena koje su za}}{\text{ukupan broj zaposlenih koji su za}} = \frac{4}{19} = 0.2105$$

# MARGINALNA VJEROVATNOĆA, USLOVNA VJEROVATNOĆA I SRODNI KONCEPTI VJEROVATNOĆE

---

## Definicija

Događaji koji se ne mogu istovremeno realizovati zovu se *međusobno isključivi događaji*.

## Primjer 4-10

---

Razmotrimo sledeće događaje prilikom bacanja jedne kocke:

$A$  = pojava parnog broja =  $\{2, 4, 6\}$

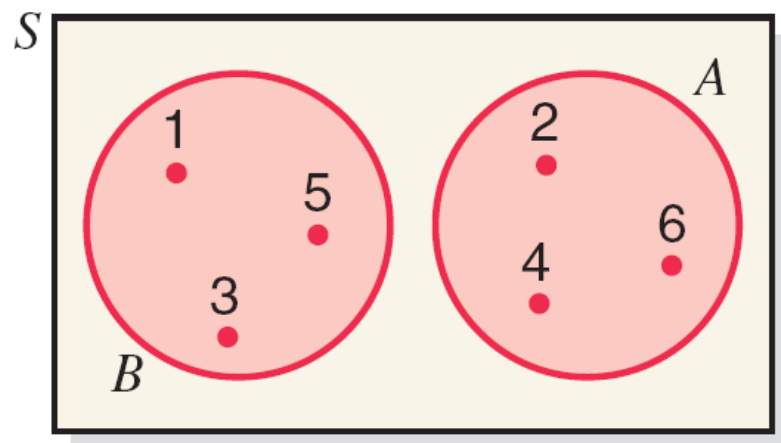
$B$  = pojava neparnog broja =  $\{1, 3, 5\}$

$C$  = pojava broja manjeg od 5 =  $\{1, 2, 3, 4\}$

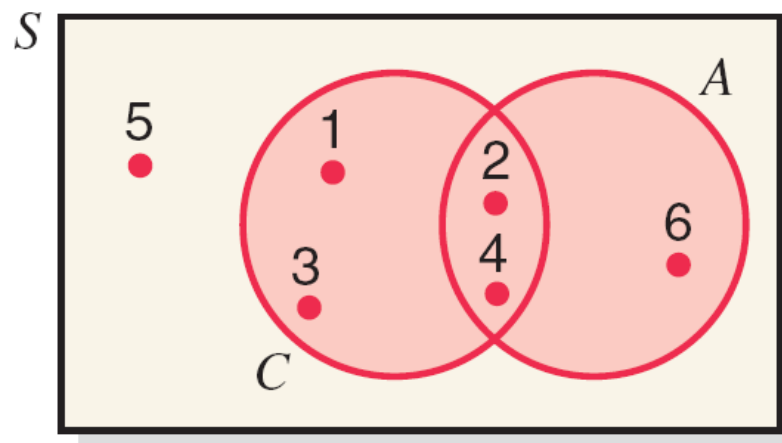
Da li su događaji  $A$  i  $B$  međusobno isključivi? Da li su događaji  $A$  i  $C$  međusobno isključivi?

## Primjer 4-10: Rješenje

---



**Figure 4.8** Mutually exclusive events  $A$  and  $B$ .



**Figure 4.9** Mutually nonexclusive events  $A$  and  $C$ .

# MARGINALNA VJEROVATNOĆA, USLOVNA VJEROVATNOĆA I SRODNI KONCEPTI VJEROVATNOĆE

---

## Definicija

Za dva događaja se kaže da su nezavisni ako realizacija jednog ne utiče na vjerovatnoću realizacije drugog događaja. Drugim riječima,  $A$  i  $B$  su nezavisni događaji ako je

$$\text{ili } P(A \mid B) = P(A) \quad \text{ili } P(B \mid A) = P(B)$$

## Primjer 4-11

---

Pogledajte informacije o 100 zaposlenih date u Tabeli 4.4 u odjeljku 4.4. Da li su događaji “žensko ( $\check{Z}$ )” i “za ( $A$ )” nezavisni?

## Primjer 4-11: Rješenje

---

Događaji  $\check{Z}$  i  $A$  će biti nezavisni ako je

$$P(\check{Z}) = P(\check{Z} | A)$$

U suprotnom će biti zavisni.

Koristeći informacije date u Tabeli 4.4, izračunavamo sledeće dvije vjerovatnoće:

$$P(\check{Z}) = 40/100 = 0.40 \quad \text{i}$$

$$P(\check{Z} | A) = 4/19 = 0.2105$$

Pošto ove dvije vjerovatnoće nisu jednake, ova dva događaja su zavisna.

# MARGINALNA VJEROVATNOĆA, USLOVNA VJEROVATNOĆA I SRODNI KONCEPTI VJEROVATNOĆE

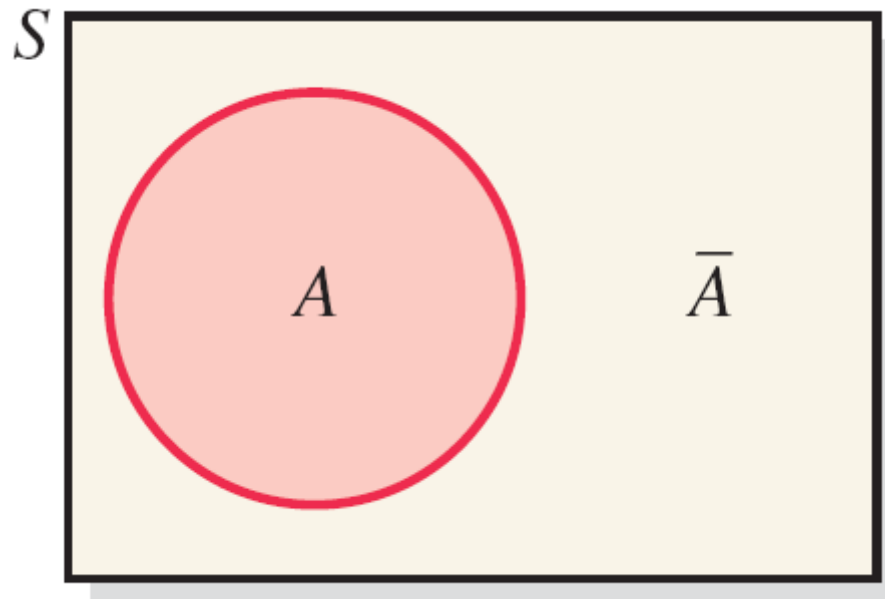
---

## Definicija

**Komplement događaja  $A$** , koji se obilježava sa  $\bar{A}$  i čita kao "A bar" ili "A komplement," je događaj koji sadrži sve ishode jednog eksperimenta koji nisu u  $A$ .

## Slika 4.4 Venov dijagram dva komplementarna događaja.

---



**Figure 4.11** Venn diagram of two complementary events.

## 4.4 PRESJEK DOGAĐAJA I PRAVILO MNOŽENJA VJEROVATNOĆA

---

### Presjek događaja

#### Definicija

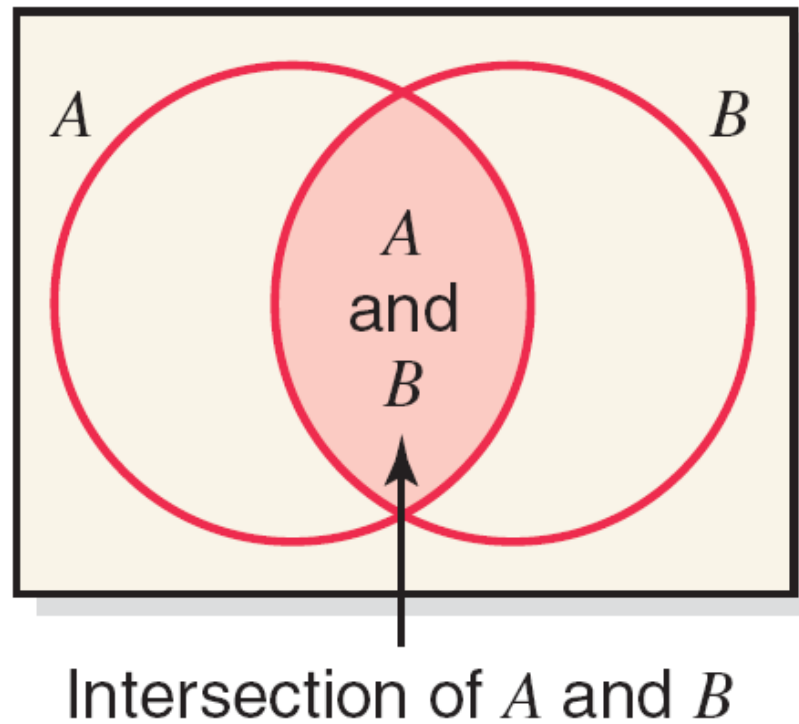
Neka su  $A$  i  $B$  dva događaja definisana u prostoru uzorka.

**Presjek**  $A$  i  $B$  predstavlja skup svih ishoda koji su zajednički i za  $A$  i za  $B$  i označava se kao

$$A \cap B$$

## Slika 4.5 Presjek događaja $A$ i $B$ .

---



**Figure 4.14** Intersection of events  $A$  and  $B$ .

# PRESJEK DOGAĐAJA I PRAVILO MNOŽENJA VJEROVATNOĆA

---

## Pravilo množenja vjerovatnoća

### Definicija

Vjerovatnoća presjeka dva događaja se zove **zajednička vjerovatnoća**. Ona se zapisuje kao

$$P(A \text{ i } B)$$

# PRESJEK DOGAĐAJA I PRAVILO MNOŽENJA VJEROVATNOĆA

---

Pravilo množenja vjerovatnoća za određivanje zajedničke vjerovatnoće

Vjerovatnoća presjeka dva događaja  $A$  i  $B$  je

$$P(A \text{ i } B) = P(A) P(B | A) = P(B) P(A | B)$$

## Primjer 4-12

U Tabeli 4.6 je data klasifikacija svih zaposlenih u jednom preduzeću po polu i po fakultetskoj diplomi.

|                        | Sa fakultetskom<br>diplomom ( $G$ ) | Bez fakultetske<br>diplome ( $N$ ) | Ukupno |
|------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|--------|
| Muško ( $M$ )          | 7                                   | 20                                 | 27     |
| Žensko ( $\check{Z}$ ) | 4                                   | 9                                  | 13     |
| Ukupno                 | 11                                  | 29                                 | 40     |

Ako je jedan od ovih zaposlenih izabran slučajnim putem za članstvo u radničkom savjetu, kolika je vjerovatnoća da je taj zaposleni ženskog pola i da ima fakultetsku diplomu?

## Primjer 4-12: Rješenje

---

Treba da izračunamo vjerovatnoću presjeka događaja  $\check{Z}$  i  $G$ .

$$P(\check{Z} \text{ i } G) = P(\check{Z}) P(G | \check{Z})$$

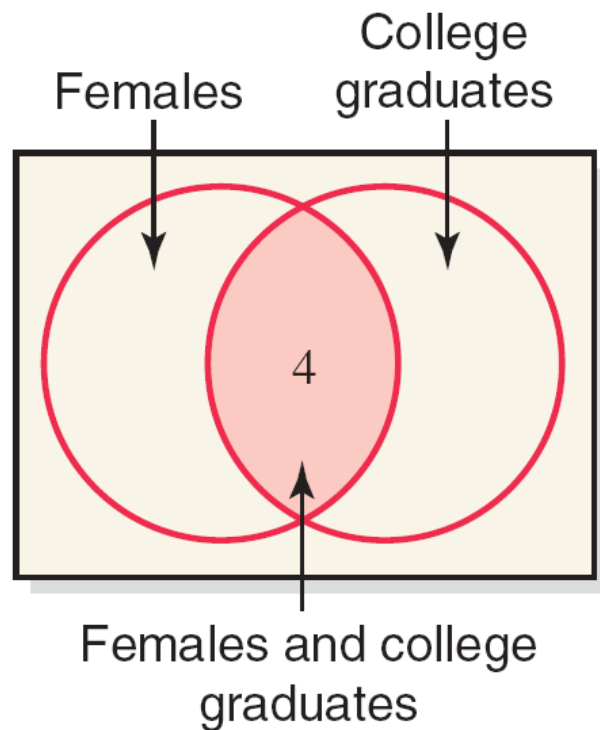
$$P(\check{Z}) = 13/40$$

$$P(G | \check{Z}) = 4/13$$

$$\begin{aligned} P(\check{Z} \text{ i } G) &= P(\check{Z}) P(G | \check{Z}) \\ &= (13/40)(4/13) = 0.100 \end{aligned}$$

## Slika 4.6 Presjek događaja $\check{Z}$ i $G$ .

---



**Figure 4.15** Intersection of events  $F$  and  $G$ .

# PRESJEK DOGAĐAJA I PRAVILO MNOŽENJA VJEROVATNOĆA

---

## Izračunavanje uslovne vjerovatnoće

Ako su  $A$  i  $B$  dva događaja, onda je,

$$P(B|A) = \frac{P(A \text{ i } B)}{P(A)} \text{ i } P(A|B) = \frac{P(A \text{ i } B)}{P(B)}$$

Pod uslovom da je  $P(A) \neq 0$  i  $P(B) \neq 0$ .

## Primjer 4-13

---

Vjerovatnoća da je slučajno odabrani student jednog koledža sa završne godine je 0.20, a zajednička vjerovatnoća da je to student informatike i da je sa završne godine je 0.03. Odrediti uslovnu vjerovatnoću da je slučajno izabran student informatike pod uslovom da je sa završne godine.

## Primjer 4-13: Rješenje

---

Definišimo sledeća dva događaja:

- $A$  = izabrani student je sa završne godine
- $B$  = izabrani student je student informatike

Na osnovu datih informacija,

$$P(A) = 0.20 \text{ i } P(A \text{ i } B) = 0.03$$

Otuda je,

$$P(B | A) = P(A \text{ i } B) / P(A) = 0.03 / 0.20 = 0.15$$

# PRAVILO MNOŽENJA VJEROVATNOĆA ZA NEZAVISNE DOGAĐAJE

---

Pravilo množenja vjerovatnoća za izračunavanje vjerovatnoće nezavisnih događaja

Vjerovatnoća presjeka dva nezavisna događaja  $A$  i  $B$  je

$$P(A \text{ i } B) = P(A) P(B)$$

## Primjer 4-14

---

U jednoj poslovnoj zgradi postoje dva detektora za požar. Vjerovatnoća da se bilo koji od njih neće uključiti za vrijeme požara je 0.02. Odrediti vjerovatnoću da se nijedan od ova dva detektora neće uključiti za vrijeme požara.

## Primjer 4-14: Rješenje

---

Definišemo sledeća dva događaja:

$A$  = prvi detektor se nije uključio za vrijeme požara

$B$  = drugi detektor se nije uključio za vrijeme požara

Tako, zajednička vjerovatnoća  $A$  i  $B$  je

$$P(A \text{ i } B) = P(A) P(B) = (0.02)(0.02) = 0.0004$$

# PRAVILO MNOŽENJA VJEROVATNOĆA ZA NEZAVISNE DOGAĐAJE

---

## Zajednička vjerovatnoća međusobno isključivih događaja

Zajednička vjerovatnoća dva međusobno isključiva događaja je uvijek nula. Ako su  $A$  i  $B$  dva međusobno isključiva događaja, onda je

$$P(A \text{ i } B) = 0$$

## 4.5 UNIJA DOGAĐAJA I PRAVILO SABIRANJA VJEROVATNOĆA

---

### Definicija

Neka su  $A$  i  $B$  dva događaja definisana u prostoru uzorka.

**Unija događaja**  $A$  i  $B$  je skup svih ishoda koji pripadaju ili  $A$  ili  $B$  ili se nalaze u oba i u  $A$  i u  $B$  i označava se kao

$$A \text{ ili } B$$

## Primjer 4-15

---

Centar za starije građane ima 300 članova. Od toga je 140 muškaraca, 210 redovno uzima barem jedan lijek, a 95 su muškarci *i* redovno uzimaju barem jedan lijek. Opišite uniju događaja „muško” i „redovno uzima barem jedan lijek.”

## Primjer 4-15: Rješenje

---

- Definišimo sledeće događaje:
  - $M$  = stariji građanin je muško
  - $\check{Z}$  = stariji građanin je žensko
  - $A$  = stariji građanin uzima barem jedan lijek
  - $B$  = stariji građanin ne uzima nikakav lijek
  
- Unija događaja „muško” i „uzima barem jedan lijek” uključuje one starije građane koji su ili muškog pola ili uzimaju barem jedan lijek ili su i jedno i drugo. Broj takvih starijih građana je

$$140 + 210 - 95 = 255$$

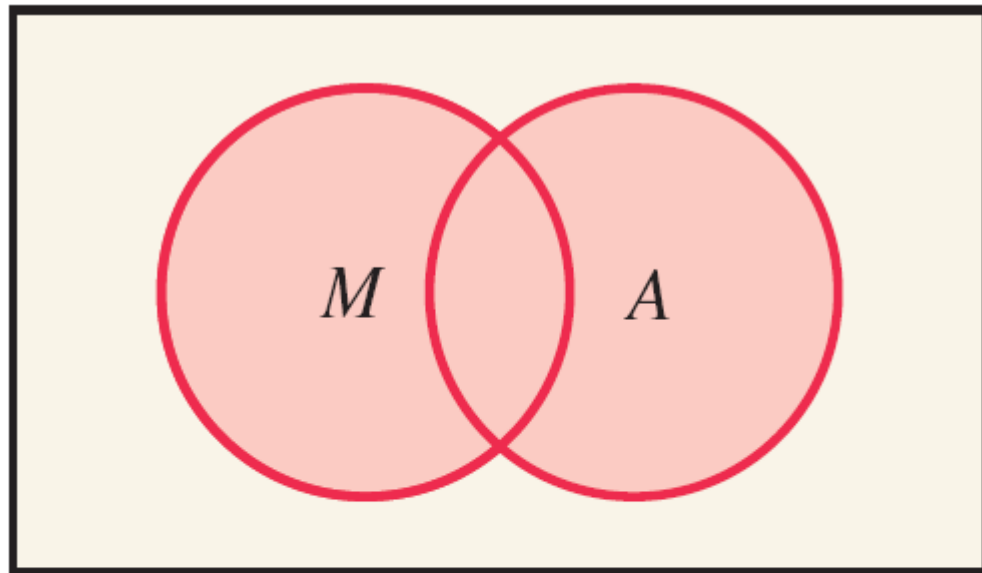
Tabela 4.7

|        | A   | B  | Ukupno |
|--------|-----|----|--------|
| M      | 95  | 45 | 140    |
| Ž      | 115 | 45 | 160    |
| Ukupno | 210 | 90 | 300    |

← Računato dva puta

## Slika 4.7 Unija događaja $M$ i $A$ .

---



Area shaded in red gives the union of events  $M$  and  $A$ , and includes 255 senior citizens

# UNIJA DOGAĐAJA I PRAVILO SABIRANJA VJEROVATNOĆA

---

## Pravilo sabiranja vjerovatnoća

Pravilo sabiranja vjerovatnoća za određivanje vjerovatnoće unije događaja

Vjerovatnoća unije dva događaja  $A$  i  $B$  je

$$P(A \text{ ili } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ i } B)$$

## Primjer 4-16

---

Rektor univerziteta je predložio da svi studenti moraju obavezno da odaberu neki predmet iz etike da bi diplomirali. Tri stotine predstavnika fakulteta i studenata sa ovog univerziteta je pitano za mišljenje o ovom pitanju. Tabela 4.8 daje dvije klasifikacije odgovora tih predstavnika fakulteta i studenata.

Odrediti vjerovatnoću da je jedna slučajno odabrana osoba od ovih 300 predstavnika fakulteta ili da je za ovaj predlog.

Tabela 4.8 Dvije klasifikacije odgovora

---

|          | Za  | Protiv | Neutralno | Ukupno |
|----------|-----|--------|-----------|--------|
| Fakultet | 45  | 15     | 10        | 70     |
| Student  | 90  | 110    | 30        | 230    |
| Ukupno   | 135 | 125    | 40        | 300    |

## Primjer 4-16: Rješenje

---

Definišimo sledeće događaje:

$A$  = izabrana osoba je predstavnik fakulteta

$B$  = izabrana osoba je za taj predlog

Iz informacija u Tabeli 4.9,

$$P(A) = 70/300 = 0.2333$$

$$P(B) = 135/300 = 0.4500$$

$$P(A \text{ i } B) = P(A) P(B | A) = (70/300)(45/70) = 0.1500$$

Koristeći pravilo sabiranja vjerovatnoća, dobija se

$$\begin{aligned} P(A \text{ ili } B) &= P(A) + P(B) - P(A \text{ i } B) \\ &= 0.2333 + 0.4500 - 0.1500 = \mathbf{0.5333} \end{aligned}$$

# Pravilo sabiranja vjerovatnoća za međusobno isključive događaje

---

Pravilo sabiranja vjerovatnoća za određivanje vjerovatnoće unije međusobno isključivih događaja

Vjerovatnoća unije dva međusobno isključiva događaja  $A$  i  $B$  je

$$P(A \text{ ili } B) = P(A) + P(B)$$