POGLAVLJE 5

DISKRETNE SLUČAJNE PROMJENLJIVE I NJIHOVE RASPODJELE VJEROVATNOĆA

5.1 SLUČAJNE PROMJENLJIVE

- Diskretne slučajne promjenjive
- Neprekidne slučajne promjenjive

Tabela 5.1 Raspodjela frekvencija i relativnih frekvencija broja vozila koja posjeduju porodice

Broj posjedovanih vozila	Frekvencija	Relativna frekvencija
0	30	30/2000=0.015
1	470	470/2000=0.235
2	850	850/2000=0.425
3	490	490/2000=0.245
4	160	160/2000=0.080
	N = 2000	Ukupno = 1

SLUČAJNE PROMJENLJIVE

Definicija

Slučajna promjenljiva je promjenljiva čija je vrijednost određena ishodom slučajnog eksperimenta.

Diskretna slučajna promjenjiva

Definicija

Slučajna promjenljiva koja uzima prebrojivo mnogo vrijednosti se naziva ***diskretna slučajna promjenljiva***.

Primjeri diskretne slučajne promjenljive

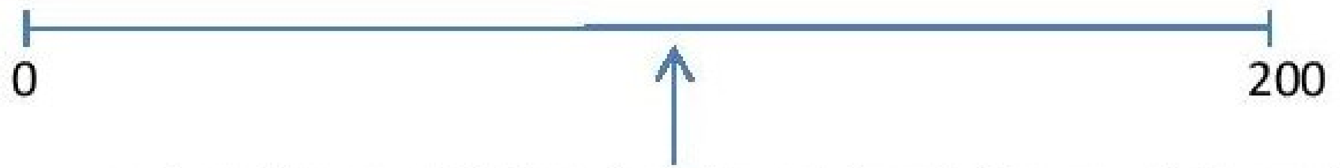
1. Broj vozila koja se prodaju kod dilera u toku određenog mjeseca
2. Broj kuća u jednom bloku
3. Broj riba koja se ulovi tokom jednog ribolova
4. Broj žalbi koje stignu u kancelariju avio kompanije određenog dana
5. Broj klijenata koji posjete jednu banku u toku određenog sata
6. Broj pojavljivanja glave u tri bacanja novčića

Neprekidna slučajna promjenljiva

Definicija

Slučajna promjenljiva koja može da uzme bilo koju vrijednost iz jednog ili više intervala naziva se ***neprekidna slučajna promjenljiva***.

Neprekidna slučajna promjenljiva



Svaka tačka na ovoj liniji predstavlja moguću vrijednost za *X* koje označava vijek trajanja baterije. Na ovoj liniji postoji beskonačan broj tačaka. Skup vrijednosti predstavljen tačkama na ovoj liniji je neprebrojiv.

Primjeri neprekidne slučajne promjenljive

1. Visina neke osobe
2. Vrijeme potrebno za izradu testa
3. Količina mlijeka u jednom galonu (obratite pažnju na to da ne očekujemo da jedan galon sadrži tačno jedan galon mlijeka, već ili malo manje ili malo više od toga)
4. Težina ribe
5. Cijena kuće

5.2 RASPODJELA VJEROVATNOĆA DISKRETNE SLUČAJNE PROMJENLJIVE

Definicija

Raspodjela vjerovatnoća diskretne slučajne promjenljive prikazuje listu svih mogućih vrijednosti koje slučajna promjenljiva može da uzme i njihovih odgovarajućih vjerovatnoća.

Primjer 5-1

Podsjetimo se Tabele 5.1 u kojoj su date raspodjele frekvencija i relativnih frekvencija broja vozila koja posjeduju porodice. Ta tabela je ponovo prikazana kao Tabela 5.2. Neka je x broj vozila koja posjeduje slučajno izabrana porodica. Napisati raspodjelu vjerovatnoća za x.

Tabela 5.2 Raspodjela frekvencija i relativnih frekvencija broja vozila koja posjeduju porodice

Broj posjedovanih vozila	Frekvencija	Relativna frekvencija
0	30	0.015
1	470	0.235
2	850	0.425
3	490	0.245
4	160	0.080
	N = 2000	Ukupno = 1

Primjer 5-1: Rješenje

Tabela 5.3 Raspodjela vjerovatnoća broja vozila koja posjeduju porodice

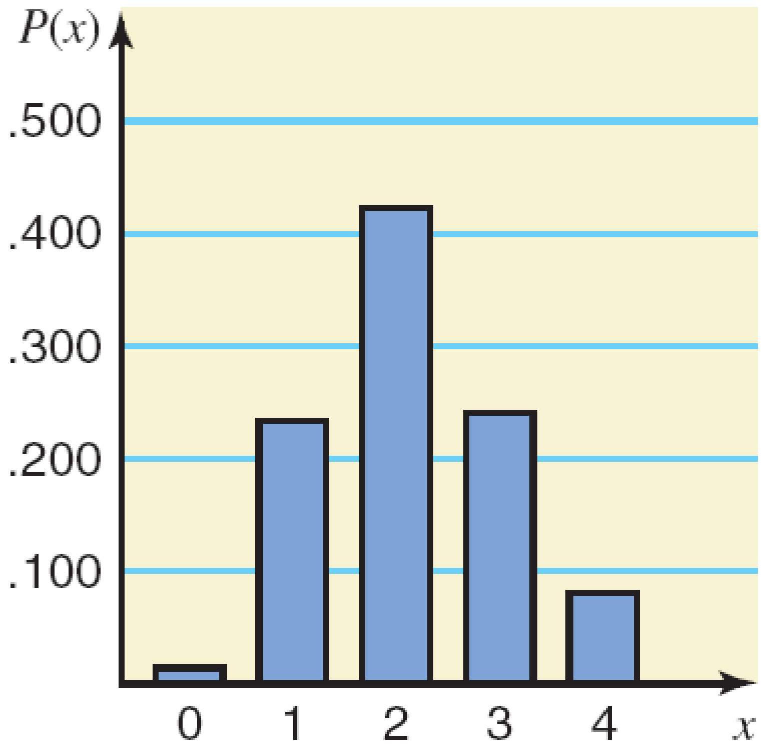
Broj posjedovanih vozila x	Vjerovatnoća $P(x)$
0	0.015
1	0.235
2	0.425
3	0.245
4	0.080
	$\sum P(x) = 1$

Dvije karakteristike raspodjele vjerovatnoća

Raspodjela vjerovatnoća diskretne slučajne promjenljive ima sledeće dvije karakteristike.

1. $0 \leq P(x) \leq 1$ za svaku vrijednost x
2. $\Sigma P(x) = 1$.

Slika 5.1 Grafički prikaz raspodjele vjerovatnoća iz Tabele 5.3.



Primjer 5-2

Svaka od sledećih tabela prikazuje određene vrijednosti *x* i njihove vjerovatnoće. Utvrditi da li svaka tabela prikazuje validnu raspodjelu vjerovatnoća ili ne.

(a)

x	$P(x)$
0	.08
1	.11
2	.39
3	.27

(b)

x	$P(x)$
2	.25
3	.34
4	.28
5	.13

(c)

x	$P(x)$
7	.70
8	.50
9	−.20

Primjer 5-2: Rješenje

(a) Ne, jer suma svih vjerovatnoća nije jednaka 1.0.

(b) Da.

(c) Ne, jer je jedna od vjerovatnoća negativna.

Primjer 5-3

Sledeća tabela prikazuje raspodjelu vjerovatnoća broja kvarova jedne mašine nedjeljno, zasnovano na podacima iz prošlosti.

Kvarovi nedjeljno	0	1	2	3
Vjerovatnoća	0.15	0.20	0.35	0.30

Primjer 5-3

(a) Prikazati grafički ovu raspodjelu vjerovatnoća.

(b) Odrediti vjerovatnoću da je broj kvarova za ovu mašinu tokom određene nedjelje

i. tačno 2

ii. od 0 do 2

iii. više od 1

iv. najviše 1

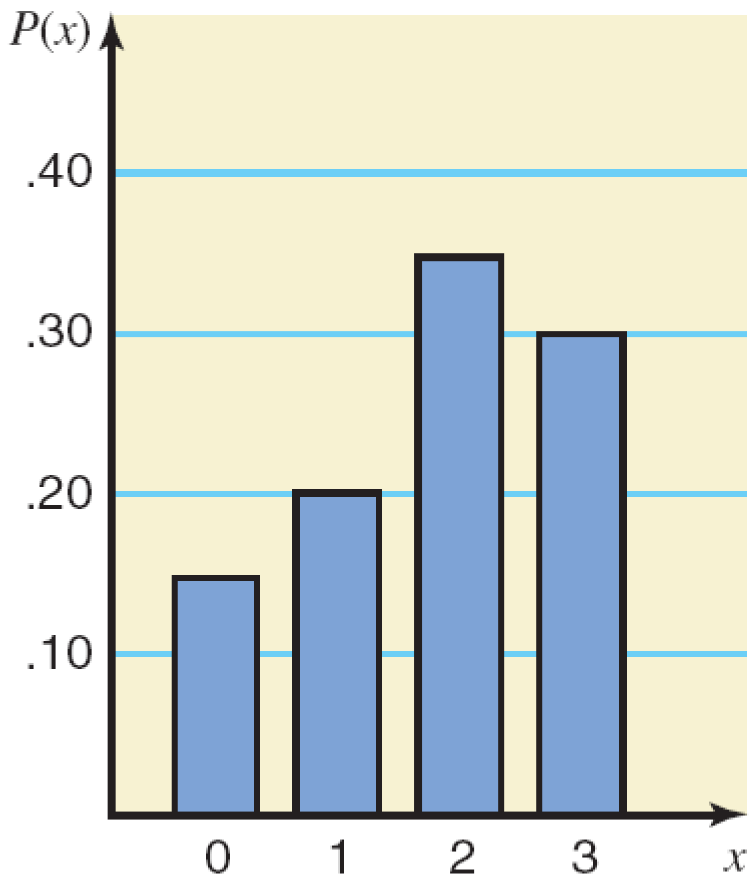
Primjer 5-3: Rješenje

Neka x broj kvarova ove mašine tokom određene nedjelje. Tabela 5.4 prikazuje raspodjelu vjerovatnoća za x.

Tabela 5.4 Raspodjela vjerovatnoća za broj kvarova

x	$P(x)$
0	.15
1	.20
2	.35
3	.30
	$\Sigma P(x) = 1.00$

Slika 5.2 Grafički prikaz raspodjele vjerovatnoća iz Tabele 5.4.



Primjer 5-3: Rješenje

(b) Koristeći Tabelu 5.4,

i. P(tačno 2 kvara) = $P(x = 2)$ = **0.35**

ii. P(od 0 do 2 kvara) = $P(0 \leq x \leq 2)$

$= P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2)$

$= 0.15 + 0.20 + 0.35 =$ **0.70**

iii. P(više od 1 kvara) = $P(x > 1)$

$= P(x = 2) + P(x = 3)$

$= 0.35 + 0.30 =$ **0.65**

iv. P(najviše jedan kvar) = $P(x \leq 1)$

$= P(x = 0) + P(x = 1)$

$= 0.15 + 0.20 =$ **0.35**

5.3 OČEKIVANA VRIJEDNOST I STANDARDNA DEVIJACIJA DISKRETNE SLUČAJNE PROMJENLJIVE

Očekivana vrijednost diskretne slučajne promjenljive x je vrijednost koju očekujemo da se javi u prosjeku, prilikom izvođenja eksperimenta veliki broj puta. Označava se sa $E(x)$ i izračunava se kao

$$E(x) = \Sigma\, x\, P(x)$$

Očekivana vrijednost diskretne slučajne promjenljive x predstavlja njenu prosječnu vrijednost i takođe se označava sa μ; odnosno,

$$\mu = \Sigma\, x\, P(x)$$

Primjer 5-5

Podsjetimo se primjera 5-3 iz odjeljka 5.2. Raspodjela vjerovatnoća u Tabeli 5.4 iz tog primjera je ponovljena ovdje. U ovoj tabeli, x predstavlja broj kvarova mašine tokom određene nedjelje, a $P(x)$ je vjerovatnoća odgovarajuće vrijednosti x.

Primjer 5-5

x	$P(x)$
0	.15
1	.20
2	.35
3	.30

Odrediti aritmetičku sredinu broja kvarova ove mašine tokom nedjelje.

Primjer 5-5: Rješenje
Tabela 5.6 Izračunavanje aritmetičke sredine raspodjele vjerovatnoća broja kvarova

x	$P(x)$	$xP(x)$
0	.15	$0(.15) = .00$
1	.20	$1(.20) = .20$
2	.35	$2(.35) = .70$
3	.30	$3(.30) = .90$
		$\Sigma xP(x) = 1.80$

Aritmetička sredina je $\mu = \Sigma x\, P(x) = 1.80$

OČEKIVANA VRIJEDNOST I STANDARDNA DEVIJACIJA DISKRETNE SLUČAJNE PROMJENLJIVE

Standardna devijacija diskretne slučajne promjenljive x mjeri raspršenost njene raspodjele vjerovatnoća i izračunava se kao

$$\sigma = \sqrt{\sum x^2 P(x) - \mu^2}$$

Primjer 5-6

Baier's Electronics proizvodi djelove za kompjutere kojima se snabdijevaju mnoga preduzeća. Uprkos činjenici da dva inspektora kontrole kvaliteta u Baier's Electronics provjeravaju svaki dio da li je defektan prije nego što se isporuči drugom preduzeću, nekoliko neispravnih djelova prođu ova ispitivanja, a da se ne otkriju. Neka x označava broj neispravnih djelova za kompjuter u isporuci od 400 komada. Sledeća tabela prikazuje raspodjelu vjerovatnoća za x.

Primjer 5-6

x	0	1	2	3	4	5
$P(x)$	.02	.20	.30	.30	.10	.08

Izračunati standardnu devijaciju od x.

Primjer 5-6: Rješenje
Tabela 5.7 Izračunavanja za određivanje standardne devijacije

x	$P(x)$	$xP(x)$	x^2	$x^2P(x)$
0	.02	.00	0	.00
1	.20	.20	1	.20
2	.30	.60	4	1.20
3	.30	.90	9	2.70
4	.10	.40	16	1.60
5	.08	.40	25	2.00
		$\Sigma xP(x) = 2.50$		$\Sigma x^2P(x) = 7.70$

Primjer 5-6: Rješenje

$$\mu = \sum xP(x) = 2.50 \ \ \textit{neispravnih djelova za kompjuter u } 400 \textit{ komada}$$

$$\sum x^2P(x) = 7.70$$

$$\sigma = \sqrt{\sum x^2P(x) - \mu^2} = \sqrt{7.70 - (2.50)^2} = \sqrt{1.45}$$

$$= 1.204 \textit{ neispravnih djelova za kompjuter}$$

5.4 BINOMNA RASPODJELA VJEROVATNOĆE

- Binomni eksperiment
- Binomna raspodjela vjerovatnoće i binomna formula
- Korišćenje tablice binomnih vjerovatnoća
- Vjerovatnoća uspjeha i oblik binomne raspodjele
- Aritmetička sredina i standardna devijacija binomne raspodjele

Binomni eksperiment

Uslovi binomnog eksperimenta

Binomni eksperiment mora da ispuni sledeća četiri uslova.

1. Postoji n identičnih opita.
2. Svaki opit ima samo dva moguća ishoda.
3. Vjerovanoće ta dva ishoda ostaju konstantne.
4. Opiti su nezavisni.

Primjer 5-8

Razmotrimo eksperiment koji se sastoji od 10 bacanja novčića. Odrediti da li je to binomni eksperiment ili ne.

Primjer 5-8: Rješenje

1. Ima ukupno 10 opita (bacanja), i svi su identični. Ovdje je n=10.
2. Svaki opit (bacanje) ima samo dva moguća ishoda: glava i pismo.
3. Vjerovatnoća dobijanja glave (uspjeh) je ½ i vjerovatnoća pisma (neuspjeh) je ½ u bilo kom bacanju. Tako je,

$$p = P(H) = ½ \quad \text{i} \quad q = P(T) = ½$$

4. Opiti (bacanja) su nezavisni.

Stoga, eksperiment koji se sastoji od 10 bacanja je binomni eksperiment.

Binomna raspodjela vjerovatnoće i binomna formula

U binomnom eksperimentu, vjerovatnoća tačno x uspjeha u n opita je data binomnom formulom

$$P(x) = {}_nC_x p^x q^{n-x}$$

gdje je

n = ukupan broj opita
p = vjerovatnoća uspjeha
$q = 1 - p$ = vjerovatnoća neuspjeha
x = broj uspjeha u n opita
$n - x$ = broj neuspjeha u n opita

Vjerovatnoća uspjeha i oblik binomne raspodjele

1. Binomna raspodjela vjerovatnoća je simetrična ako je p =0.50.

2. Binomna raspodjela vjerovatnoća je asimetrična udesno ako je p manje od 0.50.

3. Binomna raspodjela vjerovatnoća je asimetrična ulijevo ako je p veće od 0.50.

Aritmetička sredina i standardna devijacija binomne raspodjele

Aritmetička sredina i ***standardna devijacija binomne raspodjele*** su, respektivno,

$$\mu = np \quad i \quad \sigma = \sqrt{npq}$$

gdje je n ukupan broj opita, p je vjerovatnoća uspjeha, a q je vjerovatnoća neuspjeha.

5.5 HIPERGEOMETRIJSKA RASPODJELA VJEROVATNOĆE

Neka je

N = ukupan broj elemenata u osnovnom skupu

r = broj uspjeha u osnovnom skupu

$N - r$ = broj neuspjeha u osnovnom skupu

n = broj opita (veličina uzorka)

x = broj uspjeha u n opita

$n - x$ = broj neuspjeha u n opita

HIPERGEOMETRIJSKA RASPODJELA VJEROVATNOĆA

Vjerovatnoća x uspjeha u n opita je data sa

$$P(x) = \frac{{}_{r}C_{x}\;{}_{N-r}C_{n-x}}{{}_{N}C_{n}}$$

5.6 POASONOVA RASPODJELA VJEROVATNOĆA

- Korišćenje Tablice Poasonovih vjerovatnoća
- Aritmetička sredina i standardna devijacija Poasonove raspodjele vjerovatnoća

POASONOVA RASPODJELA VJEROVATNOĆA

Uslovi za primjenu Poasonove raspodjele vjerovatnoća

Sledeća tri uslova moraju biti zadovoljena da bi se primijenila Poasonova raspodjela vjerovatnoća.

1. x je diskretna slučajna promjenljiva.
2. Realizacije su slučajne.
3. Realizacije su nezavisne.

Primjeri Poasonove raspodjele vjerovatnoća

1. Broj nesreća koje se dese na datom autoputu tokom perioda od jedne sedmice.

2. Broj mušterija koje uđu u jednu prodavnicu tokom intervala od jednog sata.

3. Broj televizijskih aparata prodatih u jednoj robnoj kući tokom određene sedmice.

POASONOVA RASPODJELA VJEROVATNOĆA

Formula za Poasonovu raspodjelu vjerovatnoća

Na osnovu ***Poasonove raspodjele vjerovatnoća***, vjerovatnoća x realizacija u nekom intervalu je

$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

gdje je λ (izgovara se *lambda*) aritmetička sredina broja realizacija u tom intervalu, a vrijednost e je približno 2.71828.

Aritmetička sredina i standardna devijacija Poasonove raspodjele vjerovatnoća

$$\mu = \lambda$$

$$\sigma^2 = \lambda$$

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$