

# PRESJEK DOGAĐAJA I PRAVILO MNOŽENJA VJEROVATNOĆA

---

## Izračunavanje uslovne vjerovatnoće

Ako su  $A$  i  $B$  dva događaja, onda je,

$$P(B|A) = \frac{P(A \text{ i } B)}{P(A)} \text{ i } P(A|B) = \frac{P(A \text{ i } B)}{P(B)}$$

Pod uslovom da je  $P(A) \neq 0$  i  $P(B) \neq 0$ .

## Primjer 4-13

---

Vjerovatnoća da je slučajno odabrani student jednog koledža sa završne godine je 0.20, a zajednička vjerovatnoća da je to student informatike i da je sa završne godine je 0.03. Odrediti uslovnu vjerovatnoću da je slučajno izabran student informatike pod uslovom da je sa završne godine.

## Primjer 4-13: Rješenje

---

Definišimo sledeća dva događaja:

- $A$  = izabrani student je sa završne godine
- $B$  = izabrani student je student informatike

Na osnovu datih informacija,

$$P(A) = 0.20 \text{ i } P(A \text{ i } B) = 0.03$$

Otuda je,

$$P(B | A) = P(A \text{ i } B) / P(A) = 0.03 / 0.20 = 0.15$$

# POGLAVLJE 5

---

## **DISKRETNE SLUČAJNE PROMJENLJIVE I NJIHOVE RASPODJELE VJEROVATNOĆA**

## 5.1 SLUČAJNE PROMJENLJIVE

---

- Diskretne slučajne promjenjive
- Neprekidne slučajne promjenjive

Tabela 5.1 Raspodjela frekvencija i relativnih frekvencija broja vozila koja posjeduju porodice

---

Broj posjedovanih vozila	Frekvencija	Relativna frekvencija
0	30	$30/2000=0.015$
1	470	$470/2000=0.235$
2	850	$850/2000=0.425$
3	490	$490/2000=0.245$
4	160	$160/2000=0.080$
	$N = 2000$	Ukupno = 1

---

# SLUČAJNE PROMJENLJIVE

---

## Definicija

**Slučajna promjenljiva** je promjenljiva čija je vrijednost određena ishodom slučajnog eksperimenta.

# Diskretna slučajna promjenjiva

---

## Definicija

Slučajna promjenljiva koja uzima prebrojivo mnogo vrijednosti se naziva **diskretna slučajna promjenljiva**.



## Primjeri diskretne slučajne promjenljive

---

1. Broj vozila koja se prodaju kod dilera u toku određenog mjeseca
2. Broj kuća u jednom bloku
3. Broj riba koja se ulovi tokom jednog ribolova
4. Broj žalbi koje stignu u kancelariju avio kompanije određenog dana
5. Broj klijenata koji posjete jednu banku u toku određenog sata
6. Broj pojavljivanja glave u tri bacanja novčića

# Neprekidna slučajna promjenljiva

---

## Definicija

Slučajna promjenljiva koja može da uzme bilo koju vrijednost iz jednog ili više intervala naziva se **neprekidna slučajna promjenljiva**.

# Neprekidna slučajna promjenljiva

---



Svaka tačka na ovoj liniji predstavlja moguću vrijednost za  $X$  koje označava vijek trajanja baterije. Na ovoj liniji postoji beskonačan broj tačaka. Skup vrijednosti predstavljen tačkama na ovoj liniji je neprebrojiv.

## Primjeri neprekidne slučajne promjenljive

---

1. Visina neke osobe
2. Vrijeme potrebno za izradu testa
3. Količina mlijeka u jednom galonu (obratite pažnju na to da ne očekujemo da jedan galon sadrži tačno jedan galon mlijeka, već ili malo manje ili malo više od toga)
4. Težina ribe
5. Cijena kuće

## 5.2 RASPODJELA VJEROVATNOĆA DISKRETNE SLUČAJNE PROMJENLJIVE

---

Definicija

**Raspodjela vjerovatnoća diskretne slučajne promjenljive** prikazuje listu svih mogućih vrijednosti koje slučajna promjenljiva može da uzme i njihovih odgovarajućih vjerovatnoća.

## Primjer 5-1

---

Podsjetimo se Tabele 5.1 u kojoj su date raspodjele frekvencija i relativnih frekvencija broja vozila koja posjeduju porodice. Ta tabela je ponovo prikazana kao Tabela 5.2. Neka je  $x$  broj vozila koja posjeduje slučajno izabrana porodica. Napisati raspodjelu vjerovatnoća za  $x$ .

## Tabela 5.2 Raspodjela frekvencija i relativnih frekvencija broja vozila koja posjeduju porodice

---

Broj posjedovanih vozila	Frekvencija	Relativna frekvencija
0	30	0.015
1	470	0.235
2	850	0.425
3	490	0.245
4	160	0.080
	$N = 2000$	Ukupno = 1

## Primjer 5-1: Rješenje

---

**Tabela 5.3** Raspodjela vjerovatnoća broja vozila koja posjeduju porodice

Broj posjedovanih vozila	Vjerovatnoća
$x$	$P(x)$
0	0.015
1	0.235
2	0.425
3	0.245
4	0.080
	$\sum P(x) = 1$



## Dvije karakteristike raspodjele vjerovatnoća

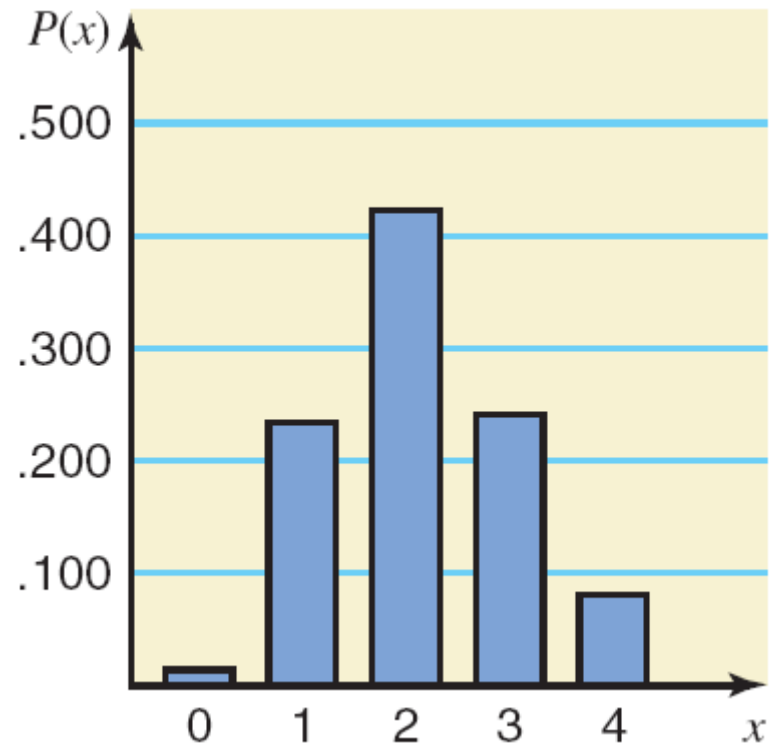
---

Raspodjela vjerovatnoća diskretne slučajne promjenljive ima sledeće dvije karakteristike.

1.  $0 \leq P(x) \leq 1$  za svaku vrijednost  $x$
2.  $\sum P(x) = 1$ .

# Slika 5.1 Grafički prikaz raspodjele vjerovatnoća iz Tabele 5.3.

---



## Primjer 5-2

---

Svaka od sledećih tabela prikazuje određene vrijednosti  $x$  i njihove vjerovatnoće. Utvrditi da li svaka tabela prikazuje validnu raspodjelu vjerovatnoća ili ne.

(a)

$x$	$P(x)$
0	.08
1	.11
2	.39
3	.27

(b)

$x$	$P(x)$
2	.25
3	.34
4	.28
5	.13

(c)

$x$	$P(x)$
7	.70
8	.50
9	-.20

## Primjer 5-2: Rješenje

---

- (a) Ne, jer suma svih vjerovatnoća nije jednaka 1.0.
- (b) Da.
- (c) Ne, jer je jedna od vjerovatnoća negativna.

## Primjer 5-3

---

Sledeća tabela prikazuje raspodjelu vjerovatnoća broja kvarova jedne mašine nedjeljno, zasnovano na podacima iz prošlosti.

Kvarovi nedjeljno	0	1	2	3
Vjerovatnoća	0.15	0.20	0.35	0.30

## Primjer 5-3

---

- (a) Prikazati grafički ovu raspodjelu vjerovatnoća.
- (b) Odrediti vjerovatnoću da je broj kvarova za ovu mašinu tokom određene nedjelje
- i. tačno 2
  - ii. od 0 do 2
  - iii. više od 1
  - iv. najviše 1

## Primjer 5-3: Rješenje

---

Neka  $x$  broj kvarova ove mašine tokom određene nedjelje.  
Tabela 5.4 prikazuje raspodjelu vjerovatnoća za  $x$ .

## Tabela 5.4 Raspodjela vjerovatnoća za broj kvarova

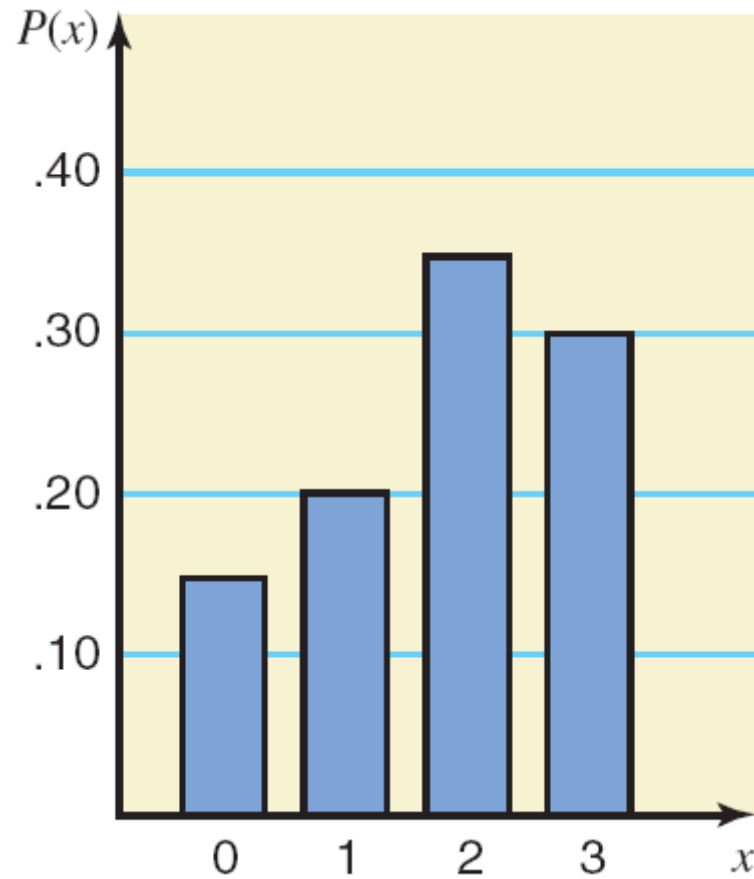
---

$x$	$P(x)$
0	.15
1	.20
2	.35
3	.30
$\Sigma P(x) = 1.00$	



## Slika 5.2 Grafički prikaz raspodjele vjerovatnoća iz Tabele 5.4.

---



## Primjer 5-3: Rješenje

---

(b) Koristeći Tabelu 5.4,

i.  $P(\text{tačno 2 kvara}) = P(x = 2) = \mathbf{0.35}$

ii.  $P(\text{od 0 do 2 kvara}) = P(0 \leq x \leq 2)$   
 $= P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2)$   
 $= 0.15 + 0.20 + 0.35 = \mathbf{0.70}$

iii.  $P(\text{više od 1 kvara}) = P(x > 1)$   
 $= P(x = 2) + P(x = 3)$   
 $= 0.35 + 0.30 = \mathbf{0.65}$

iv.  $P(\text{najviše jedan kvar}) = P(x \leq 1)$   
 $= P(x = 0) + P(x = 1)$   
 $= 0.15 + 0.20 = \mathbf{0.35}$

## 5.3 OČEKIVANA VRIJEDNOST I STANDARDNA DEVIJACIJA DISKRETNE SLUČAJNE PROMJENLJIVE

---

***Očekivana vrijednost diskretne slučajne promjenljive***  $x$  je vrijednost koju očekujemo da se javi u prosjeku, prilikom izvođenja eksperimenta veliki broj puta. Označava se sa  $E(x)$  i izračunava se kao

$$E(x) = \sum x P(x)$$

Očekivana vrijednost diskretne slučajne promjenljive  $x$  predstavlja njenu prosječnu vrijednost i takođe se označava sa  $\mu$ ; odnosno,

$$\mu = \sum x P(x)$$

## Primjer 5-5

---

Podsjetimo se primjera 5-3 iz odjeljka 5.2. Raspodjela vjerovatnoća u Tabeli 5.4 iz tog primjera je ponovljena ovdje. U ovoj tabeli,  $x$  predstavlja broj kvarova mašine tokom određene nedjelje, a  $P(x)$  je vjerovatnoća odgovarajuće vrijednosti  $x$ .

## Primjer 5-5

---

$x$	$P(x)$
0	.15
1	.20
2	.35
3	.30

Odrediti aritmetičku sredinu broja kvarova ove mašine tokom nedjelje.

## Primjer 5-5: Rješenje

Tabela 5.6 Izračunavanje aritmetičke sredine raspodjele vjerovatnoća broja kvarova

---

$x$	$P(x)$	$xP(x)$
0	.15	$0(.15) = .00$
1	.20	$1(.20) = .20$
2	.35	$2(.35) = .70$
3	.30	$3(.30) = .90$
		$\Sigma xP(x) = 1.80$

Aritmetička sredina je  $\mu = \Sigma x P(x) = 1.80$

# OČEKIVANA VRIJEDNOST I STANDARDNA DEVIJACIJA DISKRETNE SLUČAJNE PROMJENLJIVE

---

**Standardna devijacija diskretne slučajne promjenljive**  $x$  mjeri raspršenost njene raspodjele vjerovatnoća i izračunava se kao

$$\sigma = \sqrt{\sum x^2 P(x) - \mu^2}$$

## Primjer 5-6

---

Baier's Electronics proizvodi djelove za kompjutere kojima se snabdijevaju mnoga preduzeća. Uprkos činjenici da dva inspektora kontrole kvaliteta u Baier's Electronics provjeravaju svaki dio da li je defektan prije nego što se isporuči drugom preduzeću, nekoliko neispravnih djelova prođu ova ispitivanja, a da se ne otkriju. Neka  $x$  označava broj neispravnih djelova za kompjuter u isporuci od 400 komada. Sledeća tabela prikazuje raspodjelu vjerovatnoća za  $x$ .



## Primjer 5-6

---

$x$	0	1	2	3	4	5
$P(x)$	.02	.20	.30	.30	.10	.08

Izračunati standardnu devijaciju od  $x$ .

## Primjer 5-6: Rješenje

Tabela 5.7 Izračunavanja za određivanje standardne devijacije

---

$x$	$P(x)$	$xP(x)$	$x^2$	$x^2P(x)$
0	.02	.00	0	.00
1	.20	.20	1	.20
2	.30	.60	4	1.20
3	.30	.90	9	2.70
4	.10	.40	16	1.60
5	.08	.40	25	2.00

---

$\Sigma xP(x) = 2.50$   $\Sigma x^2P(x) = 7.70$

---

## Primjer 5-6: Rješenje

---

$$\mu = \sum xP(x) = 2.50 \text{ neispravnih dijelova za kompjuter u 400 komada}$$

$$\sum x^2P(x) = 7.70$$

$$\sigma = \sqrt{\sum x^2P(x) - \mu^2} = \sqrt{7.70 - (2.50)^2} = \sqrt{1.45}$$

$= 1.204$  neispravnih dijelova za kompjuter

## 5.4 BINOMNA RASPODJELA VJEROVATNOĆE

---

- Binomni eksperiment
- Binomna raspodjela vjerovatnoće i binomna formula
- Korišćenje tablice binomnih vjerovatnoća
- Vjerovatnoća uspjeha i oblik binomne raspodjele
- Aritmetička sredina i standardna devijacija binomne raspodjele

# Binomni eksperiment

---

## Uslovi binomnog eksperimenta

Binomni eksperiment mora da ispuni sledeća četiri uslova.

1. Postoji  $n$  identičnih opita.
2. Svaki opit ima samo dva moguća ishoda.
3. Vjerovanoće ta dva ishoda ostaju konstantne.
4. Opiti su nezavisni.

## Primjer 5-8

---

Razmotrimo eksperiment koji se sastoji od 10 bacanja novčića. Odrediti da li je to binomni eksperiment ili ne.

## Primjer 5-8: Rješenje

---

1. Ima ukupno 10 opita (bacanja), i svi su identični. Ovdje je  $n=10$ .
2. Svaki opit (bacanje) ima samo dva moguća ishoda: glava i pismo.
3. Vjerovatnoća dobijanja glave (uspjeh) je  $\frac{1}{2}$  i vjerovatnoća pisma (neuspjeh) je  $\frac{1}{2}$  u bilo kom bacanju. Tako je,  
$$p = P(H) = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad q = P(T) = \frac{1}{2}$$
4. Opiti (bacanja) su nezavisni.

Stoga, eksperiment koji se sastoji od 10 bacanja je binomni eksperiment.

## Binomna raspodjela vjerovatnoće i binomna formula

---

U binomnom eksperimentu, vjerovatnoća tačno  $x$  uspjeha u  $n$  opita je data binomnom formulom

$$P(x) = {}_n C_x p^x q^{n-x}$$

gdje je

$n$  = ukupan broj opita

$p$  = vjerovatnoća uspjeha

$q = 1 - p$  = vjerovatnoća neuspjeha

$x$  = broj uspjeha u  $n$  opita

$n - x$  = broj neuspjeha u  $n$  opita



## Vjerovatnoća uspjeha i oblik binomne raspodjele

---

1. Binomna raspodjela vjerovatnoća je simetrična ako je  $p = 0.50$ .
2. Binomna raspodjela vjerovatnoća je asimetrična udesno ako je  $p$  manje od 0.50.
3. Binomna raspodjela vjerovatnoća je asimetrična ulijevo ako je  $p$  veće od 0.50.

# Aritmetička sredina i standardna devijacija binomne raspodjele

---

**Aritmetička sredina** i **standardna devijacija binomne raspodjele** su, respektivno,

$$\mu = np \quad i \quad \sigma = \sqrt{npq}$$

gdje je  $n$  ukupan broj opita,  $p$  je vjerovatnoća uspjeha, a  $q$  je vjerovatnoća neuspjeha.

## 5.5 HIPERGEOMETRIJSKA RASPODJELA VJEROVATNOĆE

---

Neka je

$N$  = ukupan broj elemenata u osnovnom skupu

$r$  = broj uspjeha u osnovnom skupu

$N - r$  = broj neuspjeha u osnovnom skupu

$n$  = broj opita (veličina uzorka)

$x$  = broj uspjeha u  $n$  opita

$n - x$  = broj neuspjeha u  $n$  opita

# HiPERGEOMETRIJSKA RASPODJELA VJEROVATNOĆA

---

Vjerovatnoća  $x$  uspjeha u  $n$  opita je data sa

$$P(x) = \frac{{}_r C_x {}_{N-r} C_{n-x}}{{}_N C_n}$$

## 5.6 POASONOVA RASPODJELA VJEROVATNOĆA

---

- Korišćenje Tablice Poasonovih vjerovatnoća
- Aritmetička sredina i standardna devijacija Poasonove raspodjele vjerovatnoća

# POASONOVA RASPODJELA VJEROVATNOĆA

---

## Uslovi za primjenu Poasonove raspodjele vjerovatnoća

Sledeća tri uslova moraju biti zadovoljena da bi se primijenila Poasonova raspodjela vjerovatnoća.

1.  $x$  je diskretna slučajna promjenljiva.
2. Realizacije su slučajne.
3. Realizacije su nezavisne.

## Primjeri Poasonove raspodjele vjerovatnoća

---

1. Broj nesreća koje se dese na datom autoputu tokom perioda od jedne sedmice.
2. Broj mušterija koje uđu u jednu prodavnicu tokom intervala od jednog sata.
3. Broj televizijskih aparata prodatih u jednoj robnoj kući tokom određene sedmice.

# POASONOVA RASPODJELA VJEROVATNOĆA

---

## Formula za Poasonovu raspodjelu vjerovatnoća

Na osnovu Poasonove raspodjele vjerovatnoća, vjerovatnoća  $x$  realizacija u nekom intervalu je

$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

gdje je  $\lambda$  (izgovara se *lambda*) aritmetička sredina broja realizacija u tom intervalu, a vrijednost  $e$  je približno 2.71828.



## Aritmetička sredina i standardna devijacija Poasonove raspodjele vjerovatnoća

---

$$\mu = \lambda$$

$$\sigma^2 = \lambda$$

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

# POGLAVLJE 6



## **NEPREKIDNE SLUČAJNE PROMJENLJIVE I NORMALNA RASPODJELA**

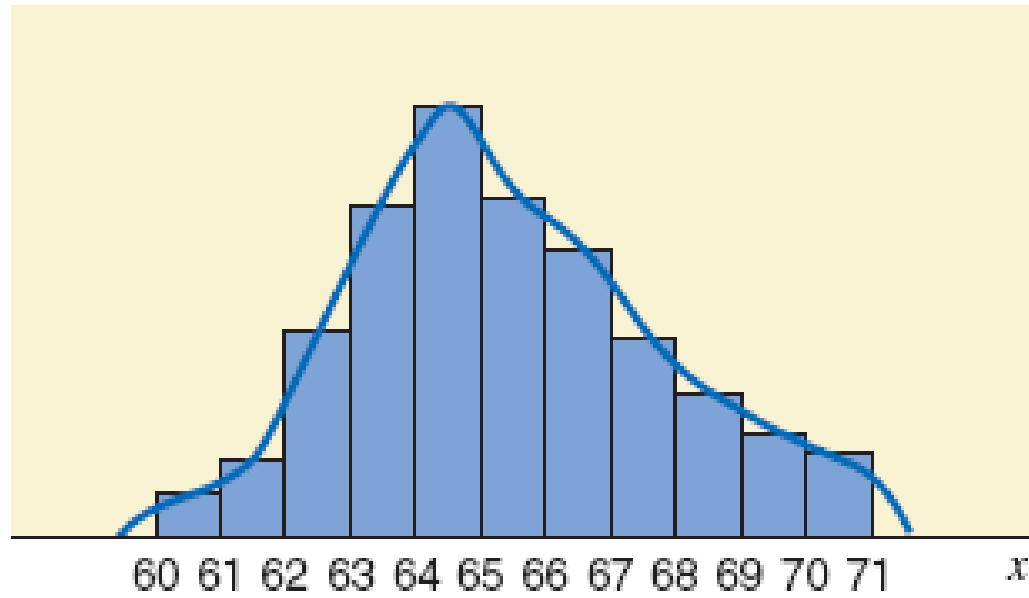
# 6.1 NEPREKIDNA RASPODJELA VJEROVATNOĆA

---

Visina studentkinja (u inčima)		Relativna frekvencija
$x$	$f$	
60 do 61	90	0.018
61 do 62	170	0.034
62 do 63	460	0.092
63 do 64	750	0.150
64 do 65	970	0.194
65 do 66	760	0.152
66 do 67	640	0.128
67 do 68	440	0.088
68 do 69	320	0.064
69 do 70	220	0.044
70 do 71	180	0.036
	$N=5000$	Zbir = 1

# Slika 6.2 Glatki poligon raspodjele vjerovatnoća za visine.

---



# NEPREKIDNA RASPODJELA VJEROVATNOĆA

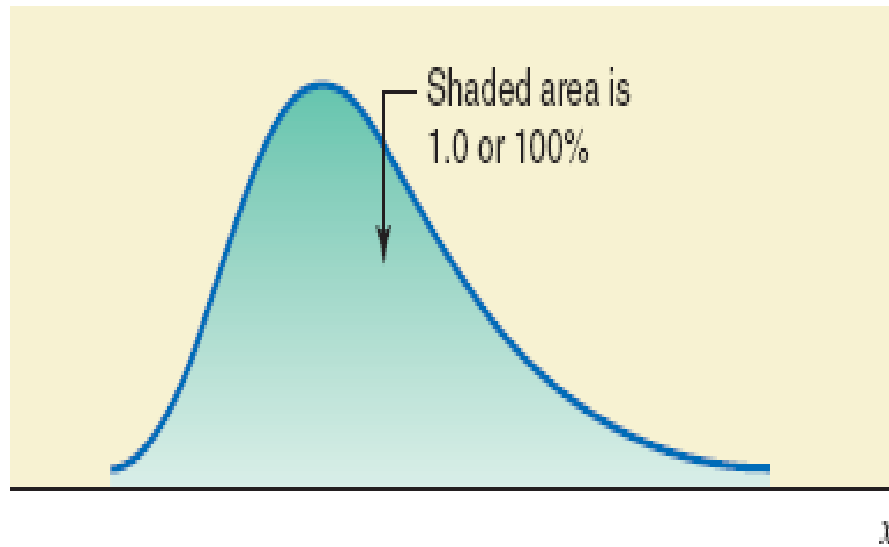
---

## Dvije karakteristike

1. Vjerovatnoća da  $x$  uzme vrijednost iz bilo kog intervala se nalazi u intervalu od 0 do 1
2. Ukupna vjerovatnoća svih (međusobno disjunktih) intervala u okviru kojih  $x$  može da uzme vrijednost je 1.0

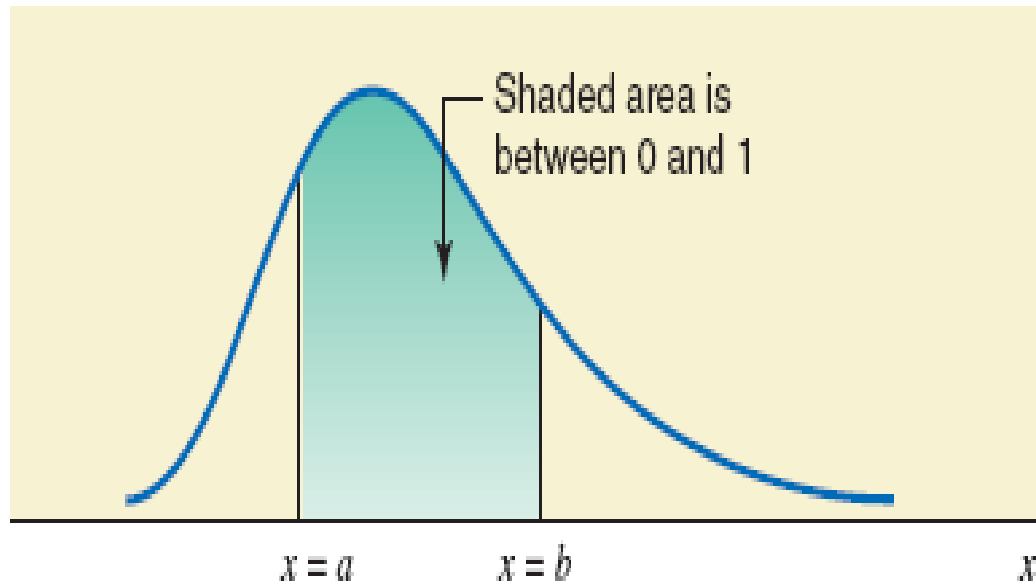
# Slika 6.4 Ukupna površina ispod krive raspodjele vjerovatnoća.

---



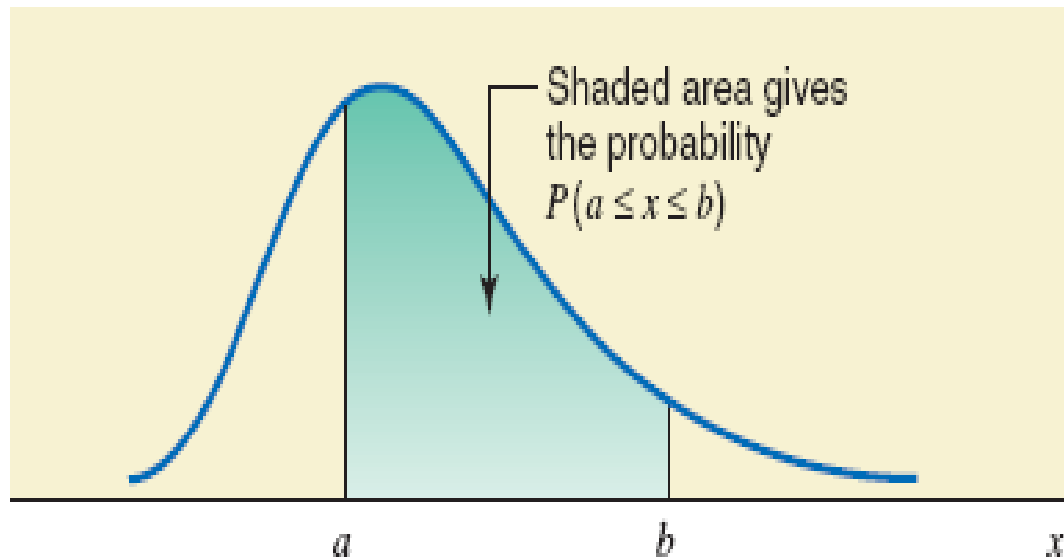
## Slika 6.3 Površina ispod krive između dvije tačke.

---



## Slika 6.5 Površina ispod krive kao vjerovatnoća.

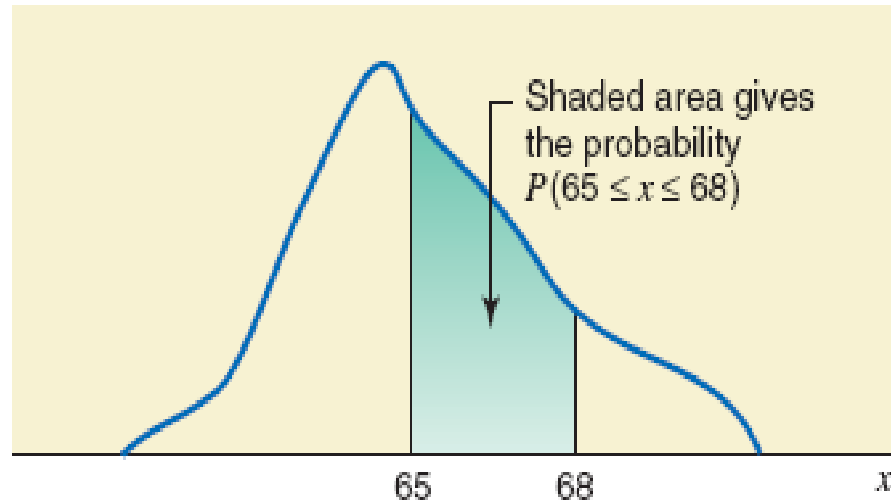
---





Slika 6.6 Vjerovatnoća da se  $x$  nađe u intervalu od 65 do 68.

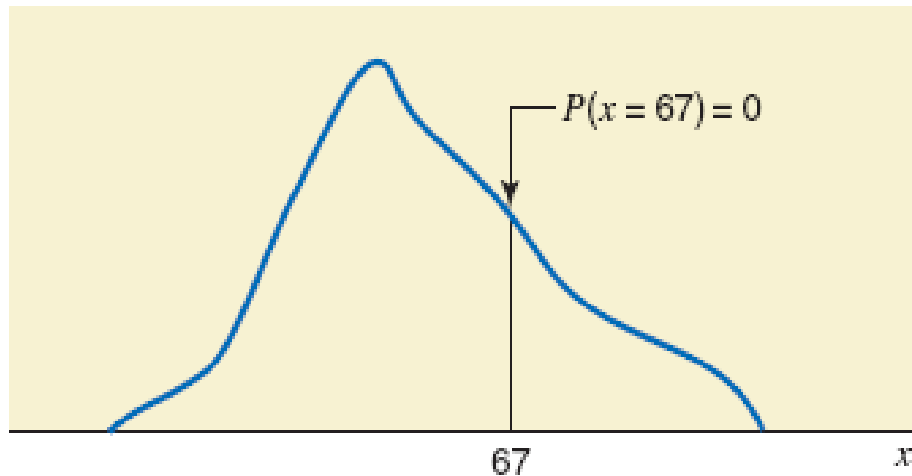
---



**Figure 6.6** Probability that  $x$  lies in the interval 65 to 68.

Slika 6.7 Vjerovatnoća da  $x$  uzme jednu vrijednost je nula.

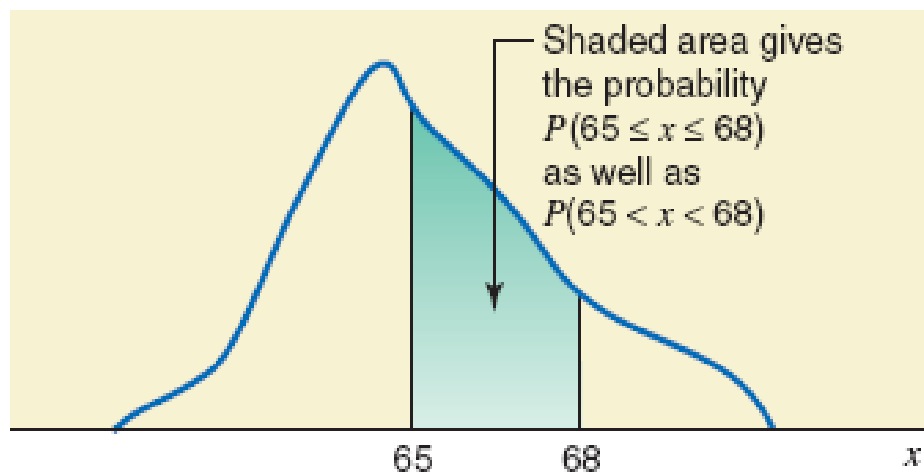
---



**Figure 6.7** The probability of a single value of  $x$  is zero.

Slika 6.8 Vjerovatnoća za “od 65 do 68” i “između 65 i 68”.

---



**Figure 6.8** Probability “from 65 to 68” and “between 65 and 68.”

## 6.2 NORMALNA RASPODJELA

---

Normalna raspodjela vjerovatnoća

**Normalna raspodjela vjerovatnoća,**

kada se grafički prikaže, daje krivu u obliku zvona takvu da:

1. Ukupna površina ispod krive je 1.0.
2. Kriva je simetrična u odnosu na aritmetičku sredinu.
3. Dva kraja krive se protežu u beskonačnost.

Slika 6.11 Normalna raspodjela sa aritmetičkom sredinom  $\mu$  i standardnom devijacijom  $\sigma$ .

---

